

**ОПД.Ф.02.03 ТЕОРИЯ МАШИН И МЕХАНИЗМОВ**  
**СИЛОВОЙ РАСЧЕТ ПЛОСКОГО**  
**РЫЧАЖНОГО МЕХАНИЗМА**

Методические указания к курсовому проектированию

В методических указаниях рассмотрен вопрос о силовом расчете плоского рычажного механизма. Методическое пособие предназначено для студентов механических специальностей, изучающих курс "Теория механизмов и машин".

## ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ СИЛОВОГО РАСЧЕТА РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Проектирование нового механизма всегда включает его силовое исследование, так как по найденным силам производится последующий расчет на прочность элементов кинематических пар и звеньев механизма. При силовом исследовании решаются следующие основные задачи:

а). Определяются силы, действующие на звенья, и реакции в кинематических парах.

б). Определяется уравновешивающая сила (момент силы).

При силовом анализе дополнительно выясняют вопросы об уравновешенности механизма, износе его звеньев, о потерях на трение в отдельных кинематических парах, о коэффициенте полезного действия механизма в целом и др.

В методических указаниях силовой расчет ведется методом кинетостатики [1-6]. В отличие от статического, кинетостатический расчет механизмов наряду с внешними силами (движущими силами, силами полезных и вредных сопротивлений, силами тяжести) учитывает и силы инерции масс звеньев.

Метод кинетостатики основан на принципе Даламбера, который применительно к механизмам можно сформулировать так: если ко всем внешним силам, действующим на систему звеньев, добавить силы инерции, тогда под действием всех этих сил система звеньев может условно считаться находящейся в равновесии.

При кинетостатическом расчете кинематическая цепь механизма разбивается на группы Ассура, которые являются статически определенными. Расчет ведется путем последовательного рассмотрения условий равновесия отдельно каждой группы, начиная с наиболее удаленной от исходного механизма (ведущего звена), последним рассчитывается ведущее звено.

При рассмотрении условий равновесия группы без учета силы трения составляющие реакции во внешней вращательной паре представляются направленными по звену (нормальная реакция) и перпендикулярно звену (тангенциальная реакция) и приложены они в центре шарнира, во вращательной паре подлежат определению величины и направления нормальной и тангенциальной реакций.

В поступательной паре, в общем случае, подлежат определению величина и точка приложения реакции, так как известно только то, что направление реакций всегда перпендикулярно оси направляющих пары.

Анализ свойств механизма можно получить путем исследования каждой группы Ассура через 10 градусов (20 градусов или 30 градусов) угла поворота кривошипа. В этом случае выявляется полная картина силового нагружения всех подвижных соединений механизма и звеньев за цикл движения машины.

В типовом курсовом проекте рассчитывается одно положение механизма, при этом для уменьшения трудоемкости расчетов рекомендуется применять вычислительную технику.

## **СОДЕРЖАНИЕ ГРАФИЧЕСКОЙ ЧАСТИ (ЧЕРТЕЖЕЙ) И ПОЯСНИТЕЛЬНОЙ ЗАПИСКИ СИЛОВОГО РАСЧЕТА РЫЧАЖНОГО МЕХАНИЗМА**

При выполнении силового расчета целесообразно придерживаться следующей последовательности:

1. Определить внешние силы, действующие на механизм.
2. Определить инерционные нагрузки на звенья механизма методом теоретической механики.
3. Определить реакции в кинематических парах групп Ассура методом плана сил заданного положения механизма.
4. Выполнить расчет ведущего звена механизма.
5. Содержание графической части.

Для каждой группы Ассура и исходного механизма необходимо:

- а). Зарисовать картину силового нагружения, определив инерционные нагрузки методом теоретической механики.
- б). Записать векторные уравнения, построив планы сил. Каждый план снабжается соответствующей надписью, масштабом и порядковым номером, указывающим положение механизма, для которого этот план построен.
- б). Определить уравновешивающую силу (момент силы) с помощью рычага Н.Е. Жуковского.
- 7). Пояснительная записка к силовому расчету должна содержать:
  - а). Введение, в котором формулируется задача силового расчета, указываются и определяются необходимые исходные данные.
  - б). Описание методики определения инерционных нагрузок на звенья (расчет сил и моментов сил инерции)
  - в). Изложения последовательности расчета реакций в кинематических парах методом планов (векторные уравнения равновесия сил, формулы для расчета и расчет тангенциальных реакций).
  - г). Изложение методики расчета уравновешивающей силы.

- д). Схемы силового нагружения групп Ассура и исходного механизма.
- е). Планы сил для них.
- ж). Схемы рычага Н.Е. Жуковского и расчет уравновешивающей силы (момента силы).
- з). Анализ результатов силового расчета.

### РАСЧЕТ ДВИЖУЩИХ СИЛ

Для двигателей внутреннего сгорания действующие на поршни силы давления газов задаются в виде индикаторной диаграммы, которая представляет собой зависимость изменения давления газов в цилиндре от положения поршня (от его перемещения).

Для каждого положения механизма, начиная с его начального (при этом за начальное положение следует принять крайнее, например, верхнее положение одного из поршней, выбранного в качестве основного, соответствующее началу сгорания рабочей смеси), определить по индикаторной диаграмме значения давления газов в каждом цилиндре двигателя. Положение остальных поршней следует определить по схеме механизма в зависимости от положения основного поршня.

Найденное значение давления газов следует умножить на площадь поршня, т.е. определить силу  $P$ , действующую со стороны давления газов на поршень

$$P = p_u \frac{\pi d^2}{4} , \tag{1}$$

где  $p_u$  - избыточное индикаторное давление, измеренное от линии атмосферного давления до кривой изменения давления в цилиндре;

$d$  - диаметр цилиндра (поршня) двигателя,

Так как

$$p_u = p_i \mu_p , \tag{2}$$

где  $p_i$  - ордината индикаторной диаграммы, измеренная от линии атмосферного давления в цилиндре (рисунок 1),

$\mu_p$  - масштаб индикаторной диаграммы, то

$$P = p_i \mu_p \frac{\pi d^2}{4} . \tag{3}$$

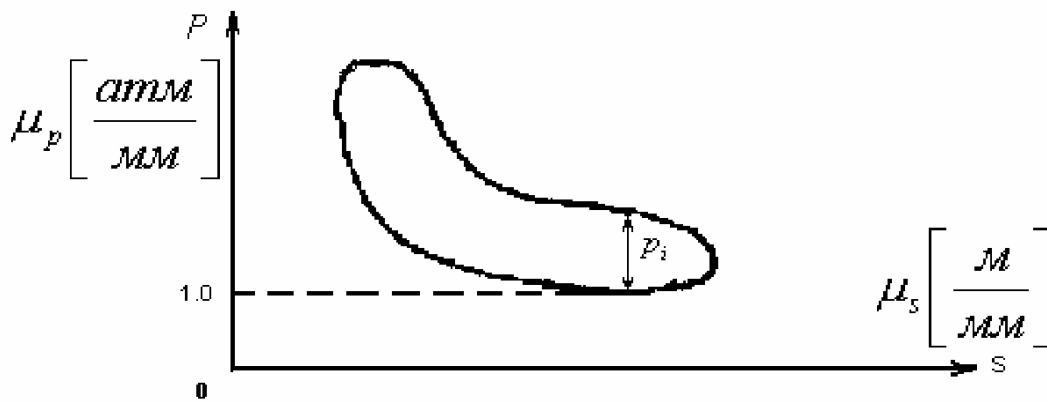


Рисунок 1 - Индикаторная диаграмма

В начале такта сжатия давление внутри цилиндра еще не превышает атмосферного, поэтому движущая сила там, а также при рабочем ходе направлена в сторону движения поршня (положительная), в других положениях эта сила будет направлена в сторону, противоположную движению поршня (отрицательная).

### УСЛОВИЯ СТАТИЧЕСКОЙ ОПРЕДЕЛИМОСТИ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

При решении задач кинестатики механизмов закон движения ведущего звена предполагается заданным, известны также массы и моменты инерции звеньев механизма. Таким образом, всегда можно определить те силы и моменты инерции, которые необходимы для решения динамических задач силового расчета методами обычной статики.

Кинестатический расчет механизмов начнем с рассмотрения вопроса об определении реакций в кинематических парах. Когда при расчете в число заданных сил не входят силы инерции звеньев, то расчёт называется статическим. Если в расчете используются силы инерции звеньев, то расчет называется кинестатическим. В первом приближении будем вести расчёт без учёта сил трения. Посмотрим, как будут направлены реакции в различных кинематических парах плоских механизмов. Во вращательных кинематических парах 5 класса результирующая сила реакции  $R$  проходит через центр  $O$  шарнира (рисунок 2). Величина и направление этой реакции не известны. Число неизвестных - 2 (рисунок 2).

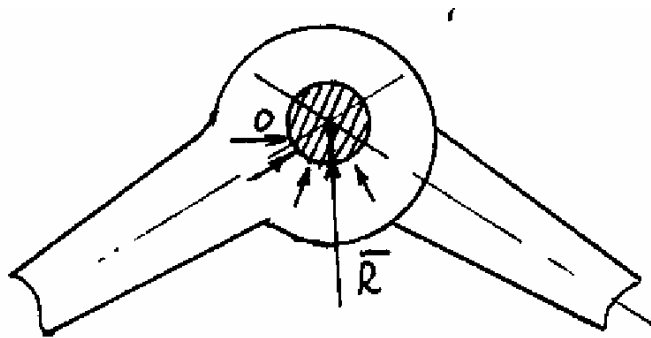


Рисунок 2 - Схема вращательной кинематической пары

В поступательной кинематической паре 5 класса реакция  $R$  перпендикулярна к оси движения  $X-X$  этой пары, т.е. она известна по направлению, но не известна по точке приложения и величине. Число неизвестных -2 (рисунок 3).

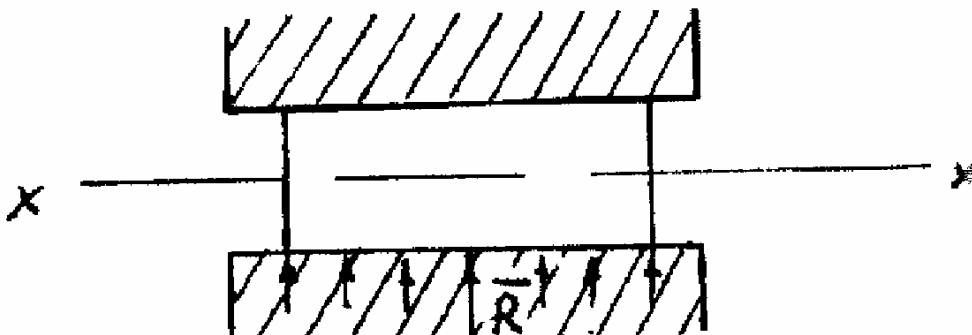


Рисунок 3 - Схема поступательной кинематической пары

В высшей кинематической паре 4 класса реакция  $R$  - приложена в точке  $C$  соприкосновения и направлена по общей нормали  $n-n$ , проведенной к соприкасающимся профилям в точке  $C$ . Известны направление и точка приложения. Число неизвестных - 1 (рисунок 4).

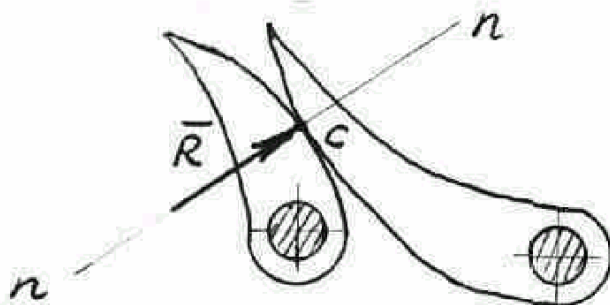


Рисунок 4 - Схема высшей кинематической пары

Обозначим  $n$  - число подвижных звеньев,  
 $R_5$  - число пар 5 класса,  
 $R_4$  - число пар 4 класса.

Для каждого звена, имеющего плоскопараллельное движение, можно написать уравнения равновесия, для  $n$  звеньев -  $3n$  уравнений. Число неизвестных для пар 5 класса -  $2P_5$  и для 4 класса -  $P_4$ . Следовательно, кинематическая цепь будет статически определима, если удовлетворяется условие:

$$3n=2P_5+P_4 \quad (9)$$

или

$$3n-2P_5-P_4=0 \quad (10)$$

Этому условию удовлетворяют структурные группы Ассур. Поэтому методику расчёта рассмотрим отдельно для структурных групп, предполагая, что все силы, действующие на плоские механизмы, расположены в одной плоскости, а не в параллельных плоскостях, как это имеет место в действительности.

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИЛ ИНЕРЦИИ ЗВЕНЬЕВ

Как известно из теоретической механики, в общем случае все силы инерции звена BC, совершающего плоскопараллельное движение и имеющего плоскость симметрии, параллельную плоскости движения, могут быть сведены к силе инерции  $P_u$ , приложенной в центре масс S звена, и к паре сил инерции, момент которой  $M_u$  ( рисунок 5 ).

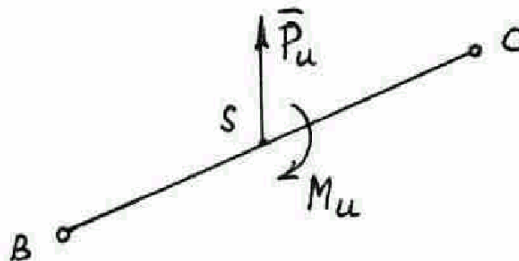


Рисунок 5 - Схема звена с приложенными к нему инерционными нагрузками

$$\bar{P}_u = -m_s \bar{a}_s, \quad (11)$$

где  $m_s$  - масса звена BC,

$a_s$  - вектор полного ускорения центра масс S звена.

$$m_s = \frac{G}{g} = \frac{G}{9.81}, \quad \text{где } G - \text{вес звена.}$$

С достаточной точностью можно положить  $m_s = 0.102G$ .

Вектор полного ускорения центра масс в механизмах удобнее всего определять построением плана ускорений, применяя известное из кинематики свойство подобия.

Сила инерции  $P_u$  направлена противоположно полному ускорению точки S и равна по модулю

$$P_u = m_s a_s.$$

Момент пары сил инерции может быть определен по формуле

$$M_u = J_s \varepsilon, \quad (12)$$

где  $J_s$  - момент инерции звена относительно оси, проходящей через его центр масс S,

$\varepsilon$  - угловое ускорение звена.

Общий момент инерции звена может быть определен по формуле

$$J_s = m \rho^2, \quad (13)$$

где  $\rho$  - радиус инерции.

Угловое ускорение находится по формуле

$$\varepsilon = \frac{a_{CB}^\tau}{l_{CB}}, \quad (14)$$

где  $a_{CB}^\tau$  - тангенциальное ускорение в относительном движении звена,

$l_{CB}$  - длина звена.

Момент пары сил инерции направлен в сторону, противоположную угловому ускорению.

Рассмотрим частные случаи движения звеньев механизма:

1). Если звено движется поступательно с некоторой переменной скоростью  $V$ , то его сила инерции  $\overline{P_u} = -m_s \overline{a_s}$ .

Так как  $\varepsilon = 0$ , то  $M_u = 0$ .

2). Если звено находится только во вращательном движении вокруг оси, проходящей через его центр масс S (рисунок 6), то ускорение  $a_s = 0$ , следовательно,  $P_u = 0$ .



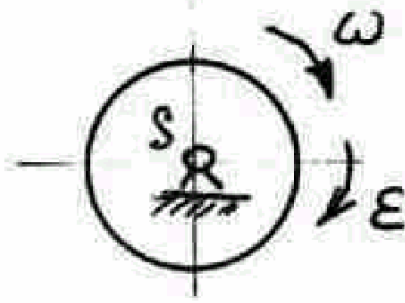


Рисунок 6 - Схема звена, центр масс которого находится на оси вращения

Если  $\varepsilon \neq 0$ , то  $M_u = J_s \varepsilon$ .

Это мы имеем для неравномерно вращающихся деталей (барабаны, роторы и т.д., центр масс которых находится на оси вращения);

3). При равномерном вращении этих деталей  $P_u$  и  $M_u$  равны нулю.

4). В случае вращательного движения звена BC вокруг некоторой оси, например оси B, не проходящей через центр масс S, его силы инерции могут быть сведены к приложенной в центре масс S силе  $P_u$ , направленной противоположно ускорению  $a_s$  и равной по величине

$$P_u = m_s a_s \text{ и паре сил } M_u = J_s \varepsilon.$$

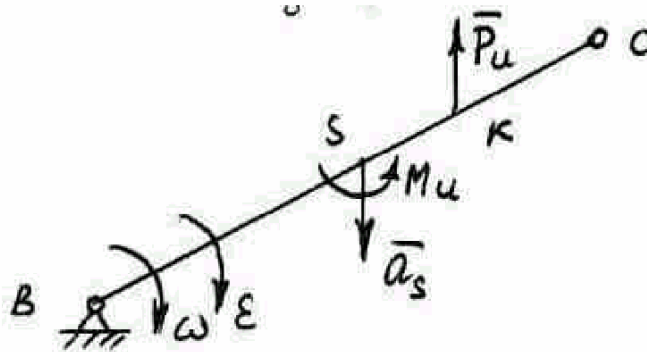


Рисунок 7 - Схема звена, вращающегося вокруг оси, не проходящей через центр масс

$P_u$  и  $M_u$  могут быть заменены одной результирующей силой  $P_u$  (рисунок 7), приложенной в центре качания K этого звена. Положение центра качания K определится по формуле

$$l_{BK} = l_{BS} + \frac{\rho^2}{l_{BS}} = l_{BS} + \frac{J_s}{m l_{BS}} \quad (15)$$

Приведение всех сил инерции к одной результирующей силе, приложенной в точке К, является весьма удобным при кинестатическом расчете механизмов. Так как  $\frac{\rho^2}{I_{BS}}$  всегда положительно, то точка

К всегда находится дальше от оси вращения звена, чем точка S. Точка К носит название центра качания, так как представляет собой точку, аналогичную одноименной точке физического маятника. В точке К, отстоящей на расстоянии  $I_{BK}$  от оси подвеса, может считаться сосредоточенной вся масса, и поэтому в этой точке может быть приложена результирующая сила инерции маятника.

5). Рассмотрим сложное движение звена. Нужно найти точку приложения или действия результирующей силы инерции звена ВС, находящегося в сложном движении, если закон распределения ускорений его точек задан планом ускорений.

Полное ускорение  $a_s$  центра тяжести S звена ВС равно

$$\begin{aligned} \overline{a_s} &= \mu_a (\overline{\pi s}) \\ \overline{a_s} &= \mu_a [(\overline{\pi b}) + (\overline{bs})] \quad (\text{рисунок 8б}) \\ \overline{P_u} &= [-m\mu_a (\overline{\pi b})] + [-m\mu_a (\overline{bs})] \end{aligned}$$

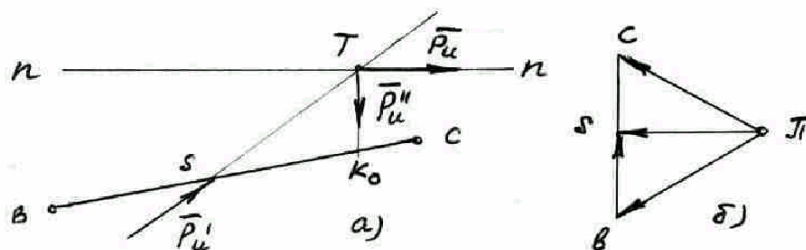


Рисунок 8 - Схема к определению положения точки Т результирующей силы инерции (а), план ускорений (б)

Первое слагаемое – сила инерции в переносном поступательном движении звена ВС с ускорением, равным  $a_b$ .

Второе слагаемое – сила инерции в относительном вращательном движении звена вокруг точки В.

Первая  $P'_u$  может быть приложена в точке S.

Вторая  $P''_u$  приложена в точке  $K_0$  в предположении, что звено подвешено в точке В.

Положение центра качания определяется по формуле

$$l_{BK_0} = l_{BS} + \frac{J_S}{ml_{BS}} \quad \text{или} \quad l_{BK_0} = \frac{J_B}{ml_{BS}}.$$

$P_u''$  направлена противоположно вектору

$$\overline{a_{SB}} = (bS)\mu_a \quad (\text{рисунок 8a}).$$

Полная сила инерции  $\overline{P_u} = \overline{P_u'} + \overline{P_u''}$ .

Так как  $\overline{P_u} = -m_S \overline{a_S}$ , поэтому нет необходимости отдельно определять  $P_u'$  и  $P_u''$ . Достаточно определить положение точки Т на звене ВС.

Для этого проводим через точку S прямую, параллельную вектору  $(\overline{\pi b})$  (рисунок 8) плана ускорений, а через точку  $K_0$  - прямую, параллельную вектору  $(\overline{bS})$  плана ускорений. Эти прямые - линии действия сил  $P_u'$  и  $P_u''$ . На пересечении этих линий находится точка Т.  $P_u$  приложена в этой точке, направлена в противоположную сторону  $\overline{a_S}$ . Положение точки Т можно определить исходя из следующих соображений. Через точку S на звене тонкой линией t-t проводим направление  $\overline{P_u} = -m_S \overline{a_S}$ .

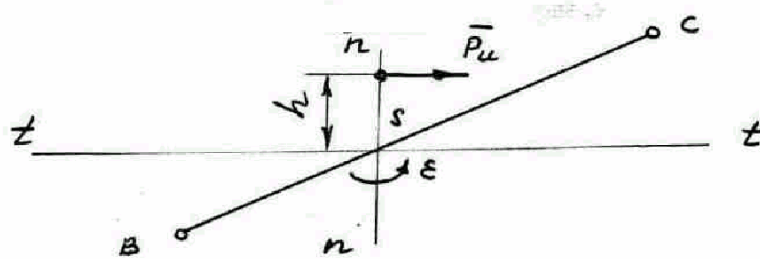


Рисунок 9 - Схема к определению положения точки Т результирующей силы инерции

Затем проводим перпендикуляр n-n к этому направлению через точку S. На этом перпендикуляре откладываем в масштабе величину

$$h = \frac{M_u}{P_u} = \frac{J_S \varepsilon}{P_u} \quad \text{так, чтобы сила } \overline{P_u}, \text{ приложенная к точке Т, создавала момент, направленный в обратную сторону } \varepsilon \text{ звена BC.}$$

## СИЛОВОЙ РАСЧЕТ СТРУКТУРНЫХ ГРУПП

Для определения реакций в кинематических парах надо предварительно разложить механизм на структурные группы. Каждая из групп вычерчивается отдельно в масштабе, и к ее звеньям прикладываются соответствующие силы.

Воздействие других звеньев механизма на звенья отсоединенной группы заменяют силами реакций, каждую из которых удобно разложить по направлению, т.е. каждую неизвестную реакцию, например  $\overline{R}_{12}$ , представить как сумму двух составляющих

$$\overline{R}_{12} = \overline{R}_{12}^n + \overline{R}_{12}^t .$$

Первая цифра индекса показывает номер действующего (давящего) звена, а вторая цифра - номер звена, на которое производится действие, например  $\overline{R}_{12}$  - давление первого звена на второе,  $\overline{R}_{42}$  - давление четвертого звена на второе,  $\overline{R}_{05}$  - давление стойки на пятое звено.

На указанных фигурах изображены составляющие реакций отсоединенных звеньев с соответствующими индексами.

Составляющие реакций со значком  $t$ , перпендикулярные к направлениям звеньев, определяются из уравнений моментов сил, составленных для отдельных звеньев, входящих в структурную группу, относительно среднего шарнира. Составляющие реакций со значками  $n$ , направленные вдоль звеньев, определяются построением векторного многоугольника: геометрическая сумма сил, действующих на рассматриваемую структурную группу, должна равняться нулю.

Силовой расчёт начинают с наиболее удаленной от структурного звена структурной группы.

Рассмотрим силовой расчёт структурной группы 2 класса 2 порядка с тремя вращательными парами (рисунок 10).

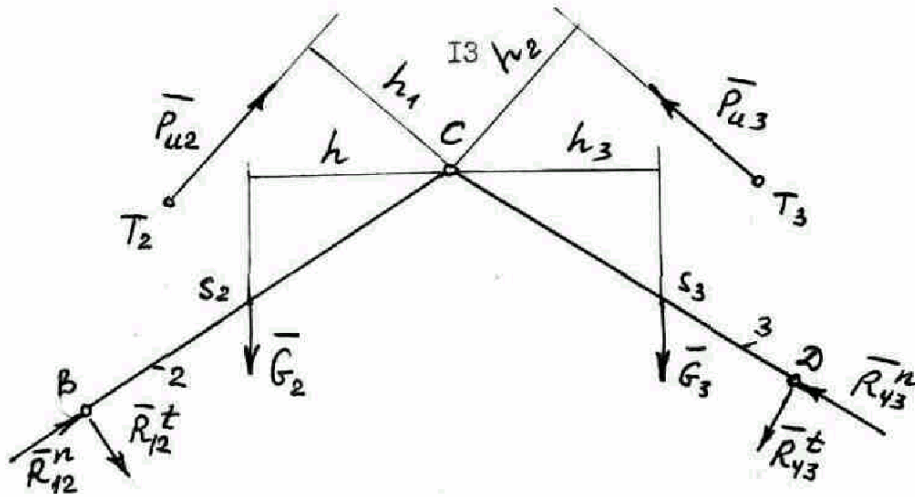


Рисунок 10 - Кинематическая схема структурной группы 2 класса 2 порядка с тремя вращательными парами с действующими на нее силами

Эту группу вычерчиваем в масштабе длины  $\mu_1$  с действующими на нее силами

а) веса  $G_2, G_3$ ,

б) инерции  $P_{u2}, P_{u3}$ .

В кинематических парах В и С показываем реакции, как показано на рисунке 10. Причем

$$\bar{R}_{12}^n + \bar{R}_{12}^t = \bar{R}_{12} \quad (16)$$

$$\bar{R}_{43}^n + \bar{R}_{43}^t = \bar{R}_{43}$$

Записываем условия равновесия сил, действующих на структурную группу

$$\bar{R}_{12}^n + \bar{R}_{12}^t + \bar{G}_2 + \bar{P}_{u2} + \bar{G}_3 + \bar{P}_{u3} + \bar{R}_{43}^t + \bar{R}_{43}^n = 0. \quad (17)$$

Определим тангенциальные составляющие реакции  $R_{12}^t$  и  $R_{43}^t$ , для чего рассматриваем равновесие звеньев 2 и 3, составляя уравнение моментов сил относительно точки С.

Для звена 2

$$\sum m_c(P) = R_{12}^t \cdot BC + G_2 \cdot h - P_{u2} \cdot h_1 = 0.$$

$$\text{Откуда } R_{12}^t = \frac{P_{u2} \cdot h_1 - G_2 \cdot h}{BC}. \quad (18)$$

Аналогично для звена 3

$$\sum m_c(P) = R_{43}^t \cdot CD + G_3 \cdot h_3 - P_{u3} \cdot h_2 = 0.$$

$$R_{43}^t = \frac{P_{u3} \cdot h_3 - G_3 \cdot h_3}{CD} \quad (19)$$

Значение плеч в (13) и (14) берутся непосредственно из чертежа. В уравнении (12) два неизвестных  $R_{12}^n$  и  $R_{43}^n$ , которые находим построением силового многоугольника. Выбираем масштаб сил  $\mu_p \frac{H}{мм}$  и строим силовой многоугольник (рисунок 11) согласно уравнению (17).

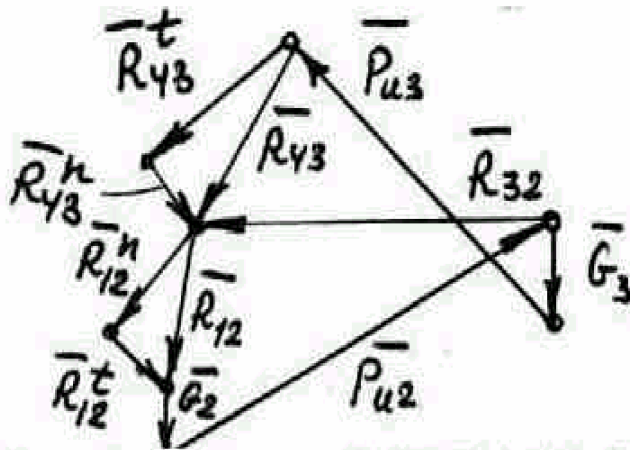


Рисунок 11 - План сил структурной группы для схемы на рисунке 10

Из силового многоугольника согласно (16) находим  $R_{12}$  и  $R_{43}$ .

Для определения реакций в паре С рассмотрим равновесие, например, звена 2. Имеем для него

$$\bar{R}_{12} + \bar{G}_2 + \bar{P}_{u2} + \bar{R}_{32} = 0. \quad (20)$$

Из чертежа (рисунок 11) находим реакцию  $R_{32}$ .

Очевидно, что

$$\bar{R}_{21} = -\bar{R} \quad ;$$

$$\bar{R}_{34} = -\bar{R} \quad ;$$

$$\bar{R}_{23} = -\bar{R}$$

Рассмотрим структурную группу 2 класса 2 порядка, когда пара D будет поступательной.

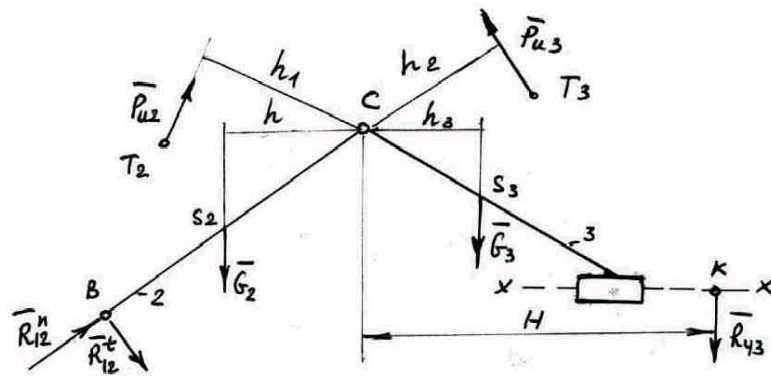


Рисунок 12 - Кинематическая схема структурной группы 2 порядка с двумя вращательными и одной поступательной парами и действующими на нее силами

Условие равновесия сил для этой группы имеет вид

$$\bar{R}_{12}^n + \bar{R}_{12}^t + \bar{G}_2 + \bar{P}_{u2} + \bar{G}_3 + \bar{P}_{u3} + \bar{R}_{43} = 0. \quad (21)$$

$R_{12}^t$  находим согласно (18). Выбираем масштаб сил  $\mu_p$  и строим силовой многоугольник (рисунок 13) согласно уравнения (21).

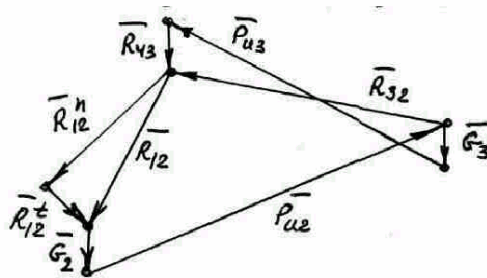


Рисунок 13 - Силовой многоугольник для структурной группы (рисунок 12)

Из этого силового многоугольника находим  $R_{43}$  и согласно выражения (20) реакцию в паре С -  $R_{32}$ . Для определения точки приложения К реакции  $R_{43}$  рассматриваем равновесие звена 3, составляя уравнение моментов сил относительно точки С.

$$\sum m_c(P) = G_3 \cdot h_3 + R_{43} \cdot H - P_{u3} \cdot h_2 = 0.$$

Откуда 
$$H = \frac{P_{u3} \cdot h_2 - G_3 \cdot h_3}{R_{43}}. \quad (22)$$

## СИЛОВОЙ РАСЧЕТ ВЕДУЩЕГО ЗВЕНА

При определении реакции в опоре ведущего звена (кривошипа) практически возможны два случая:

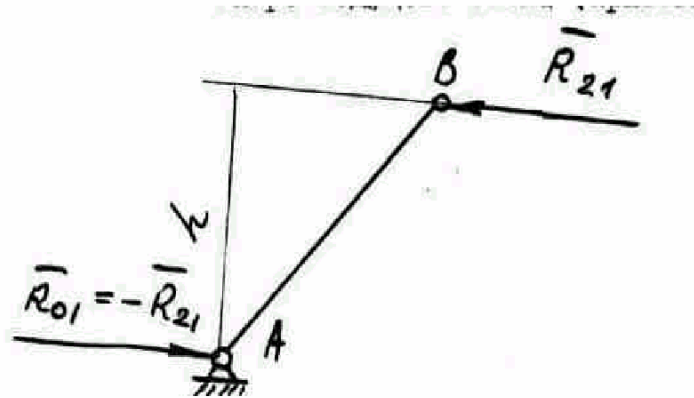


Рисунок 14 - Кинематическая схема с приложениями к ведущему звену силами

1). Кривошипный вал соединен с двигателем посредством муфты, в этом случае к валу приложен уравновешивающий момент  $M_y$  (рисунок 14)

$$M_y = R_{21} \cdot h , \quad (23)$$

а реакция в опоре вала будет равна действию второго звена кривошипа  $\bar{R}_{01} = -\bar{R}_{21}$ ;

2). Кривошипный вал соединен с двигателем посредством зубчатой передачи (рисунок 15а), в этом случае на звено 1 действует уравновешивающая сила со стороны сопряженного колеса под углом  $(90 - \alpha)$  к линии центров колес ( $\alpha$  - угол зацепления), величина уравновешивающей сил  $P_y$  определяется из равенства

$$P_y = R_{21} \frac{h_1}{h_2} , \quad (24)$$

а реакция  $\bar{R}_{01}$  - из векторного уравнения

$$\bar{R}_{21} + \bar{R}_{01} + \bar{P}_y = 0 , \quad (25)$$

в котором имеется один неизвестный вектор  $\bar{R}_{01}$ . Графическим решением этого уравнения является треугольник сил, показанный на рисунке 15б.



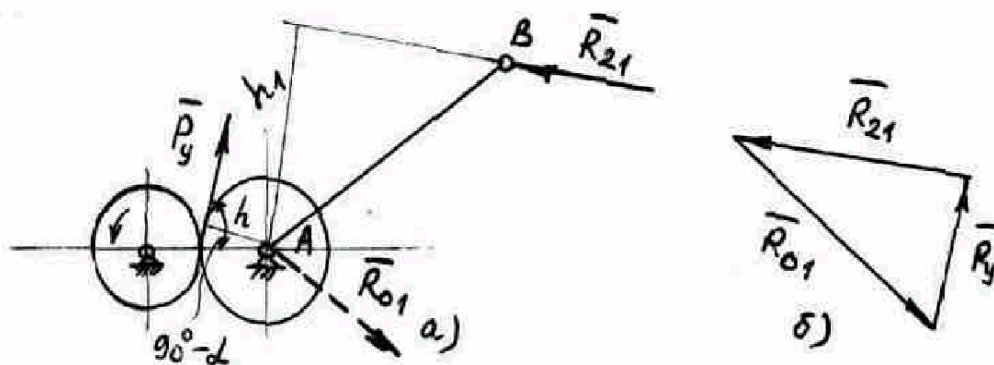


Рисунок 15 - Ведущее звено, соединенное с двигателем зубчатой передачей (а), план сил (б)

## ЛИТЕРАТУРА

1. Артоболовский И.И. Теория механизмов и машин. - М.: Наука, 1988,- 640 с.
2. Курсовое проектирование по теории механизмов и машин /Под. ред. А.С. Коренько. – М.: Машиностроение, 1964,- 324 с.
3. Левитская О.Н., Левитский Н.И. Курс теории механизмов и машин. - М.: Высшая школа, 1985,- 279 с.
4. Попов А.С. Курсовое проектирование по теории механизмов и машин. - М.: Высшая школа, 1986,- 295 с.
5. Теория механизмов и машин. Проектирование/Под. ред. О.И. Кульбачного. - М.: Высшая школа, 1970,- 288 с.
7. Теория механизмов и машин /Под ред. К.В. Фролова, -М.: Высшая школа, 1987, - 496 с.

## Содержание

1. Основные задачи и методы силового расчёта рычажных механизмов .....	3
2. Содержание графической части (чертежей) и пояснительной записки силового расчёта рычажного механизма	4
3. Расчёт движущих сил .....	5
4. Условия статической определимости кинематических цепей .....	6
5. Определение сил инерции звеньев .....	8
6. Силовой расчёт структурных групп .....	12
7. Силовой расчёт ведущего звена .....	15