

## **ОПД.Ф.02.03 ТЕОРИЯ МАШИН И МЕХАНИЗМОВ**

Учебное пособие для студентов очного обучения

Учебное пособие написано в соответствии с программой курса «Теория механизмов и машин», которая предусматривает изучение основ анализа и синтеза механизмов и машин студентами немашиностроительных специальностей. Материал, изложенный в пособии, является основой для освоения студентами последующих дисциплин «Детали машин» и «Расчеты и конструирование оборудования пищевых производств». В связи с тем, что в данном издании невозможно охватить все аспекты методов структурного, кинематического, динамического анализов, а также синтеза механизмов, особенно с учетом динамических условий, для более подробного изучения рассмотренных вопросов авторы рекомендуют обратиться к фундаментальному труду академика И.И. Артоболевского или другой литературе, приведенной в библиографическом списке.

## Введение

К числу основных дисциплин, тесно связанных с развитием машиностроения, относят науку, называемую «Теория механизмов и машин» (ТММ). ТММ есть наука, изучающая строение, кинематику и динамику механизмов и машин в связи с их анализом и синтезом. ТММ изучает конкретные кинематические и динамические свойства механизмов и является приложением законов механики к машиностроению.

В механике обычно рассматривают статику, кинематику и динамику как абсолютно жестких, так и упругих тел. При исследовании машин и механизмов, как правило, тела, образующие механизм, считают абсолютно жесткими, так как перемещения, возникающие от упругих деформаций тел, малы по отношению к перемещениям самих тел и точек.

Изучение ТММ обычно разбивают на два этапа: на первом рассматривают структурные особенности различного рода машин и механизмов и их кинематические характеристики; изучение этого вопроса ведут с чисто геометрических позиций, т.е. без учета сил, действующих в механизмах. С этих же позиций рассматривают вопросы синтеза или проектирования механизмов по заданным характеристикам. На втором этапе проводят динамический анализ с целью выявления сил и моментов, действующих на отдельные части механизмов, и выявляют взаимосвязи между движениями этих тел, силами, на них действующими, и массами, которыми обладают эти тела.

Освоение курса ТММ дает возможность выбрать или создать схему механизма, удовлетворяющего заданным условиям работы, установить его основные размеры, а

также определить законы его движения и силы, действующие на отдельные части механизма.

# **1. Основные понятия и определения, принятые в теории механизмов и машин**

## **1.1. Звено механизма**

Всякий механизм представляет собой систему тел, различным образом соединенных друг с другом и движущихся как единое целое. Каждое такое тело называют звеном. В зависимости от конструкции звено может быть простым или сложным. Звено, изготовленное из одноименного по марке и наименованию материала без применения сборочных операций, называют деталью. Сложное звено представляет собой группу деталей, соединенных между собой сборкой.

Каждая подвижная деталь или группа деталей, образующая одну жесткую подвижную систему тел, носит название подвижного звена механизма. Все неподвижные детали, образующие одну жесткую неподвижную систему тел, носят название неподвижного звена или стойки (станины, рамы и т.п.). В любом механизме мы имеем одно неподвижное звено и одно или несколько подвижных звеньев.

## **1.2. Кинематическая пара**

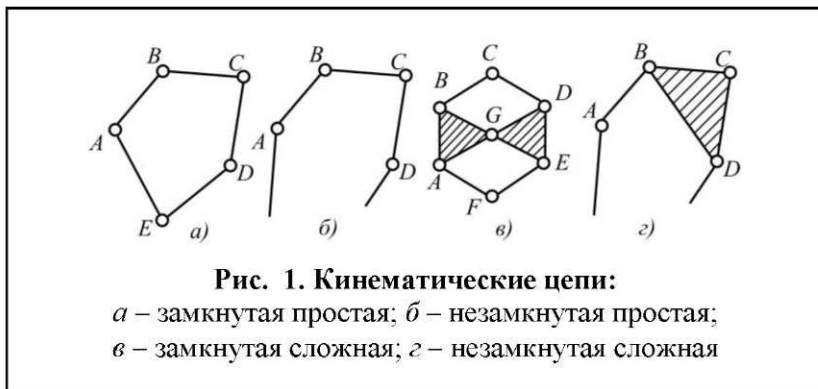
Звенья соединяются между собой подвижно. Подвижное соединение двух соприкасающихся звеньев называют кинематической парой. Те части звеньев, которыми они непосредственно соприкасаются друг с другом, образуя кинематическую пару, называют элементами контакта звеньев. В зависимости от того, что представляют собой

элементы контакта – поверхность, линию или точку, кинематические пары делят на низшие и высшие.

В низших кинематических парах звенья контактируют по поверхности, в высших – по линии или в точках.

### **1.3. Кинематическая цепь**

Кинематической цепью называют связанную систему звеньев, образующих между собой кинематические пары. Все кинематические цепи подразделяют на плоские и пространственные. Если в кинематической цепи звенья могут двигаться в различных плоскостях, то такую цепь называют пространственной. Если же в кинематической цепи все её звенья могут двигаться только в одной или параллельных плоскостях, то такую цепь называют плоской. Кинематические цепи могут быть незамкнутые и замкнутые, простые и сложные (рис. 1). Незамкнутой называют такую кинематическую цепь, в которой есть звенья, входящие в одну кинематическую пару, а замкнутой – в которой каждое звено входит, по крайней мере, в две кинематические пары. Простой называют кинематическую цепь, у которой каждое звено входит в соединение с другим звеном с помощью одной или двух кинематических пар. Если в кинематической цепи хотя бы одно звено входит в три или более кинематические пары, такую цепь называют сложной.



## 1.4. Механизм

Механизм есть система тел, предназначенная для преобразования движения одного или нескольких тел в требуемые движения других тел. Следовательно, механизм представляет собой кинематическую цепь, в которой при заданном движении одного или нескольких звеньев относительно любого из них все остальные звенья совершают однозначно определяемые движения. Параметры движения механизма определяют обычно относительно неподвижного звена – стойки (станины, рамы и т.п.).

## 1.5. Машина

Машина есть устройство, выполняющее механические движения для преобразования энергии, материалов или информации с целью замены или облегчения физического и умственного труда человека. Машину, в которой все преобразования энергии, материалов и информации выполняются без непосредственного участия человека, называют машиной-автоматом.

## **2. Структура и классификация механизмов**

Исследование механизма начинают с изучения его структуры (структурного анализа), т.е. определения числа звеньев, числа и класса кинематических пар, степени подвижности и класса механизма.

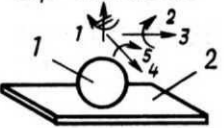



### ***2.1. Классификация кинематических пар***

Помимо деления кинематических пар на высшие и низшие их делят ещё на 5 классов. В зависимости от способа соединения звеньев на относительные движения каждого звена кинематической пары накладываются определенные ограничения. Эти ограничения называют условиями связи в кинематических парах. Класс кинематической пары соответствует числу условий связи и равен ему. Поясним это положение. Всякое свободное тело в пространстве имеет шесть степеней свободы: оно может поступательно перемещаться параллельно трем взаимно перпендикулярным координатным осям и вращаться вокруг каждой из этих осей. Свободные тела, подвижно соединенные друг с другом, превращаются в звенья, входящие в кинематические пары. Такое соединение уменьшает число степеней свободы звеньев. Количество потерянных степеней свободы звеньев, входящих в кинематические пары, т.е. число условий связи, и определяет номер класса этой пары.







### ***2.2. Условное изображение кинематических пар***



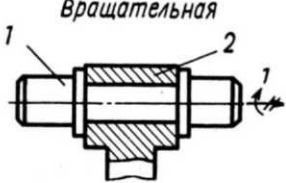

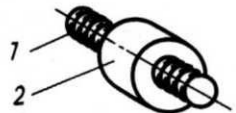

При схематическом изображении механизмов на чертежах вместо конструктивного изображения кинематических пар и звеньев пользуются их условным обозначением (табл. 1).

Таблица 1

Класс пары	Число условий связи	Название пары, рисунок	Условное обозначение
I	1	<i>Шар-плоскость</i> 	
II	2	<i>цилиндр-плоскость</i> 	

Окончание табл. 1

Класс пары	Число условий связи	Название пары, рисунок	Условное обозначение
III	3	<i>Сферическая</i> 	
III	3	<i>Плоскостная</i> 	
IV	4	<i>цилиндрическая</i> 	

V	5	<p><i>Поступательная</i></p> 	
V	5	<p><i>Вращательная</i></p> 	
V	5	<p><i>Винтовая</i></p> 	

### **2.3. Степень свободы кинематической цепи и степени подвижности механизма**

Каждое звено, находясь в пространстве, имеет шесть степеней свободы. Если механизм имеет  $k$  звеньев, то общее число степеней свободы будет равно  $6k$ . Соединение звеньев в кинематические пары накладывает связи на относительное движение звеньев. Эти ограничения определяются классом кинематической пары, т.е. числом условий связи. Если число пар каждого класса обозначить через  $p_n$ , где индекс  $n$  – номер ее класса, то кинематическая цепь будет содержать  $p_1$  пар первого класса,  $p_2$  пар второго класса и т.д. То есть из  $6k$  степеней свободы звеньев следует исключить те степени свободы, которые ограничиваются кинематическими парами. Тогда в общем случае степень свободы пространственной кинематической



цепи  $H$  можно определить как разность между количеством степеней свободы звеньев до соединения их друг с другом и образования кинематических пар и количеством условий связей, накладываемых этими парами. Это значит, что

$$H = 6k - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1 ,$$

где  $k$  – количество звеньев;  $p_5, p_4, p_3, p_2, p_1$  – количество кинематических пар V, IV, III и т.д. классов.

Если в замкнутой кинематической цепи сделать одно звено неподвижным, т.е. получить механизм, то число степеней свободы уменьшится для пространственного механизма на шесть, т.е.

$$W = H - 6 .$$

Число степеней свободы кинематической цепи относительно звена, принятого за неподвижное, называется степенью подвижности механизма  $W$ :

$$W = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1 ,$$

где  $n$  – количество подвижных звеньев механизма.

В плоском механизме, звенья которого движутся в одной плоскости, на движение всех звеньев механизма в целом наложено три общих ограничения, и подвижное звено может обладать только тремя степенями свободы. Структурная формула для плоского механизма выглядит так:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 .$$

Эта формула носит название формулы Чебышева.

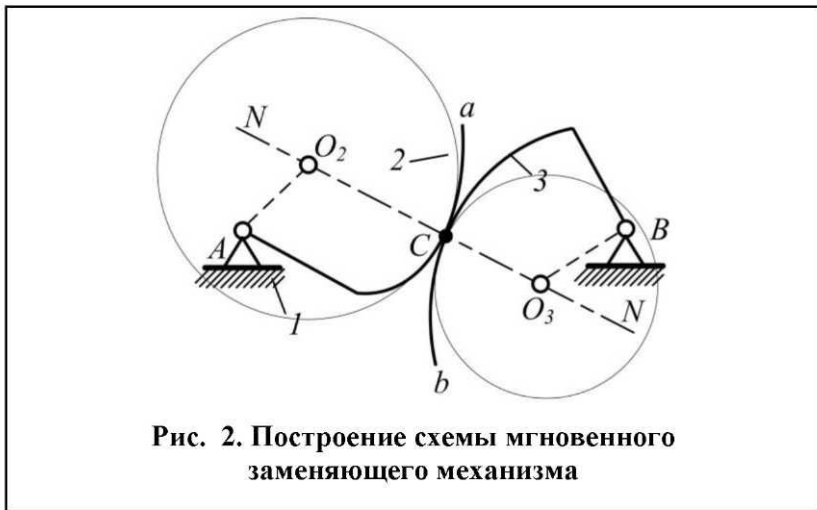
Степень подвижности механизма указывает на число звеньев, законы движения которых должны быть заданными, чтобы определить однозначно законы движения всех остальных звеньев. Звенья, законы движения которых

заданы, будем называть ведущими, а все остальные ведомыми.

## 2.4. Замена в плоских механизмах высших пар низшими

При изучении структуры и кинематики плоских механизмов удобно заменять высшие пары IV класса низшими парами V класса. При замене должно быть выполнено условие, чтобы механизм, полученный после такой замены, обладал прежней степенью подвижности и чтобы сохранились законы движения одноименных точек исходного и заменяющего механизмов.

Пусть задан механизм с высшей парой, элементы звеньев 2 и 3 которой представляют собой произвольно заданные кривые  $a$  и  $b$  (рис. 2).



Для построения схемы заменяющего механизма проводим нормаль  $NN$  в точке  $C$  касания кривых и отмечаем на ней центры кривизны  $O_2$  и  $O_3$  кривых  $a$  и  $b$ . Центры кривизны считаем шарнирами, образующими вращательные пары, в которые входят условные звенья  $AO_2, O_2O_3$  и  $BO_3$ . Полученный в результате замены механизм  $AO_2O_3B$  называют заменяющим механизмом.

Степень подвижности исходного механизма:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 = 1.$$

Степень подвижности заменяющего механизма:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1.$$

Так как окружности с радиусами  $O_2C$  и  $O_3C$  в точке касания  $C$  с кривыми 2 и 3 и сами кривые  $a$  и  $b$  эквивалентны до производных второго порядка включительно, то заменяющий механизм эквивалентен основному в такой же степени, т.е. положения, скорость и ускорения одноименных точек исходного и заменяющего механизмов будут одинаковыми.

То есть любой плоский механизм с высшими парами IV класса может быть заменен механизмом, в состав которого входят только низшие кинематические пары V класса.

В этом случае формула Чебышева для заменяющего механизма получит вид:

$$W = 3n - 2p_5.$$

## 2.5. Структурная классификация плоских механизмов

Классификация механизмов даёт возможность систематизировать все многообразие существующих механизмов. Наиболее распространённой является классификация, в основу которой положены структурные особенности механизмов. Впервые такая классификация была предложена и научно обоснована профессором Л.В. Ассуром.

К плоским механизмам 1-го класса относят механизмы, состоящие из стойки 2 и ведущего звена 1 (рис. 3). Механизмы 1-го класса бывают двух видов: с вращающимся (рис. 3, а) или поступательно перемещающимся ведущим звеном (рис. 3, б).



Образование механизмов последующих классов получают путем присоединения к механизмам 1-го класса групп Ассура.

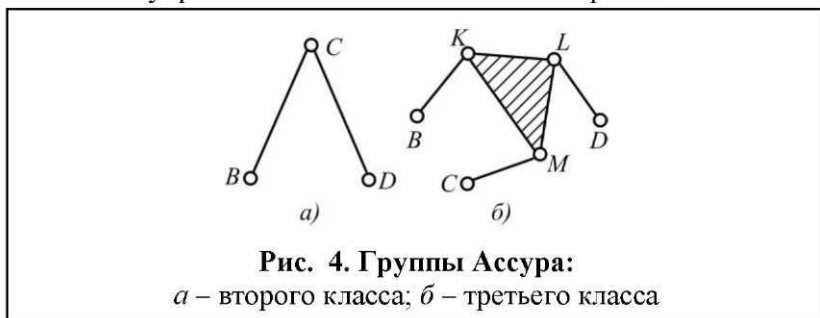
Группой Ассура называют кинематическую цепь с нулевой степенью подвижности и не распадающуюся на более простые цепи, обладающие также нулевой степенью подвижности:

$$W_{ep} = 3n - 2p_5 = 0, \text{ т.е. } p_5 = \frac{3}{2}n,$$

где  $n$  – количество подвижных звеньев;  
 $p_5$  – число кинематических пар V класса.

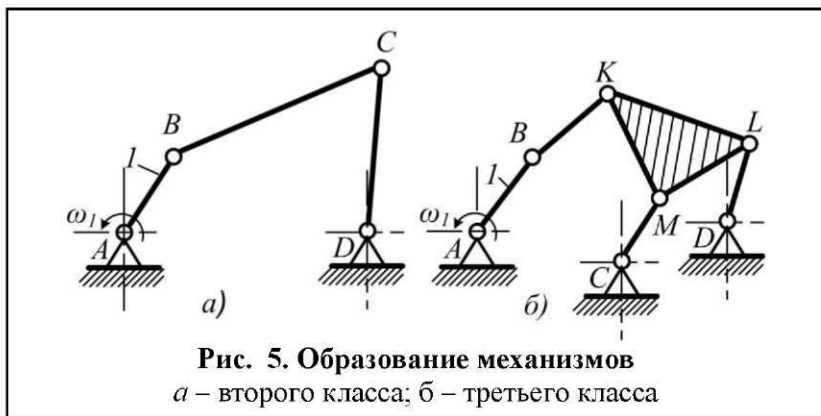
Следует заметить, что, так как  $p_5$  не может быть дробным числом, то  $n$  должно быть четным.

Наиболее простой группой Ассура является двухповодковая, состоящая из двух звеньев и трех кинематических пар V класса, которая является группой Ассура второго класса (рис. 4, а). Группа Ассура третьего класса состоит из четырех звеньев и шести кинематических пар V класса. В базисное звено этой группы ( $KLM$ ) входят три кинематические пары (рис. 4, б). Класс группы равен числу кинематических пар, входящих в замкнутый контур, образованный внутренними кинематическими парами.



Деление групп по классам обусловлено методами кинематического и силового анализов, свойственным группам каждого класса.

Образование механизмов 2-го и 3-го классов осуществляют путем присоединения групп второго и третьего классов соответственно к одному или нескольким механизмам 1-го класса (рис. 5).

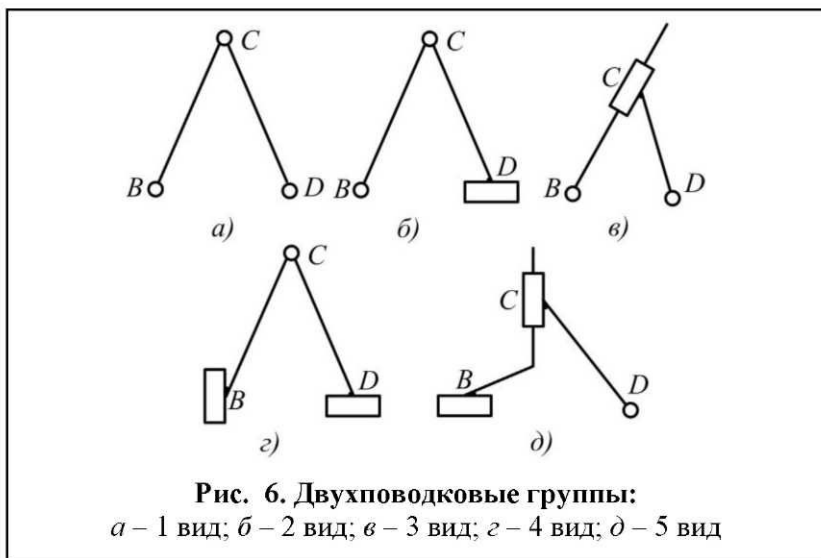


То есть класс механизма определяется классом наивысшей группы, в него входящей.

Итак, механизмы 2-го и 3-го классов отличаются друг от друга не только видом кинематических цепей, которые составляют их ведомые части, но и методами их кинематического и динамического анализов. Чем выше класс механизма, тем больше усложняются методы их расчёта и тем реже они встречаются в практике. Большинство современных механизмов, применяемых в технике, принадлежат к механизмам 2-го класса, включающим группы Ассур второго класса.

## 2.6. Группы Ассур второго класса

В зависимости от того, какие кинематические пары  $V$  класса входят в состав двухповодковой группы и как они группируются, различают пять видов двухповодковых групп (рис. 6).



## 2.7. Определение класса механизма

При определении класса механизма необходимо указывать, какие из звеньев механизма являются ведущими, ибо в зависимости от выбора ведущих звеньев может изменяться класс механизма. Число ведущих звеньев определяют, используя структурную формулу Чебышева. Это дает возможность найти количество механизмов 1-го класса. Условно отсоединяя их, выделяют ведомую часть механизма и расчленяют её на группы Ассура. При расчленении можно придерживаться такой последовательности. Начинать надо с попытки отсоединить группы 2-го класса. Если попытки отсоединения групп 2-го класса не дадут решения, то надо переходить к попыткам отсоединения групп 3-го класса и т.д.

### **3. Кинематический анализ плоских рычажных механизмов с низшими парами**

Цель кинематического анализа механизмов – определение путей и траекторий движения отдельных точек и звеньев механизмов, их скоростей и ускорений.

Знание траекторий движения отдельных звеньев механизма и в особенности его исполнительных органов даёт возможность судить о точности воспроизведения движений, необходимых тем процессам, для выполнения которых и создана данная машина.

Скорость перемещения рабочих звеньев машины определяет её производительность и необходимую мощность двигателя; очень часто одним из основных требований, предъявляемых технологическим процессом к скорости движения рабочего звена, является изменение её в заданных границах.

Задачи кинематического анализа механизмов могут быть решены аналитическим, графическим и графоаналитическим методами.

Аналитический метод является наиболее точным методом, однако из-за своей сложности, малой наглядности и громоздкости применяется лишь при анализе простых механизмов.

Графический метод прост, нагляден, но не совершен: результаты этого анализа из-за малой их точности могут быть использованы лишь при ориентировочных, грубых подсчётах.

Графоаналитический метод, благодаря своей универсальности, наглядности, точности и малой сложности, получил наибольшее применение в инженерной практике.



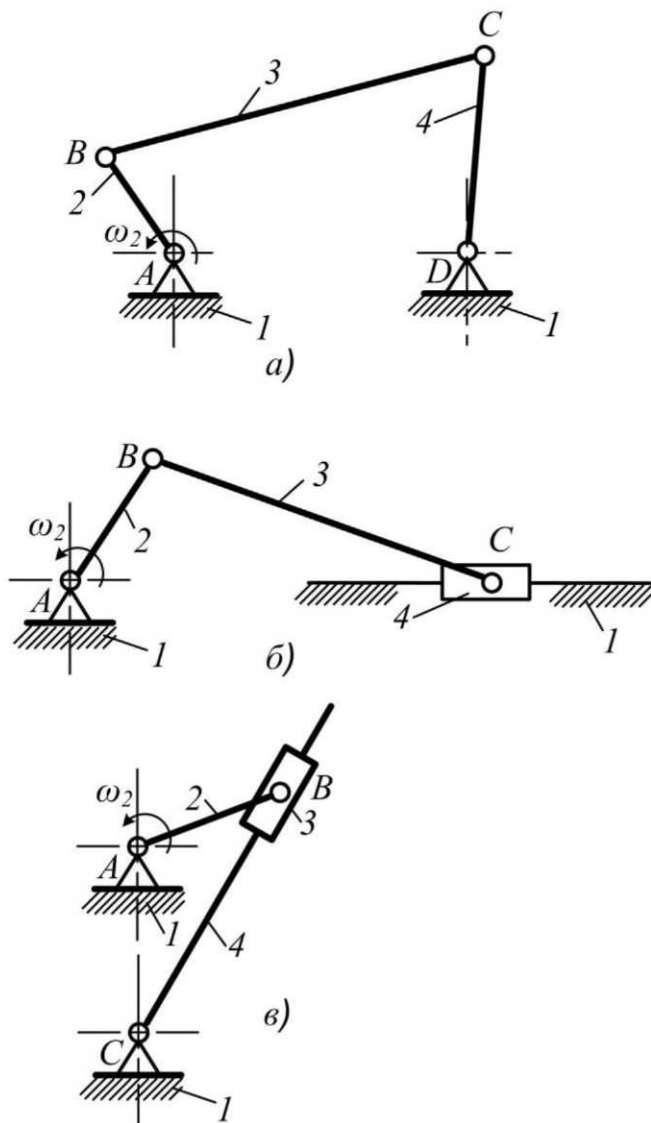
Достоинства и недостатки различных методов наглядно выявляются в ходе кинематического анализа рычажных механизмов.

### **3.1. Рычажные механизмы**

Рычажные механизмы широко применяют в двигателях и рабочих машинах поршневого типа, насосах, компрессорах, в зуборезных и строгальных станках, сельскохозяйственных машинах, в дробилках, прессах и т.п.

Положительным качеством рычажных механизмов является простота их изготовления, надёжность и высокий коэффициент полезного действия. К недостаткам надо отнести громоздкость рычажных механизмов.

Наиболее распространёнными представителями рычажных механизмов являются: шарнирный четырёхзвенник (рис. 7, *а*), кривошипно-ползунный механизм (рис. 7, *б*) и кулисный механизм (рис. 7, *в*).



**Рис. 7. Рычажные механизмы:**  
*a* – шарнирный четырехзвенник; *б* – кривошипно-ползунный механизм; *в* – кулисный механизм

Если звено 2 может совершать вращение на полный оборот, то такое звено называется кривошипом. Если звено 4 (рис. 7, а) не может совершать вращение на полный оборот, а совершает качательные движения, то такое звено носит название коромысла.

Звено 3 (рис. 7, а, б), связанное вращательными парами с подвижными звеньями, называется шатуном.

Звено 4 (рис. 7, б), скользящее в неподвижных направляющих, принадлежащих стойке, носит название ползуна.

Подвижная направляющая 4 (рис. 7, в), по которой движется ползун 3, называется кулисой, а сам четырехзвенный механизм – кулисным.

### **3.2. Построение плана положений механизма**

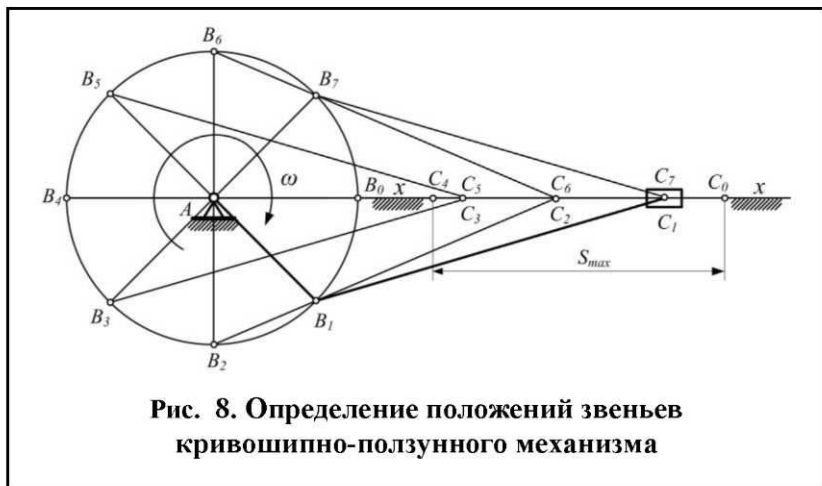
Для определения траекторий и перемещений отдельных точек и звеньев механизма необходимо построение плана положений механизма за время цикла.

Графическим приемом построения плана положений механизма является метод засечек. Основывается он на том, что: 1) длина и конфигурация звеньев механизма при его движении не изменяются, 2) формы траекторий, по которым движутся отдельные точки механизма, не изменяются с изменением масштаба построения плана положений механизма. Применение этого метода покажем на примере кривошипно-ползунного механизма (рис. 7, б).

В качестве объекта для анализа движения выбираем ползун, скользящий вдоль оси неподвижной направляющей. Ведущим звеном является кривошип  $AB$ , который вращается с постоянной угловой скоростью.

Строят в масштабе (рис. 8) ряд последовательных положений механизма (например, 8 положений). В этом случае при построении плана положений механизма кри-

вошип поворачивают на  $45^\circ$ . За начальное положение механизма принимают такое, при котором кривошип  $AB_0$  и шатун  $B_0C_0$  вытянуты в одну прямую линию.



Чтобы получить 8 положений точки  $C$  ползуна, надо взять циркуль раствором, равным длине шатуна  $BC$ , и, поместив ножку с острием в точках деления на окружности, другой ножкой делать засечки на горизонтальной прямой  $x - x$ , по которой скользит ползун  $C$ . Эти засечки будут соответствовать отдельным положениям точки  $C$  ползуна. Если соединить положения точки  $B_1$  на окружности с соответствующими положениями точки  $C_1$  на прямой  $x - x$ , получим механизм в первом положении; если выполнить такое же построение для точек  $B_2$  и  $C_2$ , то получим механизм во втором положении и т.д. Заметим, что точка  $C$  при этом совершает возвратно-поступательное движение. Точки  $C_0$  и  $C_4$  являются крайними точками пути ползуна. Они носят название мертвых точек. Полный путь, проходимый точкой  $C$  ползуна, равен удвоенному отрезку  $C_0 - C_4$ , т.е.  $2S_{\max}$ .

Построение плана положений механизма выполняют в некотором масштабе, удобном для кинематического исследования механизма.

### 3.3. Построение кинематических диаграмм

Кинематический анализ графическим методом с построением кинематических диаграмм, основанный на применении графического дифференцирования, требует очень аккуратного исполнения, от которого всецело зависит точность анализа.

После построения плана положений механизма может быть построена диаграмма перемещения ползуна, т.е.  $S = f(t)$  – зависимость пути ползуна (точки  $C$ ) от времени поворота кривошипа  $t$  (рис. 9).

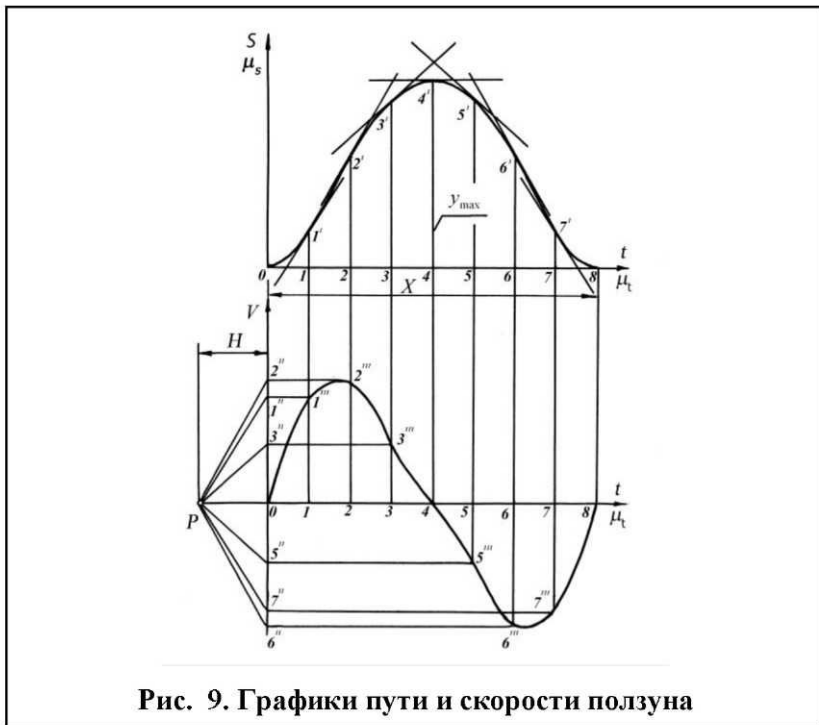


Рис. 9. Графики пути и скорости ползуна

Масштаб времени  $t$  диаграммы  $S = f(t)$  равен

$$\mu_t = \frac{T}{X}, \frac{c}{\text{мм}},$$

где  $X$  – длина отрезка, мм, соответствующего времени одного оборота кривошипа;

$T$  – время одного оборота кривошипа, с.

Получив график пути  $S = f(t)$  для ползуна, графическим дифференцированием выполняют построение графика скорости  $V = f'(t)$ .

Графическое дифференцирование делают методом касательных или методом хорд.

Изложим коротко последовательность операций при графическом дифференцировании методом касательных, показанную на рис. 9:

а) разбивают диаграмму на участки (например, на 8), проводят ординаты до пересечения с кривой и нумеруют точки на оси 1, 2, 3 и т.д. и на кривой 1', 2', 3' и т.д.;

б) в точках кривой 1', 2', 3' и т.д. проводят касательные;

в) строят координатные оси для скорости  $V$  и времени  $t$  и выбирают слева от начала координат полюсную точку  $P$  на оси абсцисс. Расстояние  $H$  выбирают произвольно, исходя из того, что с увеличением расстояния  $H$  высота абсцисс графика скоростей будет увеличиваться;

г) проводят из точки  $P$  лучи параллельно соответствующим по номеру касательным до пересечения с осью ординат в точках 1'', 2'', 3'' и т.д., а из этих точек горизонтальные линии до пересечения каждой с одноименной ординатой 1, 2, 3 и т.д. Это даст точки 1''', 2''', 3''' и т.д.

Плавная кривая, проведенная по лекалу через эти точки, и будет графиком производной функции, т.е. в данном случае графиком  $V = f'(t)$ . Чтобы использовать её для

определения численных значений скоростей, определяют масштаб скоростей по формуле

$$\mu_V = \frac{\mu_s}{\mu_l H}, \frac{м/с}{мм};$$

д) аналогично графически дифференцируют график скорости и получают диаграмму ускорений  $a = f(t)$ .

### **3.4. Построение планов скоростей и ускорений**

Определение скоростей и ускорений точек и звеньев механизма графоаналитическим методом ведется посредством построения планов скоростей и ускорений для отдельных положений механизма. Определение скоростей и ускорений начинается с ведущего звена, имеющего, как правило, свободу вращательного движения, т.е. являющегося кривошипом.

### **3.5. Определение скоростей и ускорений механизма первого класса**

Как было отмечено выше, к механизмам 1-го класса относятся механизмы, состоящие из стойки и ведущего звена. В нашем случае, ведущим звеном является кривошип. Движение кривошипа определяется заданной угловой скоростью, которая может быть либо равномерной, либо неравномерной. В случае равномерного вращательного движения кривошипа (рис. 10, а) имеем  $V_B = \omega_1 \cdot l_{AB}$  и  $a_B = \omega_1^2 \cdot l_{AB}$ .

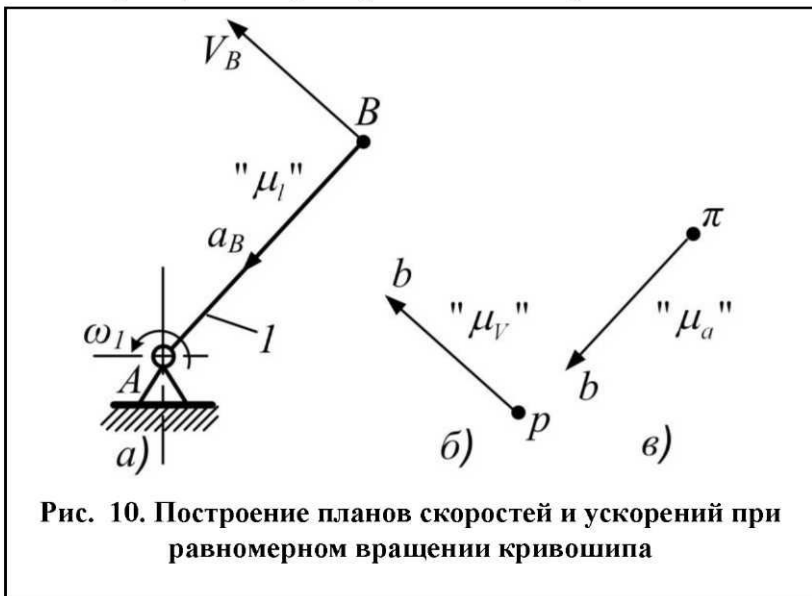
Скорость точки  $B$  направлена по касательной к траектории движения точки в сторону её перемещения.

Ускорение точки  $B$  направлено вдоль звена к центру вращения, т.е. от точки  $B$  к точке  $A$ .

Так как построения, связанные с определением скоростей и ускорений движения отдельных точек, на самом звене производить неудобно, то построения эти ведут вне звена. Для этого при построении плана скоростей (рис. 10, б) выбирают точку  $p$  – полюс, в которую в масштабе

штабе  $\mu_v, \frac{M}{c \cdot мм}$ , переносят с сохранением направления

и величины векторы скорости различных точек звена (в нашем примере вектор скорости точки  $B$ ).



**Рис. 10. Построение планов скоростей и ускорений при равномерном вращении кривошипа**

При построении плана ускорений (рис. 10, в) выбирают точку  $\pi$  – полюс, в которую в масштабе  $\mu_a,$

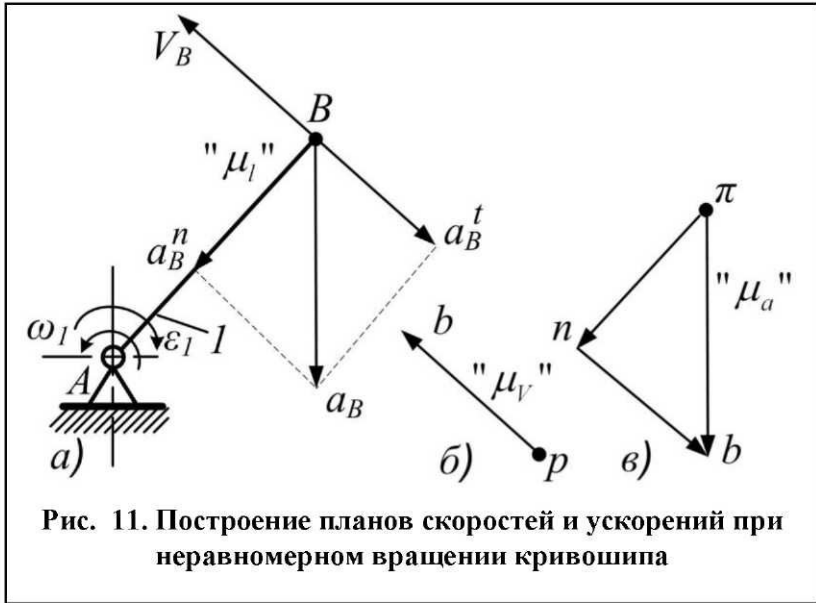
$\frac{M}{c^2 \cdot мм}$ , переносят с сохранением направления и величины

векторы ускорений различных точек звена.

В случае неравномерного вращательного движения кривошипа (рис. 11) имеем



$V_B = \omega_1 \cdot l_{AB}$  и  $\bar{a}_B = \bar{a}_B^n + \bar{a}_B^\tau$ , где  $a_B^n = \omega^2 \cdot l_{AB}$  – нормальное или центростремительное ускорение;  $a_B^\tau = \varepsilon_1 \cdot l_{AB}$  – тангенциальное или касательное ускорение ( $\varepsilon_1$  – угловое ускорение кривошипа).



**Рис. 11. Построение планов скоростей и ускорений при неравномерном вращении кривошипа**

Нормальное ускорение направлено всегда по нормали в сторону центра кривизны траектории движения данной точки; линия же действия тангенциального ускорения совпадает с касательной к траектории движения, а направление его устанавливается направлением углового ускорения.

Так как механизмы образованы последовательным присоединением групп Ассур к механизму 1-го класса (или нескольким механизмам 2-го класса), то изложение метода планов можно вести применительно к различным группам Ассур.

### 3.6. Определение скоростей группы Ассра второго класса первого вида

Известными являются векторы скоростей  $B$  и  $D$  концевых элементов группы, которыми звенья 2 и 3 входят во вращательные кинематические пары с ведущими звеньями 1 и 4 (рис. 12).



Рис. 12. Определение скоростей группы Ассра второго класса первого вида

Решение задачи начинается с определения линейной скорости точки  $C$ , так как движение точки  $C$  может быть всегда разложено на переносное поступательное со скоростью точки  $B$  или  $D$  и относительное вращательное вокруг точки  $B$  или  $D$ , т.е.

$$\vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{V}_{BC}, \quad \vec{V}_C = \vec{V}_D + \vec{V}_{CD}.$$

Получаем  $\underline{\underline{\vec{V}_B}} + \underline{\underline{\vec{V}_{CB}}} = \underline{\underline{\vec{V}_D}} + \underline{\underline{\vec{V}_{CD}}}$ .

В последнем уравнении известны по величине и направлению векторы  $V_B$  и  $V_D$ . Векторы же  $V_{CB}$  и  $V_{CD}$  известны только по направлению, т.е. перпендикулярны звеньям  $CB$  и  $CD$ . Выбираем в качестве полюса плана

скоростей точку  $p$ , откладываем от неё отрезки  $(pb)$  и  $(pd)$ , представляющие скорости  $V_B$  и  $V_D$  точек  $B$  и  $D$  в масштабе  $\mu_V$ . Отложив отрезки  $(pb)$  и  $(pd)$ , проводим через точки  $b$  и  $d$  прямые, имеющие направление векторов относительных скоростей  $V_{CB}$  и  $V_{CD}$ . Точка пересечения  $c$  определит конец вектора  $V_C$  абсолютной скорости точки  $C$ . Скорость  $V_C$  выражается отрезком  $(pc)$  и равна  $V_C = \mu_V \cdot (pc)$ . Стрелки у векторов должны быть поставлены так, чтобы удовлетворять уравнениям в векторной форме.

Пользуясь планом скоростей, можно определить угловые скорости  $\omega_2$  и  $\omega_3$  звеньев 2 и 3.

$$\omega_2 = \frac{V_{CB}}{l_{CB}} = \frac{\mu_V(cb)}{l_{CB}}; \quad \omega_3 = \frac{V_{CD}}{l_{CD}} = \frac{\mu_V(cd)}{l_{CD}}.$$

Направления угловых скоростей  $\omega_2$  и  $\omega_3$  могут быть определены следующим образом. Мысленно прикладываем векторы  $V_{CB}$  и  $V_{CD}$  и видим, что вращение звена 2 происходит в направлении вращения часовой стрелки, а вращение звена 3 в направлении, обратном вращению часовой стрелки.

Для определения скорости какой-либо точки  $E$  имеем векторное уравнение

$$\underline{\underline{\bar{V}_E}} = \underline{\underline{\bar{V}_B}} + \underline{\underline{\bar{V}_{EB}}}.$$

Отрезок плана скоростей  $(eb)$ , определяющий скорость  $V_{EB}$ , совпадает по направлению с отрезком  $(cb)$ , определяющим скорость  $V_{CB}$ . Величину отрезка  $(eb)$  находят из следующих соображений:

$$V_{CB} = \omega_2 \cdot l_{CB}; \quad V_{EB} = \omega_2 \cdot l_{EB}.$$

Разделив почленно оба равенства, получим:

$$\frac{V_{EB}}{V_{CB}} = \frac{l_{EB}}{l_{CB}} \quad \text{или} \quad \frac{\mu_V(eb)}{\mu_V(cb)} = \frac{l_{EB}}{l_{CB}},$$

откуда 
$$(eb) = (cb) \frac{l_{EB}}{l_{CB}}.$$

То есть, если известны скорости двух точек звена, то скорость других точек звена может быть определена из условия пропорциональности.

Отложив полученный отрезок  $(eb)$  на плане скоростей и соединив полученную точку  $e$  с полюсом плана  $p$ , получаем отрезок  $(pe)$ , изображающий в масштабе  $\mu_V$  скорость точки  $E$ , т.е.  $V_E = \mu_V(pe)$ .

Для определения скорости какой-либо произвольной точки  $F$  звена 3 составляем следующие векторные уравнения:

$$\bar{V}_F = \bar{V}_D + \bar{V}_{FD} \quad \text{и} \quad \bar{V}_F = \bar{V}_C + \bar{V}_{FC}.$$

$$\text{Получаем} \quad \underline{\underline{\bar{V}_D}} + \underline{\underline{\bar{V}_{FD}}} = \underline{\underline{\bar{V}_C}} + \underline{\underline{\bar{V}_{FC}}}.$$

Данное уравнение решаем графически. Рассматривая полученный треугольник  $efd$  плана скоростей и треугольник  $CFD$  на звене 3, можно видеть, что отрезки  $(cf)$ ,  $(fd)$  и  $(dc)$  соответственно перпендикулярны отрезкам  $CF$ ,  $FD$  и  $DC$ , т.е.  $(cf) \perp CF$ ;  $(fd) \perp FD$ ;  $(dc) \perp DC$ .

Итак, треугольник  $efd$  на плане скоростей подобен треугольнику  $CFD$  группы на схеме и повернут относительно него на  $90^\circ$ . Это свойство подобия фигуры относительных скоростей на плане скоростей фигуре звена на схеме механизма позволяет определить скорости любых точек этого звена не из уравнений (аналитически), а графически, построением подобных фигур.

Проверкой правильности графического построения подобных фигур на плане является совпадение порядка букв на схеме и на плане скоростей.

Планы скоростей обладают следующими свойствами:

1. Векторы, выходящие из полюса, представляют собой абсолютные скорости.

2. Векторы, соединяющие концы абсолютных скоростей, являются относительными скоростями.

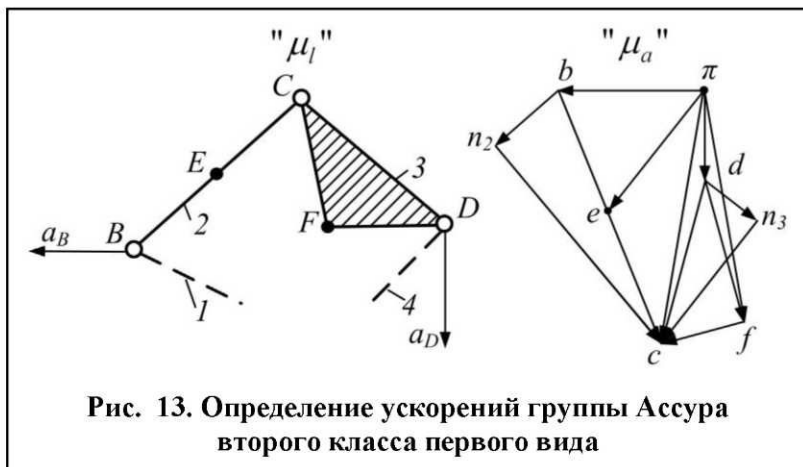
3. Векторы скоростей неподвижных точек обращаются в точки, располагающиеся в полюсе.

4. При построении плана скоростей применима теорема подобия.

### **3.7. Определение ускорений группы Ассра второго класса первого вида**

При определении ускорений предполагают, что уже построен план скоростей группы и, следовательно, известны скорости всех звеньев группы. Также известны векторы абсолютных ускорений точек  $B$  и  $D$  концевых элементов группы, которыми звенья 2 и 3 входят во враща-

тельные кинематические пары с ведущими звеньями 1 и 4 (рис. 13).



**Рис. 13. Определение ускорений группы Ассура второго класса первого вида**

Принцип построения планов ускорений по существу мало чем отличается от построения планов скоростей. Прежними остаются последовательность в определении ускорений различных точек механизма и разложение сложного движения на его составляющие: поступательное и вращательное движения.

$$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB}^n + \bar{a}_{CB}^t,$$

$$\bar{a}_C = \bar{a}_D + \bar{a}_{CD}^n + \bar{a}_{CD}^t,$$

где  $a_{CB}^n$  и  $a_{CD}^n$  – нормальные ускорения в относительном вращательном движении;

$a_{CB}^t$  и  $a_{CD}^t$  – тангенциальные ускорения в относительном вращательном движении.

Решая совместно уравнения, имеем:

$$\underline{\underline{\bar{a}_B}} + \underline{\underline{\bar{a}_{CB}^n}} + \underline{\underline{\bar{a}_{CB}^t}} = \underline{\underline{\bar{a}_D}} + \underline{\underline{\bar{a}_{CD}^n}} + \underline{\underline{\bar{a}_{CD}^t}}.$$

Векторы нормальных ускорений могут быть определены как

$$a_{CB}^n = \frac{V_{CB}^2}{l_{CB}} = \frac{\mu_V^2 (cb)^2}{l_{CB}} = \mu_a (bn_2),$$

$$a_{CD}^n = \frac{V_{CD}^2}{l_{CD}} = \frac{\mu_V^2 (cd)^2}{l_{CD}} = \mu_a (dn_3).$$

Неизвестными являются величины векторов  $a_{CB}^t$  и  $a_{CD}^t$ , которые могут быть определены построением плана ускорений.

Выбираем в качестве полюса плана ускорений точку  $\pi$  и откладываем  $(\pi b)$  и  $(\pi d)$ , представляющие в масштабе  $\mu_a$  ускорения точек  $B$  и  $D$ . Далее вычисляем величины ускорений  $a_{CB}^n$  и  $a_{CD}^n$  и откладываем из точек  $b$  и  $d$  отрезки  $(bn_2)$  и  $(dn_3)$ , представляющие в масштабе  $\mu_a$  эти ускорения. Из полученных точек  $n_2$  и  $n_3$  проводим прямые в направлении векторов тангенциальных ускорений  $a_{CB}^t$  и  $a_{CD}^t$ .

Точка пересечения данных прямых и дает конец вектора  $a_C$  абсолютного ускорения точки  $C$ .

$$a_C = \mu_a (\pi c).$$

Соединив точки  $b$  и  $d$  плана с точкой  $c$ , получим векторы полных относительных ускорений  $a_{CB}$  и  $a_{CD}$ .

$$a_{CB} = \mu_a (cb), \quad a_{CD} = \mu_a (cd)$$

Пользуясь планом ускорений, можно определить угловое ускорение звеньев 2 и 3.

$$\varepsilon_2 = \frac{a'_{CB}}{l_{CB}} = \frac{\mu_a(n_2c)}{l_{CB}}; \quad \varepsilon_3 = \frac{a'_{CD}}{l_{CD}} = \frac{\mu_a(n_3c)}{l_{CD}}$$

Направления угловых ускорений  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$  могут быть определены следующим образом. Переносим мысленно векторы  $a'_{CB}$  и  $a'_{CD}$  в точку  $C$ , видим, что направление  $\varepsilon_2$  совпадает с направлением вращения часовой стрелки, а направление  $\varepsilon_3$  противоположно направлению вращения часовой стрелки.

Для определения ускорения какой-либо точки  $E$ , лежащей на оси звена  $BC$ , воспользуемся условием пропорциональности, аналогично определению скорости.

$$\frac{a_{EB}}{a_{CB}} = \frac{l_{EB}}{l_{CB}}, \quad \frac{\mu_a(eb)}{\mu_a(cb)} = \frac{l_{EB}}{l_{CB}},$$

$$\text{откуда } (eb) = (cb) \frac{l_{EB}}{l_{CB}}.$$

Отложив полученный отрезок  $(eb)$  на плане и соединив точку  $e$  с точкой  $\pi$ , получим отрезок  $(\pi e)$ , изображающий в масштабе  $\mu_a$  абсолютное ускорение точки  $E$ , т.е.  $a_E = \mu_a(\pi e)$ .

Для ускорения произвольной точки  $F$ , жестко связанной со звеном  $3$ , можно воспользоваться теоремой подобия, рассмотренной при построении плана скоростей. Для этого строим на отрезке  $(cd)$  плана ускорений треугольник  $cdf$ , подобный треугольнику  $CDF$  на схеме. При обходе контура  $cdf$  в каком-либо направлении порядок букв должен совпадать с порядком букв контура  $CDF$ .

Векторы абсолютных ускорений всех точек звеньев имеют своим началом точку  $\pi$  – полюс плана ускоре-



ний, векторы всех полных относительных ускорений соединяют собой концы векторов абсолютных ускорений.

### 3.8. Определение скоростей группы Ассра второго класса второго вида

В отличие от рассмотренной ранее группы, данная группа содержит поступательную пару. Известными являются вектор скорости точки  $B$  и векторы скоростей всех точек, принадлежащих звену 4, т.е. векторы скоростей точек ведущих звеньев 1 и 4 (рис. 14).

Так же известна угловая скорость  $\omega_4$  звена 4. Звено 3 скользит по оси  $x-x$  направляющей, принадлежащей звену 4.

Представим звено 4 в виде плоскости  $S$  и обозначим точку плоскости  $S$ , совпадающую для заданного положения с точкой  $C$ , через  $C_4$ . Вектор скорости точки  $C_4$  известен, так как известны векторы всех скоростей точек звена 4.

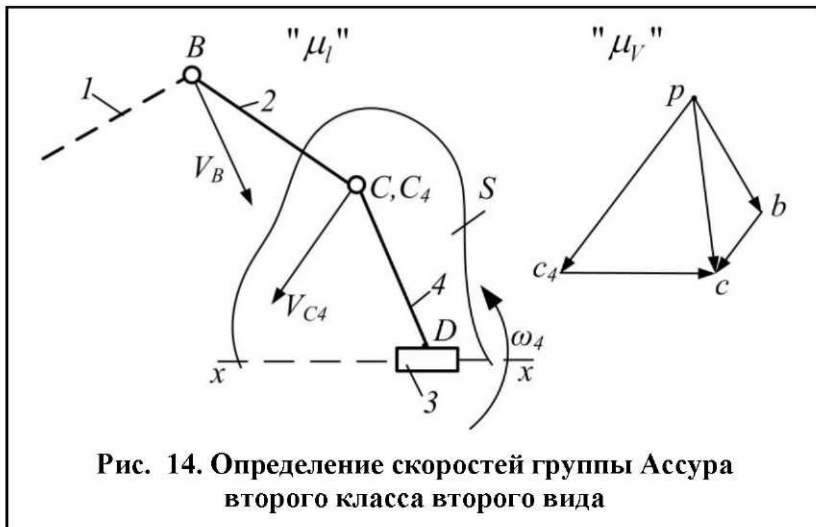


Рис. 14. Определение скоростей группы Ассра второго класса второго вида

Тогда для определения  $V_c$  – вектора скорости точки  $C$  – необходимо совместно решить два векторных уравнения:  $\bar{V}_C = \bar{V}_B + \bar{V}_{CB}$  и  $\bar{V}_C = \bar{V}_{C_4} + \bar{V}_{CC_4}$ .

Из уравнений найдем

$$\underline{\bar{V}_B} + \underline{\bar{V}_{CB}} = \underline{\bar{V}_{C_4}} + \underline{\bar{V}_{CC_4}},$$

где  $V_{CB}$  – вектор скорости точки  $C$  относительно точки  $B$ , известный по направлению ( $\perp CB$ );

$V_{CC_4}$  – вектор скорости точки  $C$  относительно звена  $4$ , известный по направлению (параллельно  $x - x$ ).

Строим план скоростей, что позволяет определить величину скорости точки  $C$ , т.е.  $V_C = \mu_V \cdot (pc)$ . Угловая скорость звена  $2$  определяется из равенства

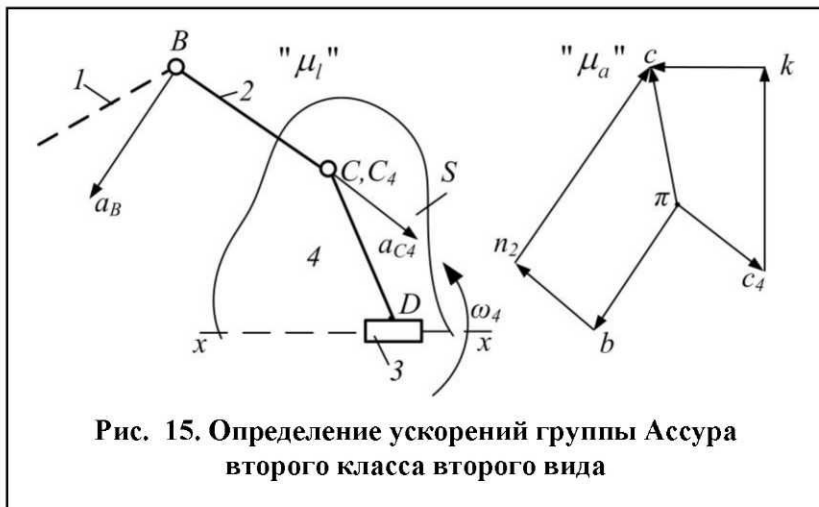
$$\omega_2 = \frac{V_{CB}}{l_{CB}} = \frac{\mu_V \cdot (cb)}{l_{CB}}.$$

Направление угловой скорости определяют также, как в ранее рассмотренном случае.

Угловая скорость звена  $3$ , входящего со звеном  $4$  в поступательную пару, имеет ту же угловую скорость, что и звено  $4$ , т.е.  $\omega_3 = \omega_4$ .

### **3.9. Определение ускорений группы Ассура второго класса второго вида**

При определении ускорений группы предполагается, что уже построен план скоростей группы и известны ускорения всех точек ведущих звеньев  $1$  и  $4$ , т.е. ускорение  $a_B$  точки  $B$  и ускорение  $a_{c_4}$  точки  $C_4$  (рис. 15).



**Рис. 15. Определение ускорений группы Ассура второго класса второго вида**

Ускорение точки  $C$  определяют из уравнений:

$$\underline{\underline{a}}_C = \underline{\underline{a}}_B + \underline{\underline{a}}_{CB}^n + \underline{\underline{a}}_{CB}^t,$$

$$\underline{\underline{a}}_C = \underline{\underline{a}}_{C_4} + \underline{\underline{a}}_{CC_4}^k + \underline{\underline{a}}_{CC_4}^r.$$

Решая совместно эти уравнения, получаем

$$\underline{\underline{a}}_B + \underline{\underline{a}}_{CB}^n + \underline{\underline{a}}_{CB}^t = \underline{\underline{a}}_{C_4} + \underline{\underline{a}}_{CC_4}^k + \underline{\underline{a}}_{CC_4}^r,$$

где  $a_{CC_4}^k$  – поворотное, или кориолисово, ускорение.

Оно возникает тогда, когда относительная скорость меняется по направлению, а переносная – по величине. Для определения направления кориолисового ускорения следует относительную скорость повернуть на  $90^\circ$  по направлению переносной угловой скорости;

$a_{CC_4}^r$  – относительное, или релятивное, ускорение точки  $C$  относительно плоскости  $S$ , принадлежащей звену 4, которое по направлению совпадает с направлением относительной скорости  $V_{CC_4}$  (параллельно  $x - x'$ , рис. 15).

Величину ускорения  $a_{CB}^n$  определяют по формуле

$$a_{CB}^n = \frac{V_{CB}^2}{l_{CB}} = \frac{\mu_V^2 (cb)^2}{l_{CB}} = \mu_a (bn_2).$$

Кориолисово ускорение  $a_{CC_4}^k$  по величине равно  $a_{CC_4}^k = 2\omega_4 V_{CC_4} = 2\omega_4 \mu_V (cc_4) = \mu_a (c_4 k)$ , где отрезок  $(cc_4)$  взят из плана скоростей.

Векторы ускорений  $a_{CB}^t$  и  $a_{CC_4}^r$ , входящие в уравнение, известны только по направлению. Для их определения строим план ускорений. Точка пересечения направлений векторов  $a_{CB}^t$  и  $a_{CC_4}^r$  дает конец вектора  $a_C$  абсолютного ускорения точки  $C$ . Величина ускорения  $a_C$  равна  $a_C = \mu_a (\pi c)$ .

Величина углового ускорения звена 2 равна

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{CB}^t}{l_{CB}} = \frac{\mu_a (n_2 c)}{l_{CB}}.$$

Направление этого ускорения определяется так же, как в ранее рассмотренном случае. Угловое ускорение звена 3 равно заданному ускорению звена 4, т.е.  $\varepsilon_3 = \varepsilon_4$ , так как звено 3 входит со звеном 4 в поступательную пару.

Разобранные примеры охватывают все случаи относительных движений звеньев, образующих низшие кинематические пары.

### **3.10. Кинематический анализ механизмов аналитическим методом**

С помощью аналитического метода кинематический анализ механизмов может быть сделан с любой сте-

пенью точности. Аналитические зависимости позволяют также выявить взаимосвязь кинематических параметров механизма с его геометрией, т.е. размерами звеньев.

### 3.10.1. Аналоги скоростей и ускорений

При кинематическом анализе механизмов аналитическим методом скорости и ускорения ведомых звеньев и точек, им принадлежащих, удобно выражать в функции угла поворота  $\varphi$  ведущего звена, т.е. в функции обобщенной координаты.

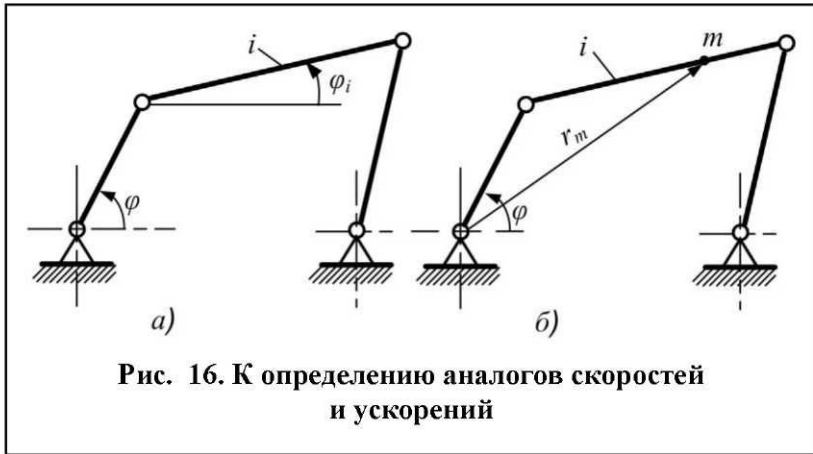


Рис. 16. К определению аналогов скоростей и ускорений

Так, если угол поворота  $\varphi_i$  какого-либо звена (рис. 16, а) номер  $i$  задан в функции  $\varphi_i = f(\varphi)$ , то угловая скорость этого звена может быть представлена так:

$$\omega_i = \frac{d\varphi_i}{dt} = \frac{d\varphi_i}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \omega \frac{d\varphi_i}{d\varphi} = \omega \varphi_i',$$

где  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$  – угловая скорость ведущего звена,  $\frac{рад}{с}$ ;

$$\varphi_i' = \frac{d\varphi_i}{d\varphi} - \text{аналог угловой скорости звена } i.$$

Аналог угловой скорости звена  $i$  есть величина безразмерная и равная самой скорости звена  $i$  при угловой скорости ведущего звена, равной единице.

Для определения углового ускорения  $\varepsilon_i$  звена  $i$  имеем:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \frac{d\omega_i}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \omega \frac{d\varphi_i}{d\varphi} \right] = \omega \frac{d}{dt} \left[ \frac{d\varphi_i}{d\varphi} \right] + \frac{d\varphi_i}{d\varphi} \cdot \frac{d\omega}{dt} = \\ &= \omega \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{dt}{d\varphi} \cdot \frac{d}{dt} \left[ \frac{d\varphi_i}{d\varphi} \right] + \frac{d\varphi_i}{d\varphi} \cdot \frac{d\omega}{dt} = \omega^2 \frac{d}{d\varphi} \left[ \frac{d\varphi_i}{d\varphi} \right] + \frac{d\varphi_i}{d\varphi} \varepsilon. \end{aligned}$$

Окончательно:

$$\varepsilon_i = \omega^2 \frac{d^2 \varphi_i}{d\varphi^2} + \varepsilon \cdot \frac{d\varphi_i}{d\varphi} = \omega^2 \varphi_i'' + \varepsilon \cdot \varphi_i',$$

где  $\omega$  – угловая скорость ведущего звена,  $\frac{\text{рад}}{\text{с}}$ ;

$\varepsilon$  – угловое ускорение ведущего звена,  $\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$ ;

$$\varphi_i' = \frac{d\varphi_i}{d\varphi} - \text{аналог угловой скорости звена } i;$$

$$\varphi_i'' = \frac{d^2 \varphi_i}{d\varphi^2} - \text{аналог углового ускорения звена } i.$$

Аналогично могут быть получены уравнения для скорости и ускорения какой-либо точки  $m$  звена  $i$  (рис.16, б).

Пусть  $r_m$  есть радиус-вектор, определяющий положение точки  $m$ . Из теоретической механики известно, что скорость  $V_m$  и ускорение  $a_m$  точки  $m$  могут быть получены последовательным двукратным дифференцированием радиуса-вектора  $r_m$  по времени  $t$ :

$$V_m = \frac{dr_m}{dt} = \frac{dr_m}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \omega \frac{dr_m}{d\varphi} = \omega r_m',$$

где  $\omega$  – угловая скорость ведущего звена,  $\frac{rad}{c}$ ;

$r_m' = \frac{dr_m}{d\varphi}$  – аналог скорости точки  $m$ , имеющий

размерность длины.

Таким образом, действительная скорость точки  $m$  равна произведению угловой скорости ведущего звена на аналог скорости точки  $m$ .

Для определения ускорения  $a_m$  точки  $m$  имеем:

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{dV_m}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \omega \frac{dr_m}{d\varphi} \right] = \omega \frac{d}{dt} \left[ \frac{dr_m}{d\varphi} \right] + \frac{dr_m}{d\varphi} \cdot \frac{d\omega}{dt} = \\ &= \omega \frac{d\varphi}{dt} \frac{dt}{d\varphi} \frac{d}{dt} \left[ \frac{dr_m}{d\varphi} \right] + \frac{dr_m}{d\varphi} \cdot \frac{d\omega}{dt} = \omega^2 \frac{d}{d\varphi} \left[ \frac{dr_m}{d\varphi} \right] + \varepsilon \frac{dr_m}{d\varphi}. \end{aligned}$$

Окончательно:

$$a_m = \omega^2 \frac{d^2 r_m}{d\varphi^2} + \varepsilon \frac{dr_m}{d\varphi} = \omega^2 r_m'' + \varepsilon r_m',$$

где  $\omega$  – угловая скорость ведущего звена,  $\frac{\text{рад}}{c}$ ;

$\varepsilon$  – угловое ускорение ведущего звена,  $\frac{\text{рад}}{c^2}$ ;

$$r'_m = \frac{dr_m}{d\varphi} \text{ – аналог скорости точки } m;$$

$$r''_m = \frac{d^2r_m}{d\varphi^2} \text{ – аналог ускорения точки } m.$$

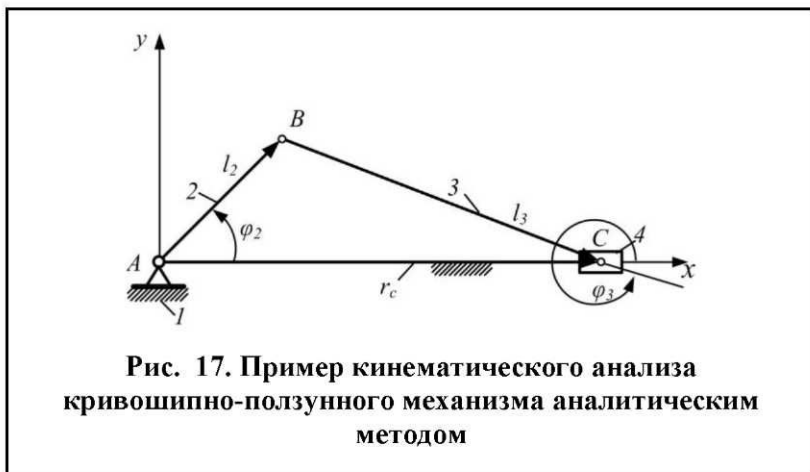
Аналоги скоростей и ускорений имеют размерность длины.

Так как аналоги скоростей и ускорений зависят только от обобщенной координаты и не зависят от времени, то они представляют собой характеристики самого механизма, независимые от закона движения его ведущего звена.

### **3.10.2. Кинематический анализ кривошипно-ползунного механизма аналитическим методом**

Ведущим звеном механизма является звено 2, и поэтому заданным параметром считаем угол  $\varphi_2$ , т.е. обобщенную координату. Расположим механизм в прямоугольной системе координат и контур механизма рассмотрим как векторный треугольник. Углы, определяющие положения векторов, отсчитывают от оси  $X$  в направлении против часовой стрелки (рис. 17).





**Рис. 17. Пример кинематического анализа кривошипно-ползунного механизма аналитическим методом**

Для определения скоростей и ускорений звеньев представим контур  $ABCA$  как сумму векторов  $\vec{l}_2 + \vec{l}_3 = \vec{r}_c$ .

Проектируя это векторное уравнение на оси  $Ax$  и  $Ay$ , получаем базовые уравнения:

$$l_2 \cos \varphi_2 + l_3 \cos \varphi_3 = r_c;$$

$$l_2 \sin \varphi_2 + l_3 \sin \varphi_3 = 0.$$

Из последнего уравнения имеем:

$$\sin \varphi_3 = -\frac{l_2 \sin \varphi_2}{l_3},$$

где  $\varphi_3 = \arcsin \frac{-l_2 \sin \varphi_2}{l_3}$ .

Учитывая, что  $\cos \varphi_3 = \sqrt{1 - \frac{l_2^2 \sin^2 \varphi_2}{l_3^2}}$ , получаем

величину радиуса-вектора, определяющего положение ползуна 4:

$$r_c = l_2 \cos \varphi_2 + l_3 \sqrt{1 - \frac{l_2^2 \sin^2 \varphi_2}{l_3^2}}.$$

Для определения аналогов угловой скорости шатуна 3 и линейной скорости ползуна 4 дифференцируем базовые уравнения по обобщенной координате  $\varphi_2$ :

$$-l_2 \sin \varphi_2 - l_3 \sin \varphi_3 \frac{d\varphi_3}{d\varphi_2} = \frac{dr_c}{d\varphi_2};$$

$$l_2 \cos \varphi_2 + l_3 \cos \varphi_3 \frac{d\varphi_3}{d\varphi_2} = 0$$

$$\text{или } -l_2 \sin \varphi_2 - \varphi_3' \sin \varphi_3 l_3 = r_c';$$

$$l_2 \cos \varphi_2 + \varphi_3' \cos \varphi_3 l_3 = 0,$$

где  $\varphi_3' = \frac{d\varphi_3}{d\varphi_2}$  – аналог угловой скорости шатуна 3;

$r_c' = \frac{dr_c}{d\varphi_2}$  – аналог линейной скорости ползуна 4.

Из последнего уравнения находим

$$\varphi_3' = -\frac{l_2 \cos \varphi_2}{l_3 \cos \varphi_3}.$$

Подставляя значение  $\varphi_3'$  в уравнение для определения  $r_c'$ , находим

$$\begin{aligned} r_c' &= -l_2 \sin \varphi_2 + \frac{l_2 \cos \varphi_2 l_3 \sin \varphi_3}{l_3 \cos \varphi_3} = \\ &= \frac{-l_2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 + l_2 \cos \varphi_2 \sin \varphi_3}{\cos \varphi_3} = \end{aligned}$$

$$= \frac{l_2(\sin \varphi_3 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_3 \sin \varphi_2)}{\cos \varphi_3}.$$

Окончательно имеем формулу для определения аналога линейной скорости ползуна 4:

$$r_c' = \frac{l_2 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)}{\cos \varphi_3}.$$

Для определения аналогов углового ускорения шатуна 3 и аналога ускорений ползуна 4 дифференцируем по  $\varphi_2$  уравнения

$$\begin{aligned} -l_2 \sin \varphi_2 - \varphi_3' l_3 \sin \varphi_3 &= r_c' \\ l_2 \cos \varphi_2 + \varphi_3' l_3 \cos \varphi_3 &= 0. \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} -l_2 \cos \varphi_2 - (\varphi_3')^2 l_3 \cos \varphi_3 - \varphi_3'' l_3 \sin \varphi_3 &= r_c'', \\ -l_2 \sin \varphi_2 - (\varphi_3')^2 l_3 \sin \varphi_3 + \varphi_3'' l_3 \cos \varphi_3 &= 0, \end{aligned}$$

где  $\varphi_3'' = \frac{d^2 \varphi_3}{d\varphi_2^2}$  – аналог углового ускорения шатуна 3;

$$r_c'' = \frac{d^2 r_c}{d\varphi_2^2} \text{ – аналог ускорения ползуна 4.}$$

Из последнего уравнения определяем аналог углового ускорения шатуна 3:

$$\varphi_3'' = \frac{(\varphi_3')^2 l_3 \sin \varphi_3 + l_2 \sin \varphi_2}{l_3 \cos \varphi_3}.$$

Подставляя значение  $\varphi_3''$  в уравнение для определения аналога ускорения ползуна 4, имеем

$$r_c'' = -l_2 \cos \varphi_2 - (\varphi_3')^2 l_3 \cos \varphi_3 - \frac{\left[ (\varphi_3')^2 l_3 \sin \varphi_3 + l_2 \sin \varphi_2 \right] \cdot l_3 \sin \varphi_3}{l_3 \cos \varphi_3}.$$

После определения аналогов скоростей и ускорений легко определить скорость и ускорение шатуна 3 и ползуна 4.

$$\text{Угловая скорость шатуна } \omega_3 = \omega_2 \varphi_3';$$

$$\text{угловое ускорение шатуна } \varepsilon_3 = \omega_2^2 \varphi_3'' + \varepsilon_2 \varphi_3';$$

$$\text{линейная скорость ползуна } V_c = \omega_2 r_c';$$

$$\text{линейное ускорение ползуна } a_c = \omega_2^2 r_c'' + \varepsilon_2 r_c',$$

где  $\omega_2$  и  $\varepsilon_2$  – угловая скорость и угловое ускорение ведущего звена.

## 4. Динамический анализ механизмов

Основные задачи динамического анализа механизмов:

- 1) изучение режима движения механизма под действием заданных сил и обеспечение движения механизма с заранее заданным режимом;
- 2) определение сил в звеньях механизма при их движении.

Первая задача носит название динамики механизмов и сводится к определению движения по заданным силам.

Вторая задача носит название силового анализа механизмов и сводится к определению действующих сил по заданному движению.

#### **4.1. Движение механизмов под действием приложенных сил**

При кинематическом анализе мы рассматривали движение механизма вне зависимости от действующих на него сил и считали, что ведущее звено механизма движется равномерно. В действительности, под действием приложенных к механизму сил, закон движения механизма отличается от принятого при кинематическом анализе и ведущее звено механизма движется неравномерно.

В связи с этим и возникает следующая задача динамики: по заданным силам определить закон движения. При решении этой задачи должны быть известны приложенные к механизму внешние силы. Все внешние силы, действующие на механизм, можно разбить на две группы: силы движущие и силы сопротивления.

Движущими называют силы, которые стремятся ускорить движение ведущего звена и совершают положительную работу.

Силами сопротивления называют силы, которые стремятся замедлить движение ведущего звена и совершают отрицательную работу.

Силы тяжести звеньев при подъеме их центров тяжести оказываются силами сопротивления, а при опускании центров тяжести – движущими силами.

#### **4.2. Определение закона движения механизма**

Для определения закона движения механизма по заданным силам, действующим на звенья механизма, ис-

пользуют уравнения, называемые уравнениями движения механизма.

Число этих уравнений равно числу степеней подвижности механизма (т.е. числу ведущих звеньев).

Уравнения движения механизмов могут быть представлены в различных формах.

Для механизмов с одной степенью подвижности одна из наиболее простых форм уравнения движения получается на основании теоремы об изменении кинетической энергии, которая формулируется так: изменение кинетической энергии механизма за некоторый промежуток времени равно работе всех сил и моментов, приложенных к механизму за этот же промежуток времени.

$$T - T_0 = \sum A,$$

где  $T$  – кинетическая энергия механизма в конце периода;

$T_0$  – кинетическая энергия механизма в начале периода;

$\sum A$  – сумма работ всех сил и моментов, приложенных к механизму за время периода.

Кинетическая энергия механизма складывается из суммы кинетической энергии его звеньев. Кинетическая энергия каждого звена в общем случае движения состоит из двух частей: кинетической энергии в поступательном движении звена и кинетической энергии во вращательном движении.

$$T_{зв} = \frac{mV_S^2}{2} + \frac{J_S\omega^2}{2},$$

где  $V_S$  – скорость центра тяжести звена;

$\omega$  – угловая скорость звена;

$m$  – масса звена;

$J_S$  – центральный момент инерции звена.

Кинетическая энергия всех звеньев механизма равна

$$T = \sum T_i = \sum_{i=1}^n \left( \frac{m_i V_{Si}^2}{2} + \frac{J_{Si} \omega_i^2}{2} \right).$$

Подставив значение  $T$  в уравнение движения, имеем:

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{m_i V_{Si}^2}{2} + \frac{J_{Si} \omega_i^2}{2} \right) - T_0 = \sum A.$$

Неизвестными являются скорости многих звеньев механизма. Поэтому уравнение содержит несколько неизвестных.

Для того чтобы перейти от многих неизвестных к одной, задачу о движении всей системы подвижных звеньев механизма сводят к динамической задаче о движении одного звена, которое называется звеном приведения сил и масс. Обычно за звено приведения выбирают ведущее звено, которое, как правило, совершает вращательное движение и является кривошипом. Тогда уравнение движения механизма можно заменить тождественным ему уравнением движения одного вращающегося звена, называемого звеном приведения.

### **4.3. Приведение сил и масс в механизмах**

При изучении движения звена приведения все силы и моменты, действующие на звенья механизма, а также массы этих звеньев приводят к звену приведения и заменяют одним приведенным моментом сил  $M_n$  и приведенным моментом инерции масс  $J_n$  (рис. 18).



Рис. 18. Схема звена приведения

Приведенным моментом сил  $M_n$  называют условный момент, который, будучи приложен к звену приведения, развивает мощность  $N_n$ , равную сумме мощностей  $\sum N_i$ , развиваемых силами и моментами, действующими на звенья механизма.

Мощность, развиваемая приведенным моментом, равна

$$N_n = M_n \cdot \omega_n,$$

где  $\omega_n$  – угловая скорость звена приведения.

Мощность, развиваемая силами и моментами, действующими на звенья механизма, равна

$$\sum N_i = \sum_{i=1}^n F_i \cdot V_i \cos \alpha_i + \sum_{i=1}^n M_i \cdot \omega_i,$$

где  $F_i$  и  $M_i$  – сила и момент, приложенные к звену  $i$  ;  
 $V_i$  – скорость приложения силы  $F_i$  ;



$\omega_i$  – угловая скорость звена  $i$ ;

$\alpha_i$  – угол, образованный вектором силы  $F_i$  и вектором скорости  $V_i$ .

Учитывая, что  $N_n = \sum N_i$ , получаем:

$$M_n = \sum_{i=1}^n \left( F_i \frac{V_i}{\omega_n} \cos \alpha_i + M_i \frac{\omega_i}{\omega_n} \right).$$

Приведенным моментом инерции масс  $J_n$  называют такой условный момент инерции, которым как бы обладает звено приведения относительно оси вращения.

Кинетическая энергия звена приведения при таком моменте инерции равна сумме кинетических энергий всех звеньев механизма.

Кинетическая энергия звена приведения, имеющего момент инерции  $J_n$ , равна

$$T_n = \frac{J_n \omega_n^2}{2},$$

где  $\omega_n$  – угловая скорость звена приведения.

Кинетическая энергия всех звеньев механизма равна

$$T = \sum T_i = \sum_{i=1}^n \left( \frac{m_i V_{Si}^2}{2} + \frac{J_{Si} \omega_i^2}{2} \right).$$

Учитывая, что  $T_n = \sum T_i$ , получаем

$$J_n = \sum_{i=1}^n \left[ m_i \left( \frac{V_{Si}}{\omega_n} \right)^2 + J_{Si} \left( \frac{\omega_{Si}}{\omega_n} \right)^2 \right].$$

То есть, если ведущее звено механизма, принятое за звено приведения, имело бы момент инерции  $J_n$ , то под

действием момента сил  $M_n$ , оно двигалось бы так же, как движется в исследуемом механизме.

Необходимо отметить, что приведенный момент сил  $M_n$  и приведенный момент инерции  $J_n$  могут быть определены до решения уравнения движения, так как величины  $\frac{V_i}{\omega_n}$  и  $\frac{\omega_i}{\omega_n}$  являются аналогами скоростей, представляют собой характеристики самого механизма и не зависят от закона его движения.

#### **4.4. Уравнение движения механизма в энергетической форме**

После приведения всех масс звеньев к ведущему звену кинетическую энергию механизма можно выразить через кинетическую энергию звена приведения с моментом инерции  $J_n$ .

Кинетическая энергия механизма в конце периода:

$$T = \frac{J_n \omega_n^2}{2}, \text{ в начале периода: } T_0 = \frac{J_{no} \omega_{no}^2}{2}.$$

После приведения всех сил и моментов, действующих на механизм, к ведущему звену работу всех сил и моментов можно выразить через работу приведенного момента.

$$\sum A = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_n d\varphi,$$

где  $\varphi_0$  и  $\varphi$  – начальное и конечное значения обобщенной координаты ведущего звена за время периода.

Тогда уравнение движения механизма в энергетической форме  $T - T_0 = \sum A$  примет вид

$$\frac{J_n \omega_n^2}{2} - \frac{J_{n0} \omega_{n0}^2}{2} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_n d\varphi.$$

Из данного уравнения, если известно значение угловой скорости звена приведения в начале рассматриваемого периода, можно определить его угловую скорость в конце этого периода:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2 \sum A + J_{n0} \omega_{n0}^2}{J_n}}.$$

Зная закон движения ведущего звена механизма, можно найти кинематические параметры всех точек и звеньев механизма любым известным методом (методом диаграмм, планов или аналитическим методом).

#### **4.5. Неравномерность движения механизмов и машин**

Из уравнения движения механизма видно, что ведущее звено механизма движется неравномерно.

Работа всех сил и моментов складывается из работы движущих сил и моментов ( $A_d$ ) и работы сил и моментов сопротивления ( $A_c$ ), взятых со своими знаками, т.е.

$$\sum A = A_d - A_c.$$

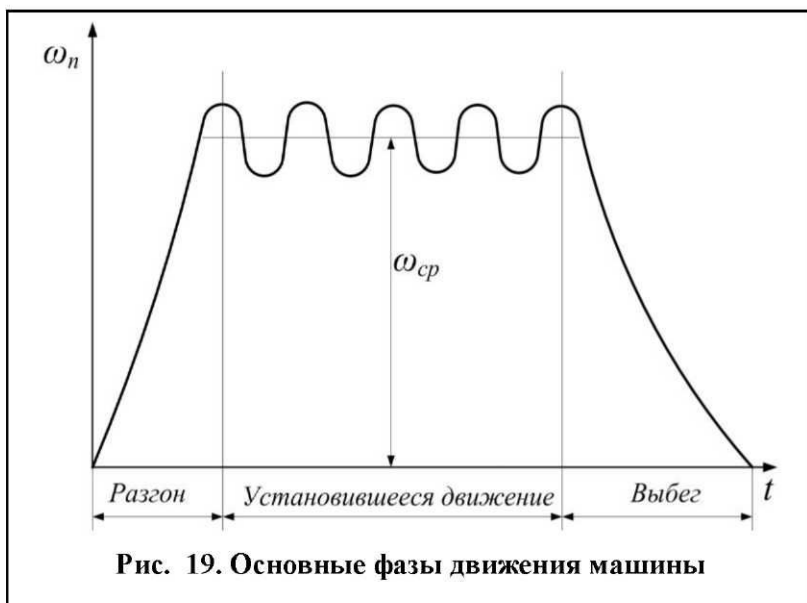
В реальных машинах работа движущих сил и работа сил сопротивления за произвольный промежуток времени не равны между собой, а приведенный момент инерции

не является величиной постоянной. То есть ведущее звено механизма движется, как правило, неравномерно.

Неравномерность движения механизмов и машин вызывает в кинематических парах дополнительные динамические давления, уменьшение КПД машины, неблагоприятное протекание технологического процесса. Поэтому весьма важной является задача обеспечения движения механизма или машины с заранее заданным режимом движения.

#### **4.6. Уравнение движения машин для отдельных фаз**

Полное время движения машины можно разбить на три фазы (рис. 19).



**Рис. 19. Основные фазы движения машины**

1. Фаза разгона характеризуется увеличением скорости звена приведения от значения  $\omega_{n0} = 0$  до некоторого значения  $\omega_n$ .

Уравнение движения для этой фазы:

$$\frac{J_n \omega_n^2}{2} = A_\partial - A_c.$$

Из уравнения движения видно, что для возможности разгона необходимо, чтобы  $A_\partial > A_c$ .

2. При установившемся движении скорость звена приведения, как правило, изменяется периодически. Причиной является периодический характер действия сил и моментов, приложенных к механизму, а также периодическое изменение приведенного момента инерции механизма. При этом среднее значение угловой скорости поддерживается на постоянном уровне.

Уравнение движения для произвольного промежутка времени имеет общий вид:

$$\frac{J_n \omega_n^2}{2} - \frac{J_{n0} \omega_{n0}^2}{2} = A_\partial - A_c.$$

3. Во время выбега скорость звена приведения падает от некоторого начального значения  $\omega_{n0}$  до нуля ( $\omega_n = 0$ ). Уравнение движения для этой фазы примет вид:

$$-\frac{J_{n0} \omega_{n0}^2}{2} = -A_c \quad \text{или} \quad \frac{J_{n0} \omega_{n0}^2}{2} = A_c.$$

Из данного уравнения видно, что остановка машины произойдет тогда, когда кинетическая энергия машины будет поглощена работой сил сопротивления. Фаза разгона

и фаза выбега характеризуются непериодическими, т.е. неповторяющимися изменениями скорости звена привода.

В дальнейшем будем рассматривать фазу установившегося движения с периодическим изменением угловой скорости звена привода.

#### **4.7. Средняя скорость машины и её коэффициент неравномерного движения**

Для изучения периодических колебаний скорости во время установившегося движения вводится понятие средней скорости звена привода.

Среднюю угловую скорость звена привода можно приближенно считать равной средней арифметической её максимального и минимального значений (рис. 20).



$$\omega_{cp} = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2}.$$

Колебание угловой скорости машины принято характеризовать коэффициентом неравномерности её движения  $\delta$ .

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{cp}}$$

Если требуется по заданной средней угловой скорости  $\omega_{cp}$  и по заданному коэффициенту неравномерности движения  $\delta$  определить минимальные и максимальные значения угловой скорости, то для этого имеем:

$$\omega_{\min} = \omega_{cp} \left( 1 - \frac{\delta}{2} \right) \text{ и } \omega_{\max} = \omega_{cp} \left( 1 + \frac{\delta}{2} \right).$$

Как видно из уравнений, отличие  $\omega_{\max}$  и  $\omega_{\min}$  от  $\omega_{cp}$  составляет  $\pm \frac{\delta}{2}$ .

Величина коэффициента неравномерности обычно не более 0,04. Следовательно, амплитуда колебаний угловой скорости машины не должна превышать в большинстве случаев 2 % от её среднего значения  $\omega_{cp}$ .

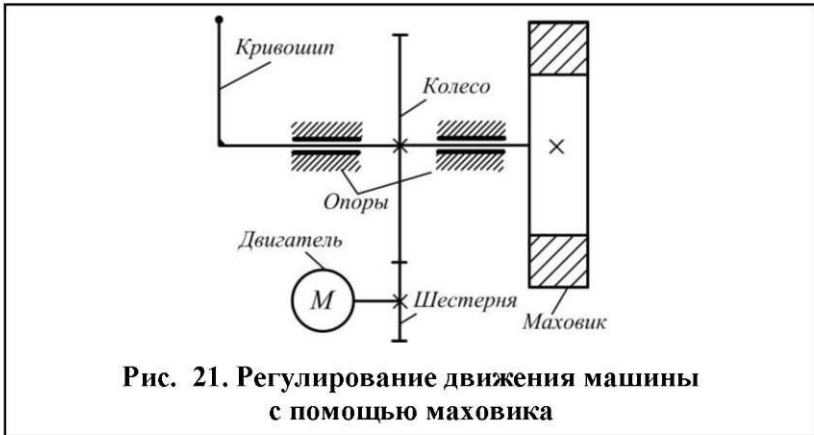
#### **4.8. Назначение маховика**

В случае, когда колебания угловой скорости при установившемся движении превышают допустимые отклонения, возникает необходимость уменьшения размаха этих колебаний.

Из физики известно, что чем более инертна материальная система, тем значительнее она сопротивляется изменениям своей скорости, вызываемым действием приложенных к ней сил. Поэтому, например, чтобы заставить вал ведущего звена механизма вращаться с меньшей не-

равномерностью, нужно увеличить инерционность механизма, т.е.  $J_n$ .

Увеличение приведенного момента инерции механизма  $J_n$  может быть достигнуто постановкой на ведущий вал механизма добавочной массы в виде маховика (рис. 21).



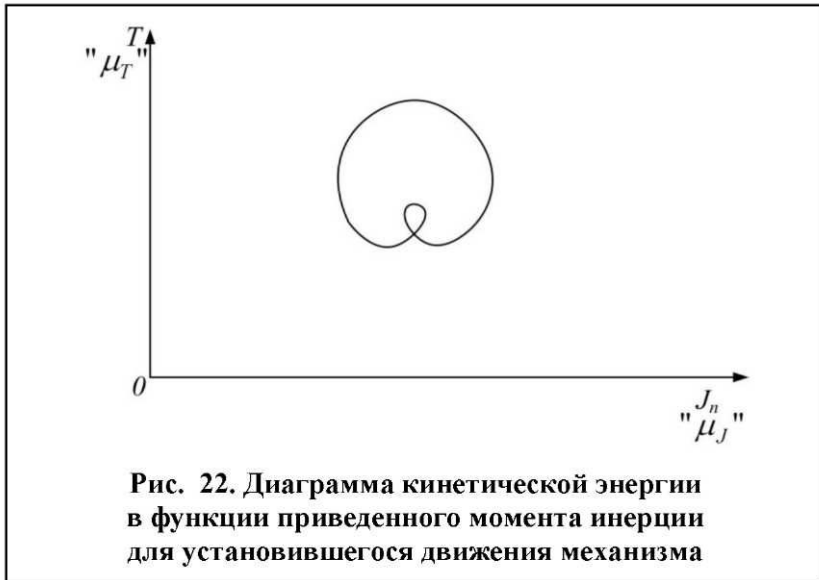
Основное назначение маховика состоит в ограничении колебаний угловой скорости в пределах, устанавливаемых величиной коэффициента неравномерности  $\delta$ .

#### 4.9. Диаграмма энергомасс

Момент инерции маховика можно определить по диаграмме энергомасс  $T = f(J_n)$  – диаграмме зависимости кинетической энергии механизма от его приведенного момента инерции.

Эта зависимость для установившегося движения, при периодическом изменении угловой скорости звена приведения, имеет вид замкнутой кривой, так как значения величин  $T$  и  $J_n$  периодически повторяются (рис. 22).





Диаграмму  $T = f(J_n)$  можно построить для каждого механизма, если заданы силы, действующие на механизм, массы и моменты инерции звеньев и начальная кинетическая энергия механизма. Для этого необходимо определить для различных положений механизма значение кинетической энергии  $T$  по уравнению

$$T = T_0 + \sum A$$

и значение  $J_n$  по уравнению

$$J_n = \sum_{i=1}^n \left[ m_i \left( \frac{V_{Si}}{\omega_n} \right)^2 + J_{Si} \left( \frac{\omega_i}{\omega_n} \right)^2 \right].$$

Диаграмму  $T = f(J_n)$  можно получить также графическим построением, если имеются диаграммы  $T = f(\varphi)$  и  $J_n = f(\varphi)$  [1].

#### 4.10. Определение движения механизма по диаграмме энергомасс

По диаграмме энергомасс можно определить угловую скорость звена приведения для любого положения механизма.

Пусть данному положению механизма соответствует точка  $B$  на кривой  $T = f(J_n)$  с координатами  $x$  и  $y$  (рис. 23).

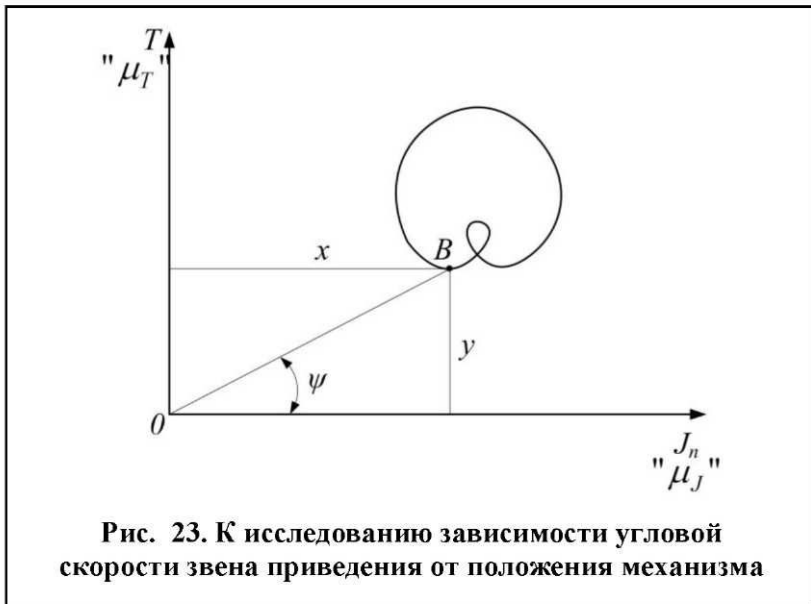


Рис. 23. К исследованию зависимости угловой скорости звена приведения от положения механизма

Тогда для этого положения  $T = y\mu_T$  и  $J_n = x\mu_J$ ,  
где  $\mu_T$  – масштаб кинетической энергии,  
 $\mu_J$  – масштаб момента инерции.

$$\text{Так как } T = \frac{J_n \omega_n^2}{2}, \text{ то } \omega_n^2 = \frac{2T}{J_n}.$$

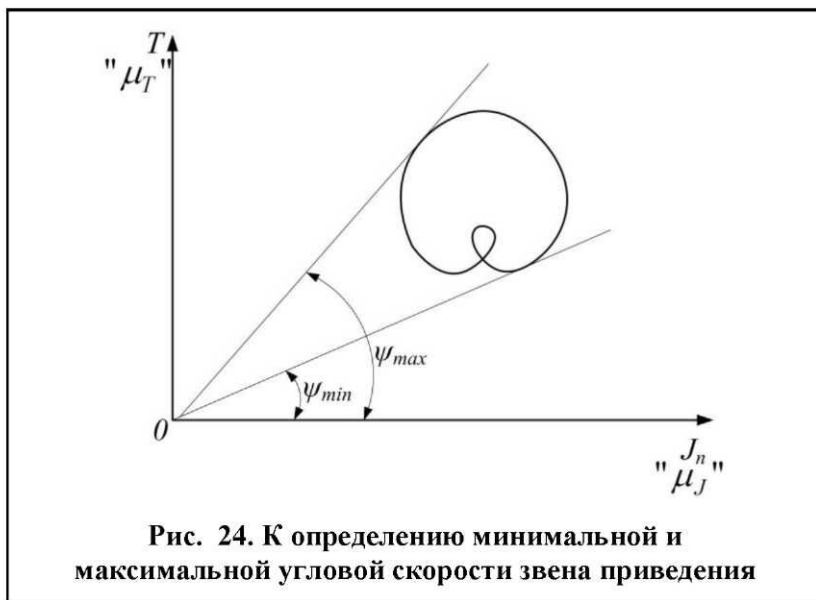
Подставляя значения  $T$  и  $J_n$  для точки  $B$ , имеем

$$\omega_n^2 = 2 \frac{\mu_T}{\mu_J} \frac{y}{x} \quad \text{или} \quad \omega_n^2 = 2 \frac{\mu_T}{\mu_J} \operatorname{tg} \psi,$$

где  $\psi$  – угол наклона луча, проведенного из начала координат в соответствующую точку, к оси  $J_n$ .

Таким образом, видим, что квадрат скорости звена приведения пропорционален тангенсу угла  $\psi$ .

Проведем из начала координат с кривой  $T = f(J_n)$  две касательные, охватывающие кривую (рис. 24).



Очевидно, что нижняя касательная, составляющая с осью  $J_n$  минимальный угол  $\psi_{\min}$ , соответствует мини-

мальной угловой скорости звена приведения  $\omega_{\min}$ , а верхняя касательная, составляющая с осью  $J_n$  максимальный угол  $\psi_{\max}$ , соответствует максимальной угловой скорости звена приведения  $\omega_{\max}$ .

$$\omega_{\min}^2 = 2 \frac{\mu_I}{\mu_J} \operatorname{tg} \psi_{\min};$$

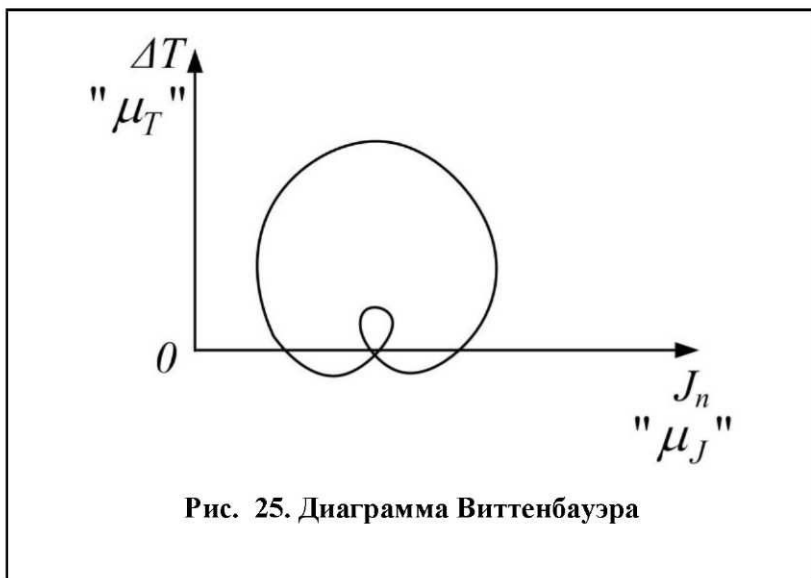
$$\omega_{\max}^2 = 2 \frac{\mu_I}{\mu_J} \operatorname{tg} \psi_{\max}.$$

#### **4.11. Определение момента инерции маховика**

Так как для установившегося движения начальные условия обычно не задаются, то величина  $T_0$  является неизвестной и полную диаграмму энергомасс построить не удастся. Однако изменение кинетической энергии механизма за произвольный промежуток времени может быть определено, т.е.

$$T - T_0 = \Delta T = \sum A = A_d - A_c.$$

График зависимости приращения кинетической энергии  $\Delta T$  от приведенного момента инерции  $J_n$ , т.е.  $\Delta T = f(J_n)$ , называется диаграммой Виттенбауэра (рис. 25), где  $J_n$  – приведенный момент инерции механизма без маховика.



Для того чтобы определить момент инерции маховика, необходимо построить полную диаграмму энергомасс:

$$T = f(J_n')$$

где  $J_n'$  – приведенный момент инерции механизма с маховиком;

$T$  – кинетическая энергия механизма с маховиком.

Так как изменение кинетической энергии  $\Delta T = \sum A$  одинаково как для механизма с маховиком, так и без него, то полная диаграмма энергомасс  $T = f(J_n')$  отличается от неполной  $\Delta T = f(J_n)$  только началом координат.

Начало координат полной диаграммы может быть определено, если известны коэффициент неравномерности  $\delta$  и средняя угловая скорость звена приведения  $\omega_{cp}$ .

Для этого произведем следующие преобразования.  
Возведем в квадрат уравнения

$$\omega_{\max} = \omega_{cp} \left(1 + \frac{\delta}{2}\right) \text{ и } \omega_{\min} = \omega_{cp} \left(1 - \frac{\delta}{2}\right).$$

Получим

$$\omega_{\max}^2 = \omega_{cp}^2 \left(1 + \delta + \frac{\delta^2}{4}\right) \text{ и } \omega_{\min}^2 = \omega_{cp}^2 \left(1 - \delta + \frac{\delta^2}{4}\right).$$

Членом  $\frac{\delta^2}{4}$  ввиду малости  $\delta$  можно пренебречь,

тогда

$$\omega_{\max}^2 = \omega_{cp}^2 (1 + \delta) \text{ и } \omega_{\min}^2 = \omega_{cp}^2 (1 - \delta), \text{ но}$$

$$\omega_{\max}^2 = 2 \frac{\mu_T}{\mu_J} \cdot \operatorname{tg} \psi_{\max} \text{ и } \omega_{\min}^2 = 2 \frac{\mu_T}{\mu_J} \cdot \operatorname{tg} \psi_{\min}.$$

В результате имеем

$$\omega_{cp}^2 (1 + \delta) = 2 \frac{\mu_T}{\mu_J} \cdot \operatorname{tg} \psi_{\max},$$

$$\omega_{cp}^2 (1 - \delta) = 2 \frac{\mu_T}{\mu_J} \operatorname{tg} \psi_{\min}.$$

Откуда

$$\operatorname{tg} \psi_{\max} = \frac{\mu_J}{2\mu_T} \cdot \omega_{cp}^2 (1 + \delta),$$

$$\operatorname{tg} \psi_{\min} = \frac{\mu_J}{2\mu_T} \cdot \omega_{cp}^2 (1 - \delta).$$

Теперь к диаграмме Виттенбауэра  $\Delta T = f(J_n)$  можно провести касательные под углами  $\psi_{\max}$  и  $\psi_{\min}$ , которые соответствуют максимальным и минимальным угловым скоростям. Точка пересечения касательных есть начало координат полной диаграммы энергомасс  $T = f(J_n')$  (рис. 26).

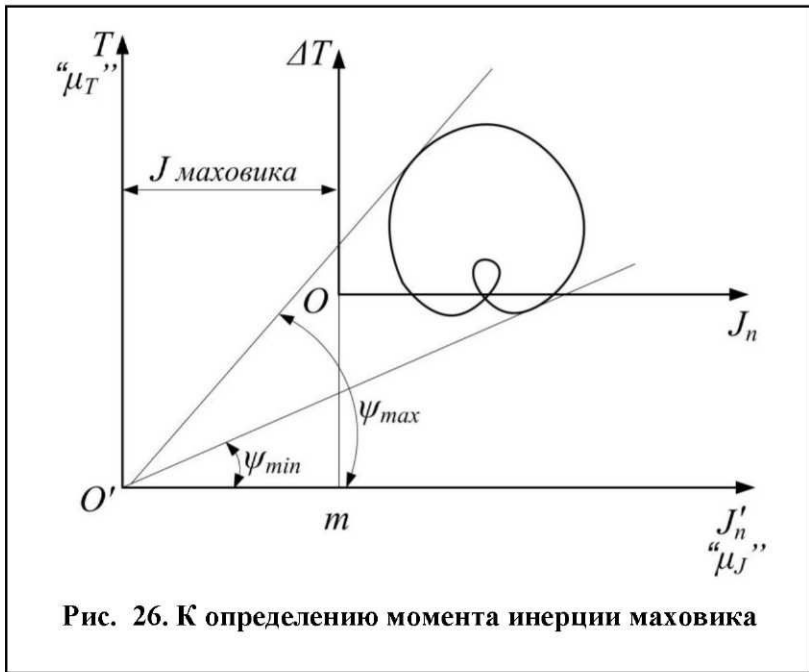


Рис. 26. К определению момента инерции маховика

Отрезок  $O'm$  в масштабе  $\mu_J$  представляет собой момент инерции маховика  $J_{\text{махов}} = \mu_J(O'm)$ , который нужно установить на вал звена приведения, чтобы механизм двигался с заданным коэффициентом неравномерности хода  $\delta$  и средней скоростью  $\omega_{\text{ср}}$ .

## 5. Силовой анализ механизмов

Силовой анализ механизмов является частью динамического анализа и сводится к определению действующих сил по заданному закону движения.

Определение сил, действующих на звенья механизма, необходимо для расчета на прочность отдельных деталей механизмов, для определения мощности, потребной для работы механизма, для определения потерь на трение в кинематических парах и т.д.

При силовом анализе механизма предполагают известным закон движения ведущего звена и внешние силы, приложенные к механизму.

Силовой расчет механизмов может быть произведен разными методами. В теории механизмов и машин широкое применение получил метод силового расчета механизмов на основе обыкновенных уравнений статики.

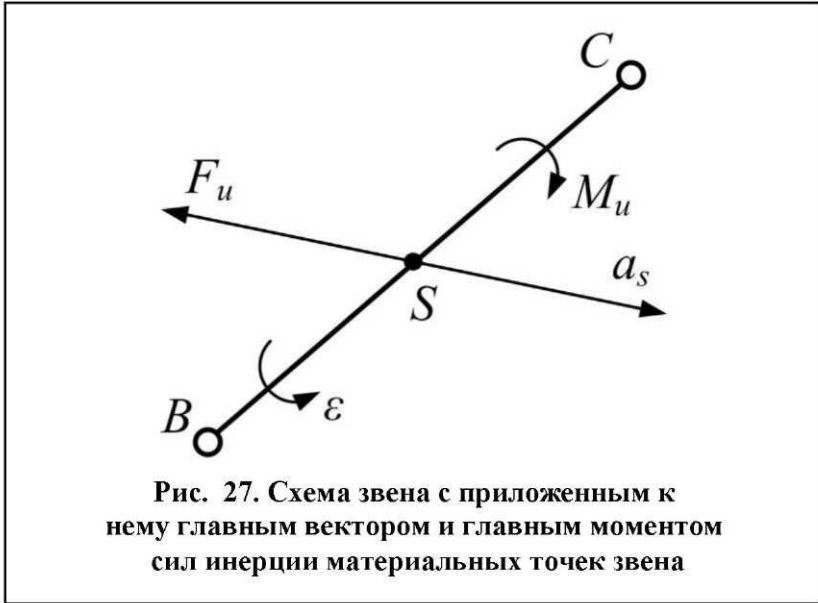
Сущность этого метода сводится к применению при решении задач динамики уравнений равновесия Даламбера.

Для этого силу инерции, которая является противодействием ускоряемого тела, условно переносят на ускоряемое тело. Перенесенная сила уравнивается со всеми остальными внешними силами, в том числе и с реакциями, действующими на это тело, что позволяет задачу динамики решать с помощью уравнений статики.

### 5.1. Определение сил инерции звеньев

В общем случае все силы инерции звена, совершающего плоскопараллельное движение, могут быть сведены к силе инерции  $F_u$ , приложенной в центре масс звена и к паре сил инерции, момент которой равен  $M_u$  (рис. 27).





Сила  $F_u$  может быть определена по формуле

$$\bar{F}_u = -m\bar{a}_S,$$

где  $m$  – масса звена;  $a_S$  – ускорение центра масс.

Сила инерции  $F_u$  направлена противоположно ускорению  $a_S$  точки  $S$ .

Момент пары сил может быть определен по формуле

$$\bar{M}_u = -J_S\bar{\varepsilon},$$

где  $J_S$  – момент инерции звена относительно оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной плоскости движения звена (центральный момент инерции звена);

$\varepsilon$  – угловое ускорение звена.

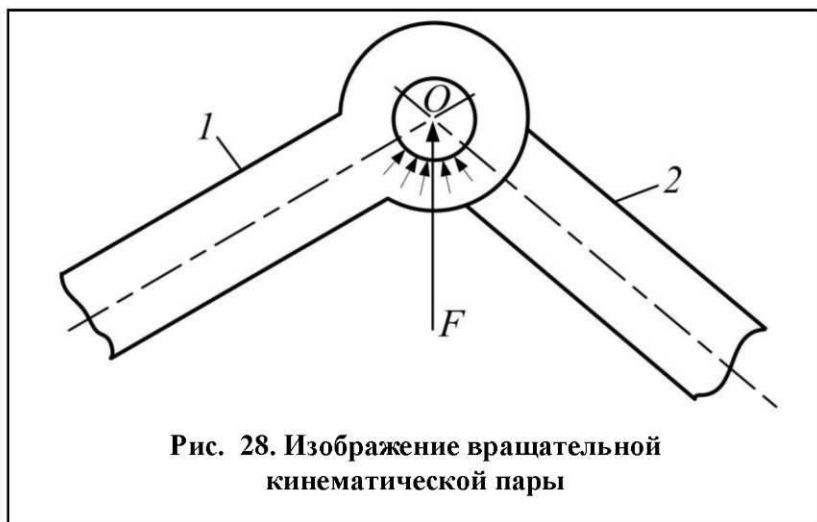
Направление момента  $M_u$  противоположно угловому ускорению  $\varepsilon$ .

## 5.2. Направление реакций в плоских кинематических парах

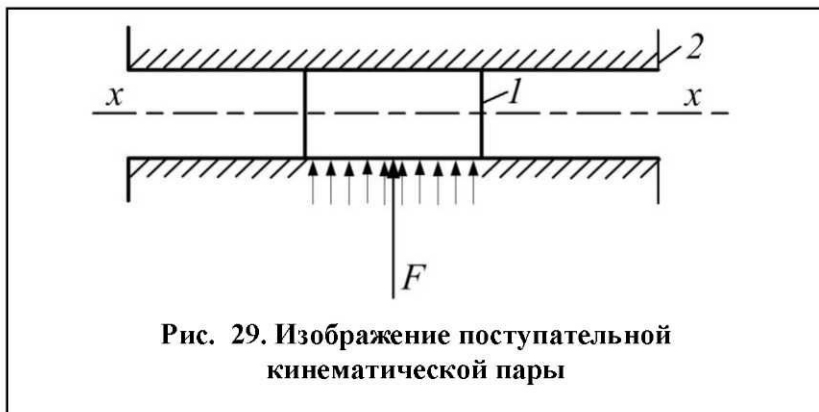
Рассмотрим, как будут направлены реакции в различных кинематических парах плоских механизмов.

Силы реакции между двумя соприкасающимися звеньями, при отсутствии сил трения, всегда направлены по нормали к соприкасающимся поверхностям.

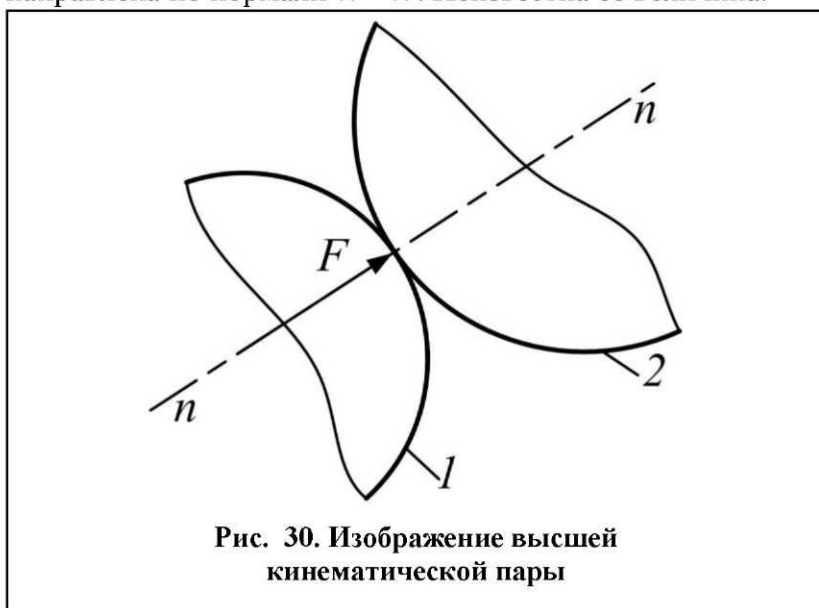
Во вращательной паре V класса, состоящей из звеньев 1 и 2, (рис. 28) результирующая сила реакции  $F$  проходит через центр шарнира (точка  $O$ ). Величина и направление этой реакции неизвестны.



В поступательной паре V класса, образованной звеньями 1 и 2, (рис. 29) результирующая сила  $F$  перпендикулярна к оси движения  $x - x$  этой пары. Неизвестны её точка приложения и величина.



В высшей паре IV класса, содержащей звенья 1 и 2, (рис. 30) реакция  $F$  приложена в точке касания звеньев и направлена по нормали  $n - n$ . Неизвестна её величина.



Таким образом, для определения реакции в каждой из низших пар V класса необходимо найти по две неиз-

вестных, а для определения реакции в высшей паре IV класса – только одну неизвестную величину.

### **5.3. Условие статической определимости кинематических цепей**

Обозначим число подвижных звеньев плоской кинематической цепи через  $n$ , число пар V класса через  $p_5$  и число пар IV класса через  $p_4$ . Составим условие статической определимости плоской кинематической цепи, т.е. число уравнений, которое можно составить для кинематической цепи, должно быть равно числу неизвестных.

Так как для каждого звена, имеющего плоскопараллельное движение, можно написать три уравнения равновесия, то число уравнений, которое мы можем составить при  $n$  звеньях, будет равно  $3n$ .

Число неизвестных, которое необходимо определить, для пар V класса будет равно  $2p_5$  и для пар IV класса –  $p_4$ .

Следовательно, кинематическая цепь будет статически определима, если выполняется условие  $3n = 2p_5 + p_4$ .

Как было доказано ранее, любой механизм с парами IV и V классов, может быть заменен механизмом с парами только V класса. Тогда для механизма с парами V класса условие статической определимости кинематической цепи может быть записано так:  $3n = 2p_5$ . Откуда

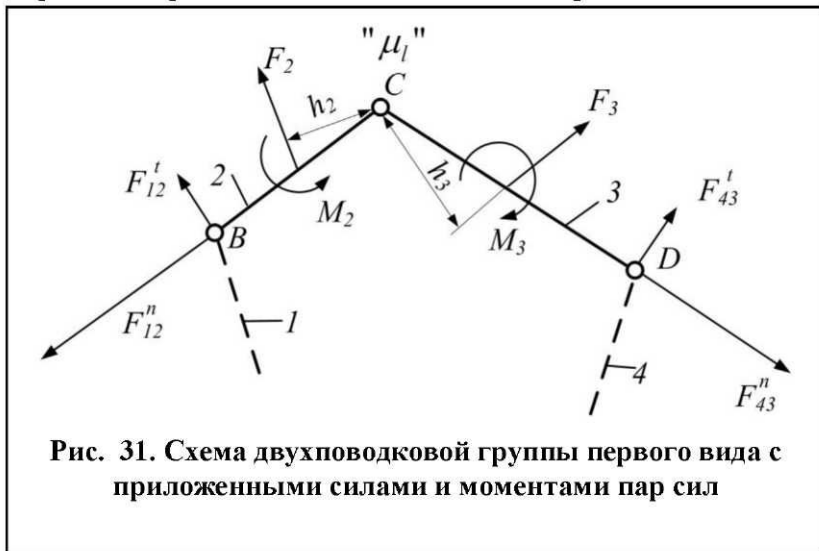
$$p_5 = \frac{3}{2}n.$$

Кинематические цепи, удовлетворяющие этому условию, как указывалось выше, называют группами Ассура.

Следовательно, группы Ассура являются статически определяемыми. Силовой расчет механизма ведут по-группно, начиная с группы Ассура, наиболее удаленной от ведущего звена, затем предыдущей и т.д. и оканчивают силовым расчетом ведущего звена.

### 5.4. Определение реакций в кинематических парах группы Ассура второго класса первого вида

Пусть рассматриваемая группа нагружена силами  $F_2$  и  $F_3$  и моментами  $M_2$  и  $M_3$  (рис. 31). Требуется определить реакции в кинематических парах.



В шарнирах  $B$  и  $D$  прикладываем неизвестные пока реакции  $F_{12}$  и  $F_{43}$ .

$F_{12}$  – реакция со стороны отброшенного звена  $1$  на звено  $2$ .

$F'_{43}$  – реакция со стороны отброшенного звена 4 на звено 3.

Так как направление этих реакций неизвестно, то раскладываем каждую из них на две составляющие: одну (нормальную), направленную по оси звена, и другую (касательную), направленную перпендикулярно оси звена. Тогда имеем

$$\bar{F}'_{12} = \bar{F}'_{12}{}^n + \bar{F}'_{12}{}^t \text{ и } \bar{F}'_{43} = \bar{F}'_{43}{}^n + \bar{F}'_{43}{}^t.$$

Определяем величину составляющих реакций, направленных перпендикулярно оси звена, для чего для каждого звена составляем уравнение моментов относительно точки  $C$ .

$$\sum M_{c(2)} = 0 \text{ – уравнение равновесия для звена 2.}$$

$$F'_{12}{}^t l_{BC} + F'_2 l_{h_2} - M_2 = 0.$$

Откуда  $F'_{12}{}^t = \frac{M_2 - F'_2 l_{h_2}}{l_{BC}},$

где  $l_{h_2} = h_2 \mu_e.$

$$\sum M_{c(3)} = 0 \text{ – уравнение равновесия для звена 3.}$$

$$- F'_{43}{}^t l_{CD} - F'_3 l_{h_3} + M_3 = 0.$$

Откуда  $F'_{43}{}^t = \frac{M_3 - F'_3 l_{h_3}}{l_{CD}},$

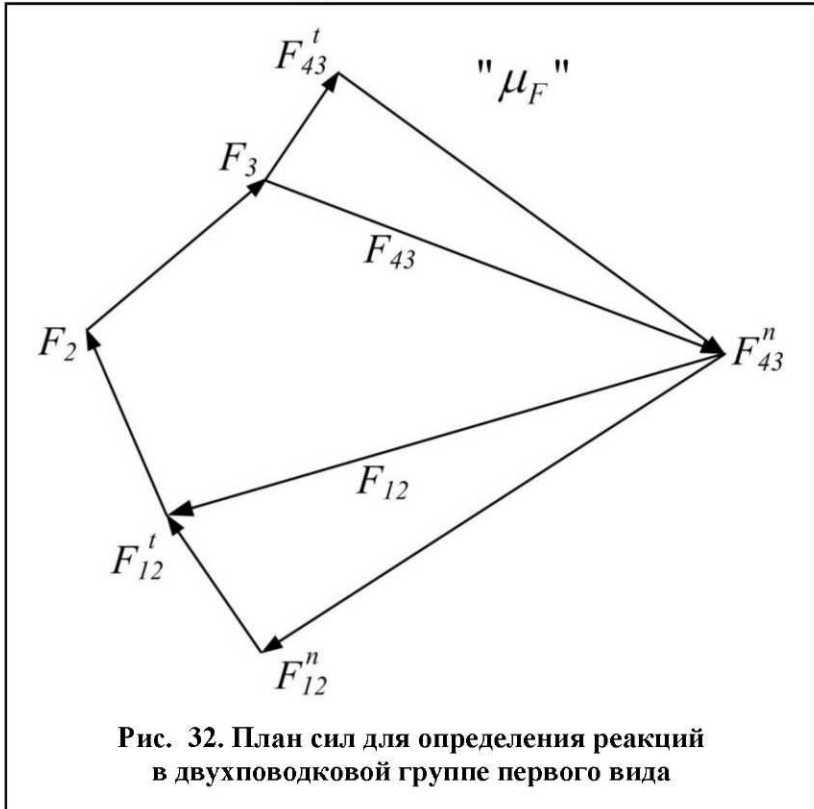
где  $l_{h_3} = h_3 \mu_e.$

При вычислении величины сил могут оказаться отрицательными. Это значит, что в действительности направление сил противоположно принятому.

Составляем векторное уравнение равновесия сил, действующих на группу в целом, т.е.  $\sum \bar{F}'_{(2,3)} = 0,$  или

$$\bar{F}_{12}^n + \bar{F}_{12}^t + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_{43}^t + \bar{F}_{43}^n = 0.$$

Неизвестные по величине нормальные составляющие реакций могут быть определены построением плана сил в масштабе  $\mu_F, \frac{H}{MM}$  (рис. 32).



**Рис. 32. План сил для определения реакций в двухповодковой группе первого вида**

Полные реакции  $F_{12}$  и  $F_{43}$  получаем как результирующие согласно векторным уравнениям:

$$\bar{F}_{12} = \bar{F}_{12}^n + \bar{F}_{12}^t \text{ и } \bar{F}_{43} = \bar{F}_{43}^n + \bar{F}_{43}^t.$$

Определяем реакции в шарнире  $C$ , для чего составляем векторное уравнение равновесия сил для звена 2.

$$\sum \bar{F}_{(2)} = 0 \text{ или } \underline{\underline{\bar{F}_{12}}} + \underline{\underline{\bar{F}_2}} + \underline{\underline{\bar{F}_{32}}} = 0.$$

Для решения этого уравнения строим в масштабе план сил (рис. 33).

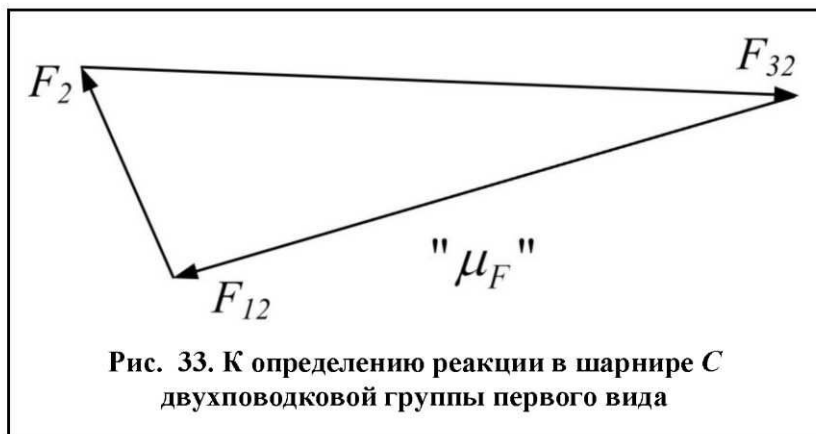


Рис. 33. К определению реакции в шарнире  $C$  двухповодковой группы первого вида

### 5.5. Определение реакций в кинематических парах группы Ассура второго класса второго вида

Пусть рассматриваемая группа нагружена силами  $F_2$  и  $F_3$  и моментами  $M_2$  и  $M_3$  (рис. 34).

Требуется определить реакции в кинематических парах.

В шарнире  $B$  прикладываем неизвестную пока реакцию  $F_{12}$ , которую раскладываем на две составляющие  $F_{12}^n$  и  $F_{12}^t$ , т.е.  $\bar{F}_{12} = \bar{F}_{12}^n + \bar{F}_{12}^t$ .

Реакцию в поступательной паре  $F_{43}$  направляем перпендикулярно направляющей  $x-x$ . Точку её приложения пока выбираем произвольно.



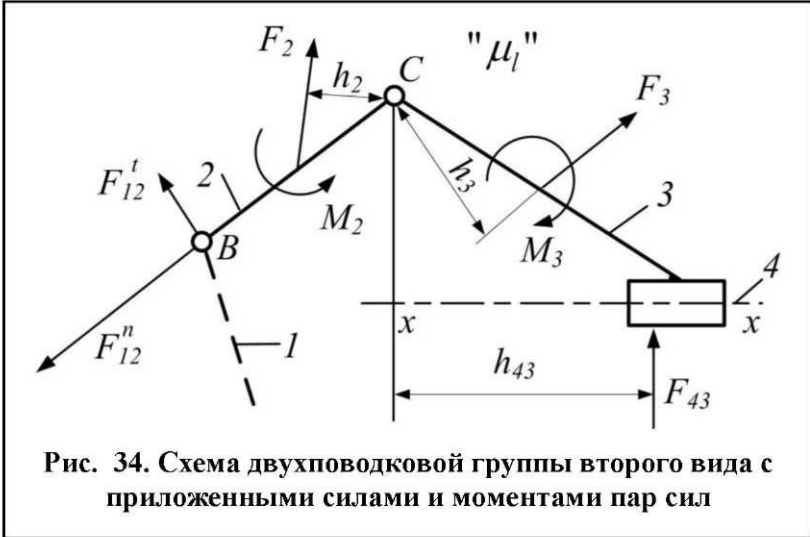


Рис. 34. Схема двухзвонковой группы второго вида с приложенными силами и моментами пар сил

Определяем величину  $F_{12}^t$  составляющей реакции  $F_{12}$ , для чего составляем уравнение моментов для звена 2 относительно точки  $C$ .

$$\sum M_{c(2)} = 0 \text{ – уравнение равновесия для звена 2.}$$

$$F_{12}^t l_{BC} + F_2 l_{h_2} - M_2 = 0.$$

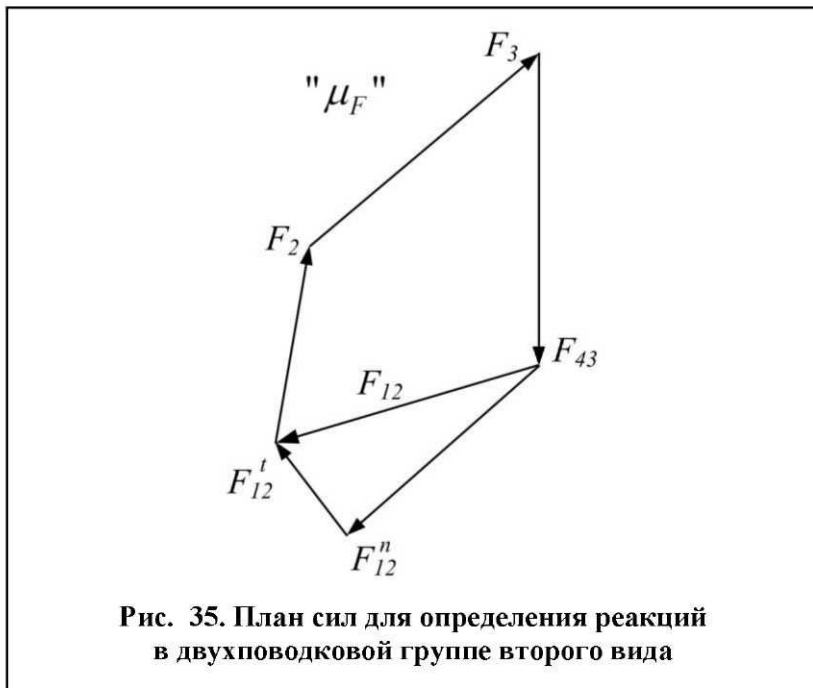
Откуда  $F_{12}^t = \frac{M_2 - F_2 l_{h_2}}{l_{BC}}$ ,

где  $l_{h_2} = h_2 \mu_1$ .

Определяем величины векторов  $\bar{F}_{12}^n$  и  $\bar{F}_{43}$ , для чего составляем векторное уравнение равновесия сил, действующих на группу в целом, т.е.  $\sum \bar{F}_{(2,3)} = 0$ , или

$$\underline{\bar{F}_{12}^n} + \underline{\bar{F}_{12}^t} + \underline{\bar{F}_2} + \underline{\bar{F}_3} + \underline{\bar{F}_{43}} = 0.$$

Неизвестные по величине реакции  $F_{12}^n$  и  $F_{43}$  могут быть определены построением многоугольника сил (рис. 35).



**Рис. 35. План сил для определения реакций в двухповодковой группе второго вида**

Определяем реакцию в шарнире  $C$ , для чего составляем векторное уравнение равновесия сил для звена 2, т.е.  $\sum \bar{F}_{(2)} = 0$ , или  $\underline{\underline{F}}_{12} + \underline{\underline{F}}_2 + \underline{\underline{F}}_{32} = 0$ .

Для решения этого уравнения строим в масштабе  $\mu_F$  план сил (рис. 36).

Определяем точку приложения реакции  $F_{43}$ , для чего составляем уравнение моментов для звена 3 относительно точки  $C$ . При этом необходимо учитывать действи-

тельное направление реакции  $F_{43}$ , которое имеем на плане сил.

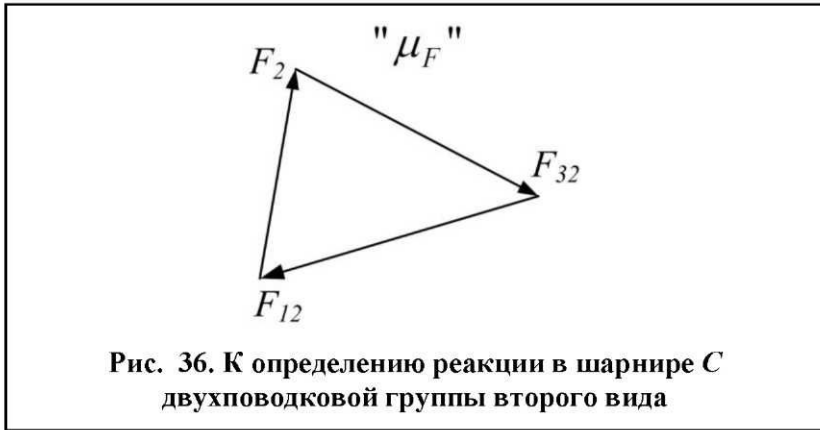


Рис. 36. К определению реакции в шарнире  $C$  двухповодковой группы второго вида

$\sum M_{C(3)} = 0$  – уравнение равновесия для звена 3.

$$F_{43} \cdot l_{h_{43}} - F_3 \cdot l_{h_3} + M_3 = 0,$$

где  $l_{h_3} = h_3 \mu_l$ .

Откуда  $l_{h_{43}} = \frac{F_3 \cdot l_{h_3} - M_3}{F_{43}},$

где  $l_{h_{43}} = h_{43} \mu_l$ .

Положение плеча  $h_{43}$  (рис. 34) определяем в соответствии со знаком правой части уравнения.

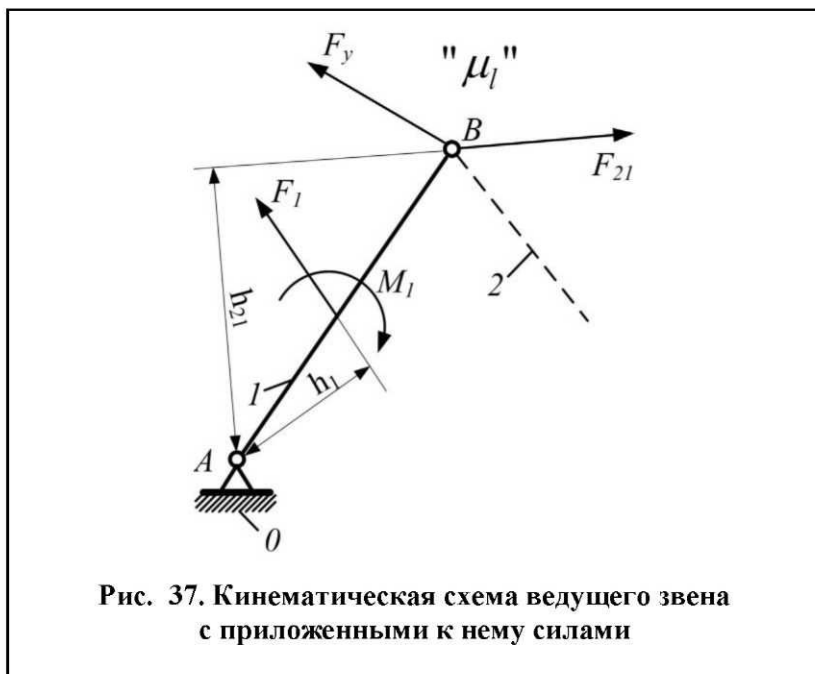
Аналогично определяют реакции для групп других видов.

### 5.6. Силовой расчет ведущего звена

После расчета всех групп Ассур, входящих в состав механизма, переходят к расчету ведущего звена. Обычно ведущим звеном является кривошип. Силовой

расчет ведущего звена выполняют для определения реакций в его кинематической паре со стойкой и нахождения уравновешивающей или движущей силы (или момента), которую необходимо приложить к ведущему звену с тем, чтобы оно, преодолевая сопротивление ведомой части механизма, двигалось бы с заданной скоростью.

На рис. 37 показано ведущее звено – кривошип, на которое действуют заданные силы  $F_1$  и момент  $M_1$ , представляющие собой результирующие от внешних нагрузок и сил инерции.



В точке  $B$  на ведущее звено действует известная из предыдущего расчета реакция  $F_{21}$  со стороны отбро-

шенного звена 2. Кривошип приводится во вращательное движение силой  $F_y$ . Для упрощения расчета обычно уравновешивающую силу  $F_y$  прикладывают в конце кривошипа в направлении линейной скорости точки её приложения (точка  $B$ ).

Для определения величины уравновешивающей силы  $F_y$  составляем уравнение моментов относительно точки  $A$ .

$$\sum M_{A(1)} - \text{уравнение равновесия для звена } I.$$

$$-F_y l_{AB} - F_1 l_{h_1} + F_{21} l_{h_{21}} + M_1 = 0.$$

Откуда  $F_y = \frac{M_1 + F_{21} l_{h_{21}} - F_1 l_{h_1}}{l_{AB}},$

где  $l_{h_{21}} = h_{21} \mu_l$  и  $l_{h_1} = h_1 \mu_l$ .

При вычислении величина силы  $F_y$  может оказаться отрицательной. Это значит, что в действительности сила направлена в противоположную сторону.

Для определения реакции  $F_{01}$ , т.е. реакции со стороны стойки на ведущее звено, составляем векторное уравнение равновесия сил, действующих на ведущее звено  $\sum \bar{F}_{(1)} = 0$ , или  $\underline{\underline{\bar{F}_1}} + \underline{\underline{\bar{F}_{21}}} + \underline{\underline{\bar{F}_y}} + \underline{\underline{\bar{F}_{01}}} = 0$ .

Для решения этого уравнения строим в масштабе  $\mu_l$  план сил (рис. 38).



Рис. 38. План сил для определения реакции со стороны стойки на ведущее звено

### 5.7. Рычаг Жуковского

Уравновешивающая сила  $F_y$  может быть также определена при помощи метода (теоремы) Н.Е. Жуковского.

Пусть на точку  $A$  какого-либо звена, движущегося со скоростью  $V_A$ , действует сила  $F$  (рис. 39, *a*).

Мгновенная мощность этой силы равна  $P = F \cdot V_A \cdot \cos\alpha$ , где  $\alpha$  – угол между направлением силы  $F$  и направлением вектора скорости  $V_A$ .

Повернем вектор скорости  $V_A$  на  $90^\circ$  (в любом направлении) и перенесем силу  $F$  параллельно самой себе в конец этого вектора (рис. 39, *б*).

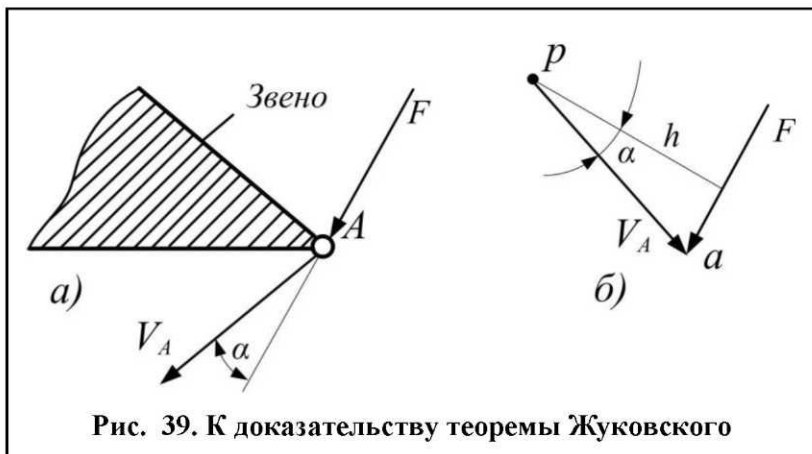


Рис. 39. К доказательству теоремы Жуковского

Момент силы  $F$  относительно полюса (точки  $p$ ) будет равен

$$M = F \cdot h = F \cdot (pa) \cdot \cos \alpha .$$

Сравнивая выражения для мощности  $P$  и момента  $M$ , видим, что они пропорциональны.

Из теоретической механики известно, что если система под действием сил находится в равновесии, то сумма элементарных работ или мощностей этих сил равна нулю. Следовательно, равна нулю и сумма моментов сил относительно полюса повернутого плана скоростей.

В связи с этим план скоростей рассматривают как жесткий рычаг, шарнирно закрепленный в полюсе и находящийся под действием сил в равновесии. Этот рычаг получил название рычага Жуковского.

В случае, когда это удобно, можно поворачивать на  $90^\circ$  не план скоростей, а все силы, действующие на механизм.

## 5.8. Уравновешивание вращающихся масс

Неуравновешенность вращающейся детали выражается в том, что центр тяжести детали не совпадает с осью вращения. Кроме того, ось вращения не является главной центральной осью инерции вращающейся детали. Процесс уравновешивания вращающейся детали называют балансировкой. То есть необходимость уравновешивания вращающихся масс связана с появлением сил инерции и моментов от них, которые, будучи переменными по направлению, отрицательно сказываются на работе как отдельных частей машины, так и всей машины в целом. Силы инерции увеличивают напряжения в звеньях машины, трение в кинематических парах и их изнашивание, что приводит к уменьшению общего коэффициента полезного действия машины и значительному сокращению её срока службы.

Неуравновешенные массы могут быть расположены как в одной, так и в параллельных плоскостях.

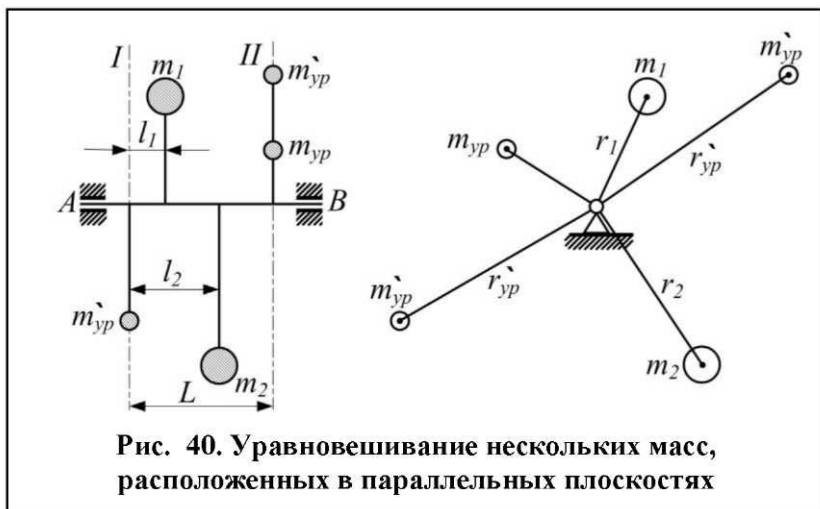
В первом случае достаточно уравновесить одни лишь силы инерции. Достигают этого путем установки одного противовеса, который, смещая общий центр тяжести системы до совмещения его с осью вращения, делает равнодействующую сил инерции равной нулю. Такое уравновешивание называется статическим.

Во втором случае, когда массы расположены в параллельных плоскостях, кроме сил инерции необходимо уравновесить и моменты от них, т.е. выполнить динамическое уравновешивание. В этом случае, задача может быть разрешена лишь при установке двух противовесов. Уравновешивание вращающихся масс, расположенных в параллельных плоскостях, рассмотрим на следующем примере (рис. 40).

Пусть на одном валу  $AB$  вращаются равномерно массы  $m_1$  и  $m_2$  с центрами тяжести на расстояниях соот-



ветственно  $r_1$  и  $r_2$  от оси вращения. Требуется произвести уравнивание этих масс с помощью уравнивающих грузов (масс), установленных в плоскостях уравнивания I и II.



**Рис. 40. Уравнивание нескольких масс, расположенных в параллельных плоскостях**

Сила инерции каждой массы при равномерном вращении звена направлена вдоль радиуса от оси вращения и равна  $\vec{F}_{ui} = -m_i \vec{a}_{s_i} = -m_i \vec{r}_i \omega^2$ .

Главный вектор сил инерции всех масс равен

$$F_u = \sum \vec{F}_{u_i} = \sum m_i \vec{a}_{s_i} = \sum m_i \vec{r}_i \omega^2.$$

Для того чтобы силы инерции не оказывали давления на опоры, необходимо, чтобы главный вектор был равен нулю:  $F_u = \sum m_i \vec{r}_i \omega^2 = 0$  или  $\sum m_i \vec{r}_i = 0$ .

Это условие называют условием статической уравниваемости, а величину  $m_i r_i$  – статическим моментом масс.

$$\text{Для нашего случая } \underline{m_1 r_1} + \underline{m_2 r_2} + m_{yp} \vec{r}_{yp} = 0,$$

где  $m_{yp}$  – величина статически уравнивающей массы;

$r_{yp}$  – расстояние центра тяжести массы  $m_{yp}$  от оси вращения вала  $AB$ .

Определяем величины известных векторов  $m_1\bar{r}_1$  и  $m_2\bar{r}_2$  и строим в масштабе  $\mu_{mr}$  замкнутый векторный треугольник (рис. 41).



**Рис. 41. Построение замкнутого векторного треугольника сил**

Определяем величину  $m_{yp} r_{yp}$  и, задаваясь расстоянием  $r_{yp}$ , находим величину статически уравнивающей массы  $m_{yp}$ . Эту массу располагаем в плоскости уравнивания II (рис. 40) на расстоянии  $r_{yp}$  в направлении вектора  $m_{yp}\bar{r}_{yp}$ . Процесс достижения статического уравнивания называют статической балансировкой.

Для полного уравнивания одного статического уравнивания недостаточно. Чтобы не было давления в опорах, кроме того, необходимо, чтобы сумма моментов от сил инерции была равна нулю.

$$\sum \bar{M}_i = 0.$$

Величина момента  $M_i$  равна произведению силы инерции  $F_{u_i}$  на плечо  $l_i$  от плоскости уравнивания до линии действия силы:  $M_i = F_{u_i} l_i = m_i \bar{r}_i \omega_i^2 l_i$ . Исключив величину угловой скорости, имеем:

$$\sum m_i \bar{r}_i l_i = 0.$$

Это условие называют условием динамического уравнивания вращающихся масс. Процесс достижения условия динамического уравнивания называют динамической балансировкой.

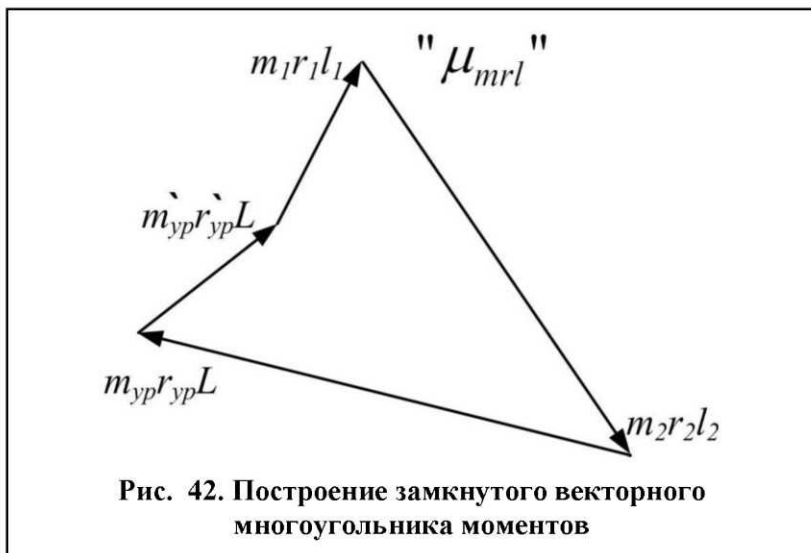
Для нашего случая относительно плоскости уравнивания I:

$$\underline{m_1 \bar{r}_1 l_1} + \underline{m_2 \bar{r}_2 l_2} + \underline{m_{yp} \bar{r}_{yp} L} + m'_{yp} \bar{r}'_{yp} L = 0,$$

где  $m'_{yp}$  – величина динамически уравнивающей массы устанавливаемой в плоскости уравнивания II;

$r'_{yp}$  – расстояние центра тяжести массы  $m'_{yp}$  от оси вращения вала  $AB$ .

Определяем величины известных векторов и строим в масштабе  $\mu_{mrl}$  замкнутый векторный многоугольник (рис. 42).



Определяем величину  $m'_{yp} r'_{yp} L$  и, задаваясь расстоянием  $r'_{yp}$ , определяем величину динамически уравновешивающей массы  $m'_{yp}$ . Устанавливаем эту массу в плоскости II на расстоянии  $r'_{yp}$  в направлении вектора  $m'_{yp} r'_{yp} L$ .

Для того чтобы не нарушить статическое уравновешивание, точно такую же массу  $m'_{yp}$  на таком же по величине радиусе  $r'_{yp}$ , только в противоположном направлении, устанавливаем в плоскости I. Массы  $m_{yp}$  и  $m'_{yp}$ , расположенные в одной плоскости II, могут быть заменены одной уравновешивающей массой.

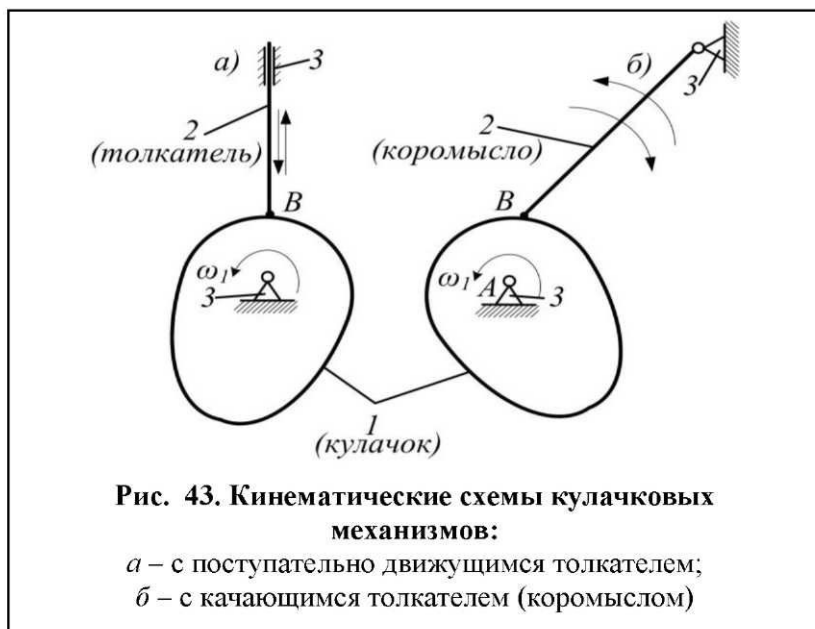
Таким образом, полное уравновешивание вращающихся масс может быть осуществлено при помощи двух масс, расположенных в плоскостях уравновешивания I и II.

## 6. Кинематический анализ механизмов с высшими парами

### 6.1. Плоские кулачковые механизмы

Кулачковые механизмы позволяют легко и просто осуществить любой заданный закон движения ведомого звена, для чего требуется лишь подобрать соответствующий профиль кулачка. С помощью кулачкового механизма можно получить прерывистое движение ведомого звена, т.е. движение с остановкой.

Кинематическая цепь простейшего кулачкового механизма с одной степенью свободы состоит из двух подвижных звеньев – кулачка *1* и толкателя (коромысла) *2*, образующих между собой высшую кинематическую пару в точке *B*, и стойки *3*, с которой каждое из этих звеньев входит в низшую пару (рис. 43).



Ведущим звеном механизма обычно является кулачок, который в большинстве случаев совершает непрерывное вращательное движение.

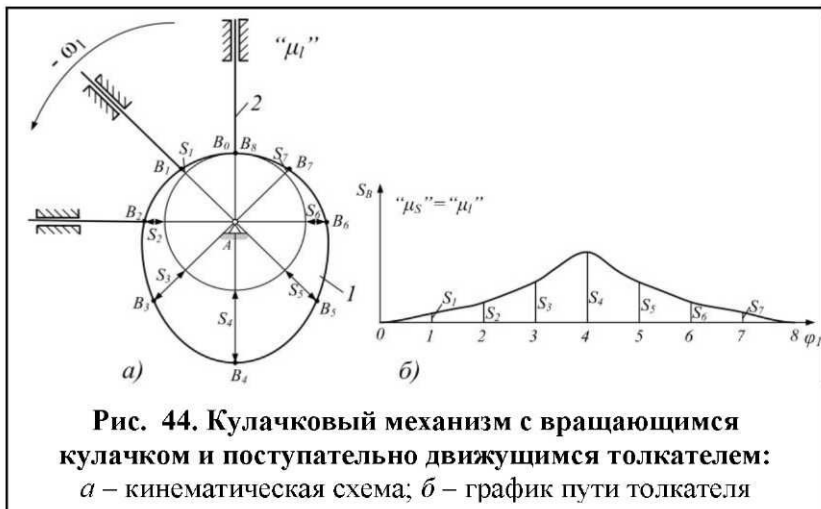
Ведомое звено может совершать возвратно-прямолинейное (толкатель, рис. 43, *а*) или возвратно-вращательное (коромысло, рис. 43, *б*) движение относительно стойки.

В задаче кинематического исследования кулачковых механизмов обычно входит определение положений звеньев кулачкового механизма и построение графика пути и кинематических диаграмм скоростей и ускорений толкателя.

#### Построение плана положений и графика пути толкателя.

Для определения перемещения толкателя необходимо построить план положений кулачкового механизма за время цикла. При построении плана положений кулачкового механизма для облегчения построений часто применяют метод обращения движения.

В этом случае всему кулачковому механизму вместе со стойкой сообщают вращательное движение вокруг оси вращения кулачка с угловой скоростью, равной угловой скорости кулачка, но противоположной по направлению. Тогда кулачок станет неподвижным, а толкатель будет вращаться вокруг оси вращения кулачка с угловой скоростью кулачка, но в противоположную сторону. Поэтому вместо того, чтобы вычерчивать несколько положений кулачка, имеющего, как правило, сложный фасонный профиль, что приводит к громоздким геометрическим построениям, вычерчивают положения толкателя, обладающего простой геометрической формой (рис. 44, *а*).



Для упрощения построения графика пути (точки  $B$ ) толкателя  $S_B = f(\varphi_1)$  (рис.44, б) за начальное положение механизма принято такое, при котором толкатель занимает крайнее нижнее положение.

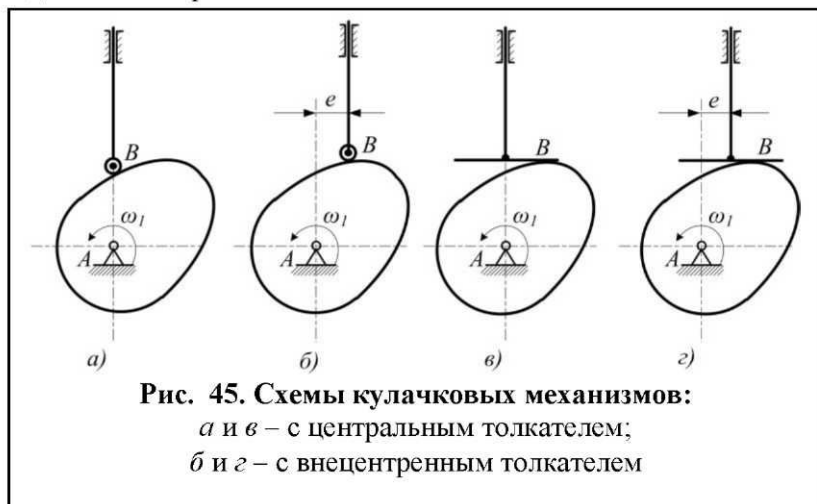
#### Определение скоростей и ускорений толкателя.

Если для кулачкового механизма построены план положений и график перемещения толкателя в функции обобщенной координаты  $S_B = f(\varphi_1)$ , т.е. координаты, характеризующей положение кулачка, то скорость и ускорение толкателя могут быть определены построением кинематических диаграмм. Первой производной диаграммы  $S_B = f(\varphi_1)$  будет диаграмма аналога скоростей  $S_B' = f(\varphi_1)$ , а второй – диаграмма аналога ускорений  $S_B'' = f(\varphi_1)$ .

В случае, когда толкатель движется поступательно, а кулачок вращается с постоянной угловой скоростью, ско-

рость толкателя определяют по формуле  $V_2 = \omega_1 \cdot S'_B$  и ускорение толкателя – по формуле  $a_2 = \omega_1^2 \cdot S''_B$ , где  $\omega_1$  – угловая скорость кулачка.

Заметим, что законы движения ведомых звеньев кулачкового механизма изменяются не только от формы кулачка, но и от расположения звеньев по отношению к центру вращения кулачка. Кинематический анализ кулачковых механизмов, изображенных на рис. 45, *а* и *б*, показывает, что при одинаковой форме кулачка законы движения толкателя, снабженного роликом, различны, а для механизмов с тарельчатым толкателем (рис. 45, *в* и *г*) – одинаковы. Поэтому кулачковые механизмы с тарельчатыми толкателями получили большее распространение, особенно в двигателестроении.



## 6.2. Механизмы зубчатых передач

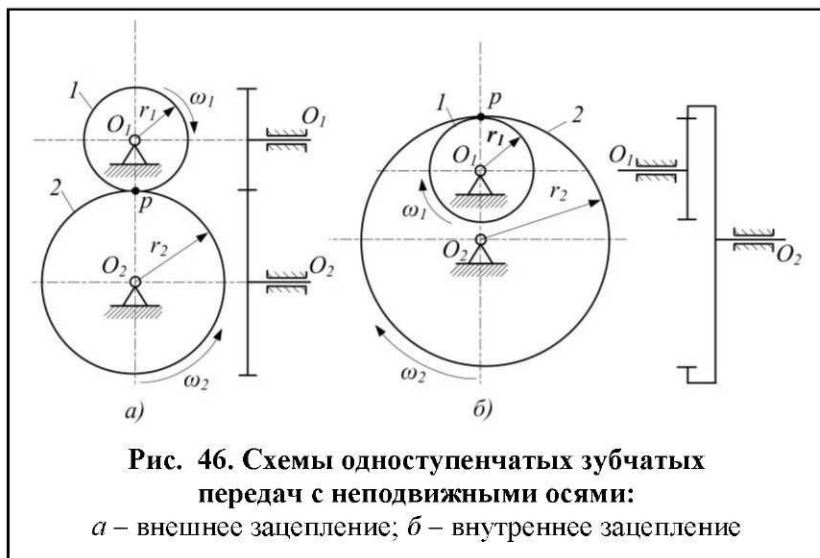
Механизмами передач называют механизмы для воспроизведения вращательного движения с постоянным передаточным отношением между двумя осями, т.е. с по-



стоянным отношением угловой скорости одного звена к угловой скорости другого звена. Зубчатые передачи, благодаря постоянству передаточного отношения и возможности передать вращающий момент с одного вала на другой при произвольном расположении их в пространстве, получили наибольшее распространение в машиностроении. Основной задачей кинематического анализа зубчатых механизмов является определение их передаточного отношения.

### Механизмы трехзвенных зубчатых передач.

Простейшим механизмом зубчатых передач является трехзвенный механизм, т.е. одноступенчатая передача, в которой имеются только два звена с неподвижными осями вращения. Между собой звенья *1* и *2* образуют высшую кинематическую пару (рис. 46).



**Рис. 46. Схемы одноступенчатых зубчатых передач с неподвижными осями:**

*a* – внешнее зацепление; *б* – внутреннее зацепление

Окружности с радиусами  $r_1$  и  $r_2$  называют начальными. При вращении звеньев эти окружности перекатываются одна по другой без скольжения. Поэтому скорости звеньев в точке контакта окружностей (точка  $p$ ) бу-

дуг равны. То есть  $V_{p1} = V_{p2}$ . Так как  $V_{p1} = \omega_1 r_1$  и  $V_{p2} = \omega_2 r_2$ , то  $\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$ .

Если известны радиусы начальных окружностей колес, то передаточное отношение от звена 1 к звену 2

определяют по формуле  $u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{r_2}{r_1}$ . Знак "-" ис-

пользуют для внешнего зацепления (рис. 46, а), а знак "+" для внутреннего (рис. 46, б).

На практике отношение радиусов заменяют отношением чисел зубьев. Для обеспечения зацепления колес необходимо, чтобы шаг зубьев на начальных окружностях обоих колес был одинаковым, поэтому на окружности с большим радиусом можно расположить большее количество зубьев. Так как длина окружности пропорциональна радиусу, то и количество зубьев будет пропорционально ее радиусу.

$$\text{То есть } u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{r_2}{r_1} = \pm \frac{z_2}{z_1},$$

где  $z_1$  и  $z_2$  – числа зубьев зубчатых колес 1 и 2.

### Механизмы многоступенчатых зубчатых передач с неподвижными осями.

Передаточное отношение, которое можно воспроизвести одной парой зубчатых колес, невелико и обычно не превышает 8. Для осуществления больших передаточных отношений применяют зубчатые механизмы, состоящие из нескольких пар зубчатых колес, каждая из которых образует отдельную ступень передачи.

Такие сложные зубчатые механизмы получили название многоступенчатых зубчатых передач (рис. 47).



**Рис. 47. Многоступенчатая зубчатая передача**

Общее передаточное отношение всего механизма равно  $u_{14} = \frac{\omega_1}{\omega_4}$ .

Передаточное отношение для каждой пары колес равно

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2}; u_{2'3} = \frac{\omega_2}{\omega_3}; u_{3'4} = \frac{\omega_3}{\omega_4}.$$

Перемножив левые и правые части уравнений, получим

$$u_{12} \cdot u_{2'3} \cdot u_{3'4} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{\omega_1}{\omega_4}.$$

То есть  $u_{14} = u_{12} u_{2'3} u_{3'4}$ ,

где  $u_{12} = -\frac{z_2}{z_1}$ ,  $u_{2'3} = -\frac{z_3}{z_{2'}}$ ,  $u_{3'4} = -\frac{z_4}{z_{3'}}$ .

Итак, общее передаточное отношение сложного многозвенного зубчатого механизма есть произведение взятых со своими знаками передаточных отношений отдельных пар зубчатых колес, составляющих общую схему сложного зубчатого механизма.

### Механизмы зубчатых передач с подвижными осями.

В некоторых зубчатых передачах оси отдельных колес являются подвижными (рис. 48).

Зубчатое колесо  $1$  неподвижно, зубчатое колесо  $2$  имеет подвижную ось  $O_2$ . Звено  $H$  входит во вращательные пары со стойкой и зубчатым колесом  $2$ .

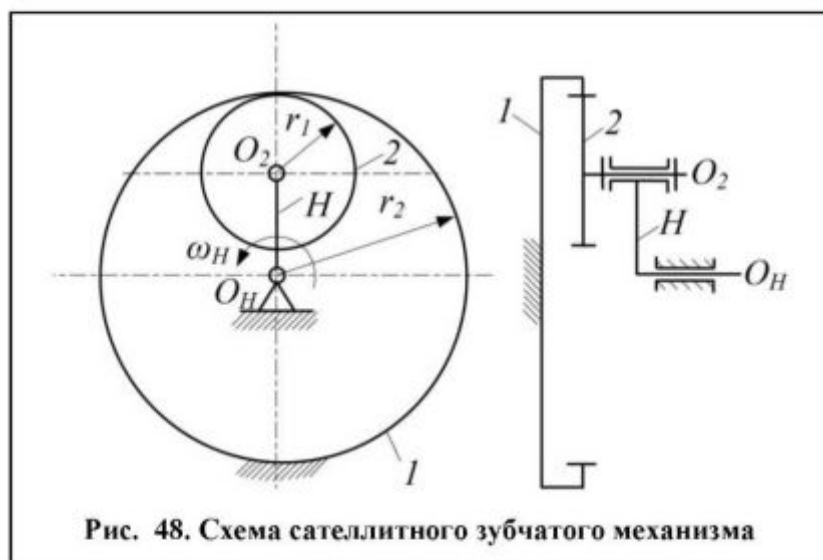


Рис. 48. Схема сателлитного зубчатого механизма

Неподвижное колесо  $1$  называют опорным колесом, колесо  $2$  – сателлитом и звено  $H$  – водилом.

Зубчатые механизмы, в которых хотя бы одно колесо имеет подвижную ось и является сателлитом, называют сателлитными зубчатыми механизмами.

### 6.3. Планетарные механизмы

Сателлитные зубчатые механизмы с одной степенью подвижности называют планетарными механизмами.

На рис. 49 показана схема одного из вариантов планетарного механизма, образованного из центрального колеса 1, сателлита 2, опорного колеса 3, водила  $H$  и стойки.

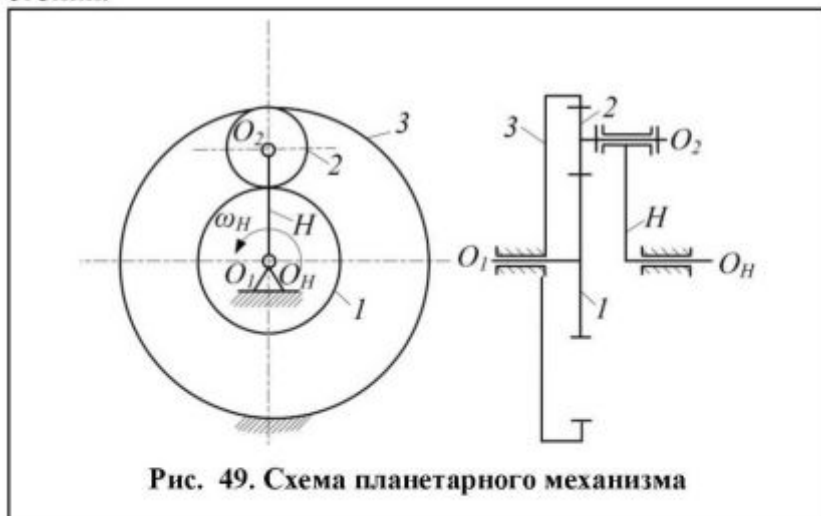


Рис. 49. Схема планетарного механизма

Степень подвижности подсчитывают по формуле Чебышева:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 2 = 1,$$

т.е. данный механизм имеет одно ведущее звено (например, водило  $H$ ). Для определения передаточного отношения

$u_{1H} = \frac{\omega_1}{\omega_H}$  механизма воспользуемся методом обращения

движения. Относительное движение звеньев не изменяется, если всем звеньям механизма сообщить дополнительное вращение с какой-либо общей угловой скоростью. Сообщим всем звеньям механизма дополнительное вращение

вокруг оси  $O_H$  с угловой скоростью  $-\omega_H$ , равной по величине, но противоположной по направлению угловой скорости водила  $H$ . Тогда звенья механизма будут иметь угловые скорости:

Звено механизма	Первоначальная угловая скорость звена	Угловая скорость звена после сообщения ему дополнительного вращения
1	$\omega_1$	$\omega_1^H = \omega_1 - \omega_H$
2	$\omega_2$	$\omega_2^H = \omega_2 - \omega_H$
3	$\omega_3 = 0$	$\omega_3^H = \omega_3 - \omega_H = -\omega_H$
$H$	$\omega_H$	$\omega_H^H = \omega_H - \omega_H = 0$

Следовательно, после сообщения звеньям механизма дополнительного вращения с угловой скоростью  $-\omega_H$  звено  $H$  будет неподвижно, и планетарный механизм превратится в обыкновенный зубчатый механизм с неподвижными осями.

Передаточное отношение такого механизма равно

$$u_{13}^H = \frac{\omega_1^H}{\omega_3^H} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{-\omega_H} = 1 - \frac{\omega_1}{\omega_H}.$$

То есть  $u_{13}^H = 1 - u_{1H}$ , откуда  $u_{1H} = 1 - u_{13}^H$ .

Передаточное отношение зубчатого механизма  $u_{13}^H$  при остановленном водиле  $H$  может быть определено через числа зубьев зубчатых колес 1, 2 и 3.

$$u_{13}^H = u_{12}^H \cdot u_{23}^H = \left( -\frac{z_2}{z_1} \right) \left( \frac{z_3}{z_2} \right) = -\frac{z_3}{z_1}.$$

В итоге имеем  $u_{1H} = 1 + \frac{z_3}{z_1}$ .

## 6.4. Дифференциальные механизмы

Сателлитные зубчатые механизмы с двумя и более степенями подвижности называются дифференциальными механизмами.

Из планетарного механизма, показанного на (рис. 49), может быть получен дифференциальный механизм, если опорное (неподвижное) колесо 3 сделать подвижным (рис. 50).

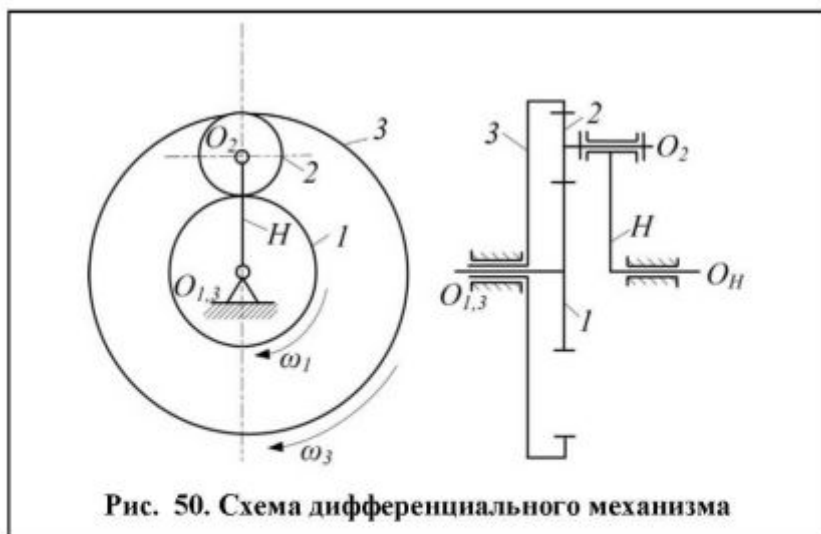


Рис. 50. Схема дифференциального механизма

Степень подвижности дифференциального механизма

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 2 = 2.$$

Определить закон движения данного механизма можно, если иметь заданными законы движения двух звеньев (например,  $\omega_1$  и  $\omega_3$ ). Для нахождения закона движения ведомого звена (например,  $\omega_H$ ) воспользуемся методом обращения движения.

Звено механизма	Первоначальная угловая скорость	Угловая скорость звена после сообщения ему дополнительного вращения
$1$	$\omega_1$	$\omega_1^H = \omega_1 - \omega_H$
$2$	$\omega_2$	$\omega_2^H = \omega_2 - \omega_H$
$3$	$\omega_3$	$\omega_3^H = \omega_3 - \omega_H$
$H$	$\omega_H$	$\omega_H^H = \omega_H - \omega_H = 0$

Для механизма с остановленным водилом  $H$  имеем передаточное отношение

$$u_{13}^H = u_{12}^H \cdot u_{23}^H = \left( -\frac{z_2}{z_1} \right) \left( \frac{z_3}{z_2} \right) = -\frac{z_3}{z_1}.$$

Тогда 
$$-\frac{z_3}{z_1} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H}.$$

Зная значения  $\omega_1$ ,  $\omega_3$  и  $z_1$ ,  $z_3$ , можно определить величину  $\omega_H$ .

### Замкнутый дифференциальный механизм

Если в дифференциальном механизме между ведущими звеньями установлена промежуточная зубчатая передача, то такой дифференциальный механизм называют



замкнутым дифференциальным механизмом. Он имеет одну степень подвижности.

Пусть у механизма (рис. 51) колеса  $1$  и  $3$  связаны промежуточной зубчатой передачей, состоящей из колес  $1$ ,  $2$ ,  $2'$ ,  $3$ . Вследствие этого угловая скорость колеса  $3'$  зависит от угловой скорости ведущего звена  $1$ .

Определим степень подвижности этого механизма:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 5 - 4 = 1.$$

Так как степень подвижности такого дифференциального механизма равна единице, механизм имеет одно ведущее звено.



Для определения общего передаточного отношения механизма  $u_{1H}$  воспользуемся формулой

$$u_{13}^H = \frac{\omega_1^H}{\omega_3^H} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H}.$$

Разделив числитель и знаменатель правой части уравнения на  $\omega_{II}$ , имеем:

$$u_{13}^H = \frac{\omega_1 - \omega_{II}}{\omega_3 - \omega_H} = \frac{u_{1II} - 1}{\omega_3 - 1}.$$

Для рядового зацепления механизма имеем  $u_{13} = \frac{\omega_1}{\omega_3}$ , откуда  $\omega_3 = \frac{\omega_1}{u_{13}}$ .

Подставляя в формулу для определения  $u_{13}$  полученное выражение для  $\omega_3$ , запишем:

$$u_{13}^H = \frac{u_{1H} - 1}{\omega_1 - 1} = \frac{u_{1H} - 1}{u_{1H} - 1} = \frac{u_{13}(u_{1H} - 1)}{\omega_{II} u_{13} u_{13}}.$$

Из этой формулы найдем общее передаточное отношение  $u_{1II}$ :

$$u_{1II} = \frac{u_{13}(u_{13}^H - 1)}{u_{13}^H - u_{13}}.$$

Значения  $u_{13}$  и  $u_{13}^H$  можно определить, если известны числа зубьев зубчатых колес, т.е.

$$u_{13} = u_{12} \cdot u_{2'3} = \left( -\frac{z_2}{z_1} \right) \left( -\frac{z_3}{z_{2'}} \right) = \frac{z_2 z_3}{z_1 z_{2'}},$$

$$u_{13}^H = u_{1'4}^H \cdot u_{43'}^H = \left( -\frac{z_4}{z_{1'}} \right) \left( \frac{z_{3'}}{z_4} \right) = -\frac{z_{3'}}{z_{1'}}.$$

## 7. Синтез кулачковых механизмов

Задача синтеза кулачкового механизма состоит в том, чтобы построить профиль кулачка, обеспечивающий заданный закон движения толкателя.

Исходными данными при этом являются:

- кинематическая схема механизма;
- циклограмма работы механизма;
- закон движения толкателя;
- максимальный ход толкателя;
- допускаемый угол давления.

### 7.1. Кинематическая схема механизма

Выбор той или иной кинематической схема механизма определяется в первую очередь из конструктивных соображений с целью воспроизведения требуемого по условиям технологического процесса движения ведомого звена.

Как было отмечено выше, наиболее распространенными являются кулачковые механизмы двух видов:

- ведомое звено движется поступательно (рис. 43, *а*);
- ведомое звено совершает возвратно-вращательное движение (рис. 43, *б*).

Для замены трения скольжения трением качения в большинстве случаев кулачковые механизмы снабжают роликом (рис. 45, *а* и *б*). Введение ролика в конструкцию кулачкового механизма увеличивает срок его службы.

### 7.2. Циклограмма работы механизма

Движение толкателя за время цикла в общем случае имеет четыре фазы.

1. Фаза подъема толкателя, когда толкатель поднимается (*II*).

2. Фаза остановки толкателя в верхнем положении (фаза верхнего выстоя толкателя), на протяжении которой толкатель находится в покое в верхнем положении ( $BB$ ).

3. Фаза опускания толкателя, на протяжении которой толкатель возвращается в начальное положение ( $O$ ).

4. Фаза нижнего выстоя толкателя ( $HB$ ), когда толкатель находится в покое в нижнем положении.

Таким образом, время полного цикла движения механизма  $T$  равно

$$T = tП + tBB + tO + tHB.$$

Промежутки времени  $tП$ ,  $tBB$ ,  $tO$  и  $tHB$  выбирают в соответствии с требованиями технологического процесса.

Циклограмма работы кулачкового механизма показывает продолжительность отдельных фаз движения толкателя в долях периода (полной продолжительности цикла).

Например, распределение периода по фазам может быть задано в следующем виде:

Подъем толкателя (П)	Верхний выстой толкателя (BB)	Опускание толкателя (O)	Нижний выстой толкателя (HB)
1/4	1/3	1/4	1/6

Этому распределению соответствуют строго определенные фазовые углы поворота кулачка.

Так как смена фаз в общем случае происходит за один оборот кулачка, то сумма углов всех фаз при любых видах циклограммы равна  $360^\circ$ , т.е.

$$\varphiП + \varphiBB + \varphiO + \varphiHB = 360^\circ,$$

где  $\varphiП$ ,  $\varphiBB$ ,  $\varphiO$  и  $\varphiHB$  – фазовые углы поворота кулачка соответственно при подъеме толкателя; при верхнем выстое толкателя; при опускании толкателя и при нижнем выстое толкателя.

Для приведенной циклограммы будем иметь:  
 $\varphi_{П} = 90^\circ$ ;  $\varphi_{ВВ} = 120^\circ$ ;  $\varphi_{О} = 90^\circ$ ;  $\varphi_{НВ} = 60^\circ$ .

### 7.3. Закон движения толкателя на фазах подъема и опускания

Закон движения толкателя на фазах подъема и опускания во многих случаях зависит от операции, выполняемой кулачковым механизмом. В этом случае закон движения толкателя является полностью заданным.

Однако часто требуется осуществить лишь ход толкателя за определенное время. В этом случае закон движения толкателя может быть выбран самостоятельно.

На практике используют те законы движения толкателя, которые обеспечивают более простую технологию обработки профиля кулачка и удовлетворяют динамическим требованиям к кулачковому механизму.

Рассмотрим несколько ключевых законов движения толкателя на фазе подъема (рис. 52).

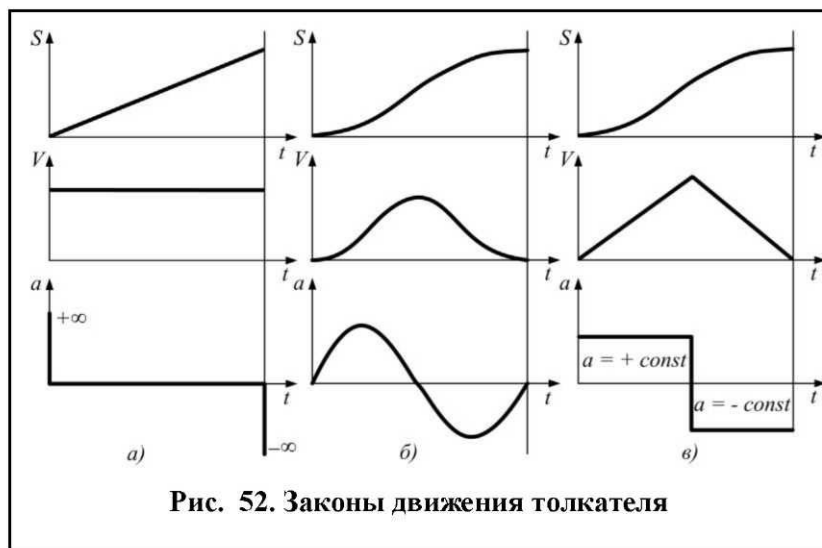


Рис. 52. Законы движения толкателя

### Равномерное перемещение толкателя (рис. 52, а).

При таком законе движения толкателя в начале и конце его перемещения имеет место мгновенное возрастание ускорения (а следовательно, и сил инерции) до бесконечности. Такое изменение ускорения и сил называется жестким ударом.

На практике, вследствие упругости материалов, возрастание ускорения и сил не происходит до бесконечности, но они остаются достаточно большими. Такое перемещение толкателя применяется при небольших скоростях движения кулачка и малых массах толкателя (например, наматывание нити на шпульку).

### Перемещение толкателя с ускорением, изменяющимся по синусоидальному закону (рис. 52, б).

При таком законе движения скорость и ускорение толкателя изменяются плавно, и свое изменение начинают и оканчивают нулевыми значениями. Скачков ускорений здесь нет, и механизм работает без ударов. Синусоидальный закон изменения ускорения обеспечивает наибольшую плавность движения толкателя и может применяться при больших скоростях вращения кулачка.

### Равноускоренное перемещение толкателя (рис. 52, в).

При таком законе перемещения толкателя скорость на первой части диаграммы возрастает (ускорение положительное), а на второй части диаграммы равномерно убывает (ускорение отрицательное). При этом имеет место мгновенное изменение ускорения (а следовательно, и сил инерции), но уже на конечную величину.

Такое изменение ускорения и сил называют мягким ударом. Динамические давления при мягких ударах значительно меньше, чем при жестких, и кулачковые механизмы с мягкими ударами можно применять при частоте вращения кулачка до 2000 об/мин.

Так как о характере движения толкателя по кривой перемещения  $S = f(t)$  судить затруднительно, то обычно задают диаграмму его ускорения  $a = f(t)$ .

Диаграмму перемещения  $S = f(t)$ , необходимую для построения профиля кулачка, получают методом двукратного интегрирования диаграммы ускорения  $a = f(t)$ .

#### 7.4. Угол давления в кулачковых механизмах

Для эффективной работы кулачкового механизма важно обеспечить высокий КПД и отсутствие заклинивания. Угол давления позволяет выявить эти условия его работы.

Углом давления в кулачковых механизмах называют угол  $\nu$  между общей нормалью к профилю кулачка в точке касания толкателя и направлением движения (скорости) толкателя (рис. 53).

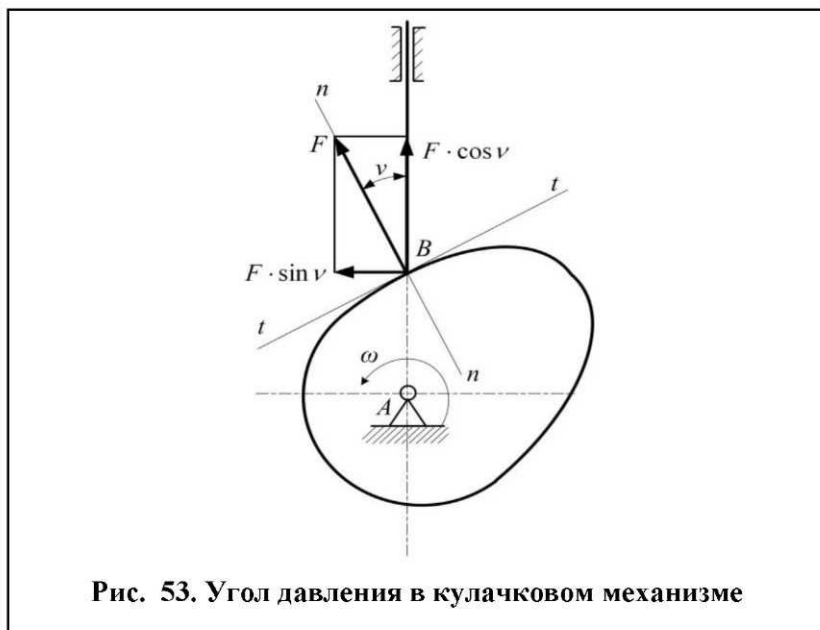


Рис. 53. Угол давления в кулачковом механизме

Сила давления кулачка на толкатель  $F'$  (без учета сил трения) направлена по нормали к профилю кулачка.

Под действием движущей силы  $F' \cos \nu$  толкатель поднимается и преодолевает силы полезных сопротивлений и силы трения в направляющих толкателя.

Сила  $F' \sin \nu$  вызывает перекося толкателя и возникновение сил трения в направляющих толкателя. Если эта сила велика, то может произойти заклинивание и поломка толкателя.

Для уменьшения силы  $F' \sin \nu$  выгодно, чтобы угол давления был как можно меньше.

Однако, с другой стороны, с уменьшением угла давления  $\nu$  возрастают размеры кулачка, что нежелательно.

Учитывая вышеизложенное, при проектировании кулачковых механизмов устанавливают максимальное значение угла давления  $\nu_{\max}$ , которое не должно быть превышено, так как в противном случае возникают большие силы трения, снижается КПД кулачкового механизма и возможны заклинивание и поломка толкателя.

На практике значения угла давления  $\nu_{\max}$  принимают равными:  $30^\circ$  – для поступательно движущихся толкателей;  $45^\circ$  – для качающихся толкателей (коромысел).

### **7.5. Определение угла давления по заданному закону движения толкателя и минимального размера кулачка**

Как было отмечено, выбор угла давления влияет на размеры кулачка. Из конструктивных соображений всегда желательно выбрать кулачок возможно меньших размеров, т.е. с минимальным радиусом  $R$ . Поэтому при построении профиля кулачка нужно обеспечить, с одной стороны, чтобы угол давления не превосходил  $\nu_{\max}$ , а с другой, чтобы



кулачок имел минимальные размеры. Для этого необходимо до построения профиля кулачка по известным параметрам уметь определять угол давления.

Рассмотрим определение угла давления  $\nu$ , если известны закон движения толкателя и положение оси вращения кулачка (рис. 54, а).

Примем, что точка  $B_x$  принадлежит кулачку, а точка  $B$  – толкателю.

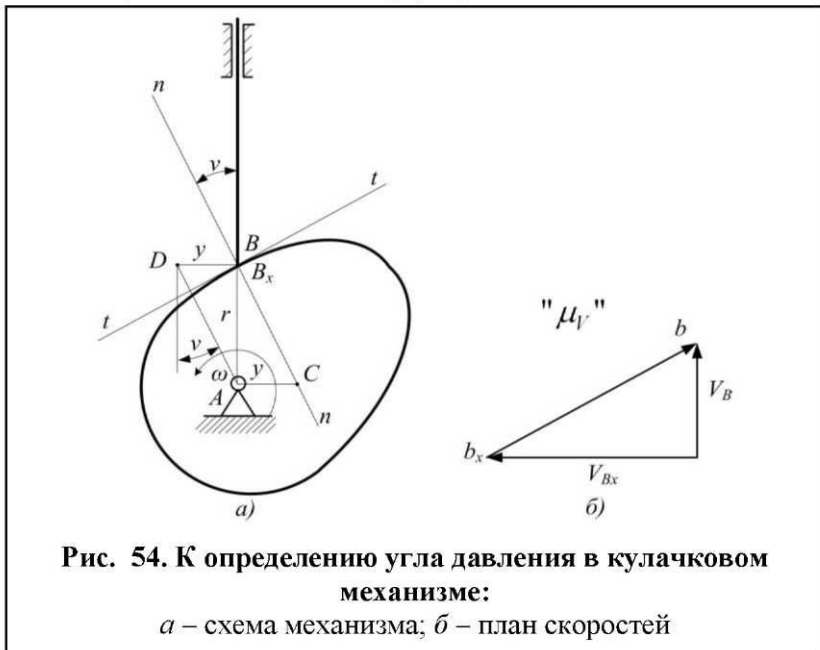
$$\text{Тогда } V_{Bx} = \omega \cdot r,$$

где  $\omega$  – угловая скорость кулачка;

$r$  – расстояние точки  $B_x$  до оси вращения кулачка.

$$\underline{\underline{V_B}} = \underline{\underline{V_{Bx}}} + \underline{\underline{V_{BBx}}}.$$

Для решения этого векторного уравнения строим план скоростей в масштабе  $\mu_V$  (рис. 54, б).



Проведем через ось вращения кулачка линию, перпендикулярную направлению движения толкателя, до пересечения с нормалью. Получим отрезок  $y = AC$ .

Треугольники  $AB_xC$  (на схеме механизма) и  $pb_xb$  (на плане скоростей) подобны как треугольники с взаимно перпендикулярными сторонами. Из подобия следует

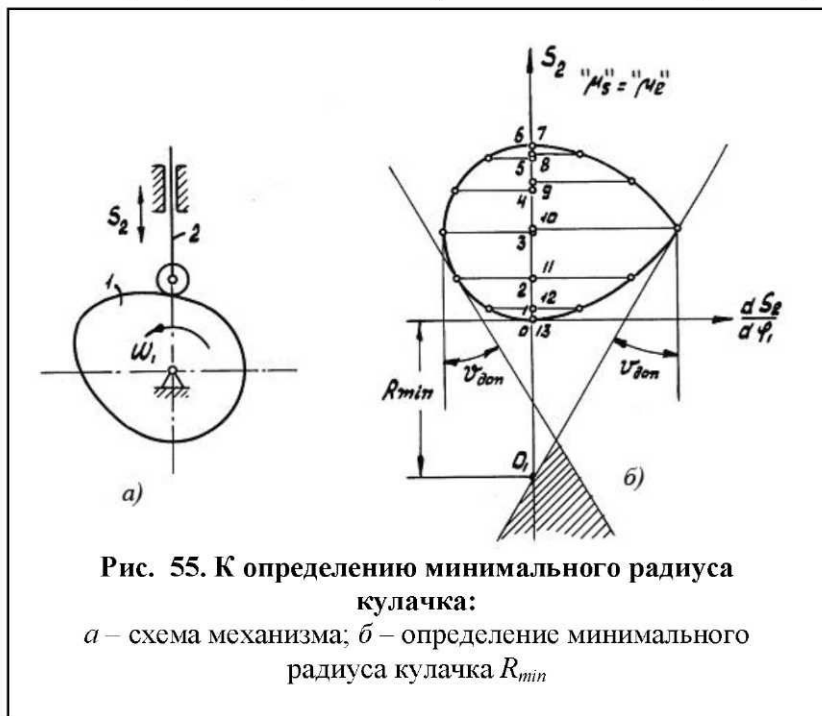
$$\frac{y}{r} = \frac{V_B}{V_{B_x}} = \frac{\frac{dS_B}{dt}}{r\omega} = \frac{dS_B}{r \cdot \omega \cdot dt} = \frac{dS_B}{r \cdot d\varphi}$$

Откуда  $y = \frac{dS_B}{d\varphi}$ , т.е. аналог скорости толкателя.

Если теперь отложить отрезок  $y$  ( $AC$ ) от точки  $B$  в направлении, перпендикулярном направлению движения толкателя (влево), и его конец (точку  $D$ ) соединить прямой линией  $AD$  с осью вращения кулачка (точкой  $A$ ), то угол между этой линией и направлением движения толкателя, как это видно из чертежа, равен углу давления  $V$ .

Таким образом, для определения угла давления не нужно знать профиль кулачка. Достаточно вычислить по заданному закону движения толкателя значение величины отрезка  $y$  ( $AC$ ), отложить этот отрезок от данного положения точки  $B$  толкателя в направлении, перпендикулярном направлению ее скорости, и соединить прямой линией конец отрезка с осью вращения кулачка. Угол между этой линией и направлением скорости точки  $B$  – угол давления  $V$ . Отрезок  $y$  откладывают в сторону направления вектора скорости точки  $B$  толкателя, если повернуть его на угол  $90^\circ$  по направлению вращения кулачка.

Для определения минимального радиуса кулачка по заданному движению толкателя определяют значение отрезка  $u$  для нескольких положений толкателя на фазах подъема и опускания. Затем откладывают эти отрезки так, как было указано выше, и соединяют их концы плавными кривыми. Далее к этим кривым проводят касательные под заданными максимальными углами давления соответственно для фазы подъема и опускания толкателя (рис. 55).



За центр вращения кулачка  $O_1$  можно принять любую точку, лежащую внутри заштрихованной области. В случае, когда ось толкателя проходит через центр вращения кулачка, минимальный радиус  $R_{min}$  получают пересечением оси толкателя с заштрихованной зоной.

В случае, когда ось толкателя не проходит через центр вращения кулачка, минимальный радиус  $R_{\min}$  получают, если за центр вращения кулачка  $O_1$  принять точку пересечения касательных. Расстояние от выбранной точки  $O_1$  до оси толкателя даёт значение эксцентриситета  $e$  в масштабе длин  $\mu_l$ .

## 7.6. Выбор радиуса ролика

В кулачковых механизмах, у которых толкатель оканчивается роликом, различают так называемый центрровой профиль кулачка  $a-a$ , отстоящий от действительного профиля  $b'-b'$  на величину радиуса ролика  $r_p$  (рис. 56). Это даёт возможность рассматривать точку  $B$  толкателя, являющуюся центром ролика, как геометрическую точку контакта толкателя с центровым профилем кулачка без участия ролика.

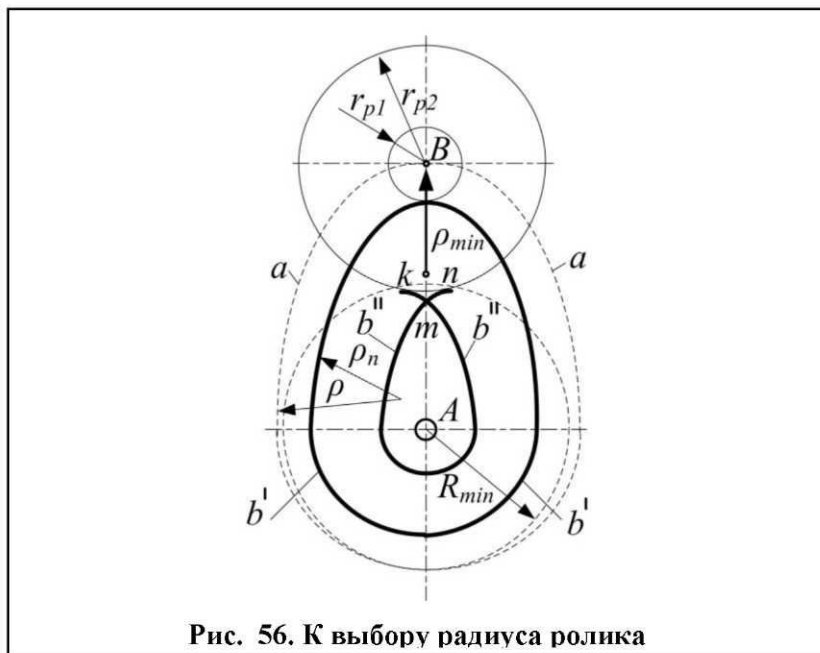


Рис. 56. К выбору радиуса ролика

При проектировании таких механизмов радиус ролика  $r_p$  не может быть выбран произвольно. Необходимо соблюдать условие, чтобы эквидистантная кривая, являющаяся действительным профилем кулачка, не имела заострения ( $\rho_n = 0$ ) или самопересечения. Из рис. 56 видно, что если радиус ролика –  $r_{p1}$ , то заострения или самопересечения действительного профиля  $b'-b'$  кулачка нет. Однако если увеличить радиус ролика до величины  $r_{p2}$ , то в точке  $m$  кривая, образующая в этом случае профиль кулачка  $b''-b''$ , имеет самопересечение. Участок  $kmt$  профиля кулачка не может быть получен. Чтобы избежать заострения или самопересечения радиус ролика  $r_p$  необходимо выполнить меньше наименьшего радиуса кривизны  $\rho_{\min}$  выпуклых участков центрального профиля кулачка  $a-a$ .

Понятно, что от величины радиуса ролика  $r_p$  зависит радиус кривизны профиля кулачка  $\rho_n$ . Если кулачок имеет выпуклый профиль, то  $\rho_n = \rho - r_p$ , если вогнутый, то  $\rho_n = \rho + r_p$ , где  $\rho$  – радиус кривизны центрального профиля.

От величины радиуса ролика зависит значение контактных напряжений на элементах поверхности кулачка и ролика. Минимальная величина контактных напряжений при одной и той же величине  $\rho_{\min}$  будет при равенстве

радиусов кривизны ролика и профиля, т.е. при выполнении условия  $r_p = 0,5\rho_{\min}$ .

На практике при выборе радиуса ролика руководствуются следующими условиями:

$$r_p \leq 0,8\rho_{\min} \text{ и } r_p \leq 0,4R_{\min},$$

где  $R_{\min}$  – минимальный радиус центрального профиля кулачка;

$\rho_{\min}$  – минимальный радиус кривизны для выпуклых участков центрального профиля кулачка.

Минимальный радиус кривизны определяют приближенно как радиус окружности, проходящий через три точки, которые выбирают на участке центрального профиля, где можно ожидать получения минимального значения радиуса кривизны.

После определения радиуса ролика строят конструктивный профиль кулачка как огибающую семейства окружностей радиуса  $r_p$ , центры которых расположены на центром профиле.

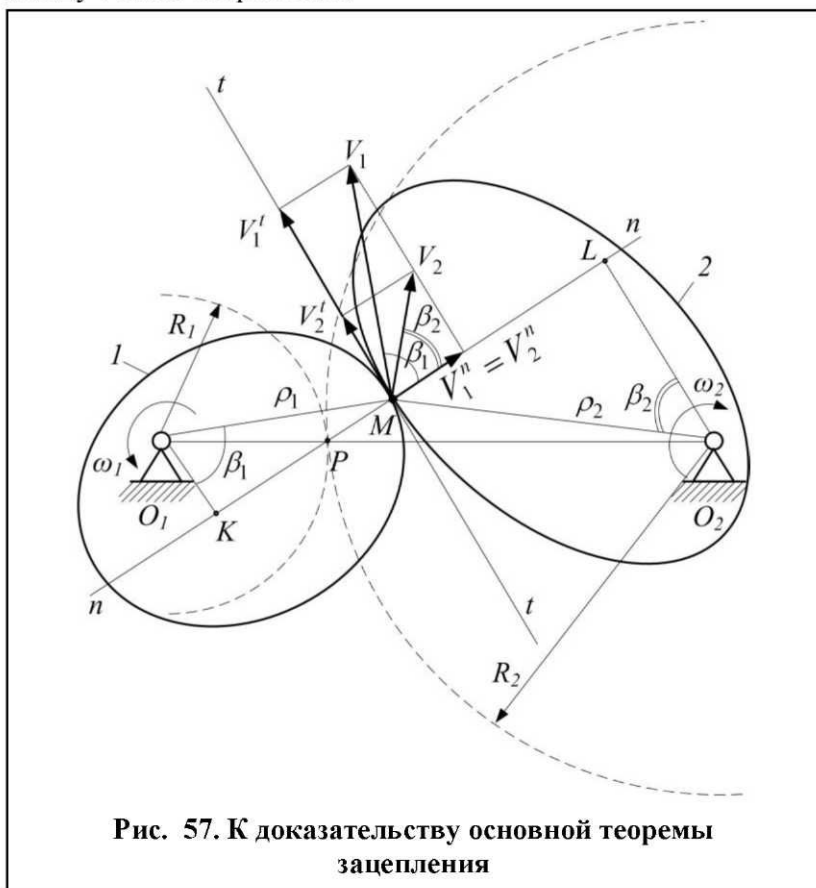
## **8. Синтез трехзвенных зубчатых передач с неподвижными осями**

При синтезе зубчатых передач необходимо создать такой профиль зуба, который обеспечивал бы постоянство передаточного отношения в любой момент времени.

Для того чтобы выяснить, какими свойствами должен обладать такой профиль, рассмотрим основную теорему зацепления.

## 8.1. Основная теорема зацепления

Предположим, что необходимо передать вращательное движение между параллельными осями  $O_1$  и  $O_2$  (рис. 57) посредством двух взаимоигибаемых кривых, принадлежащих звеньям 1 и 2, которые являются абсолютно жесткими телами. Действуя друг на друга в точке контакта  $M$ , звенья будут вращаться в противоположные стороны с угловыми скоростями  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Найдем соотношения между этими скоростями.



Окружные скорости звеньев в точке  $M$  будут соответственно равны

$$V_1 = \omega_1(O_1M) \text{ и } V_2 = \omega_2(O_2M).$$

Проведем через точку касания  $M$  кривых нормаль  $n-n$  и касательную  $t-t$  к этим кривым. Полученные скорости  $V_1$  и  $V_2$  проектируем на нормаль и касательную. Тогда нормальные составляющие скоростей  $V_1$  и  $V_2$  будут равны  $V_1'' = V_1 \cdot \cos \beta_1$  и  $V_2'' = V_2 \cdot \cos \beta_2$ , а касательные –  $V_1' = V_1 \cdot \sin \beta_1$  и  $V_2' = V_2 \cdot \sin \beta_2$ , где  $\beta_1$  и  $\beta_2$  – углы между направлением скоростей  $V_1$  и  $V_2$  и нормалью  $n-n$ .

Заметим, что проекции скоростей на касательную  $t-t$  не равны между собой. Это неравенство скоростей  $V_1'$  и  $V_2'$  показывает, что между звеньями происходит проскальзывание.

Для того чтобы оба звена были в постоянном соприкосновении, необходимо, чтобы проекции скоростей точки касания  $M$  обоих звеньев на общую нормаль были равны, т.е.  $V_1'' = V_2''$ .

Опустим из точек  $O_1$  и  $O_2$  перпендикуляры  $O_1K$  и  $O_2L$  на нормаль  $n-n$  и рассмотрим треугольники  $O_1KM$  и  $MV_1''V_1$ . Из рисунка видно, что они подобны как треугольники с взаимно перпендикулярными сторонами.

Из подобия имеем:

$$\frac{V_1''}{V_1} = \frac{O_1K}{O_1M},$$



откуда

$$V_1^n = \frac{O_1K}{O_1M} \cdot V_1.$$

Аналогично из треугольников  $O_2LM$  и  $MV_2^nV_2$  получим:

$$\frac{V_2^n}{V_2} = \frac{O_2L}{O_2M},$$

откуда

$$V_2^n = \frac{O_2L}{O_2M} \cdot V_2.$$

Но  $V_1^n = V_2^n$  и тогда

$$\frac{O_1K}{O_1M} \cdot V_1 = \frac{O_2L}{O_2M} \cdot V_2.$$

В этом уравнении  $\frac{V_1}{O_1M} = \omega_1$  и  $\frac{V_2}{O_2M} = \omega_2$ .

Тогда  $O_1K \cdot \omega_1 = O_2L \cdot \omega_2$  или  $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2L}{O_1K}$ .

Рассматривая треугольники  $O_1KP$  и  $O_2LP$  замечаем, что они подобны вследствие равенства углов, следовательно, можно записать

$$\frac{O_2L}{O_1K} = \frac{O_2P}{O_1P}.$$

Окончательно получаем

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2P}{O_1P} = u_{12}.$$

Эта зависимость отражает основную теорему зацепления: *нормаль к профилям в точке контакта делит расстояние между центрами на отрезки, обратно пропорциональные угловым скоростям звеньев.*

При  $\omega_{12} = \text{const}$  и неподвижных в пространстве центрах вращения звеньев  $O_1$  и  $O_2$  точка  $P$  будет занимать на линии центров неизменное положение.

Чтобы иметь постоянное передаточное отношение профили звеньев должны быть выполнены так, чтобы в любом положении профилей нормаль в их точке контакта пересекала бы линию центров в одной и той же точке  $P$ . Если это условие выполнено, то окружности радиусов  $R_1 = O_1P$  и  $R_2 = O_2P$ , проведенные из центров  $O_1$  и  $O_2$  будут при движении звеньев катиться одна по другой без скольжения. Эти окружности в зубчатых механизмах получили название начальных окружностей.

Все кривые, обеспечивающее постоянное передаточное отношение, могут быть использованы для образования боковых поверхностей зубьев колес. Профили зубьев, зацепление которых обеспечивает постоянное передаточное отношение, называют сопряженными.

На практике в подавляющем большинстве случаев используют эвольвентное зацепление, в котором боковые поверхности зубьев колес выполняют по кривой – эвольвенте. Изготовление зубчатых колес с таким профилем наиболее просто и дешево и легко поддается различным улучшениям. Эвольвентное зацепление впервые было предложено Л. Эйлером в 1760 г.

## 8.2. Эвольвента окружности и её свойства

Эвольвентой окружности называют кривую, которую описывает точка  $A$  прямой  $N - N$ , перекатываемой без скольжения по окружности радиуса  $r_b$ . Эту окружность называют эволютой или основной окружностью, а перекатываемую прямую  $N - N$  – производящей прямой.

Пусть задана окружность с центром в точке  $O$  (рис. 58).

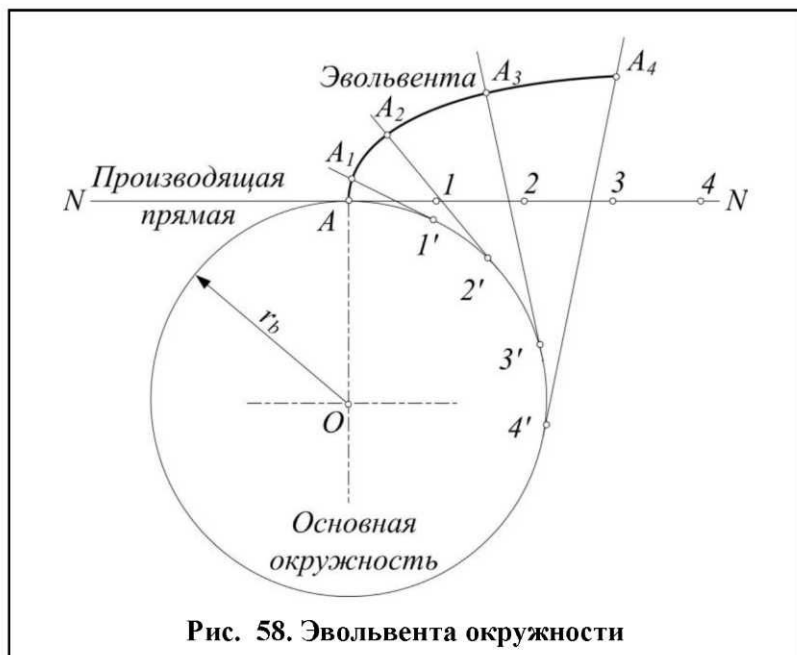


Рис. 58. Эвольвента окружности

Проведем прямую  $N - N$ , касательную к этой окружности в точке  $A$ . От точки  $A$  на прямой отложим ряд одинаковых по длине отрезков  $A-1, 1-2, 2-3$  и т.д. По окружности от точки  $A$  отложим дуги  $\cup A-1', \cup 1'-$

$2', \cup 2'-3'$  и т.д., равные этим отрезкам. Проведем в точках  $1', 2', 3'$  и т.д. касательные к окружности и отложим на них от точек касания отрезки  $1'-A_1 = 1-A$ ,  $2'-A_2 = 2-A$ ,  $3'-A_3 = 3-A$  и т.д. Соединив точки  $A, A_1, A_2, A_3$  и т.д. плавной кривой, получим эвольвенту.

Эвольвента обладает следующими свойствами:

- производящая прямая является одновременно касательной к основной окружности и нормалью к эвольвенте,

- эвольвента начинается на основной окружности и всегда расположена вне ее,

- эвольвента является кривой без перегибов,

- форма эвольвенты зависит только от радиуса основной окружности  $r_b$ ,

- с увеличением радиуса основной окружности  $r_b$  эвольвента становится более полой и при  $r_b \rightarrow \infty$  обращается в прямую.

### **8.3. Уравнение эвольвенты**

Зависимости отдельных параметров эвольвенты легко определяются, если имеется уравнение эвольвенты.

Пусть координатами какой-либо точки  $K$  эвольвенты (рис. 59) будут:  $r$  – радиус-вектор и  $\theta$  – угол отклонения радиус-вектора от радиуса, проведенного к началу эвольвенты (точка  $B$  – на основной окружности).

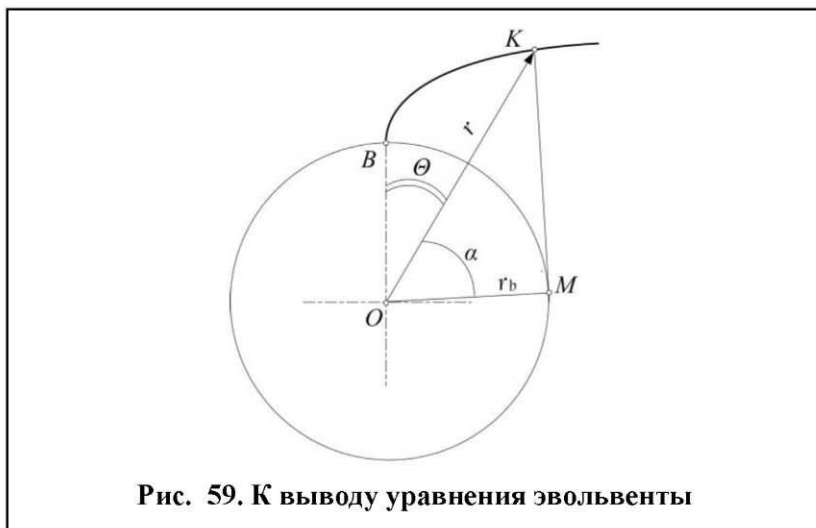


Рис. 59. К выводу уравнения эвольвенты

Проведем из точки  $K$  касательную к основной окружности радиуса. Точку касания  $M$  соединим с центром основной окружности точкой  $O$ . Угол между лучами  $OM$  и  $OK$  обозначим через  $\alpha$ .

Из треугольника  $OMK$  имеем

$$r = \frac{r_b}{\cos \alpha}.$$

Из свойств эвольвенты следует, что  $MK = \cup MB$ , но  $MK = r_b \cdot \operatorname{tg} \alpha$ ,  $\cup MB = r_b \cdot (\theta + \alpha)$ .

Тогда имеем  $r_b \cdot \operatorname{tg} \alpha = r_b \cdot (\theta + \alpha)$  или  $\operatorname{tg} \alpha = \theta + \alpha$ .

Решая относительно  $\theta$ , получим  $\theta = \operatorname{tg} \alpha - \alpha$  или  $\theta = \operatorname{inv} \alpha$  (инволюта альфа).

Уравнения  $r = \frac{r_b}{\cos \alpha}$  и  $\theta = \operatorname{inv} \alpha$  – есть уравне-

ния эвольвенты в полярных координатах. Если учесть, что  $r$  представляет собой радиус-вектор произвольной точки эвольвенты, то становится очевидным, что радиус основ-

ной окружности  $r_b$  является единственным параметром, определяющим эвольвенту.

### 8.4. Эвольвентное зацепление

Пусть заданы радиусы начальных окружностей  $r_1$  и  $r_2$  и угол  $\alpha$  наклона производящей прямой  $N - N$  к общей касательной  $T - T$ .

Строим основные окружности с радиусами  $r_{b1}$  и  $r_{b2}$  и эвольвенты  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$  (рис. 60).

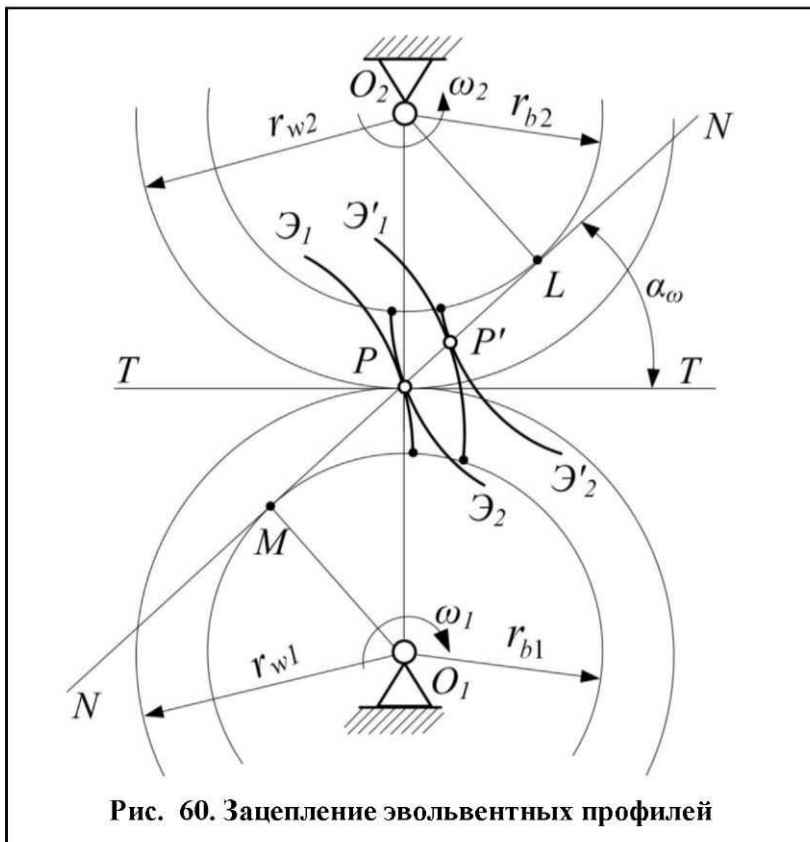


Рис. 60. Зацепление эвольвентных профилей

Из свойств эвольвенты следует, что производящая прямая  $N - N$  является нормалью к эвольвенте  $\mathcal{E}_1$ . На том же основании производящая прямая  $N - N$  является также нормалью к эвольвенте  $\mathcal{E}_2$ . Следовательно, прямая  $N - N$  будет общей нормалью к двум эвольвентам, которые по этой причине являются сопряженными и имеют точку контакта  $P$  на прямой  $N - N$ . Представим себе, что колеса повернулись и эвольвенты заняли новое положение  $\mathcal{E}'_1$  и  $\mathcal{E}'_2$ . Тогда, рассматривая другое положение этих эвольвент  $\mathcal{E}'_1$  и  $\mathcal{E}'_2$ , контактирующих в точке  $P'$ , путем тех же рассуждений убеждаемся, что эвольвенты имеют общую нормаль, представленную той же прямой  $N - N$ , а значит и точка их контакта находится на этой прямой. Поэтому прямую  $N - N$  можно рассматривать как геометрическое место точек контакта сопряженных эвольвент  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$ .

Итак, в процессе зацепления двух эвольвентных профилей их общая нормаль  $N - N$ , как касательная к двум основным окружностям с радиусами  $r_{b1}$  и  $r_{b2}$ , не меняет своего положения, а поэтому не изменяет своего положения и полюс зацепления  $P$ .

Следовательно, передаточное отношение от колеса 1 к колесу 2 определяется

$$u_{12} = \omega_1 / \omega_2 = (O_2P) / (O_1P) = r_{w2} / r_{w1} = \text{const}.$$

То есть эвольвентное зацепление обеспечивает постоянство передаточного отношения.

Основными элементами эвольвентного зацепления являются:

- линия зацепления – прямая  $MI$ , – траектория движения точки касания профилей в ее абсолютном движении;

– полюс зацепления – точка  $P$  пересечения линии зацепления с межосевой линией  $O_1O_2$ , определяющая мгновенный центр скоростей двух колес в их движении относительно друг друга;

– начальные окружности с радиусами  $r_{w1}$  и  $r_{w2}$ , имеющие точку касания в полюсе зацепления. Начальные окружности в процессе зацепления двух профилей обкатываются друг по другу без скольжения, т.е. линейные скорости точек, лежащих на обеих окружностях, равны;

– угол зацепления – острый угол  $\alpha_w$  между линией зацепления  $ML$  и прямой, перпендикулярной межосевой линии (на рисунке – общей касательной  $T' - T'$ ).

Важно понимать, что при внешнем зацеплении эвольвентные профили являются сопряженными только в пределах отрезка  $ML$ . В любой точке вне участка  $ML$  эвольвенты не имеют общей нормали, а поэтому будут не касаться друг друга, а пересекаться. В реальных зубчатых передачах пересечение эвольвент недопустимо в связи с повышенным изнашиванием зубьев и даже возможной поломкой в результате заклинивания передачи.

## **8.5. Методы изготовления эвольвентных профилей зубьев**

Зубья зубчатых колес изготавливают в основном резанием на универсальных фрезерных и специальных зубообрабатывающих станках. Сущность изготовления зубьев состоит в вырезании материала, расположенного на месте будущей впадины. В результате на заготовке остаются выступы – зубья.



Зубчатые колеса с эвольвентным профилем зубьев изготавливают обычно двумя методами:

- копирования на универсальных фрезерных станках;
- обкатки на специальных зубообрабатывающих станках.

При методе копирования зубья нарезают фасонным инструментом, причем профиль инструмента соответствует требуемому профилю впадины между зубьями нарезаемого колеса. Фасонными инструментами могут быть дисковые или пальцевые фрезы. Нарезанные по методу копирования зубчатые колеса получаются с заведомой погрешностью и работают удовлетворительно лишь при небольших окружных скоростях. Метод малопроизводителен и требует большого количества режущего инструмента, так как профиль нарезаемого зуба зависит от числа зубьев колеса (диаметра основной окружности).

При методе обкатки режущий инструмент и заготовка получают такое относительное движение, как будто они находятся в действительном зацеплении (станочное зацепление). Режущий инструмент имеет зубчатую форму (червячная фреза, долбяк, гребенка). При нарезании методом обкатки колес с внутренним зацеплением обычно используют долбяк, имеющий форму зубчатого колеса. Помимо движений, воспроизводящих процесс зацепления, инструменту сообщается технологическое движение резания. При этом режущие кромки инструмента описывают зубчатую поверхность, называемую производящей.

Если производящую поверхность рассечь плоскостью, перпендикулярной оси нарезаемого колеса, то в сечении получим исходный производящий контур. Станочное зацепление есть зацепление исходного производящего контура с профилем зуба нарезаемого колеса. Поэтому для

унификации изготовления зубчатых колес и обеспечения сопряженности их профилей нарезание зубьев методом обкатки производят инструментами на основе исходного производящего профиля (контура). Он имеет форму рейки (рис. 61), так как рейка сохраняет постоянный угол зацепления в паре с колесом любого радиуса и при любом относительном положении колес. Реечный производящий контур обладает ценными технологическими свойствами – его можно изготовить достаточно точно и сравнительно дешево.

Одним из основных параметров контура является модуль

$$m = \frac{p}{\pi},$$

где  $p$  – шаг зубьев, т.е. расстояние между одноименными профилями соседних зубьев рейки по делительной или параллельной ей прямой.



**Рис. 61. Исходный контур:**

*а* – основной рейки; *б* – инструментальной рейки

Делительной называют прямую, на которой теоретическая толщина зуба  $s$  равна ширине впадины  $e$ . Для

обеспечения взаимозаменяемости зубчатых колес и унификации зуборезного инструмента величины модуля регламентированы стандартом.

Для значений модулей свыше 1 мм исходный контур является прямобочным и имеет следующие параметры: профильный угол  $\alpha = 20^\circ$ , глубина захода  $h_z = 2h_a^*m$  (наибольшая глубина, на которую зубья одного колеса заходят во впадины другого), где  $h_a^* = 1$  – коэффициент высоты головки зуба; толщина зуба по делительной прямой  $s = 0,5p$ ; радиальный зазор  $c = c^*m$  и радиус закругления у ножки зуба  $\rho = \rho_f^*m$ . Для цилиндрических колес коэффициент радиального зазора  $c^* = 0,25$  и коэффициент радиуса закругления  $\rho_f^* = 0,38$ .

Основная рейка (рис. 61, а) полностью определяет профили зубьев всех колес передач без смещения и обеспечивает возможность их любого сочетания при одинаковом модуле. Исходный контур инструментальной рейки (рис. 61, б) отличается от контура основной рейки большей на величину  $c$  высотой головки зуба. Это сделано с целью получения большей глубины впадины при нарезании колеса и образования радиального зазора в зацеплении сопряженных колес. Избыточная высота  $c$  зуба инструментальной рейки при нарезании зубчатого колеса не участвует в формировании эвольвентной части профиля зуба.

Достоинством метода обкатки является высокая производительность, точность изготовления зубчатых колес, а также то, что одним инструментом можно нарезать зубчатые колеса с любым числом зубьев.

На рис. 62 приведены эскизы основных методов нарезания зубьев цилиндрических зубчатых колес.

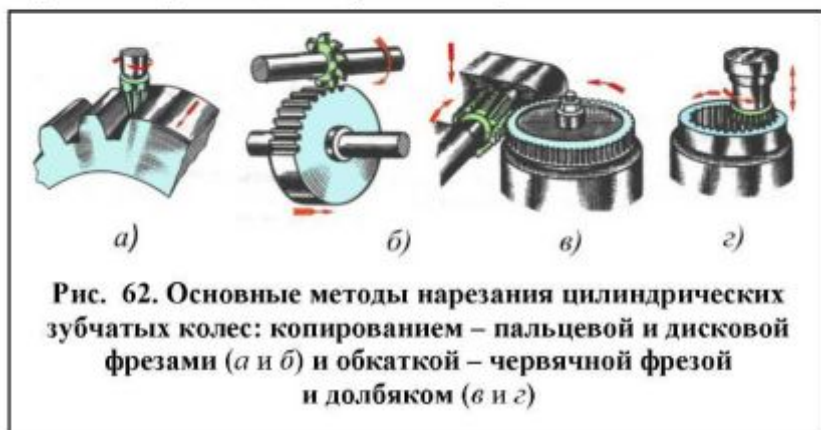


Рис. 62. Основные методы нарезания цилиндрических зубчатых колес: копированием – пальцевой и дисковой фрезами (а и б) и обкаткой – червячной фрезой и долбяком (в и г)

## 8.6. Основные элементы эвольвентного зацепления

Напомним, что окружности, которые проходят через полюс и в процессе зацепления перекатываются одна по другой без скольжения, называют начальными. Диаметры начальных окружностей обозначают  $d_{w1}$  и  $d_{w2}$  (рис. 63). При изменении межосевого расстояния  $a_w$  изменяются и диаметры начальных окружностей сопрягаемых колес. Делительной окружностью зубчатого колеса называют такую окружность, для которой шаг зубьев  $p$  и угол зацепления  $\alpha_w$  соответственно равны шагу  $p$  и углу  $\alpha$  профиля инструментальной рейки. Эта окружность при-

надлежит отдельно взятому колесу, ее диаметр  $d$  при изменении межосевого расстояния  $a_w$  остается неизменным.

У большинства зубчатых передач диаметры делительных и начальных окружностей совпадают.



**Рис. 63. Основные геометрические параметры зубчатого зацепления**

В соответствии с рис. 63 межосевое расстояние может быть определено по формуле

$$a_w = \frac{d_{w1}}{2} + \frac{d_{w2}}{2}.$$

Если диаметры делительных и начальных окружностей совпадают, то

$$a_w = \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2}.$$

Окружным шагом зубьев  $p$  называют расстояние между одноименными сторонами двух соседних зубьев, измеренное по дуге делительной окружности. По аналогии с модулем производящего контура, модуль зубьев колес определяют по формуле

$$m = \frac{p}{\pi}.$$

Модуль зубьев – основной параметр зубчатого колеса. Для пары колес, находящихся в зацеплении, окружной шаг зубьев,  $a$ , следовательно, и модуль должны быть одинаковыми. Все основные параметры зубчатых колес выражают через модули.

Так как длина делительной окружности зубчатого колеса

$$\pi d = pz,$$

где  $z$  – число зубьев,  
то диаметр делительной окружности

$$d = mz.$$

Диаметр основной окружности

$$d_b = mz \cdot \cos \alpha_w.$$

Шаг по основной окружности

$$p_b = \pi m \cdot \cos \alpha_w.$$

В соответствии со стандартным исходным контуром для цилиндрических зубчатых колес высота головки зуба  $h_a = m$ , высота ножки зуба  $h_f = m + c = 1,25m$ , где  $c = 0,25m$ .

Высота зубьев цилиндрических колес

$$h = h_a + h_f = 2,25m.$$

Диаметр окружности вершин

$$d_a = d + 2h_a = mz + 2m = m(z + 2).$$

Диаметр окружности впадин зубьев

$$d_f = d - 2h_f = mz - 2 \cdot 1,25m = m(z - 2,5).$$

Радиус закругления у основания зуба

$$\rho_f = 0,38m.$$

Толщина зуба по делительной окружности

$$s_t = 0,5\pi \cdot m.$$

Ширина впадины между зубьями по делительной окружности

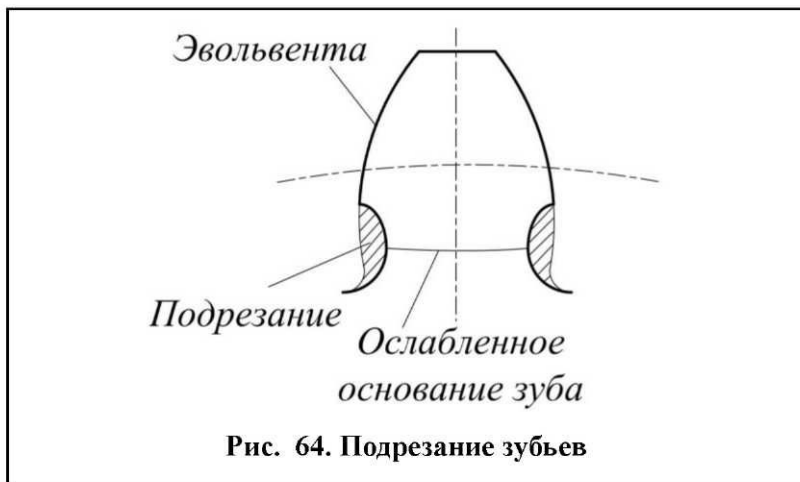
$$e_t = 0,5\pi \cdot m.$$

Окружная толщина зуба  $s_t$  и окружная ширина впадины  $e_t$  по дуге делительной окружности колеса передачи без смещения теоретически равны. Однако на практике колеса выполняют так, чтобы зуб был несколько тоньше впадины, чем гарантируют боковой зазор  $j$ , необходимый для нормального зацепления.

## **8.7. Подрезание профилей зубьев**

При нарезании зубчатых колес с малым числом зубьев по методу обкатки в станочном зацеплении возникает явление интерференции зубьев, когда часть пространства оказывается одновременно занятой зубьями производящего инструмента и обрабатываемого колеса. В результате головки режущего инструмента срезают часть номинальной поверхности у основания зуба обрабатываемого

колеса. Ножки зубьев нарезаемого колеса оказываются как бы подрезанными (рис. 64), откуда и само явление стало называться подрезанием.



При подрезании прочность зуба у основания уменьшается. Кроме этого, срезается часть эвольвенты у ножки зуба, уменьшается длина рабочего участка профиля и возрастает изнашивание поверхностей зубьев. Поэтому подрезание профилей зубьев является нежелательным при нарезании зубчатых колес.

### **8.8. Зубчатые колеса со смещением**

Необходимость снижения материалоемкости конструкций и получения минимальных габаритов передач приводит к необходимости нарезать колеса с числом зубьев меньше  $z_{\min}$ . Чтобы в этом случае не происходило подрезания, необходимо инструменту сообщить такое смещение  $xm$ , чтобы прямая головок рейки не выходила за крайнюю точку  $K$  активной линии зацепления (рис. 65).





**Рис. 65. Относительное положение инструментальной рейки при нарезании зубьев со смещением**

При нарезании зубчатого колеса инструментальной рейкой явление подрезания зубьев будет происходить в том случае, когда прямая головок рейки пересечет линию зацепления за пределами ее активного участка, т.е. геометрического места точек на линии зацепления, где инструмент и колесо непосредственно находятся в зацеплении.

В исходном положении, показанном сплошной линией, прямая головок рейки пересечет линию зацепления в точке  $L$  и зубья колеса будут подрезаны. Сдвинем рейку, сохраняя положение полюса  $P$  так, чтобы прямая головок проходила через крайнюю точку  $K$  активной линии зацепления.

Величину  $x_m$  называют абсолютным смещением рейки, а величину  $x$  – относительным смещением или коэффициентом смещения.

Значение коэффициента смещения определим из следующих соображений:

$$xm = CD, \quad CD = h_a^* m - PC, \quad PC = PK \cdot \sin \alpha,$$

$$PK = r_w \cdot \sin \alpha = \frac{mz}{2} \cdot \sin \alpha.$$

$$\text{Следовательно, } PC = \frac{mz}{2} \cdot \sin^2 \alpha,$$

$$\text{откуда } xm = h_a^* m - \frac{mz}{2} \cdot \sin^2 \alpha.$$

Принимая  $h_a^* = 1$ , получим окончательно

$$xm = m \left( 1 - \frac{z}{2} \cdot \sin^2 \alpha \right).$$

Данная формула позволяет определить требуемую величину сдвига рейки для нарезания необходимого числа зубьев  $z$  без их подрезания.

Разделив обе части последнего уравнения на  $m$ , получим

$$x = 1 - \frac{z}{2} \cdot \sin^2 \alpha.$$

Если в этой формуле принять коэффициент смещения  $x = 0$ , то можно определить  $z_{\min}$  колеса, у которого исключено подрезание зуба без смещения рейки:

$$z_{\min} = \frac{2}{\sin^2 \alpha}.$$

При  $\alpha = 20^\circ$  минимальное число зубьев, которое можно нарезать без подрезания, будет  $z_{\min} = 17$ .

Заметим, что, если делительная прямая не пересекает и не касается делительной окружности, смещение считают положительным, если пересекает – отрицательным. Положительное смещение приводит к утолщению зуба у

основания и способствует повышению его прочности при изгибе.

## 9. Синтез зубчатых передач с подвижными осями

К наиболее распространенным зубчатым механизмам с подвижными осями относят планетарные механизмы.

Рассмотрим вопросы, связанные с выбором чисел зубьев зубчатых колес и числа сателлитов в планетарных механизмах.

### 9.1. Условие соосности в планетарных механизмах

В соосных планетарных механизмах оси центральных колес и водила должны располагаться на одной прямой. На рис. 66 показаны две типовые схемы планетарных передач, состоящих из четырех звеньев.



Для схемы на рис. 66, *а*, согласно условию соосности,

$$r_H = r_1 + r_2 \text{ и } r_H = r_2' + r_3 \text{ или } r_1 + r_2 = r_2' + r_3,$$

где  $r_{II}$  – радиус водила;

$r_1, r_2, r'_2$  и  $r_3$  – радиусы начальных окружностей соответственно 1, 2, 2' и 3 колес.

Так как  $r = \frac{mz}{2}$ , то в случае одинаковых модулей обеих пар колес условие соосности можно записать так:

$$z_1 + z_2 = z'_2 + z_3,$$

где  $z_1, z_2, z'_2$  и  $z_3$  – числа зубьев колес.

Для схемы на рис. бб, б по условию соосности

$$r_{II} = r_1 - r_2 \text{ и } r_{II} = r'_2 + r_3 \text{ или } r_1 - r_2 = r'_2 + r_3,$$

где  $r_1, r_2, r'_2$  и  $r_3$  – радиусы начальных окружностей соответствующих колес.

В случае одинаковых модулей обеих пар колес это условие можно записать соответственно:

$$z_1 - z_2 = z'_2 + z_3,$$

где  $z_1, z_2, z'_2$  и  $z_3$  – числа зубьев колес.

Следовательно, в соосном планетарном механизме можно произвольно выбирать числа зубьев трех колес, а число зубьев четвертого колеса определяют из условия соосности.

## **9.2. Условие соседства в планетарных механизмах**

Обычно в планетарных механизмах для уменьшения нагрузок на зубья колес и для обеспечения условий динамической уравновешенности механизма устанавливают не один, а несколько сателлитов под равными углами. Сателлиты располагают в одной плоскости так, чтобы окружности вершин зубьев сателлитов не пересекались. Это и является условием соседства. Для соблюдения усло-

вия соседства (рис. 67) необходимо, чтобы выполнялось следующее условие:

$$BC > d_{a2},$$

где  $BC$  – расстояние между осями соседних сателлитов;  
 $d_{a2}$  – диаметр окружности вершин зубьев сателлитов.  
 тов.



**Рис. 67. К определению условия соседства сателлитов**

Из треугольника  $ABC$  имеем

$$BC = 2(r_1 + r_2) \cdot \sin \frac{180^\circ}{k},$$

где  $r_1$  и  $r_2$  – радиусы начальных окружностей колес 1 и 2;

$k$  – число сателлитов.

Чтобы окружности вершин зубьев сателлитов не соприкасались, надо соблюсти неравенство

$$2(r_1 + r_2) \cdot \sin \frac{180^\circ}{k} > d_{a2}.$$

Для зубчатых колес без смещения имеем

$$r_1 = \frac{mz_1}{2}, r_2 = \frac{mz_2}{2}, d_{a2} = m(z_2 + 2),$$

откуда окончательно условие соседства примет вид

$$\sin \frac{180^\circ}{k} > \frac{z_2 + 2}{z_1 + z_2} \quad \text{или} \quad k < \frac{180^\circ}{\arcsin \frac{z_2 + 2}{z_1 + z_2}}.$$

### 9.3. Условие сборки в планетарных механизмах

При сборке планетарного механизма первый поставленный сателлит полностью определяет взаимное расположение центральных колес. Для того чтобы после этого между центральными колесами можно было вставить другие сателлиты, оси симметрии зубьев центральных колес 1 и 3 должны находиться на одной общей прямой. То есть необходимо соблюдать условие сборки, которое в соответствии с рис. 67 можно записать так:

$$k = \frac{(z_1 + z_3)}{q},$$

где  $k$  – ряд возможных значений для числа сателлитов;  
 $z_1$  и  $z_3$  – числа зубьев центральных колес;  
 $q$  – целое число.

Поясним проверку условий соседства и сборки на следующем примере.

Пусть  $z_1 = 20$ ,  $z_2 = 25$ , а  $z_3 = 70$ . Из условий соседства  $k < \frac{180^\circ}{\arcsin \frac{z_2 + 2}{z_1 + z_2}} = \frac{180^\circ}{\arcsin 0,6} = 4,87$ . То есть число сателлитов должно быть  $\leq 4$ . Из условий сборки

$$k = \frac{(z_1 + z_3)}{q} = \frac{20 + 70}{q} = \frac{90}{q}. \text{ Но числа } k \text{ и } q \text{ должны}$$

быть целыми, тогда последнее условие при выборе, например, числа сателлитов  $k = 4$  удовлетворено не будет, так

$$\text{как в этом случае } q = \frac{90}{k} = \frac{90}{4} = 22,5. \text{ Условию сборки}$$

удовлетворяет число сателлитов  $k = 3$ . При этом  $q = 30$ , т.е. – целое число.

Таким образом, при проектировании (синтезе) планетарной передачи необходимо выполнить условия соосности, соседства и сборки.

### **Библиографический список**

1. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин : учебник для втузов / И.И. Артоболевский. – М. : Высш. шк., 1975. – 750 с.

2. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин: учебник для втузов / И.И. Артоболевский. – М. : Наука, 1988. – 640 с.

3. Заблонский К.И. Теория механизмов и машин: учебник / К.И. Заблонский, И.М. Белоконов, Б.М. Щекин. – Киев : Выща шк. Головное изд-во, 1989. – 376 с.

4. Фролов К.В. Теория механизмов и машин : учебник для вузов / К.В. Фролов, С.А. Попов, А.К. Мусатов [и др.]; под общ. ред. К.В. Фролова. – М. : Высш. шк., 2003. – 496 с.

## Содержание

Введение .....	3
1. Основные понятия и определения, принятые в теории механизмов и машин .....	4
1.1. Звено механизма .....	4
1.2. Кинематическая пара .....	4
1.3. Кинематическая цепь .....	5
1.4. Механизм .....	6
1.5. Машина .....	6
2. Структура и классификация механизмов .....	7
2.1. Классификация кинематических пар .....	7
2.2. Условное изображение кинематических пар .....	7
2.3. Степень свободы кинематической цепи и степени подвижности механизма .....	9
2.4. Замена в плоских механизмах высших пар низшими .....	11
2.5. Структурная классификация плоских механизмов ..	13
2.6. Группы Ассура второго класса .....	15
2.7. Определение класса механизма .....	16
3. Кинематический анализ плоских рычажных механизмов с низшими парами .....	17
3.1. Рычажные механизмы .....	18
3.2. Построение плана положений механизма .....	20
3.3. Построение кинематических диаграмм .....	22
3.4. Построение планов скоростей и ускорений .....	24
3.5. Определение скоростей и ускорений механизма первого класса .....	24
3.6. Определение скоростей группы Ассура второго класса первого вида .....	27
3.7. Определение ускорений группы Ассура второго класса первого вида .....	30
3.8. Определение скоростей группы Ассура второго класса второго вида .....	34



3.9. Определение ускорений группы Ассур второго класса второго вида .....	35
3.10. Кинематический анализ механизмов аналитическим методом .....	37
3.10.1. Аналогии скоростей и ускорений .....	38
3.10.2. Кинематический анализ кривошипно-ползунного механизма аналитическим методом .....	41
4. Динамический анализ механизмов .....	45
4.1. Движение механизмов под действием приложенных сил .....	46
4.2. Определение закона движения механизма .....	46
4.3. Приведение сил и масс в механизмах .....	48
4.4. Уравнение движения механизма в энергетической форме .....	51
4.5. Неравномерность движения механизмов и машин .....	52
4.6. Уравнение движения машин для отдельных фаз .....	53
4.7. Средняя скорость машины и её коэффициент неравномерного движения .....	55
4.8. Назначение маховика .....	56
4.9. Диаграмма энегмомасс .....	57
4.10. Определение движения механизма по диаграмме энегмомасс .....	59
4.11. Определение момента инерции маховика .....	61
5. Силовой анализ механизмов .....	65
5.1. Определение сил инерции звеньев .....	65
5.2. Направление реакций в плоских кинематических парах .....	67
5.3. Условие статической определимости кинематических цепей .....	69
5.4. Определение реакций в кинематических парах группы Ассур второго класса первого вида .....	70
5.5. Определение реакций в кинематических парах группы Ассур второго класса второго вида .....	73
5.6. Силовой расчет ведущего звена .....	76

5.7. Рычаг Жуковского.....	79
5.8. Уравновешивание вращающихся масс .....	81
6. Кинематический анализ механизмов с высшими парами .....	86
6.1. Плоские кулачковые механизмы.....	86
6.2. Механизмы зубчатых передач .....	89
6.3. Планетарные механизмы.....	94
6.4. Дифференциальные механизмы .....	96
7. Синтез кулачковых механизмов.....	100
7.1. Кинематическая схема механизма.....	100
7.2. Циклограмма работы механизма.....	100
7.3. Закон движения толкателя на фазах подъема и опускания .....	102
7.4. Угол давления в кулачковых механизмах .....	104
7.5. Определение угла давления по заданному закону движения толкателя и минимального размера кулачка.....	105
7.6. Выбор радиуса ролика.....	109
8. Синтез трехзвенных зубчатых передач с неподвижными осями .....	111
8.1. Основная теорема зацепления.....	112
8.2. Эвольвента окружности и её свойства.....	116
8.3. Уравнение эвольвенты.....	117
8.4. Эвольвентное зацепление.....	119
8.5. Методы изготовления эвольвентных профилей зубьев.....	121
8.6. Основные элементы эвольвентного зацепления....	125
8.7. Подрезание профилей зубьев.....	128
8.8. Зубчатые колеса со смещением .....	129
9. Синтез зубчатых передач с подвижными осями.....	132
9.1. Условие соосности в планетарных механизмах.....	132
9.2. Условие соседства в планетарных механизмах .....	133
9.3. Условие сборки в планетарных механизмах .....	135
Библиографический список .....	136