

ОПД.Ф.02.03 ТЕОРИЯ МАШИН И МЕХАНИЗМОВ

Учебное пособие

Изложены традиционные разделы теории механизмов: структура, кинематика, динамика машин, а также синтез рычажных, зубчатых и кулачковых механизмов. Большое внимание уделено вопросам, необходимым для подготовки современного инженера-механика, — теории манипуляторов и робототехнике. В приложения включен материал для углубленного изучения.

Для студентов высших учебных заведений, обучающихся по машиностроительным специальностям, и преподавателей.

Оглавление

Предисловие	9
Введение	11
1. Основы структурного анализа механизмов	18
1.1. Основные понятия курса теории механизмов и машин	18
1.2. Виды и классификация кинематических пар	20
1.3. Кинематическая цепь. Кинематическое соединение	22
1.4. Число степеней свободы механизма	23
1.5. Классификация плоских механизмов с низшими парами	26
1.6. Разновидности четырехзвенных рычажных механизмов	28
1.7. Зубчатые, кулачковые, фрикционные механизмы	29
<i>Контрольные вопросы и задания</i>	32
2. Кинематика механизмов	33
2.1. Задачи кинематики механизмов	33
2.2. План положений механизма	34
2.3. Основные кинематические соотношения	35
2.4. Методы планов	39
2.4.1. План скоростей шарнирного четырёхзвенника	39
2.4.2. План ускорений шарнирного четырёхзвенника	41
2.4.3. Планы скоростей и ускорений кулисного механизма	43
2.5. Метод кинематических диаграмм	46
2.6. Аналитический метод исследования открытой кинематической цепи	49
2.7. Кинематическое исследование рычажных механизмов с замкнутыми цепями	50
<i>Контрольные вопросы и задания</i>	57

3. Динамический анализ машин и механизмов	59
3.1. Задачи динамики машин	59
3.2. Классификация сил в механизмах	59
3.3. Сила инерции	61
3.3.1. Общие сведения	61
3.3.2. Силы инерции в поступательном, вращательном и сложном движении	62
3.4. Силовое исследование механизмов методами кинетостатики	65
3.5. Метод планов сил	68
3.6. Метод рычага Жуковского, аналитический метод	70
3.7. Уравновешивание сил инерции	73
3.7.1. Задача уравновешивания ротора	73
3.7.2. Статическая неуравновешенность ротора ...	74
3.7.3. Моментная неуравновешенность ротора ...	76
3.7.4. Полное уравновешивание ротора с известным расположением масс	76
3.7.5. Балансировка на машинах	78
3.7.6. Уравновешивание механизмов	79
3.8. Силы трения в механизмах	80
3.8.1. Законы трения	80
3.8.2. Трение в поступательной паре	82
3.8.3. Трение во вращательной паре	84
3.8.4. Трение в высшей паре	85
3.9. Динамический анализ механизмов	86
3.9.1. Приведение сил и масс	86
3.9.2. Уравнение движения механизма в дифференциальной форме	88
3.9.3. Периоды работы машины	91
3.9.4. Регулирование неравномерности хода машины	93
<i>Контрольные вопросы и задания</i>	95
4. Синтез рычажных механизмов	96
4.1. Задачи синтеза механизмов	96
4.2. Структурный синтез рычажных механизмов	97

4.3. Синтез четырехзвенных механизмов по заданным положениям звеньев	100
4.4. Синтез механизмов по коэффициенту производительности	101
4.5. Учет угла давления при синтезе механизмов	103
4.6. Примеры синтеза рычажных механизмов	104
4.6.1. Направляющие механизмы. Механизмы с выстоями	104
4.6.2. Шаговые механизмы. Мальтийские механизмы	106
4.6.3. Механизмы пантографов	108
4.7. Синтез сферических рычажных механизмов	110
<i>Контрольные вопросы и задания</i>	114
5. Синтез зубчатых механизмов	115
5.1. Классификация зубчатых механизмов	115
5.2. Центроидные механизмы	118
5.3. Основной закон зацепления	118
5.4. Эвольвента окружности и ее свойства	120
5.4.1. Образование и построение эвольвенты	120
5.4.2. Уравнение эвольвенты в полярных координатах	122
5.4.3. Эвольвентное зацепление	123
5.5. Определение параметров зубчатых колес	124
5.5.1. Изготовление зубчатых колес	124
5.5.2. Исходный контур	125
5.5.3. Элементы нулевого зубчатого колеса	127
5.5.4. Нарезание зубчатых колес со смещением	128
5.5.5. Влияние смещения на профиль зуба	129
5.5.6. Подрезание, интерференция, заострение	130
5.6. Построение картины зацепления	132
5.7. Качественные характеристики зацепления	134
5.7.1. Коэффициент перекрытия	134
5.7.2. Толщина зуба на окружности произвольного радиуса	136

5.8.	Геометрический расчет зубчатой передачи	137
5.9.	Блокирующие контуры	139
5.10.	Косозубые колеса	140
5.11.	Другие виды зацеплений	142
5.12.	Пространственные зубчатые передачи	144
5.13.	Передаточное отношение и передаточное число	146
5.14.	Планетарные зубчатые механизмы	149
5.15.	Аналитический метод определения передаточного отношения и угловых скоростей планетарных механизмов	151
5.16.	Кинематический анализ автомобильного дифференциала	153
5.16.1.	Кинематика автомобильного дифференциала	153
5.16.2.	Замкнутые дифференциальные механизмы	154
5.16.3.	Дифференциальные коробки передач	155
5.17.	Графический метод анализа планетарных механизмов	156
5.18.	Синтез планетарных механизмов	158
5.19.	Передаточные механизмы для мехатронных устройств	162
5.19.1.	Волновая передача	162
5.19.2.	Планетарные механизмы робототехнического назначения	164
	<i>Контрольные вопросы и задания</i>	168
6.	Синтез кулачковых механизмов	170
6.1.	Виды кулачковых механизмов	170
6.2.	Элементы профиля кулачка	172
6.3.	Выбор закона движения толкателя	174
6.4.	Изготовление кулачков	176
6.5.	Анализ кулачковых механизмов	176
6.6.	Угол давления и его связь с размерами кулачка	178
6.7.	Определение основных размеров кулачкового механизма с коромыслом	181

6.8. Определение размеров кулачкового механизма с плоским (тарельчатым) толкателем	182
6.9. Построение профиля кулачка по заданному закону движения толкателя	185
<i>Контрольные вопросы и задания</i>	189
7. Основы теории машин-автоматов	190
7.1. Основные понятия теории машин-автоматов	190
7.2. Аналоговые системы управления	191
7.3. Система управления по времени	194
7.4. Числовое программное управление	196
7.5. Основы синтеза логических систем управления	197
7.6. Синтез избирательной системы управления	200
<i>Контрольные вопросы и задания</i>	202
8. Роботы и манипуляторы	204
8.1. Общие сведения о роботах и манипуляторах	204
8.2. История развития робототехники	206
8.3. Классификация роботов	208
8.4. Промышленные роботы	211
8.5. Структура и геометрические характеристики манипуляторов	217
8.6. Задание ориентации твердого тела	224
8.7. Кинематика манипулятора	229
8.8. Обратная задача кинематики манипулятора	235
8.9. Предварительный силовой расчет манипулятора	237
<i>Контрольные вопросы и задания</i>	241
Приложения	
1. Элементы матричной алгебры	243
2. Обобщенные координаты, уравнения связей, математическая модель пространственной кинематической цепи	252
3. Принцип Даламбера и его использование в задачах механики машин	255

4. Автоматические регуляторы скорости	261
5. Динамическая упругая модель механизма	263
6. Характеристики упругих звеньев	269
7. Виброзащита машин	274
8. Синтез механизмов методами оптимизации	278
9. Динамический анализ кулачковых механизмов	280
Список использованных источников	283
Список дополнительной литературы	283

Предисловие

Теория механизмов, машин и манипуляторов — это общепрофессиональная дисциплина, играющая роль связующего звена между циклами общенаучных и специальных дисциплин. Совместно с курсами теоретической механики, сопротивления материалов и деталей машин она образует группу предметов, закладывающих фундамент инженерного образования машиностроительного профиля. Значение этих дисциплин в образовании не снижается, а растет.

Курс «Теория механизмов, машин и манипуляторов» (ТМММ) иногда называют механикой машин, подчеркивая тем самым, что это специальный раздел механики, изучающий системы машин и механизмов присущими механике методами. ТМММ изучает общие свойства механизмов и машин и разрабатывает общие методы их проектирования, пригодные для различных областей техники. ТМММ обычно ограничивается только схемными решениями, поскольку именно схемы определяют основные параметры механизма. Никакими конструктивными и технологическими улучшениями нельзя исправить недостатки схемы. Сведения, содержащиеся в курсе ТМММ, важны не только для конструкторов, но и для эксплуатационников, так как грамотная эксплуатация машин возможна только при четком понимании принципов их работы и основных свойств.

Все задачи курса ТМММ можно условно разделить на две категории: задачи анализа и задачи синтеза. Анализ состоит в исследовании кинематических и динамических свойств механизма по заданной схеме и заданным размерам. Задача синтеза является обратной по отношению к задаче анализа. Однако не всегда существуют методы прямого решения задачи синтеза. Поэтому при проектировании приходится прибегать к многократному повторению задачи анализа с тем, чтобы выбрать из рассматриваемых вариантов наилучший.

Основу данного учебного пособия составил курс лекций, читаемых автором на протяжении многих лет студентам Белорусско-Российского университета. Оно состоит из следующих разделов: «Основы структурного анализа механизмов»,

«Кинематика механизмов», «Динамический анализ машин и механизмов», «Синтез рычажных механизмов», «Синтез зубчатых механизмов», «Синтез кулачковых механизмов», «Основы теории машин-автоматов», «Роботы и манипуляторы». Раздел, посвященный роботам и манипуляторам, появился в нем по причине особой важности этого вида техники для машиностроительного производства ближайшего будущего. Поэтому студенты технических вузов должны в самом начале обучения получить некоторые сведения о роботах, с тем чтобы закрепить их впоследствии, при изучении специальных дисциплин.

Из-за ограниченного количества часов, выделяемого учебным планом на изучение дисциплины, не весь приводимый в данном пособии материал может быть освоен студентами. Разделы, которые, по мнению автора, полезны для более глубокого ознакомления с предметом, но не обязательны для сдачи экзамена, вынесены в приложения. К ним, в частности, относятся описания некоторых оригинальных авторских разработок, которые нельзя найти в других учебных пособиях по теории механизмов, например аналитический метод преобразования координат, математическая модель пространственной кинематической цепи, а также ряд схем планетарных механизмов с гибкими связями, также являющихся авторскими разработками.

Особенностью пособия является широкое использование матричного аппарата. В частности, без него невозможно содержательное изложение раздела «Роботы и манипуляторы». Поэтому автор счел необходимым включить в книгу прил. 1, содержащее основы матричной алгебры.

ВВЕДЕНИЕ

Слово «*механика*» происходит от древнегреческого слова, которым называлось все искусно придуманное. В русском языке еще во времена Петра I это слово звучало как «*машина*».

История машин имеет древние корни. В процессе познания природы первобытный человек начал проникать в ее тайны, сначала бессознательно, интуитивно.

Около 7 тысяч лет назад возникли первые цивилизации (в долинах рек Нил, Тигр и Евфрат, Инд, Янцзы и Хуанхэ). В 5-м тысячелетии до н.э. человек познакомился с бронзой, во 2-м тысячелетии до н.э. — с железом. Уже тогда люди умели пользоваться рычагом и клином. Затем они овладели вращательным движением. Вращение деревянной палочки для получения огня, гончарный круг, бревно для перевозки тяжестей, подъемные приспособления, блок и ворот, наконец, колесо — первые практические результаты освоения вращательного движения, достигнутые на рубеже 1-го тысячелетия.

Очень древнее происхождение имеют зерноотерки. В V—III вв. до н.э. появилась водяная мельница — первая машина в мировой истории. Водяная мельница (рис. В.1) состояла из энергетического агрегата — водяного колеса, передачи — двух цевочных колес и рабочего органа — жерновов. В неизменном виде она просуществовала до XVIII—XIX вв.

Одной из причин создания первых механизмов являлась необходимость удовлетворения повседневных нужд людей. Например, водяные мельницы обеспечивали растущее население мукой. Другая причина возникновения машин — военные нужды. Древнейшие из таких машин — баллисты метали камни массой до 30 кг на расстояние до 400 м.

Величайшим математиком и механиком античности был Архимед (287—212 гг. до н.э.). Он изобрел винт, усовершенствовал зубчатые колеса, построил водоподъемные сооружения, а также ряд военных машин. Бурное развитие греческой куль-

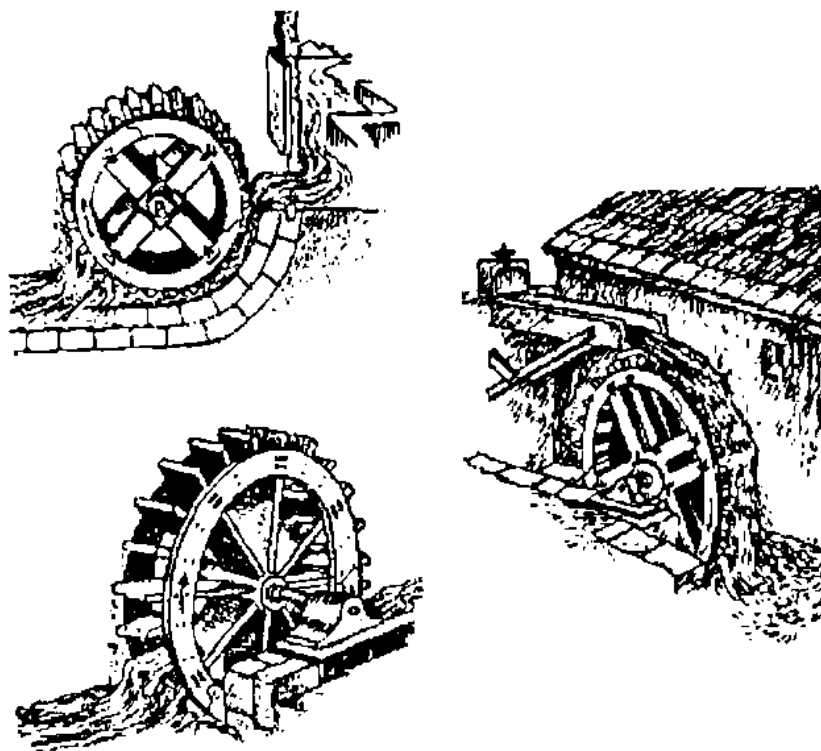


Рис. В.1. Водяная мельница

туры, рост городов, частые войны способствовали развитию не только практической механики, но и ее теории. Филон написал «Свод механики» — девять книг, среди которых были, например, «Учение о рычагах», «О построении метательных машин», «О построении автоматов». Ктесибий (II в. до н.э.) изобрел поршневой насос. Больше других античных ученых о механике написал Герон (I в. до н.э.). Среди его трудов — «Книга о подъемных механизмах», «Книга о военных машинах», «Театр автоматов». Герон описывает счетчик оборотов (рис. В.2), простые машины, системы зубчатых колес, системы блоков и полиспастов, «эмпил» — прообраз паровой турбины. В труде «Театр автоматов» описываются храмовые и театральные автоматы, которые в то время пользовались популярностью у населения.

Изобретения греков активно использовались в Древнем Риме. По определению Витрувия, «*машина* есть прочное соединение деревянных частей, предназначенное для передвижения грузов и приводимое в движение искусственным образом по кругу, что греки называют круговым движением».

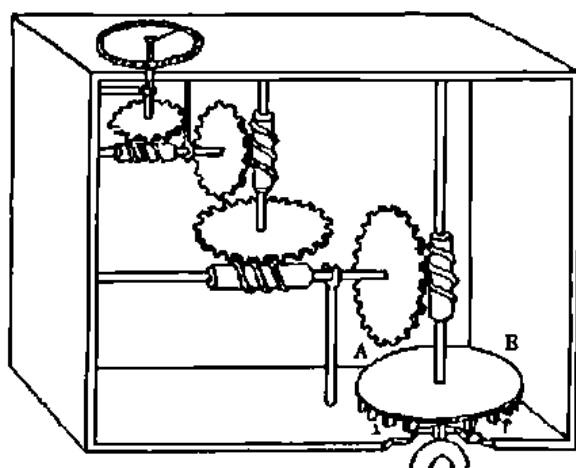


Рис. В.2. Счетчик оборотов

Эпоха Средневековья, продолжавшаяся 1000 лет, с V по XV в., мало что дала не только науке, но и практической механике. Многие из античных достижений было забыто. Основные технологические машины Средневековья — сукновальни, мельницы для изготовления пеньки, железоделательные мельницы (по сути, кузнечный молот). В XII—XIII вв. распространяются бумагоделательные и лесопильные мельницы. В XV в. был изобретен первый печатный станок — винтовой пресс.

Со второй половины XV в. начинается эпоха Ренессанса. «Это был величайший прогрессивный переворот из всех пережитых до того времени человечеством, — писал Энгельс, — эпоха, которая нуждалась в титанах и которая породила титанов по силе мысли, страсти и характеру, по многосторонности и учености... Тогда не было почти ни одного крупного человека, который не совершил бы далеких путешествий, не говорил бы на четырех или пяти языках, не блистал бы в нескольких областях творчества. Леонардо да Винчи был не только великим живописцем, но и великим математиком, механиком и инженером, которому обязаны важнейшими открытиями самые разнообразные отрасли физики...»

В области механики Леонардо первым исследовал полет птиц и приблизился к созданию летательного аппарата тяжелее воздуха. Он создал много различных схем машин (например, экскаватора — рис. В.3), он изучал трение и понял невозможность вечного двигателя за 300 лет до того, как это

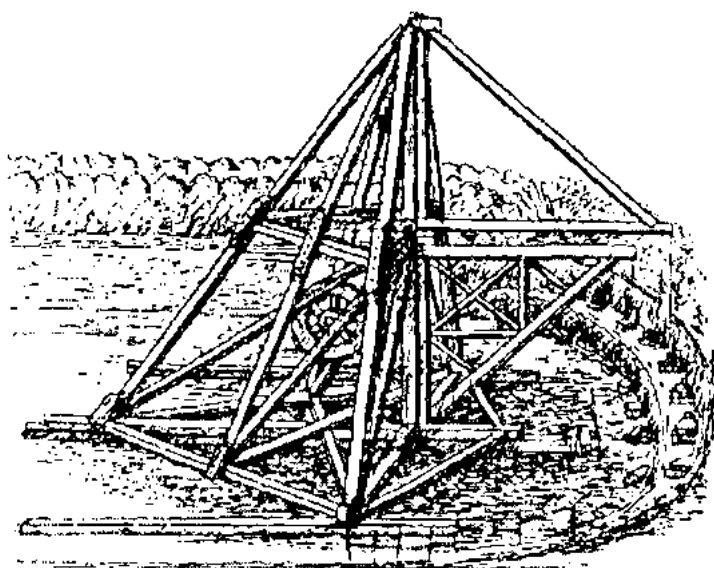


Рис. В.3. Проект экскаватора

было доказано. В годы деятельности Леонардо да Винчи уже использовалось слово «инженер», которое обозначало строителя военных машин и фортификационных сооружений.

Великие географические открытия XV–XVI вв. обеспечили приток золота в Европу. Это оживило коммерческую деятельность, вызвало развитие ростков капиталистических мануфактур в недрах цеховых ремесел. Мануфактуры не могли обойтись без развитой механической техники, поэтому в различных отраслях производства возникают новые механизмы, усложняются уже известные машины (рис. В.4). В этот же период наступает переворот в науке. Он начался с открытий Коперника, «остановившего Солнце и сдвинувшего Землю».

Революция в науке обязана своим возникновением деятельности большого числа ученых, наиболее выдающимися среди которых были Кеплер, Бэкон, Галилей, Декарт, Гюйгенс, Гук, Ньютон, Лейбниц. Значение деятельности И. Ньютона для дальнейшего развития науки огромно. Его труд «Математические начала натуральной философии» (1687) как бы завершил научную революцию и явился основой не только ньютоновской механики, но и нового миропонимания.

За революцией в науке последовала революция в технике. В 30-е гг. XVIII в. в Англии изобрели технологические машины, которые не только использовались в качестве источника

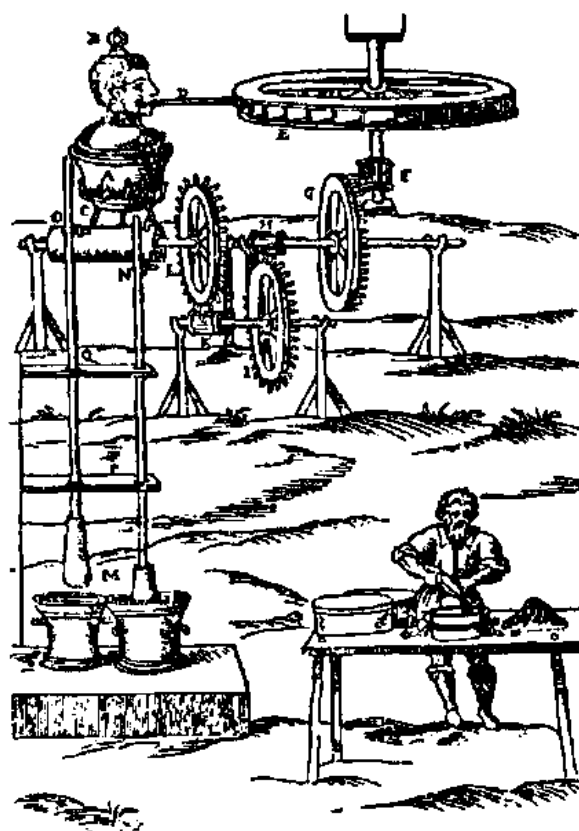


Рис. В.4. Зубчатая передача (XVII в.)

силы, но и смогли заменить руки человека. Так, в 1735 г. была изобретена прядильная машина (рис. В.5). Появление технологических машин заставило задуматься об универсальном двигателе. Это привело к изобретению в 1722 г. паровой машины (Т. Ньюкомен). Джеймс Уатт после большой серии экспериментов усовершенствовал паровую машину (рис. В.6). Производство паровых машин в конце XVIII в. стало государственным секретом Англии, и вывоз их за пределы страны был запрещен. Строительством паровых машин стали заниматься и в других странах. В числе первых изобретателей паровых машин был И. Ползунов (1765).

Использование паровых машин позволило строить предприятия не только на берегах рек. Машины стали применяться для производства самих машин. Стал развиваться механический транспорт — локомотивы и пароходы. В XIX — начале XX в. скорость появления новых машин и механизмов увеличивалась лавинообразно. На протяжении 25 лет (1890–1915) техника решила задачи эпохального значения: созданы двига-

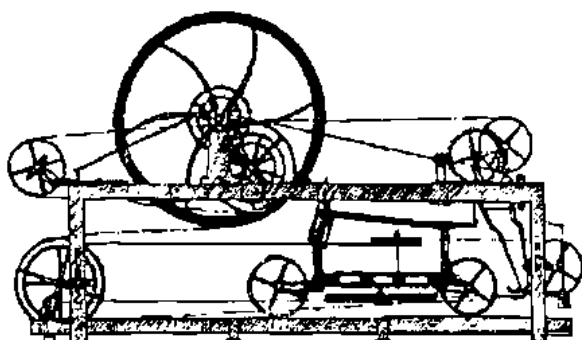


Рис. В.5. Прядильная машина (Кромптон)

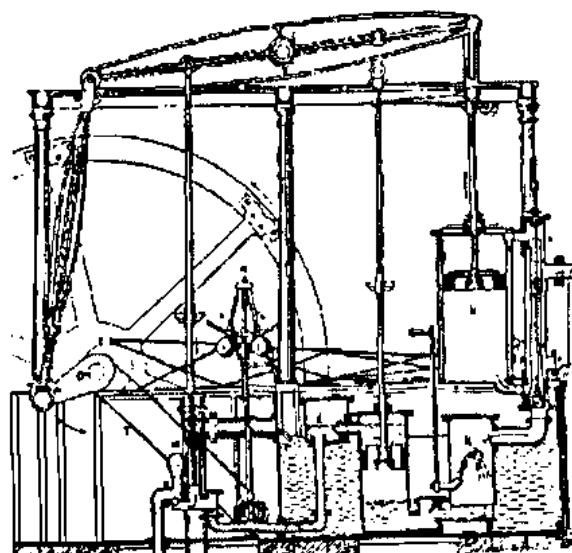


Рис. В.6. Паровая машина

тель Дизеля, паровые турбины, изобретены автомобиль и радио, началось развитие авиации; усовершенствованы машины для обработки металлов.

Одновременно происходит становление механики машин как науки. Разработаны первые учебники по механике: Ж. Ашетт «Элементарный курс машин», Р. Виллис «Принципы механизмов». Большой вклад в этот процесс внесли Г. Кориолис, Ж. Понселе (Франция), П.Л. Чебышев, Н.Е. Жуковский (Россия), Ф. Рело, Л. Бурмейстер (Германия) и др.

Основателем русской школы теории механизмов и машин является замечательный математик академик П.Л. Чебышев. В области теории ученый занимался проблемами синтеза механизмов, тесно связав их решение с созданной им теорией приближения функций. Кроме того, известен ряд замечательных изобретений Чебышева, относящихся к практической механике: приближенное пряило, паровая машина, центробежный регулятор, самокатное кресло, «стопход» — предшественник шагающих механизмов.

Большой вклад в развитие теории механизмов внес «отец русской авиации» проф. Н.Е. Жуковский. Им, в частности, предложен способ силового исследования, изучаемый в настоящем курсе, носящий название теоремы о жестком рычаге.

Идеи проф. Л.В. Ассура, относящиеся к структуре механизмов, позволили создать современную классификацию рычажных механизмов.

Академик И.И. Артоболевский написал основной современный учебник по ТММ. Им составлен также многотомный справочник «Механизмы в современной технике», являющийся своего рода энциклопедией по механизмам.



ОСНОВЫ СТРУКТУРНОГО АНАЛИЗА МЕХАНИЗМОВ



Основные понятия курса теории механизмов и машин

Само название курса указывает на то, что между понятиями «механизм» и «машина» делается различие. Содержание этих понятий изменялось в процессе развития техники. К настоящему времени утвердились следующие определения:

□ *«Механизм»* есть система тел, предназначенная для преобразования движения одного или нескольких тел в требуемое движение других тел».

□ *«Машина»* есть устройство, выполняющее механические движения для преобразования энергии, материалов и информации с целью замены или облегчения физического и умственного труда человека».

Из этих определений следует, что в механизме происходит только преобразование параметров или одного вида механического движения в другой, а в машине — преобразование энергии, материалов или информации. Как правило, механизмы являются составными частями машины, так что понятие «машина» является более широким, чем «механизм».

Машины принято делить на энергетические, технологические, транспортные, информационные, машины-автоматы и манипуляторы. К *энергетическим машинам* относят электродвигатели, турбины, двигатели внутреннего сгорания, паровые машины; к *технологическим* — металлорежущие станки, машины текстильного производства, т.е. устройства, посредством которых выполняются преобразования материалов; к *транспортным машинам* — автомобили, самолеты, локомотивы, подъемные краны, лифты; к *информационным* — устройства для переработки информации, например механические каль-

куляторы, дифференцирующие и интегрирующие устройства, а также современные компьютеры; к *машинам-автоматам* — устройства, в которых энергия, материалы или информация преобразуются без участия человека; к *манипуляторам* — устройства, воспроизводящие двигательные функции человеческих рук.

В зависимости от того, в каком виде существуют тела, передающие движение, — твердом, жидком или газообразном, механизмы принято делить на механизмы с твердыми звеньями, гидравлические и пневматические механизмы. В курсе ТМММ рассматривается только первый тип механизмов, гидравлические и пневматические механизмы подробно изучаются в специальных курсах.

Познакомимся с некоторыми основными понятиями и определениями ТМММ.

Звеном называется одна или несколько жестко связанных между собой деталей. Под деталью понимается отдельно изготавливаемая часть механизма. Все детали, входящие в звено, движутся как единое целое.

Звено, относительно которого изучается движение остальных звеньев механизма, называется *стойкой*. Пользуясь языком теоретической механики, можно сказать, что со стойкой связана система координат, относительно которой рассматривается движение прочих звеньев механизма.

Входным звеном называется звено, которому сообщается движение, преобразуемое затем в требуемые движения других звеньев. *Выходным звеном* называется звено, совершающее движение, для реализации которого и предназначен механизм. Чаще всего применяют механизмы с одним входным и одним выходным звеньями, но существуют механизмы и с большим числом таких звеньев — их называют *дифференциалами*. Входное звено соединено с двигателем, выходное — с рабочим органом машины. Остальные звенья, участвующие в передаче движения, называются *промежуточными*.

Фундаментальным понятием ТМММ является понятие «кинематическая пара». Теорию механизмов иногда даже называют теорией кинематических пар.

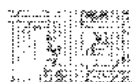
Кинематической парой называется соединение двух звеньев, допускающее их относительное движение. Следует подчеркнуть, что кинематическая пара — это не два звена, как воспринимается это в тривиальном смысле, а одно соединение. В этом — источник многих ошибок, допускаемых студентами при структурном анализе механизмов. Точки, линии и поверхности, по которым происходит соприкосновение звеньев в кинематической паре, называются *элементами кинематической пары*.

Структурной схемой механизма называется его упрощенное графическое изображение, на котором звенья условно изображаются отрезками прямых, треугольниками, прямоугольниками, окружностями и обозначаются арабскими цифрами, а кинематические пары изображаются согласно принятым правилам и обозначаются прописными латинскими буквами. Условные изображения звеньев на схемах стандартизированы.

Кинематической схемой называется структурная схема, построенная с соблюдением относительных размеров звеньев в некотором масштабе.

Конструктивная схема — это изображение механизма с соблюдением основных форм деталей и относительных размеров. Часто изображение строится в аксонометрии.


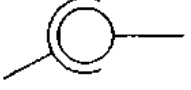

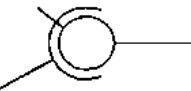

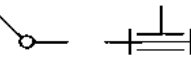
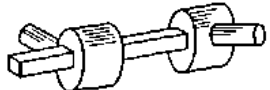
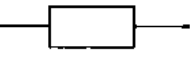

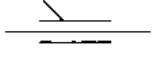
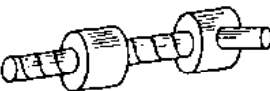

Виды и классификация кинематических пар



Свободное твердое тело, находящееся в трехмерном пространстве, обладает шестью степенями свободы, т.е. может совершать шесть независимых движений: три поступательных вдоль выбранных осей и три вращательных вокруг этих осей. Если такое тело связать с другим телом посредством кинематической пары, то это уменьшит число степеней свободы на число связей (запрещений) с другим телом. Число связей определяется видом кинематической пары (табл. 1.1).

Таблица 1.1

Классификация кинематических пар

Класс	Название	Схема	Условное изображение
3	Сферическая		
4	Сферическая с пальцем		
5	Вращательная		
5	Поступательная		
4	Цилиндрическая		
5	Винтовая		

По форме элементов кинематические пары делятся на *низшие* и *высшие*. В низших парах элементами служат поверхности: плоские, цилиндрические и сферические. В высших парах элементами являются точки и линии. Достоинство низших пар — повышенная долговечность соединения, достигаемая благодаря небольшим удельным нагрузкам на поверхности. В высших парах звенья соприкасаются небольшими площадками, что ведет к их ускоренному износу. Посредством низших пар можно реализовать относительно простые движения, высшие пары обеспечивают большие возможности.

В табл. 1.1 представлены основные виды низших кинематических пар. Высшие пары отличаются большим разнообразием видов. Наиболее часто используемые высшие пары — зубчатые и кулачковые — будут рассмотрены в 1.7.

Условие связи выражается уравнением относительно обобщенных координат. Кинематические пары принято делить

по числу уравнений связей на классы от 5-го до 1-го. Иногда их различают по числу степеней свободы на одно-, двух-, трех-, четырех- и пятиподвижные. Подвижность и класс каждой пары в сумме равны 6, т.е. числу степеней свободы свободного твердого тела. Таким образом, класс и подвижность по-разному характеризуют одно и то же свойство. Простейшие пары — поступательная и вращательная — накладывают пять условий связей, оставляя возможным только одно поступательное или одно вращательное движение относительно оси пары.

Кинематические пары по характеру движения делятся на плоские и пространственные. В плоских парах (вращательной или поступательной) относительное движение происходит в плоскости.

Кинематическая цепь.



Кинематическое соединение

Кинематическая цепь — это система звеньев, образующих между собой кинематические пары. В зависимости от того, какие кинематические пары соединены в цепь и как они расположены, различают плоские и пространственные кинематические цепи. В *плоской* кинематической цепи все звенья движутся в одной или параллельных плоскостях (рис. 1.1, а).

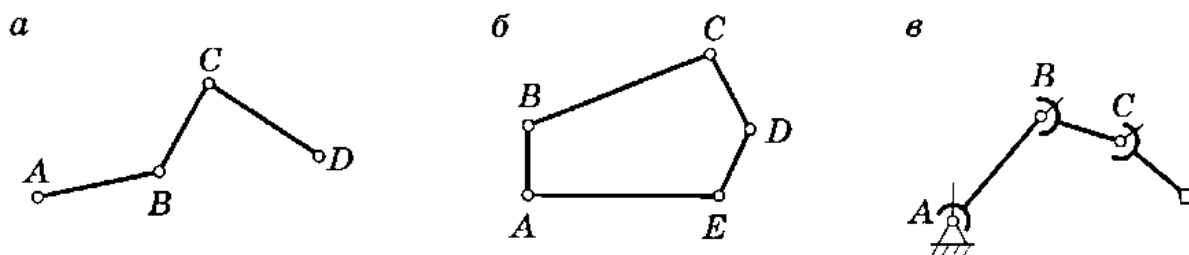


Рис. 1.1. Кинематические цепи:

а — плоская; б — замкнутая; в — открытая

Кинематическая цепь, звенья которой образуют замкнутый контур, называется *замкнутой* (рис. 1.1, б); если контур не замкнут, цепь называется *незамкнутой* или *открытой* (рис. 1.1, в). В традиционных механизмах обычно использу-

ются замкнутые кинематические цепи, незамкнутые цепи находят применение только в манипуляторах. Механизм — это кинематическая цепь, в которой указаны стойка, входные и выходные звенья.

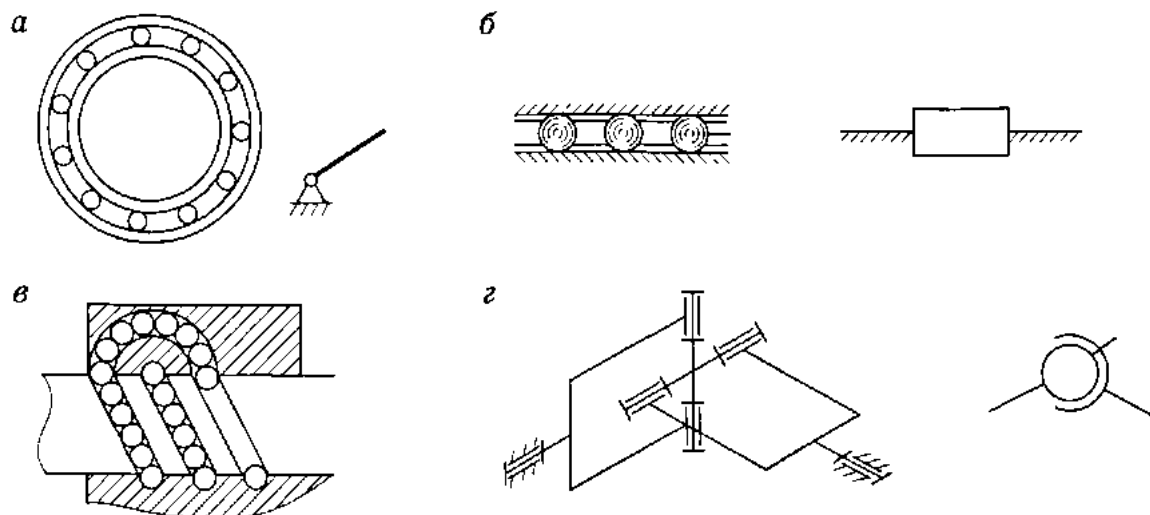


Рис. 1.2. Кинематические соединения:

а — шарикоподшипник; б — роликовая направляющая;
в — винтовая пара качения; г — универсальный шарнир

На основе кинематических цепей можно получать не только механизмы, но и устройства, заменяющие некоторые кинематические пары, — так называемые *кинематические соединения* (рис. 1.2). Шарико- или роликоподшипник эквивалентен вращательной паре. Роликовые направляющие заменяют поступательную пару. Винтовая пара качения заменяет обычную винтовую пару. Карданный шарнир, он же шарнир Гука, или универсальный шарнир, заменяет сферическую пару с пальцем. Если вилку снабдить еще одной вращательной парой, получится аналог сферической пары.



Число степеней свободы механизма

Основой любого механизма является кинематическая цепь. Важнейшей характеристикой кинематической цепи является *число степеней свободы*.

В теоретической механике под числом степеней свободы понимается число обобщенных координат, т.е. независимых между собой параметров, определяющих положение системы в выбранном пространстве. *Обобщенными координатами механизма* называются независимые между собой координаты, которые определяют положение всех звеньев относительно стойки. Число обобщенных координат механизма равно его числу степеней свободы, или, иначе, *степени подвижности механизма*.

Пусть кинематическая цепь содержит n звеньев. До того как они были соединены посредством кинематических пар, система из n звеньев имела $6n$ координат. Каждая кинематическая пара класса t дает t уравнений связей относительно координат. Разность между числом координат и числом уравнений связей дает число независимых координат:

$$W = 6n - 5p_1 - 4p_2 - 3p_3 - 2p_4 - p_5,$$

где W — число степеней свободы механизма; n — число подвижных звеньев; p_1 — число пар 5-го класса (одноподвижных), p_2 — число пар 4-го класса, p_3 — число пар 3-го класса и т.д. Эта формула известна как *формула Сомова — Малышева*.

Тело, вынужденное располагаться на плоскости, обладает не шестью, а только тремя обобщенными координатами: оно может совершать два поступательных движения и одно вращательное — вокруг оси, перпендикулярной плоскости. Поэтому для плоского механизма рассуждения, аналогичные приведенным ранее дают *формулу Чебышева*:

$$W = 3n - 2p_1 - p_2.$$

На рис. 1.3 представлены примеры кинематических цепей с различными степенями подвижности.

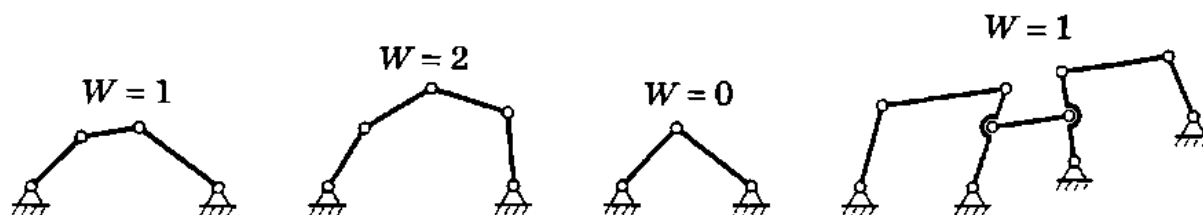


Рис. 1.3. Примеры кинематических цепей

Звенья, которым приписываются обобщенные координаты, называются *начальными*. Обычно они совпадают с входными звеньями, однако бывают случаи, когда за начальное принимают выходное или даже промежуточное звено — это упрощает исследование механизма. Число степеней свободы механизма определяет число начальных звеньев. Чаще всего применяют механизмы с $W = 1$.

В механизмах с простой замкнутой кинематической цепью и одноподвижными парами число подвижных звеньев на единицу меньше числа кинематических пар. Для пространственного механизма с одноподвижными парами из формулы Сомова — Малышева следует

$$1 = 6n - 5p_1. \quad (1.1)$$

Равенство (1.1) соблюдается при $n = 6$. Такой механизм называется пространственным семизвенником (рис. 1.4, *a*).

При некоторых частных соотношениях размеров звеньев возможны пространственные механизмы с одноподвижными парами с меньшим числом звеньев: четырехзвенный меха-

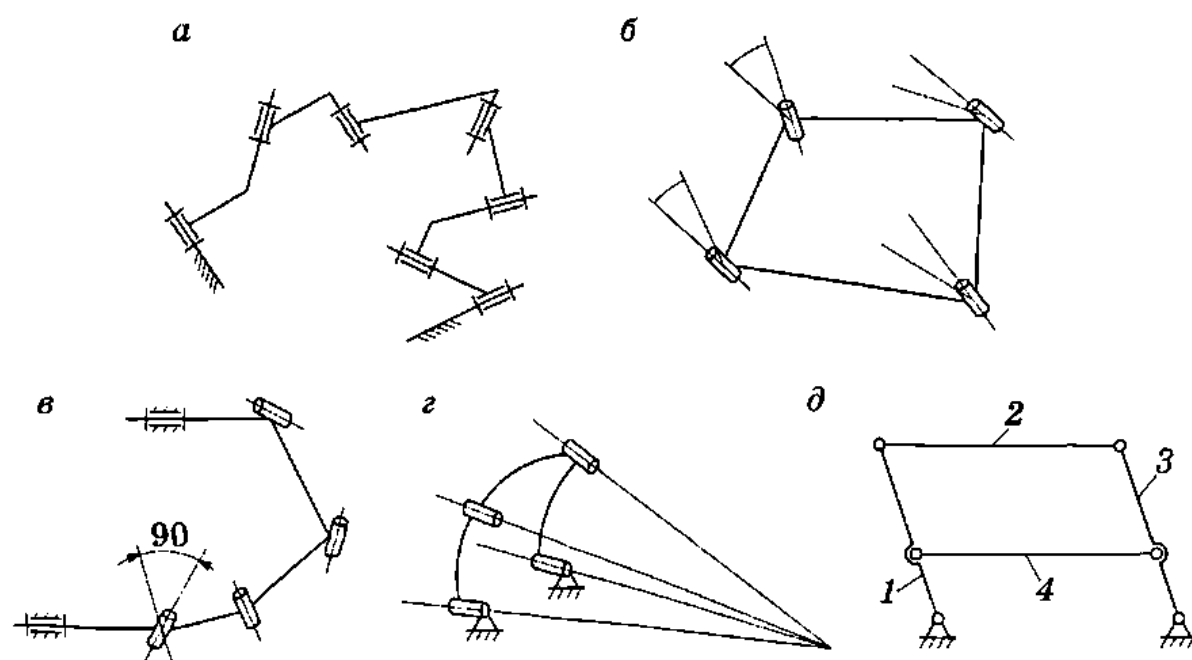


Рис. 1.4. Примеры пространственных механизмов: *a* — пространственный семизвенник; *б* — механизм Беннета; *в* — механизм Турбула; *г* — сферический четырехзвенник; *д* — шарнирный четырехзвенник с избыточной связью

низм Беннета (рис. 1.4, б), шестизвенный механизм Турбула (рис. 1.4, в), сферический четырехзвенник (рис. 1.4, г).

В механизмах могут встречаться *избыточные связи*. Избыточными называются такие связи, устранение которых не увеличивает числа степеней свободы механизма. Например, в механизме на рис. 1.4, д звено 4 может быть удалено, что не отразится на подвижности механизма. Избыточные связи делают механизм более жестким, однако требуют повышенной точности изготовления. В плоских механизмах избыточные связи возникают из-за неточности изготовления звеньев, приводящей к неплоскостности схемы. Избыточные связи в механизмах устраняются изменением подвижности кинематических пар.

Классификация плоских механизмов с низшими парами

Механизмы с низшими парами, называемые *рычажными*, находят широкое применение в технике. Ограничимся пока изучением плоских рычажных механизмов. Четырехзвенный механизм (см. рис. 1.3, слева) является простейшим из них. Более сложные механизмы можно получать, используя метод наложения групп звеньев.

Каждый механизм с $W = 1$ можно считать состоящим из механизма 1-го класса и присоединенных к нему структурных групп. Под *механизмом 1-го класса* понимается начальное звено со стойкой. Для механизма 1-го класса $W = 1$.

Структурной группой (иногда называют ассуровской группой) называется группа звеньев, которая, будучи присоединенной к стойке, образует кинематическую цепь с $W = 0$. Отсюда следует, что

$$0 = 3n - 2p_1. \quad (1.2)$$

Уравнение (1.2) называется уравнением структурной группы. Его можно представить в виде

$$p_1 = 1,5n.$$

Отсюда следует, что в структурной группе число звеньев четное, а число кинематических пар в 1,5 раза больше числа звеньев. Задавая разное число звеньев n , можно получить бесконечно большое число решений (рис. 1.5). Практическое значение имеют только решения с $n = 2$ и $n = 4$. Им соответствуют *двухповодковая группа (диада)* и *трехповодковая группа (трехповодок)*. Диада содержит два звена и три кинематические пары. Трехповодок содержит четыре звена и шесть кинематических пар. Разные сочетания вращательных и поступательных пар дают модификации групп.

n	p	Схема группы
2	3	
4	6	
5	9	

Рис. 1.5. Основные структурные группы

По предложению академика И.И. Артоблевского группам и механизмам присваиваются классы. Класс группы равен числу внутренних кинематических пар, образующих замкнутый контур. На этом основании диаду считают группой 2-го класса, а трехповодок — 3-го класса. Класс механизма равен классу старшей группы.

Основное свойство групп состоит в том, что они не изменяют степени подвижности кинематической цепи, к которой присоединяются. Последовательно наслаивая группу за группой, можно получить разные механизмы с той же степенью подвижности. Практическое применение находят механизмы 2-го и реже — 3-го класса.

Разновидности четырехзвенных рычажных механизмов

В технике наиболее широкое распространение получили плоские четырехзвенные механизмы. Они образуются присоединением диады к механизму 1-го класса. Известны пять модификаций диады, соответствующие им модификации четырехзвенных механизмов представлены на рис. 1.6.

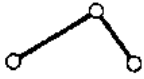

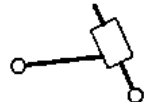
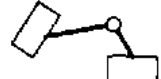

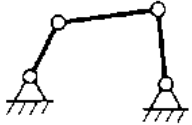
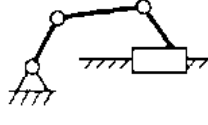
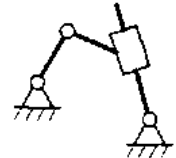
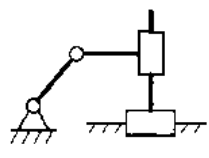
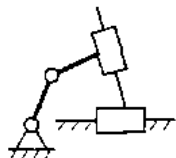
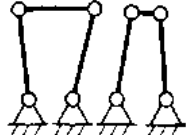
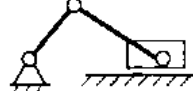
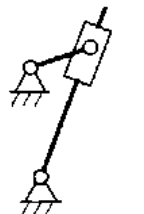
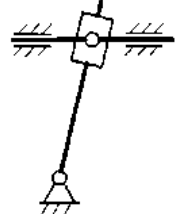
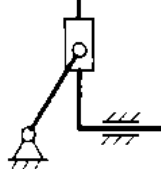
Модификация				
1-я	2-я	3-я	4-я	5-я
				
				
				

Рис. 1.6. Модификации диад и четырехзвенных рычажных механизмов

Механизм 1-й модификации — *шарнирный четырехзвенник*. Он применяется для изменения параметров вращательного движения или для воспроизведения сложных траекторий. В зависимости от соотношения размеров стойки и остальных звеньев возможны три разновидности шарнирного четырехзвенника: *кривошипно-коромысловый*, *двухкривошипный* и *двухкоромысловый* механизмы. Звеньям этих механизмов присвоены специальные названия: *кривошип* — звено, совершающее полный поворот, *коромысло* — звено, совершающее неполный

поворот, *шатун* — звено, не образующее кинематической пары со стойкой.

Механизм 2-й модификации называется *кривошипно-ползунным*. Он применяется для преобразования вращательного движения в поступательное и обратно. *Ползун* — звено, образующее поступательную пару со стойкой (направляющей).

Механизм 3-й модификации получил название *кулисного механизма*. Кулисные механизмы предназначены для изменения параметров вращательного движения. Известны следующие разновидности кулисного механизма: с качающейся кулисой и вращающейся кулисой. *Кулиса* — звено, вращающееся вокруг неподвижной оси и образующее с другим подвижным звеном, обычно называемым *камнем*, поступательную пару.

Механизм 4-й модификации получил название *тангенсного механизма*, так как закон перемещения ведомого звена представляет собой функцию $\operatorname{tg} \varphi$.

Механизм 5-й модификации называется *синусным механизмом*, поскольку закон движения ведомого звена соответствует графику функции $\sin \varphi$. Присоединяя диаду 5-й модификации к механизму 1-го класса поступательной парой, можно получить *механизм Ольдгейма*, который обычно называется *крестовой муфтой* и широко применяется для передачи движения при несоосных валах.

Зубчатые, кулачковые, фрикционные механизмы

Существует три основных вида простейших механизмов: рычажные, зубчатые и кулачковые. Рычажные механизмы рассматривались в 1.5 и 1.6. Далее познакомимся с зубчатыми и кулачковыми.

Зубчатым называется механизм, в состав которого входят зубчатые колеса, т.е. звенья с периодически чередующимися выступами (зубьями) и впадинами. Зубья двух колес

образуют высшую пару, так как касание происходит в точке или по линии вдоль зуба. На схемах зубья не показываются, а зубчатое колесо изображается в виде так называемой начальной окружности. Зубчатые механизмы входят в состав почти каждой достаточно сложной машины. Назначение зубчатых механизмов — уменьшение или увеличение угловой скорости и крутящего момента. Зубчатые механизмы, уменьшающие скорость, называются *редукторами*. Редукторы применяются в силовых передачах. Механизмы, увеличивающие скорость, называются *мультипликаторами*. Обычно они используются в приборах для увеличения точности отсчета. В зависимости от схемы зубчатые механизмы делятся на *рядовые зубчатые механизмы* и *планетарные механизмы* (рис. 1.7, а, б). Иногда зубчатые механизмы комбинируют с рычажными (рис. 1.7, в), в таком случае их называют *зубчато-рычажными*.

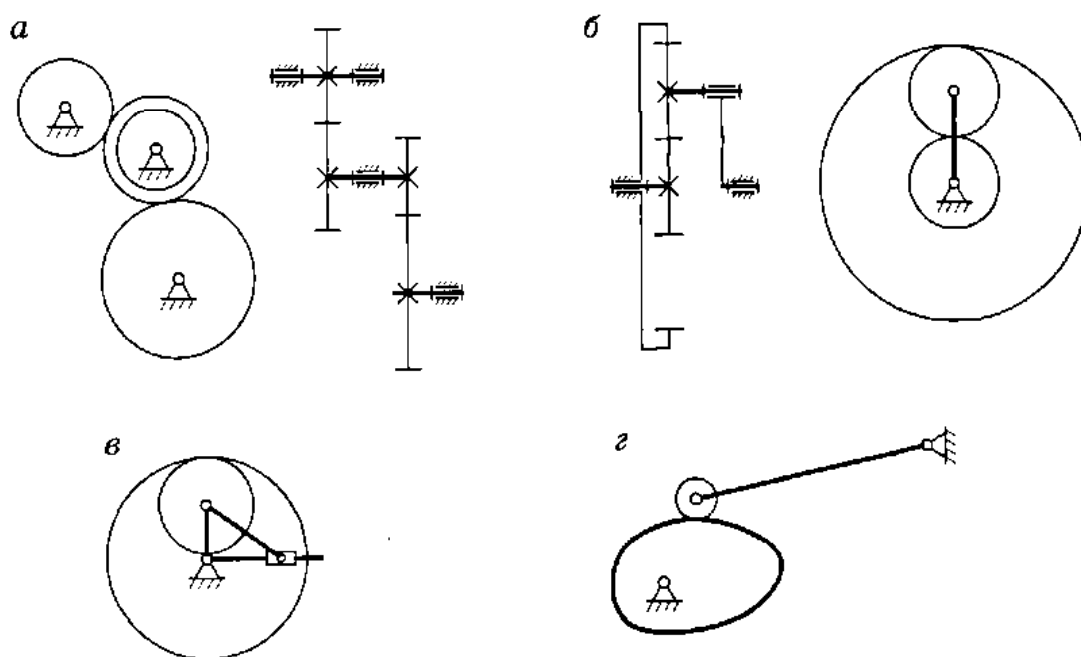


Рис. 1.7. Зубчатые и кулачковые механизмы:
а — рядовой зубчатый; б — планетарный зубчатый;
в — зубчато-рычажный, г — кулачковый

Кулачковым называется механизм, в состав которого входит кулачок, т.е. звено с переменной кривизной рабочей поверхностью (рис. 1.7, г). Выходное звено кулачкового механизма

называется *толкателем* или *коромыслом*. Кулачок с выходным звеном образует высшую кинематическую пару. Посредством кулачкового механизма можно реализовать движение по заданному закону, причем синтез таких механизмов относительно несложен.

Механизмы, в которых для передачи движения используются силы трения, называются *фрикционными*. Такие механизмы, называемые вариаторами, удобно применять в тех случаях, когда требуется плавно регулировать скорость выходного звена. Существуют *дисковые* (рис. 1.8, а), *торовые* (рис. 1.8, б), *валиковые* (рис. 1.8, в) и другие фрикционные вариаторы. Мощность, передаваемая фрикционными механизмами, относительно невелика. К фрикционным относятся также механизмы, в которых используются гибкие звенья типа ремней, канатов, нитей.

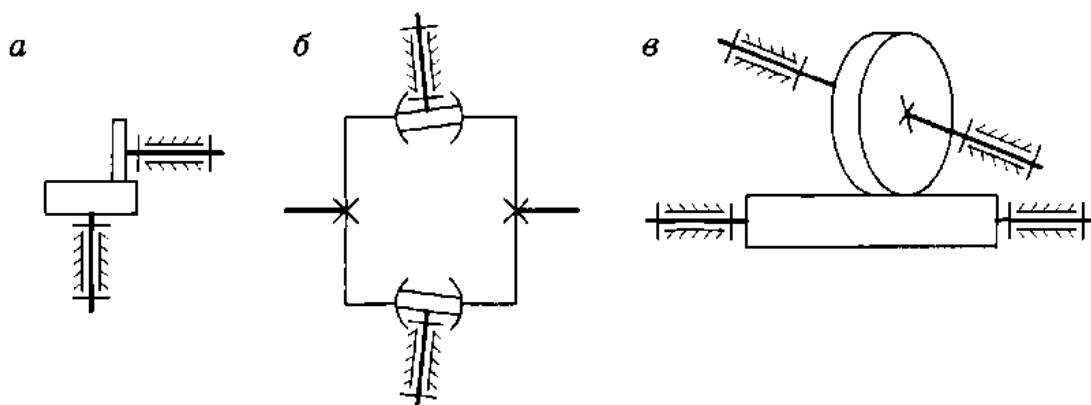


Рис. 1.8. Фрикционные механизмы:
а — дисковый; б — торовый; в — валиковый

Сравнительно недавно (в 1955 г.) была изобретена *волновая передача*. Она во многом подобна планетарному механизму, однако работает на эффекте деформации упругого звена. Существуют зубчатые, винтовые и фрикционные волновые передачи.

В курсе ТМММ изучаются рычажные, зубчатые и кулачковые механизмы. Фрикционные механизмы традиционно рассматриваются в курсе «Детали машин».

Контрольные вопросы и задания

1. Какими признаками должно обладать устройство, чтобы его можно было назвать механизмом?
2. Что такое звено механизма? Что такое кинематическая пара, каково ее назначение?
3. Какие кинематические пары относятся к низшим, а какие — к высшим?
4. Что такое степень подвижности кинематической цепи и как она связана с числом двигателей?
5. Какой механизм называется рычажным?
6. Перечислите разновидности рычажных четырехзвенных механизмов.
7. Запишите формулу Чебышева и объясните ее.
8. Что такое кинематическое соединение?
9. Что такое структурная группа?
10. Как определяется класс структурной группы?
11. Что такое диада и трехповодок?
12. Как определяется класс механизма?
13. Какой механизм называется зубчатым?
14. Какой механизм называется кулачковым?
15. Приведите пример известного вам механизма и охарактеризуйте его по структурным признакам.
16. Нарисуйте схему кривошипно-ползунного механизма автомобильного двигателя. Перечислите другие механизмы, используемые в автомобиле.
17. Нарисуйте рычажный механизм, который можно рассматривать как аналог руки человека.

2

КИНЕМАТИКА МЕХАНИЗМОВ

Задачи кинематики механизмов

Кинематика — раздел механики, изучающий движение без учета причин, вызывающих его. По своему содержанию она является геометрией движущихся тел. Для характеристики движения используются кинематические параметры: перемещение, скорость и ускорение. Соответственно, различают задачи о положениях, о скоростях, об ускорениях. Решение этих задач не является самоцелью — они необходимы для последующего полного исследования механизма. Кроме того, кинематика представляет собой хотя и первую, но важнейшую часть механики машин. В простейших случаях при первоначальном изучении машин можно ограничиться только кинематикой.

Кинематика механизмов в настоящее время изучена довольно хорошо. Методы решения инженерных задач можно разделить на графические и аналитические. Графические методы просты в реализации и наглядны, однако недостаточно точны. Они применяются на начальных стадиях исследования или для контроля правильности результатов, полученных другими методами. Основным методом решения инженерных задач является аналитический метод. Он широко применяется благодаря распространению вычислительной техники. Метод позволяет получить обширную и точную информацию.

В настоящем разделе изучаются графические методы планов и кинематических диаграмм, применяющиеся в курсовом проектировании, и аналитический метод — преобразования координат. Все эти методы используются только при расчете рычажных механизмов 2-го класса.

План положений механизма

План положения механизма представляет собой графическое изображение механизма с соблюдением масштаба при заданном значении обобщенной координаты.

Всякое графическое построение начинается с выбора масштабного коэффициента — отношения истинного значения параметра к длине отрезка, изображающего его на чертеже. Истинное значение параметра берется в свойственных ему единицах измерения, а длина отрезка — в миллиметрах. Здесь используются масштабные коэффициенты длин k_l , скоростей k_v , ускорений k_a . Если, например, обозначить длину кривошипа l_{OA} , скорость точки A — v_A , ускорение точки A — a_A , а длины отрезков, изображающих эти параметры на чертеже, — OA , pa , $па$, то

$$k_l = l_{OA}/OA; \quad k_v = v_a/pa; \quad k_a = a_a/па.$$

Построение плана положения механизма (например, четырехзвенника) *методом засечек* выполняется в следующей последовательности:

1. Наносятся неподвижные точки механизма (O и C на рис. 2.1, a).
2. Строится положение начального звена OA , соответствующее заданной обобщенной координате.
3. Строятся линии возможных положений точек или звеньев механизма (дуги радиусов AB и CB).
4. Точки пересечения линий соединяются с другими точками механизма.

На рис. 2.1, a имеются две точки пересечения (B и B'), соответствующие двум возможным положениям механизма. Практически, исключая частные случаи, возможен только один вариант — он определяется сборкой механизма, прямой или обратной. Отмеченное обстоятельство служит геометрической иллюстрацией того, что аналитическое решение задачи о положении такого механизма сводится к квадратному уравнению, имеющему два решения.

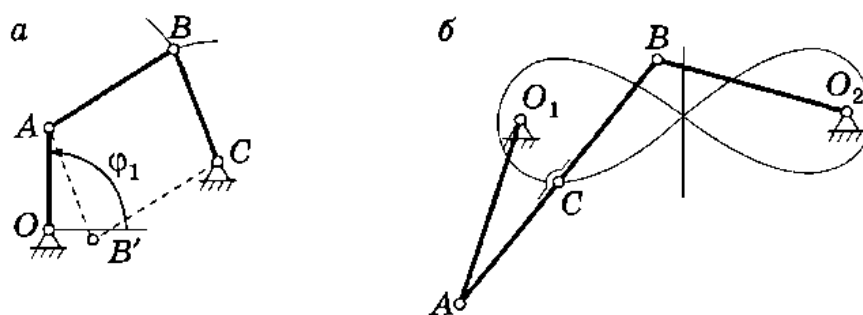


Рис. 2.1. Планы положений четырехзвенников:
a — построение; *б* — траектории точек шатуна

Задавая разные значения обобщенной координаты φ , построим планы положений механизма. Если соединить одноименные точки в разных положениях механизма плавной кривой, получим их траектории — линии движения точек. Точки на шатуне дают шатунные кривые, отличающиеся чрезвычайным разнообразием при различных размерах механизма (рис. 2.1, б).

Основные кинематические соотношения

Напомним основные кинематические соотношения, известные из курса теоретической механики. Они лежат в основе построения планов скоростей и планов ускорений.

Плоским или **плоскопараллельным** называется движение, при котором векторы скоростей и ускорений всех точек тела параллельны одной плоскости.

Поступательным называется движение, при котором траектории, скорости и ускорения всех точек тела одинаковы, тело движется без поворотов и любая прямая, соединяющая две его точки, движется параллельно самой себе (рис. 2.2, а):

$$v_1 = v_2 = v_3 = v_A = v_B; \quad a_1 = a_2 = a_3 = a_A = a_B.$$

Частный случай поступательного движения — прямолинейное движение. Траектории точек в этом случае — прямые линии. Такое движение, например, совершает ползун относительно стойки, камень относительно кулисы (рис. 2.1, в, г). Другой частный случай — круговое поступательное движение.

3*

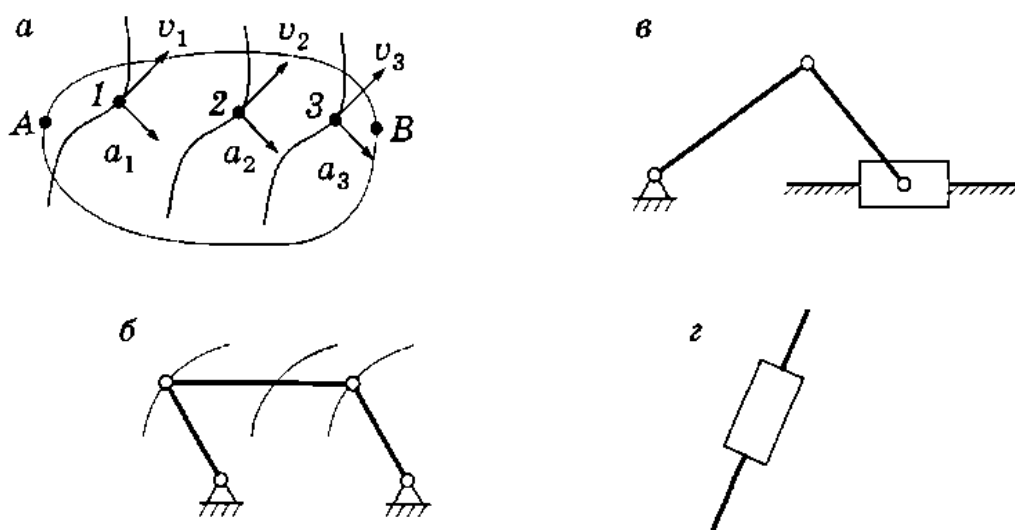


Рис. 2.2. Примеры поступательного движения:

a — твердого тела; *б* — шатуна в шарнирном параллелограмме; *в* — ползуна в кривошипно-ползунном механизме; *г* — камня по кулисе

Здесь траектории всех точек — окружности. Так движется шатун шарнирного параллелограмма (рис. 2.2, б).

Вращательным называется движение, при котором все точки тела, расположенные на некоторой прямой, остаются неподвижными. На плоскость, перпендикулярную этой прямой, последняя отображается в виде точки (рис. 2.3, а). Скорость и ускорение точки при вращательном движении рассчитываются по следующим соотношениям:

$$\mathbf{v}_A = \omega l_{OA}; \quad \mathbf{a}_A = \mathbf{a}_A^n + \mathbf{a}_A^\tau;$$

$$\mathbf{a}_A^n = \omega^2 l_{OA}; \quad \mathbf{a}_A^\tau = \varepsilon l_{OA}; \quad \mathbf{a}_A = l_{OA} \sqrt{(\omega^4 + \varepsilon^2)}.$$

Направление скорости перпендикулярно радиус-вектору точки *A* и соответствует направлению угловой скорости ω . Нормальное ускорение направлено к неподвижной точке — центру вращения, касательное ускорение перпендикулярно нормальному ускорению и направлено в сторону углового ускорения ε . Вращательное движение совершают кривошип, зубчатые колеса, катящееся по направляющей колесо (рис. 2.3, б–г).

Сложным называется движение, которое является результатом сложения переносного и относительного движений (рис. 2.4). Скорость точки при сложном движении определя-

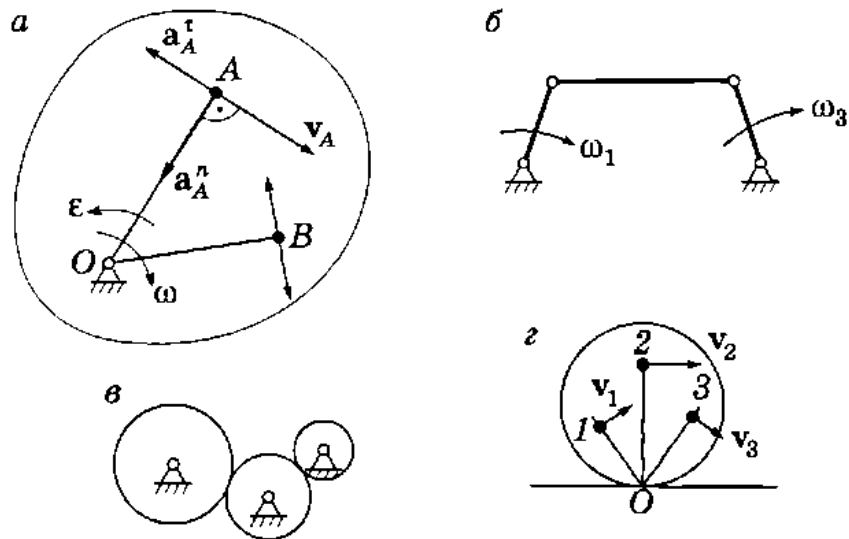


Рис. 2.3. Примеры вращательного движения:
a — твердого тела; *б* — звеньев рычажного механизма; *в* — звеньев зубчатого механизма; *г* — плоскопараллельное движение колеса по направляющей, представленное как мгновенное вращательное движение

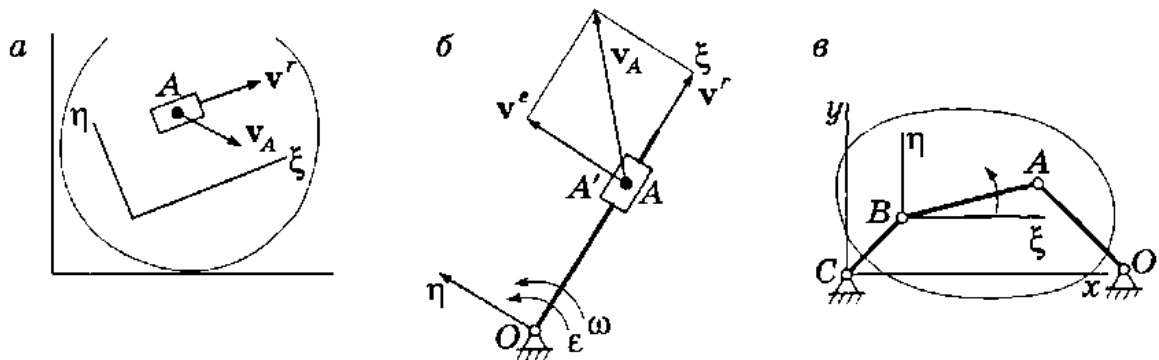


Рис. 2.4. Примеры сложного движения:
a — твердого тела; *б* — камня по кулисе;
в — шатуна в рычажном механизме

ется на основании теоремы о сложении скоростей: скорость точки равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей. В векторной форме теорема о сложении скоростей записывается так:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}^e + \mathbf{v}^r.$$

Под переносной скоростью понимается скорость той точки переносной системы, которая лежит под точкой *A*. Такая

точка отмечается штрихом (A'). Точка A' движется вместе с переносной системой.

Под относительной скоростью понимается скорость точки A относительно точки A' . На основании введенных определений приведенную ранее формулу можно записать так:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_{A'} + \mathbf{v}_{AA'}. \quad (2.1)$$

Ускорение при сложном движении определяется на основании теоремы о сложении ускорений (теоремы Кориолиса): ускорение точки равно геометрической сумме переносного, относительного и кориолисова (называемого также поворотным или добавочным) ускорений:

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}^e + \mathbf{a}^r + \mathbf{a}^K.$$

Под переносным ускорением понимается ускорение точки A' , под относительным — ускорение точки A относительно точки A' . Тогда формулу для расчета ускорения можно представить так:

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_{A'} + \mathbf{a}_{AA'} + \mathbf{a}^K.$$

Кориолисово ускорение вызвано, с одной стороны, изменением направления вектора относительной скорости из-за поворота переносной системы, а с другой — изменением величины вектора переносной скорости из-за перемещения точки A' в результате относительного движения. Кориолисово ускорение для плоского движения определяется по формуле

$$\mathbf{a}^K = 2\omega v_{AA'}, \quad (2.2)$$

где ω — угловая скорость переносной системы.

Из формулы (2.2) следует, что $\mathbf{a}^K = 0$, если $\omega = 0$ или $v_{AA'} = 0$. Направление кориолисова ускорения находится по **правилу Жуковского**: вектор относительной скорости $\mathbf{v}_{AA'}$ следует повернуть на 90° в сторону вращения переносной системы.

Приведенные формулы применяются при анализе сложного движения кулисного камня. Переносное движение осуществляет кулиса; относительным движением является прямолинейное движение камня по направляющей кулисы (см. рис. 2.4, б).

В частном случае, когда переносное движение поступательное, а относительное — вращательное, формулы (2.1) и (2.2) упрощаются. В силу свойств поступательного движения $v_A = v_B$, $a_A = a_B$, кроме того, $a^K = 0$, тогда

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}_A &= \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{AB}; \\ \mathbf{a}_A &= \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{AB}. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Этот результат в теоретической механике формулируется следующим образом: скорость точки при сложном движении равна геометрической сумме скорости движения полюса и скорости движения точки относительно полюса.

Аналогичное утверждение верно и для ускорения.

Формулы (2.3) применяются только в том случае, когда можно указать полюс относительного вращательного движения. Например, в шарнирном четырехзвеннике (см. рис. 2.4, б) движение точки A можно рассматривать состоящим из движения полюса (точки B) и относительного движения точки A вокруг точки B .

Методы планов

Планом скоростей (ускорений) звена называется плоский пучок лучей, изображающих в масштабе абсолютные скорости (ускорения) точек звена. Отрезки, соединяющие концы этих лучей, изображают относительные скорости (ускорения). Совокупность планов скоростей (ускорений) звеньев с общим полюсом называется *планом скоростей (ускорений) механизма*.

2.4.1. План скоростей шарнирного четырехзвенника

Построим план скоростей шарнирного четырехзвенника (рис. 2.5, а, б). Определим скорость точки A кривошипа по формуле $v_A = \omega_1 l_{OA}$. Выберем масштабный коэффициент плана скоростей k_v и изобразим скорость точки A в масштабе лучом pa , проведенным из полюса p в направлении скорости точки A . Условно разомкнем кинематическую цепь механизма

в точке B . Получим две открытые кинематические цепи — OAB и CB . Движение точки B можно рассматривать как сложное — вместе с точкой A и относительно точки A . Тогда для определения скорости точки B запишем уравнение, аналогичное первому уравнению (2.3):

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA}. \quad (2.4)$$

В этом уравнении две неизвестные величины: скорость v_{BA} и скорость v_B . Направление абсолютной скорости точки B определяется на основании ее положения в кинематической цепи CB — оно перпендикулярно звену CB . Направление относительной скорости точки B относительно точки A также известно — оно перпендикулярно звену AB . Векторное уравнение (2.4) решается, так как оно эквивалентно двум скалярным уравнениям с двумя неизвестными. На рис. 2.5, б представлено его графическое решение. Из полюса p в выбранном масштабе откладывается вектор абсолютной скорости точки A . Затем из того же полюса строится направление скорости точки B — перпендикулярно звену BC , а из конца вектора pa — направление вектора относительной скорости точки B относительно точки A — перпендикулярно звену AB . Полученное построение представляет собой план скоростей, так как соответствует приведенному ранее определению.

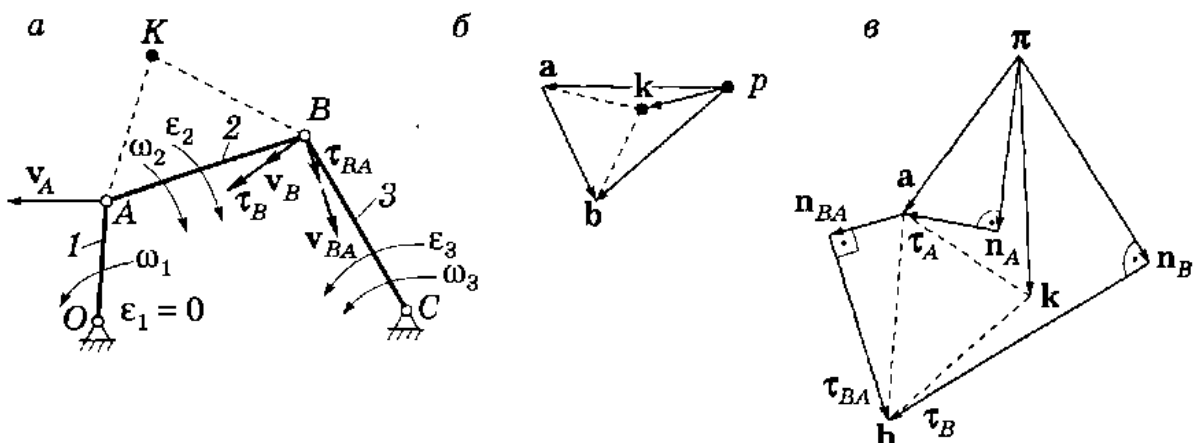


Рис. 2.5. Шарнирный четырехзвенник:

a — направления скоростей точек звеньев; b — план скоростей;
 v — план ускорений

План скоростей обладает рядом свойств:

1. По плану скоростей можно определить скорости остальных точек механизма (свойство подобия). Фигура на плане скоростей, образованная векторами относительных скоростей, подобна фигуре на звене, образованной соответствующими точками, и сходственно расположена по отношению к ней.

Пусть, например, звену AB принадлежит точка K . В таком случае треугольник ABK на звене должен быть подобен треугольнику abk на плане скоростей. Это свойство доказывается на основании того, что векторы относительных скоростей \mathbf{ab} , \mathbf{ak} и \mathbf{bk} перпендикулярны отрезкам AB , AK и BK , следовательно, треугольники abk и ABK имеют равные углы.

Сходственность расположения состоит в одинаковом порядке обхода вершин треугольников ABK и abk .

Свойство подобия позволяет найти скорость любой точки звена, если известны скорости двух точек этого звена. Для этого достаточно построить фигуру на плане скоростей, подобную фигуре на звене и сходственно расположенную по отношению к ней.

2. По плану скоростей можно найти угловую скорость звена. Для этого следует воспользоваться соотношениями, например, такого вида:

$$\omega_2 = v_{BA}/l_{BA} = k_v ba/l_{BA}.$$

Направление угловой скорости можно определить, если перенести вектор относительной скорости в соответствующую точку звена. Направление относительной скорости показывает направление угловой скорости.

2.4.2. План ускорений шарнирного четырехзвенника

Ускорение точки A складывается из касательного и нормального ускорений, определяемых по формулам $a_A^n = \omega_1^2 l_{OA}$ и $a_A^\tau = \varepsilon_1 l_{OA}$ (см. рис. 2.5, ν). Из полюса π отложим отрезки π_A и τ_A , изображающие в масштабе a_A^n и a_A^τ . Условно разомкнем кинематическую цепь механизма в точке B — получим две

открытые кинематические цепи. Для точки B в кинематической цепи OAB запишем уравнение сложного движения

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}^n + \mathbf{a}_{BA}^\tau. \quad (2.5)$$

В этом уравнении неизвестны ускорение точки B и касательное ускорение \mathbf{a}_{BA}^τ . Нормальное ускорение определяется по формуле $\mathbf{a}_{BA}^n = \omega_2^2 l_{BA}$. Направления нормальных ускорений также известны — к центру вращения соответствующего звена. Угловые скорости ω_3 и ω_2 определяются на основании построенного ранее плана скоростей. Из конца отрезка τ_A откладывается отрезок n_{BA} , а затем через его конец проводится линия направления вектора \mathbf{a}_{BA}^τ . Из рассмотрения кинематической цепи CB следует, что абсолютное ускорение точки B складывается из нормального и тангенциального. Нормальное ускорение направлено к центру вращения — к точке C — и вычисляется через угловую скорость по известной формуле. Из полюса π откладывается отрезок n_B в направлении от B к C , затем через его конец проводится линия направления вектора \mathbf{a}_{BC}^τ , величина которого неизвестна. Пересечение линий τ_{BA} и τ_B определит точку b и, следовательно, все неизвестные величины векторов. Выполненное построение является графическим решением векторного уравнения (2.5).

Свойства плана ускорений:

1. По плану ускорений можно определить ускорения остальных точек механизма (свойство подобия). Фигура на плане ускорений, образованная векторами относительных ускорений, подобна фигуре на звене, образованной соответствующими точками, и сходственно расположена по отношению к ней.

Доказательство этого свойства основано на том, что относительные ускорения точек одного звена, а следовательно, и соответствующие отрезки на плане ускорений пропорциональны расстояниям между этими точками на звене. Треугольники с пропорциональными сторонами подобны. Свойство подобия позволяет по известным ускорениям двух точек звена найти ускорение любых других точек.

2. По плану ускорений можно найти угловое ускорение звена. Для этого следует воспользоваться известными соот-

ношениями между касательным и угловым ускорениями. Например, для звена 2 (см. рис. 2.5, а)

$$\varepsilon_2 = a_{BA}^\tau / l_{BA} = k_a \tau_{BA} / l_{BA}.$$

Для определения направления ε_2 следует перенести a_{BA}^τ в точку B . Направление касательного ускорения соответствует направлению углового ускорения — в данном случае по часовой стрелке.

Планы скоростей и ускорений кривошипно-ползунного механизма строятся аналогично, но несколько проще, так как известно направление скорости и ускорения точки B — вдоль направляющей.

2.4.3. Планы скоростей и ускорений кулисного механизма

Построение плана скоростей кулисного механизма (рис. 2.6, а) начинается с определения скорости точки A . Движение точки A можно рассматривать как сложное, создаваемое переносным движением вместе с кулисой 3 и относительным —

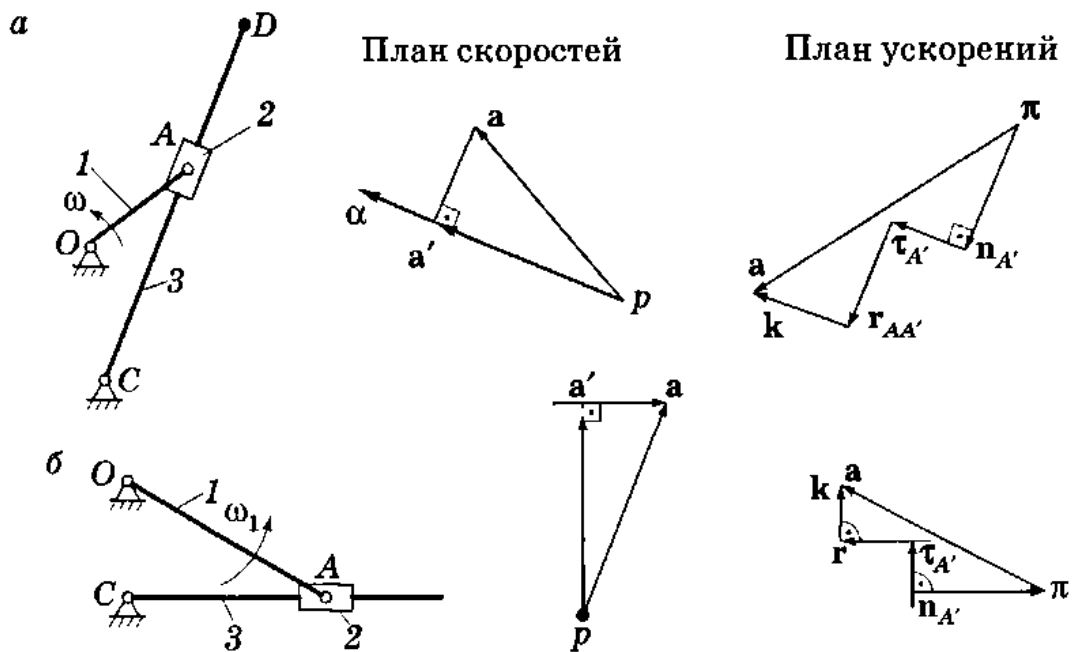


Рис. 2.6. Планы скоростей и ускорений:
а — кулисный механизм; б — кулисный механизм с вращающейся кулисой

вызванным движением камня по кулисе. Тогда справедливо уравнение

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_{A'} + \mathbf{v}_{AA'},$$

где A' — точка, принадлежащая переносной системе, связанной с кулисой, и лежащая под точкой A . В этом уравнении неизвестны величины векторов \mathbf{v}_A и $\mathbf{v}_{AA'}$. Направление вектора \mathbf{v}_A перпендикулярно кулисе, направление вектора $\mathbf{v}_{AA'}$ — вдоль кулисы.

Для нахождения ускорения точки A при сложном движении следует записать уравнение

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_{A'} + \mathbf{a}_{AA'} + \mathbf{a}^K = \mathbf{a}_A^n + \mathbf{a}_A^\tau + \mathbf{a}_{AA'}^r + \mathbf{a}^K.$$

В этом уравнении известны величины

$$a_A^n = \omega_3^2 l_{AC} \quad \text{и} \quad a^K = 2\omega_3 v_{AA'}.$$

Кроме того, известны направления всех векторов, но неизвестны величины векторов \mathbf{a}_A^τ , $\mathbf{a}_{AA'}^r$.

План ускорений строится в следующем порядке. Из полюса π откладывается вектор πa , изображающий ускорение точки A . Затем из полюса строится вектор $\pi A'$, а из его конца — линия направления вектора $\tau_{A'}$. Поскольку пока неизвестно, из какой точки следует строить вектор относительного ускорения $\mathbf{r}_{AA'}$, перейдем к построению кориолисова ускорения. Вектор \mathbf{k} , изображающий на плане ускорений кориолисово ускорение \mathbf{a}^K , замыкает построение, приходя в точку a . Исходя из этого определяется начало вектора \mathbf{k} . Через эту точку проводится линия направления вектора относительного ускорения. Пересечение линий $\mathbf{r}_{AA'}$ и τ_A определяет точку a . План ускорений кулисного механизма построен.

Планы скоростей и ускорений кулисного механизма с вращающейся кулисой (рис. 2.6, б) строятся подобным образом.

Многочленные рычажные механизмы 2-го класса можно рассматривать как комбинации простейших четырехзвенных

механизмов. Поэтому приведенных примеров достаточно для графического исследования большинства применяемых на практике механизмов.

Наибольшую сложность представляют задачи, в которых фигурирует кориолисово ускорение. Для уяснения содержания кинематической теоремы Кориолиса и освоения приемов ее использования разберем ряд задач.

Пример 2.1. Рассмотрим простейший случай (рис. 2.7). Тело 1 совершает сложное плоское движение, двигаясь поступательно со скоростью v^r и ускорением a^r по прямолинейной направляющей (кулисе) 2, которая вращается относительно точки O с угловой скоростью ω . Нужно определить скорость и ускорения точек M и N , принадлежащих этому телу.

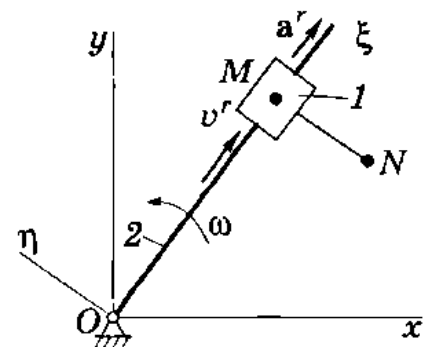


Рис. 2.7. Сложное движение кулисного камня

Выберем системы координат: неподвижную xu и подвижную $\xi\eta$, связанную с кулисой. Очевидно, что ускорения точек M и N определяются выражениями

$$\mathbf{a}_M = \mathbf{a}_{M'}^e + \mathbf{a}_M^r + \mathbf{a}_M^K; \quad (2.6)$$

$$\mathbf{a}_N = \mathbf{a}_{N'}^e + \mathbf{a}_N^r + \mathbf{a}_N^K. \quad (2.7)$$

Правые части выражений (2.6) и (2.7) различаются только переносными ускорениями $\mathbf{a}_{M'}^e$ и $\mathbf{a}_{N'}^e$, так как точки M и N расположены в разных местах подвижной среды. Относительные ускорения и кориолисовы ускорения для точек M и N равны, поскольку в относительном движении тело движется поступательно, а угловая скорость переносного движения для обеих точек одинакова:

$$|\mathbf{a}_M^e| = \omega^2 OM, \quad |\mathbf{a}_N^e| = \omega^2 ON;$$

$$\mathbf{a}_M^K = \mathbf{a}_N^K = 2 \times \omega \times \mathbf{v}^r; \quad \mathbf{a}_M^r = \mathbf{a}_N^r.$$

Пример 2.2. Часто встречаются задачи, в которых известно абсолютное ускорение и требуется определить переносное и относительное ускорения. Из выражения (2.6) получаем:

$$\mathbf{a}_{M'}^e = \mathbf{a}_M - \mathbf{a}_M^r - \mathbf{a}_M^K.$$

Иногда это выражение записывают так:

$$\mathbf{a}_{M'}^e = \mathbf{a}_M + \mathbf{a}_M^r + \mathbf{a}_M^K. \quad (2.8)$$

Очевидно, что в выражении (2.8) фигурируют не относительное и кориолисово ускорения, а векторы, равные им, но противоположные по направлению. Разъяснение этого обстоятельства в руководствах по ТММ часто отсутствует, что значительно затрудняет читателей.

Рассмотрим механизм, изображенный на рис. 2.8. Считаем, что абсолютное ускорение точки A задано.

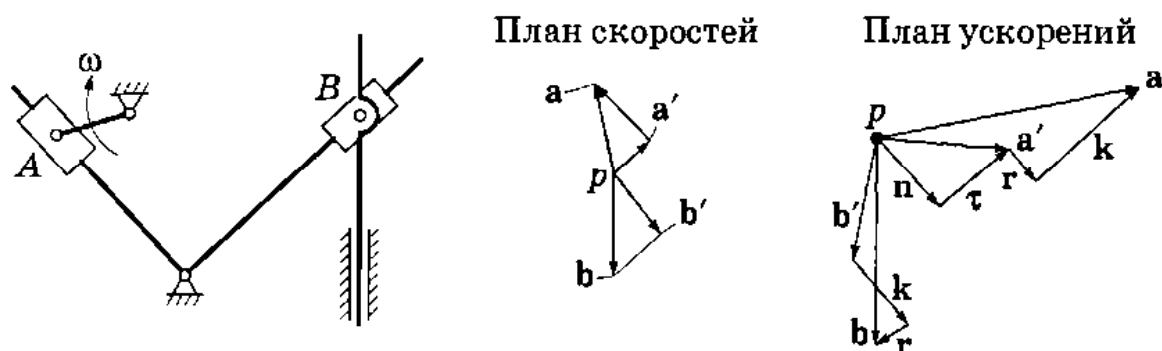


Рис. 2.8. Механизм с двумя кулисами, его план скоростей и план ускорений

Применив два раза теорему Кориолиса, имеем:

$$\mathbf{a}_{A'}^e = \mathbf{a}_A - \mathbf{a}_A^r - \mathbf{a}_A^K;$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_{B'}^e + \mathbf{a}_B^r + \mathbf{a}_B^K.$$



Метод кинематических диаграмм

Рассмотрим еще один графический метод решения и инженерных задач — *метод кинематических диаграмм*. Он отличается простотой реализации, хорошо иллюстрирует связь между кинематическими параметрами, однако дает низкую точность

результатов. Рассмотрим его на примере кривошипно-ползунного механизма (рис. 2.9, а).

Положение точки B при заданном значении обобщенной координаты φ определяется координатой x . Если обозначить координату точки B в крайнем левом положении механизма x_0 , то ее перемещение $S_B = x - x_0$. Перемещение представляет собой функцию угла φ . Задавая значения этого угла, по планам положений механизма определим перемещения S и построим график $S(\varphi)$. Поскольку $\varphi = \omega t$, ось φ можно считать осью t , и, следовательно, полученный график в другом масштабе есть график $S(t)$. Согласно определению скорости и графическому смыслу производной имеем

$$v = dS/dt = \operatorname{tg} \alpha_S k_v,$$

где α_S — угол наклона касательной к графику $S(t)$. Этим определяется способ построения графика $v(t)$: в выбранных

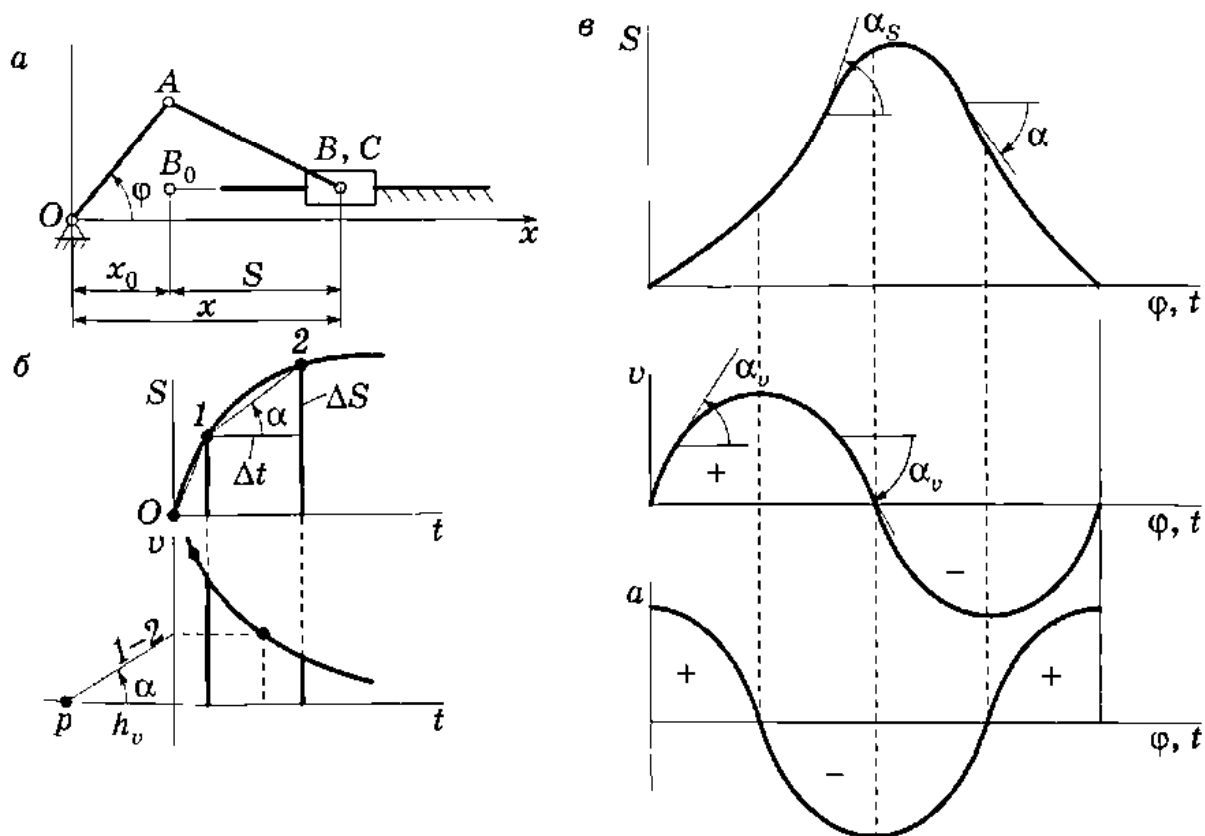


Рис. 2.9. Метод хорд:

a — кинематическая схема механизма; b — метод графического дифференцирования; c — кинематические графики перемещений, скоростей и ускорений ползуна

точках графика $S(t)$ проводятся касательные, измеряются углы наклона α_S и вычисляются тангенсы этих углов.

Аналогично находится ускорение:

$$a = dv/dt = \operatorname{tg} \alpha_v k_a.$$

Между графиками $S(t)$, $v(t)$, $a(t)$ существует связь, как между интегральными и дифференциальными кривыми:

1. Экстремуму интегральной кривой соответствует ноль на дифференциальной кривой.

2. Точке перегиба интегральной кривой соответствует экстремум дифференциальной кривой.

3. Возрастающим значениям интегральной кривой соответствуют положительные значения дифференциальной кривой, убывающим — отрицательные.

Непосредственное применение описанного способа построения графиков не практикуется из-за сложности точного построения касательных. Обычно используется его модификация, называемая *методом хорд*: касательные, проведенные в точках, лежащих на серединах выбранных участков, заменяются хордами этих участков (рис. 2.9, б).

Разобьем ось t на некоторое число равных интервалов и проведем хорды, стягивающие концы интервалов на графике. Выбрав полюсное расстояние h и отложив его влево от оси ординат графика дифференциальной кривой, укажем полюс p . Из полюса строятся лучи, параллельные хордам участков интегральной кривой. Отрезки, отсекаемые этими лучами на оси ординат, определяют значения производных для середин соответствующих участков, так как они пропорциональны тангенсам углов наклона касательных на серединах участков. Если масштабные коэффициенты по осям графика интегральной кривой известны, можно определить масштабные коэффициенты по осям графика дифференциальной кривой.

Рассмотрим, например, графики $S(t)$ и $v(t)$. Очевидно, что

$$v = y_v k_v = \Delta S k_S / \Delta t k_t.$$

Из подобия треугольников следует:

$$\Delta S / \Delta t = y_v / h.$$

После подстановки полученного выражения в предыдущее получаем

$$k_v = k_S / h_v k_t.$$

Аналогично выводится формула

$$k_a = k_v / h_a k_t.$$

Аналитический метод исследования открытой кинематической цепи

На рис. 2.10 представлена плоская открытая кинематическая цепь, составленная из трех звеньев, соединенных между собой посредством вращательных кинематических пар. Конфигурация цепи определяется обобщенными координатами $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Пусть заданы размеры звеньев (их длины) l_1, l_2 и положение точки M на третьем звене. Требуется определить положение точки M в неподвижной системе координат x, y , связанной со стойкой.

Введем подвижные системы координат $\xi^1 \eta^1, \xi^2 \eta^2, \xi^3 \eta^3$, связав их со звеньями 1, 2 и 3, как показано на рис. 2.10, а. Воспользуемся уравнениями преобразования координат, которые вытекают из простых геометрических построений (рис. 2.10, б):

$$x_M = \cos \varphi \xi_M - \sin \varphi \eta_M + x_0;$$

$$y_M = \sin \varphi \xi_M + \cos \varphi \eta_M + y_0.$$

Применив уравнения преобразования координат последовательно к координатным системам $\xi^1 \eta^1, \xi^2 \eta^2, \xi^3 \eta^3, x, y$, полу-

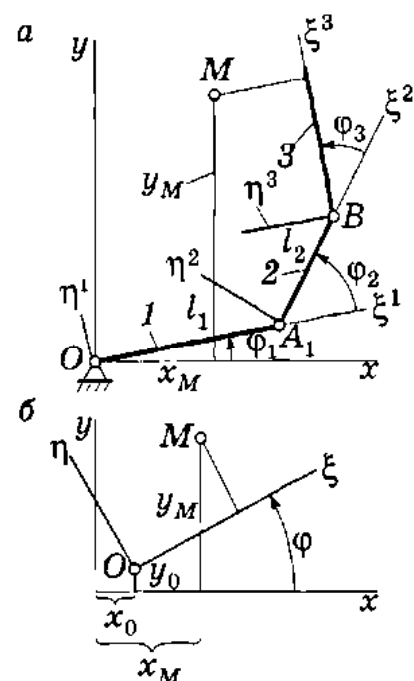


Рис. 2.10. Открытая кинематическая цепь: а — системы координат звеньев; б — преобразование координат на плоскости

чим систему линейных уравнений. Решение этой простой системы не вызывает затруднений, тем более что здесь применяется рекуррентный метод расчета: результаты, полученные при расчете первой пары уравнений, подставляются в правую часть второй пары уравнений и т.д. При значительном числе звеньев и необходимости расчета большого числа положений механизма целесообразно расчет выполнять на ЭВМ.

Кинематическое исследование рычажных механизмов с замкнутыми цепями

Известно довольно много аналитических методов исследования кинематики рычажных механизмов, например метод замкнутого векторного контура. Далее рассмотрим метод, во многом аналогичный ему, но более универсальный, так как он применим к пространственным механизмам и к тому же основывается на принципах, описанных в 2.6. Этот метод предложен автором пособия и условно может быть назван *методом преобразования координат*. Для его использования нужно ознакомиться с основами матричной алгебры, которые приводятся в прил. 1.

Большинство рычажных механизмов образовано из замкнутых кинематических цепей. Аналитическое исследование таких механизмов представляет собой задачу, родственную рассмотренной в 2.6. В обоих случаях используются уравнения преобразования координат. Из замкнутой кинематической цепи в результате размыкания одной кинематической пары образуются две открытые кинематические цепи. Для каждой из них составляются уравнения преобразования координат. К ним добавляются уравнения, вытекающие из уравнений связей, налагаемых кинематическими парами. Получается система уравнений, как правило, нелинейная, из которой отыскиваются координаты, определяющие положение (конфигурацию) кинематической цепи.

Решаемая таким образом задача является обратной по отношению к той, которая была решена для открытой цепи: здесь

по известному положению некоторой точки или входного звена определяются относительные положения остальных звеньев. (Напомним, что прямая задача состояла в определении положения точки, принадлежащей n -му звену, по заданному относительному положению остальных звеньев.)

Рассмотрим решение обратной задачи на примере плоского шарнирного четырехзвенника (рис. 2.11). Условно разомкнем кинематическую цепь механизма в точке A — получим две открытые кинематические цепи: ABC и OA . Введем неподвижную систему координат xy , связав ее со стойкой, и подвижные системы координат $\xi^1\eta^1$, $\xi^2\eta^2$, $\xi^3\eta^3$, связав их со звеньями.

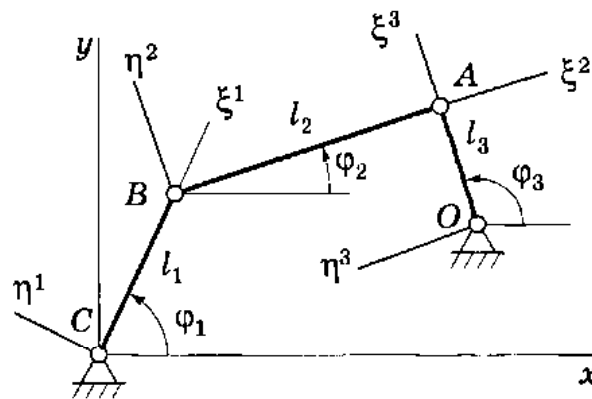


Рис. 2.11. Четырехзвенный рычажный механизм и связанные системы координат

При заданном значении обобщенной координаты φ_3 координаты точки A находятся из уравнений

$$x_A = l_3 \cos \varphi_3 + x_O;$$

$$y_A = l_3 \sin \varphi_3 + y_O.$$

Для открытой кинематической цепи ABC можно записать следующие уравнения преобразования координат:

$$x_A = \xi_A^2 \cos \varphi_2 + x_B;$$

$$y_A = \xi_A^2 \sin \varphi_2 + y_B;$$

$$x_B = \xi_B^1 \cos \varphi_1;$$

$$y_B = \xi_B^1 \sin \varphi_1.$$

Система состоит из четырех уравнений с шестью неизвестными. Добавим к ней еще два очевидных уравнения:

$$1 = \cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2;$$

$$1 = \cos^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_1.$$

Полученную систему можно привести к упрощенному виду:

$$x_A = l_2 a_{11} + x_B;$$

$$y_A = l_2 a_{21} + y_B;$$

$$l_1 = x_B^2 + y_B^2;$$

$$1 = a_{11}^2 + a_{21}^2,$$

где $a_{11} = \cos \varphi_2$; $a_{21} = \sin \varphi_2$.

Таким образом, имеем нелинейную систему, состоящую из четырех алгебраических уравнений относительно a_{11} , a_{21} , x_B , y_B . Одним из возможных путей решения является последовательное исключение из системы неизвестных. В результате будет получено уравнение с одним неизвестным:

$$(x_A^2 + y_A^2) a_{11}^2 - 2q x_A a_{11} + q^2 - y_A^2 = 0,$$

где $q = (x_A^2 + y_A^2 + l_2^2 + l_3^2) / 2l_2$.

Это квадратное уравнение относительно a_{11} , два решения которого записываются в радикалах следующим образом:

$$a_{11} = \frac{q x_A \pm \sqrt{q^2 x_A^2 - (x_A^2 + y_A^2)(q^2 - y_A^2)}}{x_A^2 + y_A^2}.$$

Определив a_{11} , находим φ_2 , x_B , y_B , φ_3 :

$$\varphi_2 = \arccos a_{11};$$

$$x_B = x_A - l_2 a_{11};$$

$$y_B = y_A - l_2 a_{21};$$

$$\varphi_3 = \arccos(x_B / l_3).$$

Для решения задачи о скоростях продифференцируем исходную систему по времени. Будем обозначать производные по времени штрихами:

$$(x_A)' = l_2(a_{11})' + (x_B)';$$

$$(y_A)' = l_2(a_{21})' + (y_B)';$$

$$0 = x_B(x_B)' + y_B(y_B)';$$

$$0 = a_{11}(a_{11})' + a_{21}(a_{21})'.$$

Дифференцируя эту систему еще раз по времени, получим линейную систему относительно вторых производных тех же переменных. Решаются линейные системы одним из известных методов.

Скорости и ускорения точек и звеньев механизмов находим по формулам, записанным для краткости в матричной форме:

$$\mathbf{v}_y = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}_x;$$

$$\mathbf{a}_y = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}_x;$$

$$\mathbf{v}_x = \begin{bmatrix} (x_A)' \\ (y_A)' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{v}_y = \begin{bmatrix} (a_{11})' \\ (a_{21})' \\ (x_B)' \\ (y_B)' \end{bmatrix}; \quad \mathbf{a}_x = \begin{bmatrix} (x_A)'' \\ (y_A)'' \\ -(x_B^2 + y_B^2) \\ -(a_{11} + a_{21}^2) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{a}_y = \begin{bmatrix} (a_{11})'' \\ (a_{21})'' \\ (x_B)'' \\ (y_B)'' \end{bmatrix}.$$

Здесь \mathbf{A}^{-1} — обратная матрица:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{l_2(a_{11}y_B - a_{21}x_B)} \begin{bmatrix} -a_{21}x_B & -a_{21}y_B & a_{21} & l_2y_B \\ a_{11}x_B & a_{11}y_B & -a_{11} & l_2x_B \\ l_2a_{11}y_B & l_2a_{21}y_B & -l_2a_{21} & -l_2^2y_B \\ -l_2a_{11}x_B & -l_2a_{21}x_B & l_2a_{11} & l_2^2x_B \end{bmatrix}.$$

Примечание. При использовании формул в матричной форме нужно применять правило умножения матрицы на вектор.

Угловую скорость и угловое ускорение шатуна AB находим по формулам

$$\omega_2 = -(a_{11})'/a_{21};$$

$$\varepsilon_2 = -\left[(a_{11})'' + (a_{11})'(a_{21})'/(a_{21})^2 \right].$$

Угловую скорость и угловое ускорение коромысла CB находим по формулам

$$\omega_3 = -(x_B)'/l_3 \sin \varphi_3;$$

$$\varepsilon_3 = -\left((x_B)'' + l_3 \sin \varphi_3 \omega_3^2 \right) / l_3 \sin \varphi_3.$$

Аналогичным способом получены формулы для кинематических характеристик основных рычажных механизмов, которые приводятся далее.

Для звена, совершающего вращательное движение (кривошипа, коромысла) (рис. 2.12),

$$x_A = l_1 a_{11} + x_0;$$

$$y_A = l_1 a_{21} + y_0;$$

$$(x_A)' = -l_1 a_{11} \omega_1;$$

$$(y_A)' = l_1 a_{21} \omega_1;$$

$$(x_A)'' = -l_1 a_{11} \omega_1^2 - l_1 a_{21} \varepsilon_1;$$

$$(y_A)'' = -l_1 a_{21} \omega_1^2 + l_1 a_{11} \varepsilon_1.$$

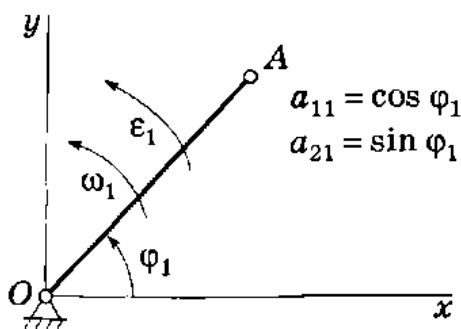


Рис. 2.12. Звено, совершающее вращательное движение

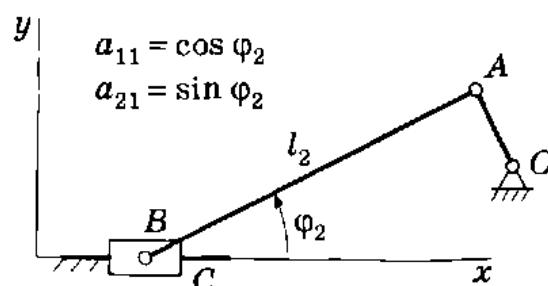


Рис. 2.13. Кривошипно-ползунный механизм

Для кривошипно-ползунного механизма (рис. 2.13)

$$\begin{aligned} a_{21} &= y_A / l_2; \\ x_A &= x_B + l_2 a_{11}; \\ 1 &= a_{11}^2 + a_{21}^2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_y &= \mathbf{A}^{-1} \mathbf{v}_x; \quad \mathbf{a}_y = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{a}_x; \\ \mathbf{v}_x &= [(x_A)', (y_A)', 0]^T; \\ \mathbf{v}_y &= [(a_{11})', (a_{21})', (x_B)']^T; \\ \mathbf{a}_x &= [(x_A)'', (y_A)'', -((a_{11})'^2 + (a_{21})'^2)]^T; \\ \mathbf{a}_y &= [(a_{11})'', (a_{21})'', x_B]^T; \\ \mathbf{A}^{-1} &= -\frac{1}{l_2 a_{11}} \begin{bmatrix} 0 & a_{21} & -l_2 \\ 0 & a_{11} & 0 \\ -l_2 a_{11} & l_2 & l_2^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь и далее для упрощения записи вектора-столбца в виде вектора-строки использован символ «Т» — символ транспонирования матрицы (прил. 1).

Для кулисного механизма с качающейся кулисой (рис. 2.14)

$$\begin{aligned} h_3 &= \sqrt{x_A^2 + y_A^2}; \\ x_A &= h_3 a_{11}; \quad y_A = h_3 a_{21}; \\ 1 &= a_{11}^2 + a_{21}^2; \\ \mathbf{v}_y &= \mathbf{A}^{-1} \mathbf{v}_x; \quad \mathbf{a}_y = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{a}_x, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_x &= [(x_A)', (y_A)', 0]^T; \quad \mathbf{v}_y = [(h_3)', (a_{11})', (a_{21})']^T; \\ \mathbf{a}_x &= [(x_A)'' - 2(h_3)' a_{11}, (y_A)'' - 2(h_3)' (a_{21})', -((a_{11})'^2 + (a_{21})'^2)]^T; \\ \mathbf{a}_y &= [(h_3)'', (a_{11})'', (a_{21})'']^T; \end{aligned}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{h_3} \begin{bmatrix} -h_3 a_{11} & -h_3 a_{21} & h_3^2 \\ -a_{21} & a_{11} a_{21} & -h_3 a_{11} \\ a_{11} a_{21} & -a_{11}^2 & -h_3 a_{21} \end{bmatrix}$$

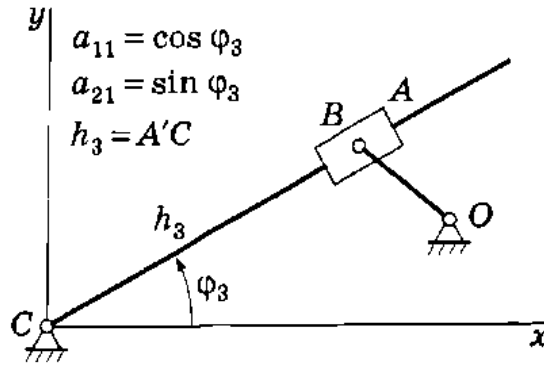


Рис. 2.14. Кулисный механизм с качающейся кулисой

Для кулисного механизма с ведущим камнем (рис. 2.15)

$$a_{11} = (h_3^2 - x_0^2 - l_1^2) / (2x_0 l_1);$$

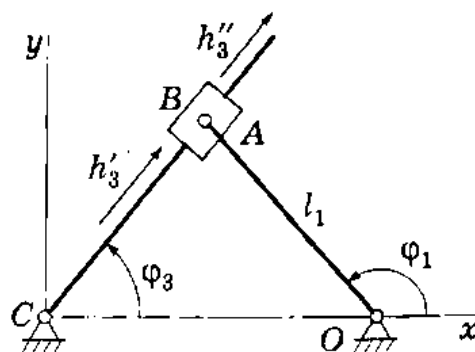
$$(a_{11})' = h_3 (h_3)' / (x_0 l_1);$$

$$(a_{11})'' = ((h_3)'^2 + h_3 (h_3)'') / (x_0 l_1);$$

$$b_{21} = (x_0 + l_1 a_{11}) / h_3;$$

$$(b_{21})' = (l_1 (a_{11})' - (h_3)' b_{21}) / h_3;$$

$$(b_{21})'' = (l_1 (a_{11})'' - (h_3)'' b_{21} - 2(h_3)' b_{21}') / h_3.$$



$$A'C = h_3$$

$$a_{11} = \cos \varphi_1$$

$$a_{21} = \sin \varphi_1$$

$$b_{11} = \cos \varphi_3$$

$$b_{21} = \sin \varphi_3$$

Рис. 2.15. Кулисный механизм с ведущим камнем

Если рычажный механизм составлен из нескольких диад, то его следует разложить на простейшие механизмы, для которых можно использовать приведенные зависимости, последо-

вательно переходя от первой диады к следующим. Он может применяться также для механизмов старших классов. Преимущества метода преобразования координат в наибольшей мере проявляются при анализе пространственных рычажных механизмов.

Заметим, что в сложных случаях вычислять обратную матрицу в явном виде очень трудно, но это и не обязательно. Современное математическое обеспечение компьютеров позволяет выполнять эту операцию автоматически и получать матрицу в числовом виде. Это особенно актуально для сложных плоских и пространственных рычажных механизмов. Достаточно иметь только исходную систему уравнений, построенную на основе уравнений преобразования координат, с дополнительными уравнениями, связывающими некоторые переменные, например направляющие косинусы. Принцип получения исходной системы ясен из рассмотренных примеров. Более подробно теоретическое обоснование метода преобразования координат для любого вида рычажных механизмов рассматривается в прил. 2.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие задачи решает кинематика механизмов?
2. Что представляют собой план положений, план скоростей и план ускорений механизма?
3. В чем преимущества и недостатки метода кинематических диаграмм (метода графического дифференцирования)?
4. Приведите пример механизма, в котором при построении плана ускорений учитывается ускорение Кориолиса. Приведите пример механизма, в котором при построении плана ускорений не учитывается ускорение Кориолиса. В чем здесь дело?
5. На каких уравнениях базируется аналитический метод исследования кинематики механизмов, называемый методом преобразования координат?
6. Как формулируется прямая задача кинематики для механизма с открытой кинематической цепью?

7. Как формулируется обратная задача кинематики механизма?
8. Почему задача о положениях шарнирного четырехзвенника имеет два решения? Какими уравнениями это подтверждается?
9. Почему задача о скоростях и ускорениях имеет одно решение? Из каких уравнений это видно?
10. Постройте без соблюдения масштаба план скоростей кривошипно-ползунного механизма, задав произвольные размеры механизма.
11. Постройте дифференциальную кривую к какой-либо исходной кривой, используя метод графического дифференцирования.



ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МАШИН И МЕХАНИЗМОВ



Задачи динамики машин

Динамика изучает движение с учетом действия сил инерции и инерционных свойств тел. В этом ее отличие от кинематики, которая занимается изучением собственных свойств движения и имеет только вспомогательное значение при решении динамических задач.

В динамике машин, как и в общей динамике, следует различать две задачи — прямую и обратную. Прямая задача состоит в том, чтобы по заданным силам найти закон движения звеньев, обратная — чтобы по заданному закону движения найти силы, вызвавшие это движение. В математическом отношении прямая задача сводится к интегрированию дифференциальных уравнений, обратная задача — к дифференцированию или к простому решению алгебраических уравнений.

К прямым задачам относятся рассматриваемые здесь задачи об истинном движении механизма, о регулировании хода машины, о маховике, к обратным задачам — силовое исследование механизма, уравнивание роторов и механизмов. Динамические задачи можно решить лишь в том случае, если известны силы или параметры движения. Поэтому в самом начале следует четко определить тип решаемой задачи.



Классификация сил в механизмах

В процессе работы на механизм действуют силы различной природы, поэтому целесообразно произвести их классификацию.

Движущая сила P — это сила, приложенная к механизму со стороны двигателя и вызывающая движение механизма. Движущая сила совершает положительную работу, так как ее направление всегда совпадает с направлением перемещения. Звено, к которому приложена движущая сила, называется ведущим. Движущая сила (или момент), как правило, является функцией угловой скорости. Такая функция называется механической характеристикой двигателя. В качестве примера на рис. 3.1 представлены механические характеристики различных двигателей.

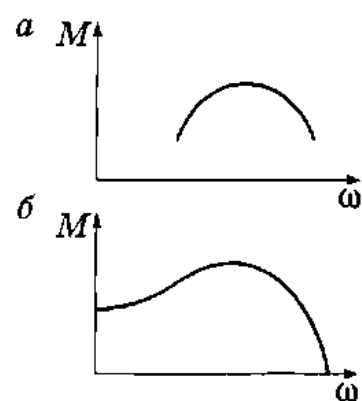


Рис. 3.1. Механические характеристики:
a — двигателя внутреннего сгорания; *б* — асинхронного электродвигателя

Сила полезного сопротивления Q — это сила, для преодоления которой предназначен механизм. Она приложена к ведомому звену со стороны внешних объектов. Природа ее может быть различной: сила резания, сила трения, сила упругости, сила гидравлического сопротивления и т.д. Работа силы полезного сопротивления всегда отрицательна. Эта сила может являться функцией кинематических параметров.

Силы вредного сопротивления F — это силы трения в кинематических парах, а также силы гидравлического и аэродинамического сопротивления. Работа их отрицательна. При проектировании механизмов эти силы стремятся уменьшить, однако полностью избавиться от них невозможно.

Сила тяжести G выражается через массу тела по формуле $G = mg$. Она приложена к телу в центре масс. Работа силы тяжести при опускании центра масс положительная, при подъеме — отрицательная. Работа силы тяжести за полный цикл движения механизма равна нулю.

Сила реакции в кинематической паре R . Действие одного звена на другое проявляется в виде реакции. По своей природе реакция является силой упругости. Согласно 3-му закону Нью-

тона, реакции двух взаимодействующих тел равны по величине и противоположны по направлению. Для механизма в целом работа сил реакции равна нулю.

Сила инерции U . Объяснить сущность этой силы гораздо сложнее, чем всех прочих сил. В то же время это чрезвычайно важно для понимания динамических процессов. Поэтому рассмотрим эту силу более обстоятельно.

Сила инерции

3.3.1. Общие сведения

Согласно 2-му закону Ньютона, ускорение, сообщаемое телу, пропорционально действующей силе, направлено в сторону действия этой силы и обратно пропорционально массе тела:

$$\mathbf{a} = \mathbf{F}/m \quad \text{или} \quad \mathbf{F} = m\mathbf{a}. \quad (3.1)$$

Этот закон справедлив только в инерциальных системах отсчета, т.е. в системах покоящихся или движущихся равномерно, прямолинейно относительно абсолютной мировой системы отсчета. В качестве таковой принимают систему неподвижных осей с началом в центре Солнца. Земля с некоторым приближением также считается инерциальной системой. Иногда удобно изучать движение в неинерциальной системе отсчета, т.е. движущейся относительно Земли с ускорением. Для этого случая механика Ньютона, вообще говоря, непригодна. Однако оказалось возможно ее приспособить, введя некоторые поправки. Пусть на тело массой m , находящееся в сложном движении, действует сила \mathbf{F} . В неподвижной (инерциальной) системе координат xu справедлив закон Ньютона:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a},$$

где \mathbf{a} — ускорение в системе xu .

С учетом кинематической теоремы Кориолиса можно записать:

$$\mathbf{F} = m(\mathbf{a}^e + \mathbf{a}^K + \mathbf{a}^r).$$

Перепишем полученное выражение следующим образом:

$$\mathbf{F} - m(\mathbf{a}^e + \mathbf{a}^K) = m\mathbf{a}^r. \quad (3.2)$$

Эта зависимость определяет закон движения в переносной неинерциальной системе $\xi\eta$. Основываясь на аналогии с формулой (3.1), ее можно рассматривать как закон Ньютона для неинерциальной системы. Для этого следует рассматривать левую часть формулы (3.2) как силу. Выражение

$$\mathbf{U} = -m(\mathbf{a}^e + \mathbf{a}^K)$$

называют *силой инерции*. Если тело покоится в системе $\xi\eta$, то

$$\mathbf{a}^K = \mathbf{a}^r = 0,$$

тогда

$$\mathbf{F} - m\mathbf{a}^e = 0; \quad \mathbf{F} + \mathbf{U} = 0.$$

Таким образом, мы приходим к *принципу Даламбера*: сумма активной силы \mathbf{F} и силы инерции \mathbf{U} , приложенных к телу, равна нулю. Принцип Даламбера позволяет свести динамическую задачу к задаче на равновесие сил, т.е. к задаче статики.

Более подробно о принципе Даламбера смотри в прил. 3.

3.3.2. Силы инерции в поступательном, вращательном и сложном движении

Пусть тело находится в поступательном движении с ускорением (рис. 3.2, а). На каждую точку этого тела действуют равные и одинаково направленные силы инерции. То есть имеется система равных и параллельных сил. Как известно из теоретической механики, такую систему сил можно привести к одной силе, приложенной в центре масс,

$$\mathbf{U} = -m\mathbf{a}_S.$$

где \mathbf{a}_S — ускорение центра масс.

Пусть тело вращается вокруг точки O с угловой скоростью ω и угловым ускорением ϵ (рис. 3.2, б). На каждую точку этого

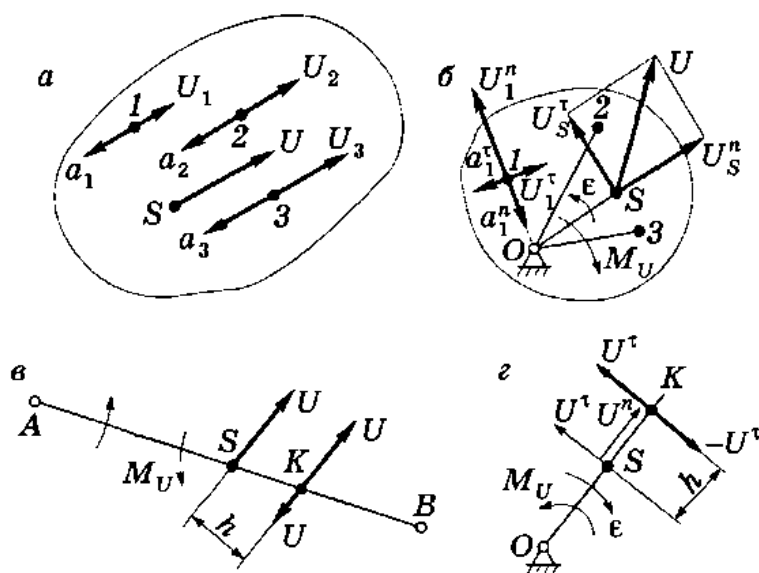


Рис. 3.2. Силы инерции:

a — в поступательном движении; *б* — во вращательном движении; *в* — в сложном движении; *г* — приведение сил инерции к центру качания

тела действует сила инерции, которую можно представить состоящей из касательной и нормальной составляющих. В теоретической механике доказывается, что такая система сил приводится к главному вектору и главному моменту сил инерции. Главный вектор сил инерции приложен в центре масс и вычисляется по формуле

$$U = -ma_S.$$

Главный момент сил инерции вычисляется по формуле

$$M_U = -J_S \epsilon,$$

где J_S — момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения. Момент инерции вычисляется как интеграл вида

$$J_S = \int m_i \rho_i^2,$$

где m_i — элементарная масса; ρ_i — расстояние от точек, образующих в совокупности данное тело, до центра масс — точки S .

Момент инерции зависит как от массы, так и от формы тела. Моменты инерции тел различной формы приводятся в справочниках. Для тела типа стержня

$$J_S = ml^2/12,$$

где l — длина стержня.

Для диска

$$J_S = mR^2,$$

где R — радиус диска.

При вращательном движении возможны следующие частные случаи:

1. Вращение вокруг центра масс. В таком случае $OS = 0$, следовательно, $U = 0$, $M_U = -J_S \epsilon$.

2. Вращение с постоянной скоростью. В таком случае $\epsilon = 0$, следовательно, $M_U = 0$, $U = -ma$.

3. Вращение вокруг центра масс с постоянной скоростью. В таком случае $U = 0$, $M_U = 0$.

Сложное движение можно представить состоящим из поступательного — вместе с центром масс — и вращательного — вокруг центра масс (рис. 3.2, в). При поступательном движении с ускорением возникает сила инерции, при вращательном движении вокруг центра масс возникает только момент сил инерции. Таким образом, в сложном движении, как и во вращательном, имеются главный вектор сил инерции U и главный момент сил инерции M_U .

Силу и момент можно заменить одной силой. Приложим в точке K силы U и $-U$ (рис. 3.2, г). Это не изменит состояния равновесия тела. Сила $-U$ и сила U в точке S образуют пару сил с моментом $M = Uh$. Если выбрать h из условия $h = M_U/U$, то момент M компенсирует момент M_U , и останется одна сила U , приложенная в точке K .

Для вращающегося тела, имеющего форму стержня длиной l , можно привести простой способ нахождения точки K . Разложим силу U на составляющие U^t и U^n и приложим в точке K две силы: U^t и $-U^t$. Для компенсации M_U необходимо,

чтобы $U^T h = M_U$. После соответствующих подстановок найдем

$$h = l/6; \quad OK = 2l/3.$$

Силы инерции звена, совершающего пространственное движение, сводятся к главному вектору, вычисляемому, как и при движении в плоскости, по формуле $U = -ma_S$, и главному моменту сил инерции, который определяется на основании динамических уравнений Эйлера. Проекции главного момента на главные центральные оси инерции звена находятся из уравнений

$$M_{Ux} = -J_x \epsilon_x - (J_z - J_y) \omega_y \omega_z;$$

$$M_{Uy} = -J_y \epsilon_y - (J_x - J_z) \omega_z \omega_x;$$

$$M_{Uz} = -J_z \epsilon_z - (J_y - J_x) \omega_x \omega_y,$$

где J_x, J_y, J_z — главные центральные моменты инерции звена; $\omega_x, \omega_y, \omega_z, \epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ — проекции вектора угловой скорости и вектора углового ускорения на главные центральные оси инерции.

Для того чтобы перейти от проекций на оси, связанные с телом, к проекциям на оси xuz , можно воспользоваться матрицей перехода от подвижных осей к осям xuz .

Силовое исследование механизмов методами кинетостатики

В тихоходных механизмах динамические эффекты проявляются незначительно, поэтому усилия можно найти на основании статического расчета, приняв во внимание только движущую силу, силы тяжести, силу трения и силу полезного сопротивления. В быстроходных механизмах следует учитывать также динамические эффекты. Проще всего это сделать, если воспользоваться принципом Даламбера. Для этого нужно

к внешним силам добавить силы инерции и рассматривать такую систему сил как находящуюся в равновесии. Такой подход называется *методом кинестатики*.

Силы инерции можно рассчитать по приведенным в 3.4 формулам. Ускорения центров тяжести звеньев и угловые ускорения определяются на основании кинематического анализа при заданном движении ведущего звена. Кинестатический расчет обычно выполняется в несколько этапов. На первом этапе силами трения пренебрегают. Затем, определив реакции в кинематических парах, находят силы трения и повторяют расчет с учетом этих сил.

Многочисленные методы расчета можно разделить на графические, графоаналитические и аналитические. Графические и графоаналитические методы характеризуются относительной простотой реализации. Достоинство аналитических методов заключается в возможности получения большого объема информации. Из-за сложности вычислений расчеты выполняются на ЭВМ.

Для решения задачи силового анализа методами статики необходимо, чтобы число уравнений было больше числа неизвестных или равнялось ему. Это условие называется *условием статической определенности системы*.

В качестве неизвестных сил в кинематической цепи выступают силы реакции. Силы, действующие на каждое звено, можно свести к одной силе и моменту, приведя их к центру кинематической пары. Разложим силу и момент на составляющие вдоль выбранных осей пары, получим три проекции силы и три проекции момента.

Вращательная кинематическая пара (рис. 3.3, а) накладывает пять условий связей, разрешая вращение только вокруг одной оси. Тогда под действием одной составляющей момента происходит движение звена, остальные составляющие момента и силы воспринимаются связями. Таким образом, во вращательной паре имеется пять реакций связей. Аналогичным образом можно установить, что в цилиндрической паре четыре реакции, в сферической — три, в паре цилиндр на плоскости — две, в паре шар на плоскости — одна (рис. 3.3, б–з).

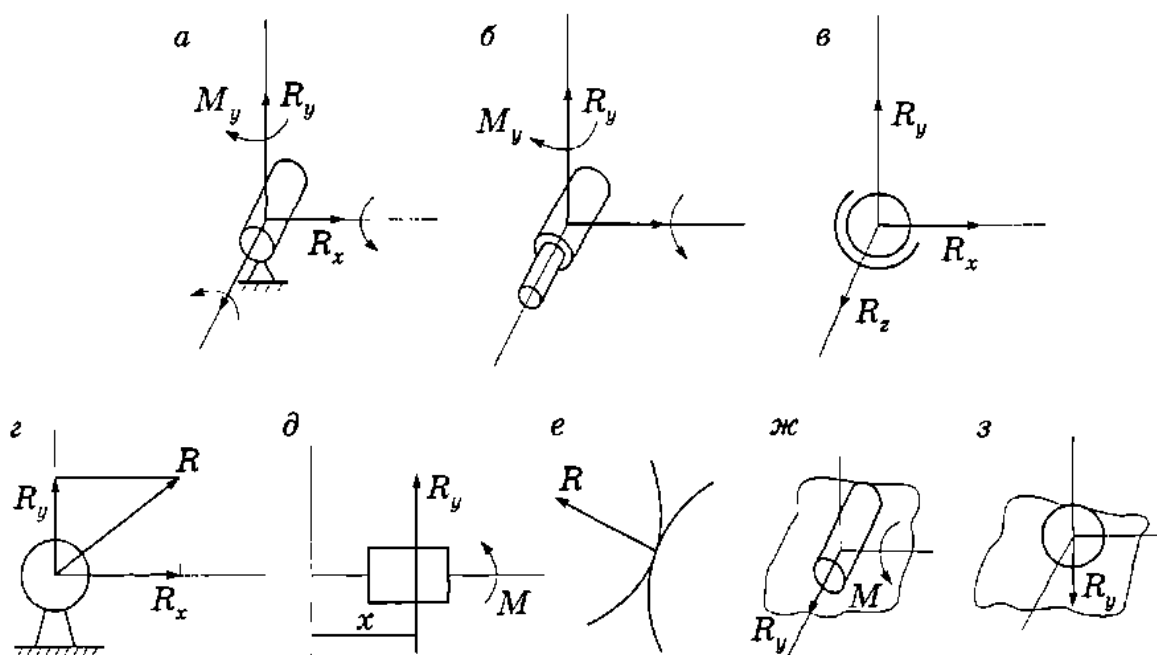


Рис. 3.3. Реакции в кинематических парах:
a — во вращательной паре; *б* — в цилиндрической паре; *в* — в сферической паре; их направления: *г* — во вращательной паре; *д* — в поступательной паре; *е-з* — в высшей паре

Условие статической определимости пространственной кинематической цепи имеет вид

$$6n = 5p_1 + 4p_2 + 3p_3 + 2p_4 + p_5.$$

Оно соответствует уравнению пространственной ассуровской группы.

В плоской схеме на вращательную пару действуют момент и составляющие силы по осям x и y . Под действием момента происходит движение звена, силы воспринимаются связями. Таким образом, имеем две неизвестные реакции. В поступательной паре под действием составляющей силы вдоль оси x происходит движение звена, сила по оси y и момент воспринимаются связями, т.е. здесь также две неизвестные. В высшей паре действует только одна сила по нормали к поверхности в точке касания звеньев, т.е. имеется одна неизвестная.

Условие статической определимости плоской кинематической цепи

$$3n = 2p_1 + p_2$$

совпадает с уравнением ассуровской группы. Отсюда можно сделать вывод, что ассуровские группы являются статически определяемыми системами. Отдельно взятое звено с вращательными парами статически неопределимо, так как для него число уравнений меньше числа неизвестных. Два звена дают шесть уравнений при шести неизвестных благодаря тому, что внутренние кинематические пары вносят в систему только две неизвестные. Из изложенного следует, что для выполнения силового исследования механизм нужно разложить на ассуровские группы и рассматривать их равновесие по отдельности.

2.5 Метод планов сил

Метод планов сил является графоаналитическим методом силового анализа. Рассмотрим его сущность на примере механизма 2-го класса с двумя диадами — шарнирного четырехзвенника (рис. 3.4). Приложим к нему все заданные внешние

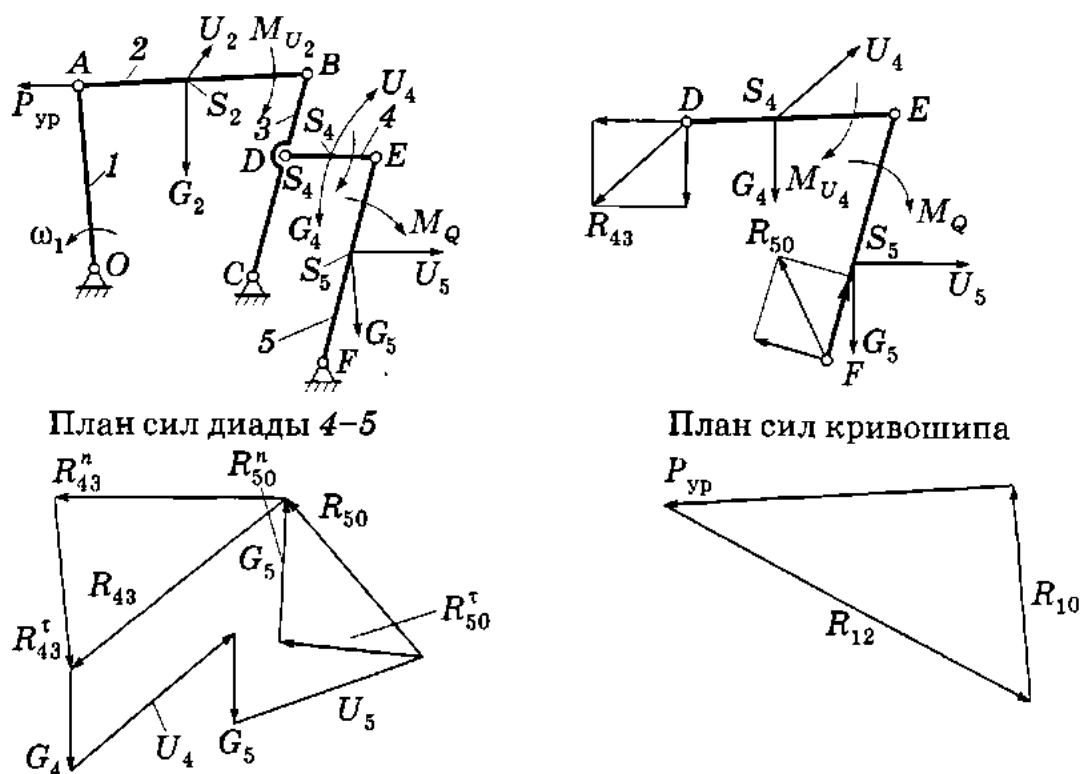


Рис 3.4. План сил шарнирного четырехзвенника

силы: момент силы полезного сопротивления M_Q , силы тяжести звеньев Q , главные векторы и главные моменты сил инерции (силы инерции U и моменты сил инерции M_U), движущую силу, которую примем равной уравновешивающей силе $P_{ур}$.

Под *уравновешивающей силой* понимают силу, уравновешивающую заданные внешние силы и силы инерции, определенные из условия равномерного вращения кривошипа. Вообще говоря, поскольку истинное движение отличается от равномерного вращения, то движущая сила отличается от уравновешивающей. Обычно уравновешивающую силу прикладывают в конце кривошипа перпендикулярно к нему. Уравновешивающая сила создает уравновешивающий момент относительно точки O .

Задачей силового расчета является определение реакций в кинематических парах и уравновешивающей силы. Выделим из механизма последнюю диаду, заменив отброшенные звенья реакциями. Условимся буквенные обозначения реакций снабжать индексами, руководствуясь правилом: первым указывается номер звена, на которое действует реакция, вторым — номер звена, со стороны которого действует реакция.

Процедура расчета выполняется по шагам в следующем порядке:

1. Запишем уравнение равновесия диады в векторной форме:

$$\mathbf{R}_{43} + \mathbf{G}_4 + \mathbf{U}_4 + \mathbf{U}_5 + \mathbf{G}_5 + \mathbf{R}_{50} = 0.$$

Это уравнение содержит две неизвестные реакции и пока не может быть решено.

2. Разложим реакции \mathbf{R}_{43} и \mathbf{R}_{50} на нормальные и касательные составляющие.

3. Запишем уравнение моментов всех сил, действующих на звенья 4 и 5 в отдельности, относительно точки E :

$$M_{4E} = 0 \rightarrow R_{43}^{\tau}; \quad M_{5E} = 0 \rightarrow R_{50}^{\tau}.$$

В этих уравнениях по одной неизвестной — R_{43}^{τ} и R_{50}^{τ} . Найдем эти неизвестные. Если они получаются со знаком «минус», это означает, что принятые направления найденных реакций следует изменить на обратные.

4. Возвратимся к исходному уравнению равновесия диады, переписав его в следующей форме:

$$\mathbf{R}_{43}^n + \mathbf{R}_{43}^r + \mathbf{G}_4 + \mathbf{U}_4 + \mathbf{U}_5 + \mathbf{G}_5 + \mathbf{R}_{50}^r + \mathbf{R}_{50}^n = 0.$$

Решим это уравнение графически. Для этого в выбранном масштабе построим многоугольник сил таким образом, чтобы неизвестные \mathbf{R}_{43}^n и \mathbf{R}_{50}^n были замыкающими этого многоугольника.

5. Для определения реакций во внутренней кинематической паре запишем уравнение равновесия звена 4:

$$\mathbf{R}_{43} + \mathbf{G}_4 + \mathbf{U}_4 + \mathbf{R}_{45} = 0.$$

В этом уравнении одна неизвестная — \mathbf{R}_{45} . Для ее определения можно не строить отдельный векторный многоугольник, а выделить в многоугольнике диады векторы, входящие в это уравнение, и построить замыкающий вектор.

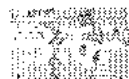
Перейдем к исследованию диады 2–3. Изобразим ее отдельно, заменив действие отброшенных звеньев реакциями. Расчет диады 2–3 выполняется точно так же, как и расчет диады 4–5.

Кривошип находится под действием уравновешивающей силы $\mathbf{P}_{ур}$, реакции \mathbf{R}_{12} со стороны звена 2, реакции \mathbf{R}_{10} со стороны стойки. Поскольку $\mathbf{P}_{ур}$ и \mathbf{R}_{12} приложены в одной точке, они дают равнодействующую, которая уравновешивается реакцией \mathbf{R}_{10} . Отсюда следует, что \mathbf{R}_{10} направлена по звену. Уравнение равновесия кривошипа

$$\mathbf{P}_{ур} + \mathbf{R}_{10} + \mathbf{R}_{12} = 0.$$

Из треугольника сил определяются реакции \mathbf{R}_{10} и $\mathbf{P}_{ур}$.

Метод рычага Жуковского, аналитический метод



Метод рычага Жуковского представляет собой геометрическую интерпретацию принципа возможных перемещений. Он применяется для плоских механизмов и позволяет опре-

делить уравновешивающую силу без предварительного определения реакций в кинематических парах.

Принцип возможных перемещений (принцип Даламбера — Лагранжа) широко применяется в механике. Он формулируется следующим образом: работа всех активных сил и сил инерции на возможном перемещении системы равна нулю. Этот принцип эквивалентен закону сохранения энергии для механических систем. Он записывается в виде

$$\sum \mathbf{F}_K \delta \mathbf{r}_K = 0, \quad (3.3)$$

где в левой части находится сумма скалярных произведений векторов сил \mathbf{F}_K на векторы возможных перемещений точек приложения этих сил $\delta \mathbf{r}_K$.

Разделим выражение (3.3) на δt :

$$\sum \mathbf{F}_K \delta \mathbf{r}_K / \delta t = \sum \mathbf{F}_K \mathbf{v}_K = \sum |\mathbf{F}_K| |\mathbf{v}_K| \cos(\mathbf{F}_K, \mathbf{v}_K) = 0.$$

Рассмотрим элемент плана скоростей, на котором изображена скорость точки K (рис. 3.5, *a*). Приложим к точке K вектор \mathbf{F}_K^* , изображающий силу \mathbf{F}_K , повернутую на 90° относительно ее истинного направления. Из построения на рисунке следует:

$$h = PK \cos \alpha = v_K \cos \alpha / k_v = v_K \cos(\mathbf{F}_K, \mathbf{v}_K) / k_v. \quad (3.4)$$

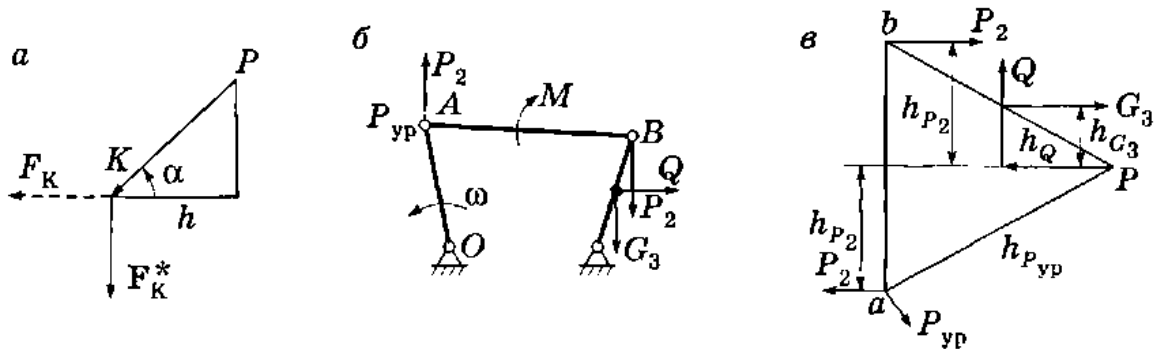


Рис. 3.5. Метод рычага Жуковского:

a — фрагмент плана скоростей; *b* — замена момента парой сил;
в — рычаг Жуковского

Если рассматривать отрезок PK как рычаг, закрепленный в точке P , то сила \mathbf{F}_K^* создает момент

$$M_K = F_K^* h = |\mathbf{F}_K^*| |\mathbf{v}_K| \cos(\mathbf{F}_K, \mathbf{v}_K) / k_v. \quad (3.5)$$

Из сравнения выражений (3.4) и (3.5) следует, что с точностью до множителя k_v

$$\sum \mathbf{F}_K \delta \mathbf{r}_K / \delta t = \sum M_K = 0.$$

Полученный результат известен как *теорема Жуковского*: если в соответствующие точки плана скоростей механизма приложить все активные силы и силы инерции, повернутые на 90° в одну сторону, то сумма моментов этих сил относительно полюса плана скоростей, рассматриваемого как жесткий рычаг, равна нулю.

На рис. 3.5, б представлен пример использования теоремы Жуковского для определения уравновешивающей силы в шарнирном четырехзвеннике. В этом примере для правильного учета момента M он заменен парой сил ($P_2' = P_2''$) так, что $M = P_2' l_{AB}$. Уравновешивающая сила определяется из уравнения

$$P_{ур} h_{ур} + P_2' h_{P_2'} + P_2 h_{P_2''} + G_3 h_{G_3} + Q h_Q = 0.$$

При составлении уравнения должно соблюдаться правило знаков: момент, действующий против часовой стрелки, — положительный, по часовой стрелке — отрицательный.

Можно повернуть план скоростей, а силы не поворачивать, результат будет тот же.

Известно несколько аналитических методов силового исследования. Познакомимся с методом, в основе которого также лежит принцип возможных перемещений. Для шарнирного четырехзвенника, нагруженного только уравновешивающим моментом $M_{ур}$ и моментом сил полезного сопротивления M_Q , уравнение равновесия имеет вид

$$M_{ур} \delta \varphi_1 + M_Q \delta \varphi_3 = 0,$$

откуда следует

$$M_{ур} = -M_Q \delta \varphi_3 / \delta \varphi_1. \quad (3.6)$$

Задача сводится к чисто кинематической: нужно выразить $\delta \varphi_3$ через $\delta \varphi_1$ и подставить в уравнение (3.6). Зависимость $\delta \varphi_3$ от $\delta \varphi_1$ устанавливается при решении задачи о скоростях.

Точно так же можно учитывать действие других сил. При одновременном приложении нескольких сил уравновешиваю-

щий момент равен сумме моментов, рассчитанных для отдельных сил. В этом проявляется принцип суперпозиции — независимости действия сил.

Аналитический метод, в отличие от графического, можно применять и для пространственных механизмов. Расчет из-за своей сложности выполняется с использованием вычислительных машин.

3.7 Уравновешивание сил инерции

3.7.1. Задача уравновешивания ротора

Ротором называется звено механизма, выполненное в виде тела вращения и установленное в опорах на стойке. В настоящее время строятся электродвигатели и турбомашин со скоростью вращения 100 000 об./мин, центрифуги для получения биологических эмульсий со скоростью вращения до 600 000 об./мин, отдельные детали в текстильных машинах вращаются со скоростью до 1 000 000 об./мин. Из-за увеличения рабочих скоростей машин уравновешиванию роторов придается большое значение, так как качество машины во многом определяется ее уравновешенностью. Поэтому уравновешивание является ответственным этапом изготовления машин.

Рассмотрим пример: пусть масса ротора 10 кг, угловая скорость $\omega = 1000$ рад/с, эксцентриситет массы 0,0001 м (0,1 мм). При вращении ротора возникает сила инерции $U = m\omega^2 R = 1000$ Н, т.е. в 10 раз больше, чем вес ротора.

Сила инерции передается на опоры в виде периодического воздействия. Пусть, например, неуравновешенный ротор закреплен на консольной балке (рис. 3.6). Разложим силу инерции U на составляющие U_x и U_y . Составляющая U_x из-за большой жесткости балки в направлении оси x

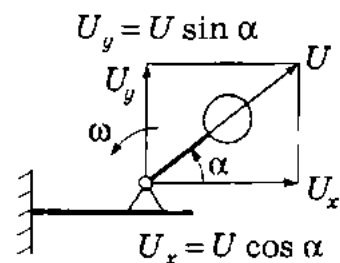


Рис 3.6. Действие неуравновешенного ротора на балку

не опасна, составляющая U_y вызывает колебания балки. Если частота вынужденных колебаний равна частоте свободных колебаний или кратна ей, может возникнуть резонанс. Резонанс характеризуется резким возрастанием амплитуды колебаний, что может привести к поломке машины. В лучшем случае он будет проявляться в виде вибраций оборудования и здания. Неуравновешенность может появиться в результате ошибок, допущенных при проектировании, а также из-за неточности изготовления, пороков в материале и т.п. Задача конструктора — не допустить ошибок при проектировании ротора.

3.7.2. Статическая неуравновешенность ротора

Статической называется неуравновешенность, возникающая из-за того, что главная центральная ось инерции ротора проходит параллельно оси вращения. Свое название она получила потому, что ее можно обнаружить проведением статических испытаний. Рассмотрим простейшую схему статически неуравновешенного ротора (рис. 3.7). Подсчитаем силу инерции, развиваемую массой m , центр тяжести которой располагается в точке S :

$$U = m\omega^2 e,$$

где e — эксцентриситет.

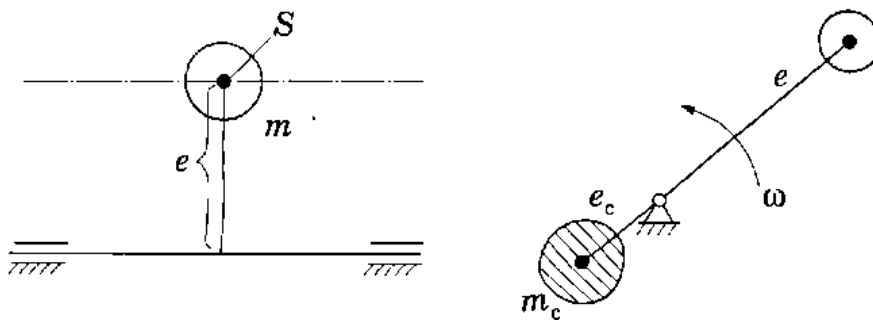


Рис. 3.7. Схема статически неуравновешенного ротора

Силу инерции при угловой скорости $\omega = 1$ называют *дисбалансом* [г · см]:

$$D = U = me.$$

Задача уравнивания заключается в том, чтобы изменить распределение масс и перевести центр масс на ось вращения. Тогда главная центральная ось инерции и ось вращения совпадут. Этого можно добиться, если расположить корректирующую массу m_c на расстоянии e_c противоположно массе m так, чтобы она развивала силу инерции $U_c = -U$, или $D_c = -D$. Отсюда следует, что для статической уравновешенности необходимо, чтобы геометрическая сумма дисбалансов равнялась нулю ($D_c + D = 0$).

На практике статическое уравнивание выполняют на балансировочных станках. Обычно используются балансировочные параллели (рис. 3.8). Установленный на них ротор под действием момента сил тяжести совершает колебания относительно положения устойчивого равновесия, при котором центр масс находится в самом нижнем положении. Ротор ведет себя, как физический маятник. После прекращения колебаний определяется линия, на которой находится центр масс, — «тяжелое место». С противоположной стороны закрепляется пробный грузик, и испытание повторяется. Ротор будет уравновешен, если он будет находиться в состоянии безразличного равновесия.

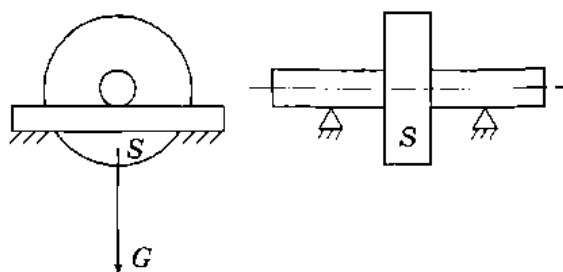


Рис 3.8. Балансировка ротора на параллелях

Достоинство такого метода уравнивания — простота оборудования. Недостаток — низкая точность из-за наличия трения качения. Остаточный дисбаланс рассчитывается по формуле

$$D_{\text{ост}} = mk,$$

где k — коэффициент трения качения.

Второй недостаток метода состоит в том, что таким способом нельзя обнаружить моментную неуравновешенность.

3.7.3. Моментная неуравновешенность ротора

Моментной называется неуравновешенность, возникающая оттого, что главная центральная ось инерции пересекает ось вращения в центре масс.

Схема ротора с моментной неуравновешенностью представлена на рис. 3.9, а. В том случае, если $D_1 = -D_2$, ротор статически уравновешен, однако дисбалансы, располагаясь на плече l , создадут момент $M = Dl$, который будет воздействовать на опоры, вызывая в них реакции R_A и R_B . Такая неуравновешенность возникает, например, если отверстие в детали просверлено под углом к оси вращения (рис. 3.9, б).

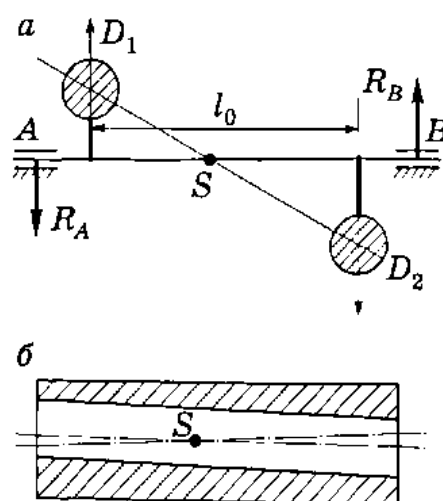


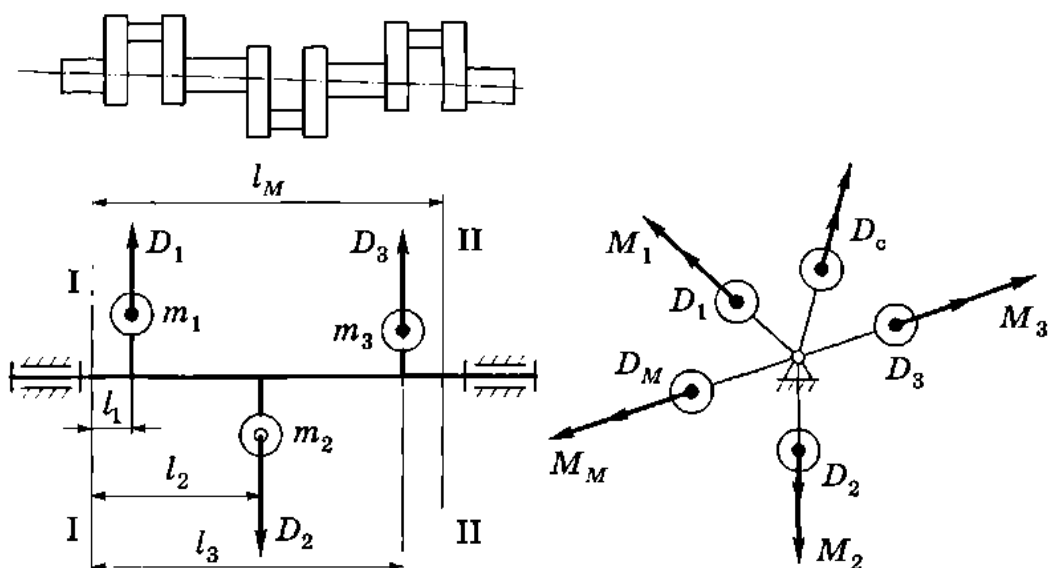
Рис. 3.9. Схема ротора с моментной неуравновешенностью:
а — расчетная схема;
б — неуравновешенная деталь

Для моментного уравновешивания необходимо добавить две корректирующие массы, такие, чтобы они создали момент дисбаланса $M_M = -M$. Геометрическая сумма моментов всех дисбалансов должна быть равна нулю.

Моментное уравновешивание производится на специальных станках. Такому уравновешиванию подвергаются детали большой протяженности вдоль оси. Детали типа зубчатых колес, шкивов, маховиков, автомобильных колес достаточно уравновесить статически.

3.7.4. Полное уравновешивание ротора с известным расположением масс

Статическое и моментное уравновешивание называют *полным (динамическим)* уравновешиванием. Рассмотрим его на примере коленчатого вала двигателя (рис. 3.10). Сначала будем производить моментное, а затем статическое уравновешивание.



План моментов дисбалансов

План дисбалансов

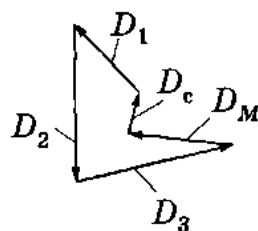
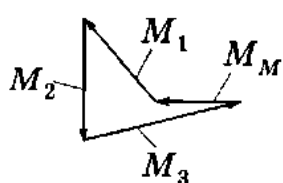


Рис. 3.10. Полное уравнивание ротора

Запишем условие моментной уравновешенности в форме геометрической суммы:

$$M_1 + M_2 + M_3 + M_M = 0. \quad (3.7)$$

Здесь

$$M_1 = D_1 l_1 = m_1 e_1 l_1;$$

$$M_2 = D_2 l_2 = m_2 e_2 l_2;$$

$$M_3 = D_3 l_3 = m_3 e_3 l_3.$$

Направление векторов моментов примем совпадающим с направлением векторов дисбалансов. Из уравнения (3.7) предстоит определить M_M . Решение уравнения получим построением многоугольника моментов.

Из построенного многоугольника моментов с помощью масштабного коэффициента определяем момент дополнительного

дисбаланса M_M , который следует приложить к ротору, чтобы уравновесить его моментно:

$$M_M = D_M l_M = m_M e_M l_M.$$

Отсюда, задав l_M и e_M , находим m_M . Корректирующую массу m_M следует расположить в плоскости II–II на расстоянии e_M от оси вращения в направлении, указанном вектором M_M на многоугольнике моментов.

Условие статической уравновешенности в форме геометрической суммы:

$$D_1 + D_2 + D_3 + D_M + D_c = 0.$$

Построим в масштабе k_D многоугольник дисбалансов, из которого найдем значение и направление D_c : $D_c = m_c e_c$. Корректирующую массу m_c следует расположить в плоскости I–I на расстоянии e_c от оси вращения в направлении, указанном для D_c на многоугольнике дисбалансов. Таким образом, с помощью двух масс произведено полное уравновешивание ротора.

3.7.5. Балансировка на машинах

Уравновешивание на стадии проектирования не дает гарантии, что изготовленная деталь будет уравновешена, так как ошибки возможны при изготовлении. Для их исправления все ответственные детали подвергаются балансировке на машинах. Конструкции балансировочных машин весьма разнообразны, рассмотрим простейшую из них (рис. 3.11).

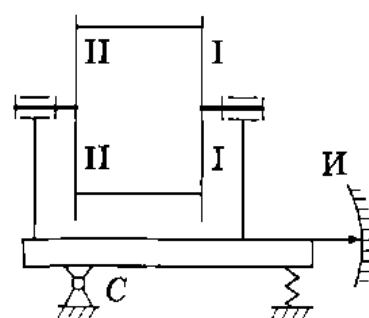


Рис. 3.11. Балансировочная машина

Ротор запускается через фрикционную передачу в резонансный режим, а затем двигатель отключается. При прохождении резонанса возникают колебания рамы, которые регистрируются измерительным прибором И. Плоскость II–II проходит через ось качания С. Благодаря этому сила инерции в плос-

кости II–II уравнивается реакцией R_C . Сила инерции в плоскости I–I вызывает колебания рамы. Используя корректирующие грузы, добиваются уравнивания сил инерции в плоскости I–I. Затем ротор переворачивают так, чтобы плоскость I–I прошла через точку C , и добиваются уравнивания в плоскости II–II. Процесс уравнивания является трудоемким, так как требует многократных запусков ротора.

3.7.6. Уравнивание механизмов

Уравнивание механизмов производится с теми же целями, что и уравнивание роторов. При работе механизмов возникают динамические реакции, которые могут значительно превышать статические. От статических реакций избавиться нельзя, динамических же можно избежать, если произвести уравнивание механизма.

Полным уравнивание механизма будет тогда, когда ускорение центра тяжести всего механизма и момент сил инерции равны нулю. Избежать воздействия момента сил инерции не удастся, но добиться, чтобы ускорение центра масс было равно нулю, можно — следует сделать так, чтобы он был неподвижен. При решении этой задачи используют *метод замещающих масс*.

Пусть, например, требуется уравновесить плоский шарнирный четырехзвенник (рис. 3.12). Заменяем массу m двумя массами, m_O и m'_A , поместим их в точки O и A , соблюдая условия

$$\begin{aligned} m_O OS_1 &= m'_A AS_1; \\ m_O + m'_A &= m_1. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Уравнения (3.8) образуют линейную систему относительно m_O и m'_A , решение которой находится элементарно.

Аналогичным образом заменяются массы m_3 и m_2 :

$$\begin{aligned} m_C &= m_3 BS_3 / BC; & m'_B &= m_3 CS_3 / BC; \\ m''_A &= m_2 BS_2 / AB; & m''_B &= m_2 AS_2 / AB. \end{aligned}$$

Итак, в точке A сосредоточена масса $m_A = m'_A + m''_A$, в точке B — масса $m_B = m'_B + m''_B$. Массы в точках A и C уравновешены. Следует уравновесить массы m_A и m_B . Это достигается установкой дополнительных противовесов на звеньях OA и BC . Расчет их производится известным методом.

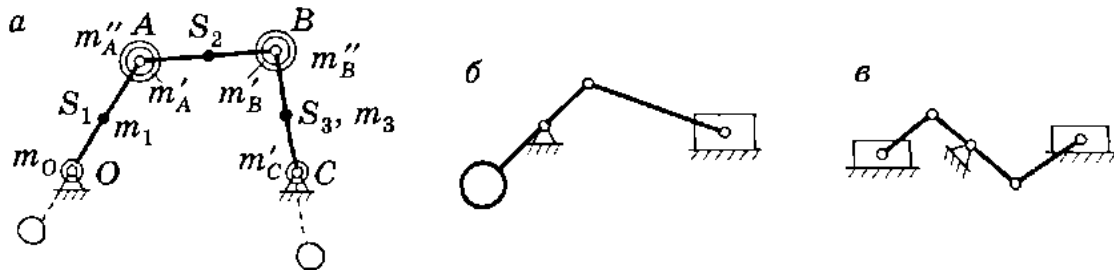


Рис. 3.12. Уравновешивание механизмов:

a — шарнирный четырехзвенник; b — кривошипно-ползунный механизм; $в$ — сдвоенный кривошипно-ползунный механизм

Подобным образом производится уравновешивание кривошипно-ползунного механизма, однако здесь остается неуравновешенной поступательно движущаяся масса ползуна (рис. 3.12, б). Полностью уравновешен механизм, составленный из двух кривошипно-ползунных механизмов, работающих в противофазе (рис. 3.12, в). Хорошо уравновешены многоцилиндровые двигатели внутреннего сгорания, хуже всего — одноцилиндровые двухтактные двигатели.

Силы трения в механизмах

3.8.1. Законы трения

Уточненный силовой расчет выполняется с учетом сил трения. Сила трения есть результат взаимодействия двух тел и тоже относится к реактивным силам. Эта сила направлена касательно к поверхностям соприкасающихся тел и препятствует движению одного тела относительно другого. Физическая природа этой силы связана с деформацией микронеровностей и нали-

нием сил молекулярного взаимодействия. Трение такого рода называется трением скольжения.

Несмотря на то что трение — одно из самых распространенных явлений природы, точные законы трения до сих пор не установлены из-за многочисленности факторов, определяющих его. Поэтому используются приближенные законы, которые пригодны для большинства практических задач. Эти законы установлены Г. Амонтоном и Ш.О. Кулоном:

1. Сила трения пропорциональна нормальному давлению и направлена противоположно направлению относительной скорости:

$$F = fN.$$

Коэффициент пропорциональности f называется коэффициентом трения. Поскольку для двух трущихся тел можно указать две относительные скорости v_{ij} и v_{ji} , соответственно существуют две силы трения (F_{ij} и F_{ji}), равные по значению и противоположные по направлению. Силы трения представляют собой касательные реакции для взаимодействующих тел.

2. Коэффициент трения зависит от материалов и состояния поверхностей трущихся тел. С уменьшением микронеровностей трение уменьшается. Экспериментально установлены следующие коэффициенты трения для наиболее характерных пар материалов:

Сталь по стали	0,18
Чугун по стали.....	0,20
Сталь по дереву	0,40
Ферродо по металлу.....	0,30...0,80
Резина по стали	0,60...0,80
Дерево по дереву	0,40...0,70

3. Коэффициент трения зависит от скорости движения: сначала несколько убывает, а затем сохраняет почти постоянное значение.

4. В большинстве случаев сила трения с возрастанием удельного давления увеличивается.

5. Коэффициент трения при движении (динамический коэффициент трения) меньше коэффициента трения при покое (статический коэффициент трения).

Многочисленность отмеченных факторов обуславливает то, что на практике часто используют приведенные коэффициенты трения, определяемые в каждом конкретном случае экспериментально. Они могут отличаться от приводимых здесь ориентировочных значений.

3.8.2. Трение в поступательной паре

Рассмотрим поступательную пару, схема которой представлена на рис. 3.13, а. Пусть к ползуну приложены сила Q , действующая перпендикулярно направляющей, и движущая сила P . Со стороны направляющей на ползун действуют нормальная реакция N и сила трения F , являющаяся касательной реакцией. Геометрическая сумма N и F есть полная реакция R . Угол φ между R и N назовем углом трения, поскольку он зависит от силы трения F . При равномерном движении ползуна соблюдается условие $P = F$, где $F = fN$, откуда $f = F/N$. Из построения на рис. 3.13, а следует, что $F/N = \operatorname{tg} \varphi$, где $\varphi = \operatorname{arctg} f$. При малом коэффициенте трения $\varphi \approx f$. Так, например, при $f = 0,2$ $\varphi = 0,2 \text{ рад} \approx 12^\circ$.

Коэффициент трения определяется экспериментально на установке, схема которой показана на рис. 3.13, б. На плоскости, наклоненной к горизонту под углом α , помещено тело.

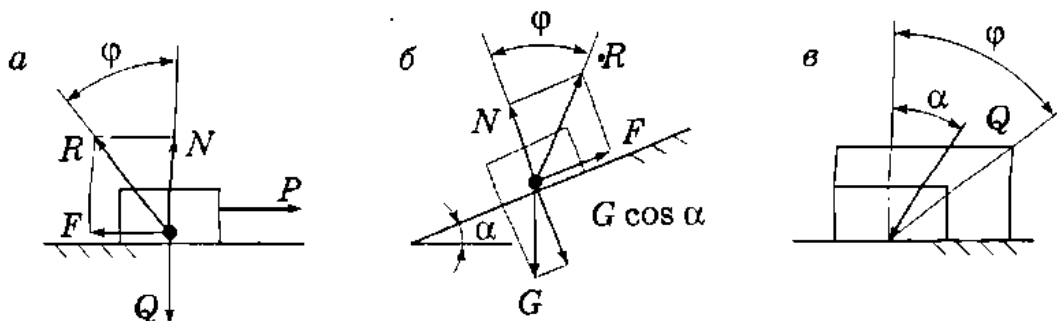


Рис. 3.13. Трение в поступательной паре:
 а — на горизонтальной поверхности; б — на наклонной поверхности;
 в — условие самоторможения

Установим условия, при которых тело будет покоиться на плоскости.

Разложим силу тяжести на две составляющие — действующие по нормали и по касательной к поверхности. Нормальная составляющая, равная $G \cos \alpha$, прижимает тело к плоскости, касательная составляющая, равная $G \sin \alpha$, стремится сдвинуть тело вниз по плоскости. Этой силе противодействует сила трения $F = fG \sin \alpha$. Условие равновесия тела на плоскости:

$$F \geq G \sin \alpha$$

или

$$fG \cos \alpha \geq G \sin \alpha; \quad f \geq \operatorname{tg} \alpha; \quad \operatorname{tg} \varphi \geq \operatorname{tg} \alpha; \quad \varphi \geq \alpha.$$

Равновесие тела на наклонной плоскости не зависит от значения силы. Такое состояние носит название *самоторможения*. Самоторможение часто используется в грузоподъемных механизмах.

Явление самоторможения наблюдается в поступательной паре, если к ползуну приложена сила P под углом, меньшим угла трения (рис. 3.13, в). Доказательство этого утверждения то же, что и для тела на наклонной плоскости. Угол трения определяет конус трения. Если сила трения приложена внутри конуса трения, то она не сможет сдвинуть тело с места. Это следует учитывать при проектировании механизмов с поступательными парами.

Установленные зависимости используются для анализа трения в резьбе. На рис. 3.14 показан один виток прямоугольной резьбы. Условно заменим гайку небольшим элементом, нагруженным теми же силами, что и гайка. В таком случае

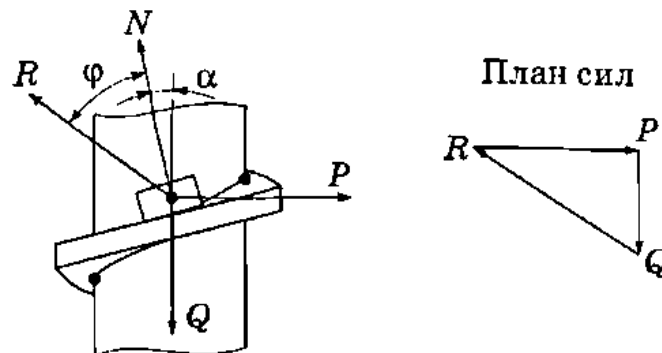


Рис. 3.14. Трение в резьбе

возникает аналогия с ползуном, перемещающимся по наклонной плоскости, где α — угол подъема винтовой нарезки.

Построим треугольник сил, приложенных к ползуну. Из треугольника следует:

$$P = Q \operatorname{tg}(\alpha + \varphi).$$

Момент, который необходимо приложить к гайке, чтобы преодолеть силу Q ,

$$M = Pr_{\text{ср}} = Qr_{\text{ср}} \operatorname{tg}(\alpha + \varphi),$$

где $r_{\text{ср}}$ — средний радиус резьбы.

Угол подъема α обычно принимается небольшим для обеспечения самоторможения гайки, угол трения $\varphi = \operatorname{arctg} f_0$, где f_0 — приведенный коэффициент трения. Для прямоугольной резьбы $f_0 = f$, для треугольной резьбы $f_0 = f/\cos 30^\circ$.

3.8.3. Трение во вращательной паре

Вращательная пара состоит из втулки и цапфы. Если к цапфе приложен движущий момент, она будет перекатываться по цилиндрической поверхности втулки до тех пор, пока реактивный момент не уравновесит движущий момент. На рис. 3.15 представлено положение равновесия цапфы. Из проекции всех сил на ось y следует, что $Q = -R$, где Q — вертикальная нагрузка; R — полная реакция; Q и R образуют пару сил с плечом ρ , где ρ — радиус круга трения:

$$M_{\text{тр}} = Q\rho.$$

Из построения на рис. 3.15 видно, что $\rho = r_{\text{ц}} \sin \varphi$, где $r_{\text{ц}}$ — радиус цапфы.

Поскольку $\sin \varphi \approx \operatorname{tg} \varphi$, при малых значениях φ

$$M_{\text{тр}} = Qr_{\text{ц}} \operatorname{tg} \varphi = Qr_{\text{ц}} f.$$

Коэффициент трения f для вращательной пары определяется экс-

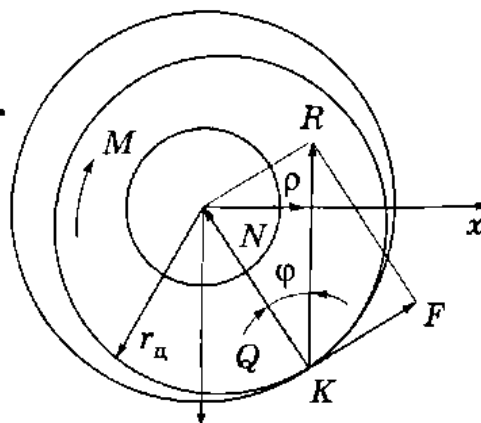


Рис. 3.15. Трение во вращательной паре

периментально. Обычно он на 30 % больше, чем для поступательной пары.

Здесь рассмотрен упрощенный подход к определению трения во вращательной паре, не учитывающий реального распределения удельного давления на поверхности кинематической пары. При более строгом подходе рассматриваются две гипотезы распределения давления, так называемые *гипотеза постоянного давления* и *гипотеза постоянного износа*. Первая относится к новым цапфам, вторая — к приработавшимся. В результате получаются формулы, аналогичные записанным ранее, с приведенным коэффициентом трения $1,27f$ для приработавшихся и $1,47f$ — для новых цапф.

3.8.4. Трение в высшей паре

В высшей кинематической паре наблюдается скольжение и качение элементов друг по другу. Сила трения скольжения вычисляется так же, как и в поступательной паре. Сопротивление перекатыванию учитывается моментом трения качения, который направлен противоположно угловой скорости.

Физическая природа трения качения изучена недостаточно, поэтому обычно пользуются экспериментальными данными. При качении тела затрачивается работа, которая идет на деформацию поверхностей качения. Пусть, например, цилиндр перекачивается по плоскости (рис. 3.16). Перед цилиндром образуется волна деформации, которая движется вместе с ним. равнодействующая элементарных реакций смещена от точки a на величину k . Для качения цилиндра необходимо преодолеть момент $M_{тр} = kN = kQ$, где N — сила реакции; Q — сила, приложенная к телу. Коэффициент пропорциональности в этой формуле, по аналогии с законом трения на плоскости, называют *коэффициентом трения качения*.

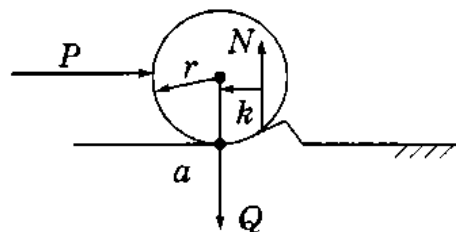


Рис. 3.16. К определению трения качения в высшей паре



3.9.1. Приведение сил и масс

Для того чтобы выполнить силовое исследование, необходимо знать закон движения начального звена. Он устанавливается при решении задачи об истинном движении механизма. В этой задаче активные силы считаются известными. Составляется уравнение, связывающее силы и ускорения, а затем его интегрированием находят скорость и перемещение как функции времени. Основные трудности здесь чисто математического характера. Они вызваны сложностью интегрирования нелинейного дифференциального уравнения. С целью упрощения записи дифференциального уравнения рассматривается одномассовая динамическая модель механизма. Вместо движения всего механизма изучается движение одного звена — так называемого *звена приведения*. Обычно в качестве звена приведения выбирается начальное звено механизма. Для того чтобы такая замена была возможна, необходимо, чтобы звено приведения было динамически эквивалентно всему механизму.

Условие динамической эквивалентности состоит в следующем: во-первых, кинетическая энергия звена приведения должна равняться кинетической энергии механизма; во-вторых, работа силы, приложенной к звену приведения, на возможном перемещении должна равняться сумме работ всех сил, приложенных к механизму, на их возможных перемещениях. Данное условие вытекает из того, что при составлении уравнения движения механизма в расчет принимается только закон изменения кинетической энергии и внешних сил, а не реальная схема механизма. При такой замене и для механизма, и для звена приведения справедливо одно и то же уравнение.

Кинетическая энергия механизма равна сумме кинетических энергий его звеньев. Для кривошипно-ползунного механизма (рис. 3.17) имеем

$$E_{\text{мех}} = E_1 + E_2 + E_3,$$

где $E_1 = I_{10}\omega^2/2$, $E_2 = m_2v_S^2/2 + I_{2S}\omega_2^2/2$, $E_3 = m_3v_c^2/2$. Здесь I_{2S} — момент инерции звена 2 относительно центра тяжести;

ω — угловая скорость звена привода. В качестве звена привода можно выбрать ползун или кривошип.

Приведенной массой называется такая условная масса звена привода, при которой его кинетическая энергия равна кинетической энергии всего механизма:

$$E_{\text{мех}} = E_{\text{пр}} = m_{\text{пр}} v^2 / 2,$$

откуда

$$m_{\text{пр}} = 2E_{\text{мех}} / v^2,$$

где v — скорость звена привода.

Приведенным моментом называется условный момент, приложенный к звену привода, работа которого на возможном перемещении равна сумме работ всех реальных внешних моментов, приложенных к звеньям на их возможных перемещениях.

Приведенным моментом инерции звена привода называется условный момент инерции звена, при котором его кинетическая энергия равна кинетической энергии механизма:

$$E_{\text{мех}} = E_{\text{пр}} = I_{\text{пр}} \omega^2 / 2,$$

откуда

$$I_{\text{пр}} = 2E_{\text{мех}} / \omega^2.$$

Приведенной силой $P_{\text{пр}}$ называется такая условная сила, приложенная к звену привода, работа которой на возможном перемещении равна сумме работ всех сил, приложенных к механизму, на их возможных перемещениях. Согласно этому определению, приведенная сила совпадает с обобщенной силой по Лагранжу. Размерность обобщенной силы зависит от размерности обобщенной координаты: $[Q] = [A][q]$. Если обобщенная координата q измеряется в радианах, размерность обобщенной силы — ньютон на метр $[Н \cdot м]$, следовательно, обобщенная сила выступает в виде приведенного момента $M_{\text{пр}}$. Эквивалентные динамические модели кривошипно-ползунного

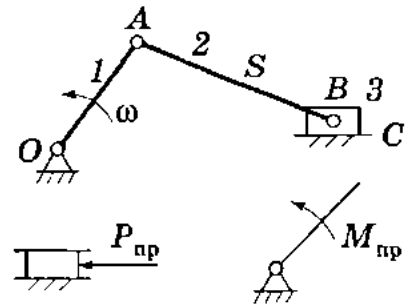


Рис. 3.17. Рычажный механизм и его динамические модели

механизма представлены на рис. 3.17. Для вращающегося звена приведения

$$I_{\text{пр}} = (I_c \omega_1^2 + I_S \omega^2 + m_2 v_S^2 + m_3 v_B^2) / \omega_1^2. \quad (3.9)$$

Из анализа формулы (3.9) следует, что $I_{\text{пр}}$ не зависит от скорости звена приведения, но зависит от обобщенной координаты.

Для зубчатого механизма (рис. 3.18) $I_{\text{пр}}$ является величиной постоянной:

$$I_{\text{пр}} = (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2 + I_4 \omega_4^2) / \omega_1^2.$$

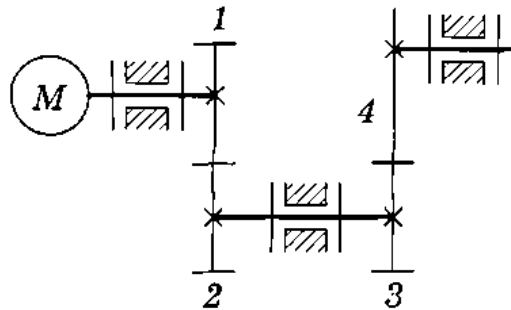


Рис. 3.18. Зубчатый механизм

Динамическое исследование механизмов, у которых $I_{\text{пр}} = \text{const}$, выполняется значительно проще, чем исследование механизмов с переменной $I_{\text{пр}}$.

3.9.2. Уравнение движения механизма в дифференциальной форме

Для вывода уравнения движения механизма воспользуемся уравнением Лагранжа 2-го рода

$$d/dt(\partial E/\partial q') - \partial E/\partial q = Q, \quad (3.10)$$

где q и q' — обобщенная координата и обобщенная скорость соответственно; E — кинетическая энергия; Q — обобщенная сила. Применим это уравнение к динамической модели, изображенной внизу справа на рис. 3.17. Тогда $q = \varphi$, $q' = \omega$, $Q = M_{\text{пр}}$, $E = I_{\text{пр}} \omega^2 / 2$, $I_{\text{пр}} = f(\varphi)$.

Определим элементы уравнения (3.10):

$$\partial E / \partial \varphi = \omega^2 (\partial I_{\text{пр}} / \partial \varphi) / 2;$$

$$\partial E / \partial \omega = I_{\text{пр}} \omega.$$

Примем во внимание, что $I_{\text{пр}}$ и ω изменяются во времени, тогда

$$d/dt (\partial E / \partial \omega) = \omega (dI_{\text{пр}} / dt) + I_{\text{пр}} (d\omega / dt) = \omega^2 (dI_{\text{пр}} / d\varphi) + I_{\text{пр}} \varepsilon.$$

Подставим полученные результаты в уравнение (3.10). Получим уравнение движения механизма в дифференциальной форме:

$$I_{\text{пр}} \varepsilon + \omega^2 (dI_{\text{пр}} / d\varphi) / 2 = M_{\text{пр}}. \quad (3.11)$$

Это нелинейное неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка. Решение дифференциального уравнения заключается в нахождении первообразной функции. Способ решения зависит от вида $M_{\text{пр}}$ и $I_{\text{пр}}$. Встречаются следующие случаи:

1. $I_{\text{пр}} = \text{const}; M_{\text{пр}} = \text{const}.$
2. $I_{\text{пр}} = \text{const}; M = M(\varphi),$ или $M(\omega),$ или $M(t).$
3. $I = I(\varphi); M = M(\varphi).$
4. $I = \text{const}; M = M(\omega, \varphi).$
5. $I = I(\varphi); M = M(\omega, \varphi).$

В первых двух случаях уравнение движения может быть проинтегрировано в конечном виде. Иногда можно воспользоваться готовым решением, взятым из справочника. Любое дифференциальное уравнение можно решить численным методом.

Пример 3.1. Рассмотрим простейший случай — динамическое исследование колодочного тормоза, который состоит из диска и рычага с тормозной колодкой (рис. 3.19), когда $I_{\text{пр}} = \text{const}, M_{\text{пр}} = \text{const}.$ Диск, вращающийся с угловой скоростью ω , затормаживается силой трения, возникающей при приложении к рычагу силы $P.$ Требу-

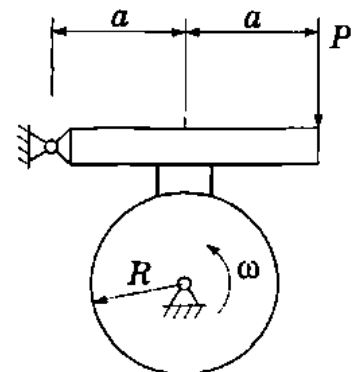


Рис. 3.19. Колодочный тормоз

ется установить время и число оборотов до полной остановки диска.

Пусть $I_{\text{пр}} = 0,4 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $P = 20 \text{ Н}$, $f = 0,2$, $R = 0,1 \text{ м}$, $\omega = 100 \text{ рад/с}$. К диску приложен тормозной момент $M_{\text{тр}} = F_{\text{тр}}R = fNR = f2PR = 0,8 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

С учетом того, что $I_{\text{пр}} = \text{const}$, уравнение (3.11) запишем так:

$$I_{\text{пр}}\varepsilon = M_{\text{пр}},$$

где $M_{\text{пр}} = -M_{\text{тр}}$; $\varepsilon = \text{const}$, т.е. движение равноускоренное. Перепишем уравнение, разделив переменные и проинтегрировав. Опуская элементарные преобразования, в итоге получим уравнение

$$\omega = -(M_{\text{пр}}/I_{\text{пр}})t + C_1, \quad (3.12)$$

где C_1 — постоянная интегрирования, которая находится из начальных условий: при $t = 0$ $\omega = \omega_0$, тогда $C_1 = \omega_0$.

После интегрирования уравнения (3.12) получим:

$$\varphi = -(M_{\text{пр}}/I_{\text{пр}})t^2/2 + \omega_0 t + C_2, \quad (3.13)$$

где C_2 — постоянная интегрирования, которая находится из начальных условий: при $t = 0$ $\varphi_0 = 0$, тогда $C_2 = \varphi_0$.

Из уравнения (3.13) можно определить время до полной остановки:

$$0 = -(0,8/0,4)t + 100 \rightarrow t = 50 \text{ с.}$$

Из уравнения (3.13) определяется также угол поворота диска до полной остановки:

$$\varphi = -(0,8/0,4) \cdot 50^2/2 + 100 \cdot 50 = 2500 \text{ рад} = 398 \text{ об.}$$

Формулы (3.12) и (3.13) лежат в основе численных методов решения дифференциальных уравнений. Сущность простейшего из них состоит в следующем. Весь период движения разбивается на очень малые интервалы времени, за которые $I_{\text{пр}}$ и $M_{\text{пр}}$ не успевают существенно измениться. Тогда эти формулы будут справедливы для равноускоренного движения. По

ним вычисляются значения обобщенной координаты и обобщенной скорости в конце интервала и устанавливаются истинные значения $I_{\text{пр}}$ и $M_{\text{пр}}$. Полученные значения являются исходными для расчета движения на следующем интервале, и т.д. С помощью усовершенствованных методов (например, метода Рунге — Кутты) можно добиться практически любой точности расчета. Из-за большого объема вычислений для решения дифференциальных уравнений используются ЭВМ. В библиотеках ЭВМ имеются стандартные программы для решения дифференциальных уравнений, так что задача программирования сводится только к записи уравнения и заданию начальных условий, а также к указанию требуемой точности расчета или шага интегрирования.

3.9.3. Периоды работы машины

Уравнение движения механизма можно представить в более простой и удобной для качественного анализа форме исходя из известной в теоретической механике теоремы об изменении кинетической энергии, формулируемой так: приращение кинетической энергии системы равно работе внешних сил:

$$dE = M_{\text{пр}} d\varphi. \quad (3.14)$$

Уравнение (3.14) эквивалентно следующему:

$$A_P - A_Q - A_F + A_G = E_2 - E_1, \quad (3.15)$$

где A_P — работа движущих сил; A_Q — работа сил полезных сопротивлений; A_F — работа сил трения; A_G — работа сил тяжести (для механизма, работающего в циклическом режиме, $A_G = 0$); E_2, E_1 — кинетическая энергия машины в двух рассматриваемых положениях.

Уравнение (3.15) иллюстрирует баланс энергии и работы в машине: если работа движущих сил превышает работу сил трения и полезного сопротивления, то кинетическая энергия возрастает, машина разгоняется; если работа движущих сил меньше работы сил сопротивления, движение происходит за счет расхода накопленной кинетической энергии.

В работе машины следует различать три периода. Период пуска характеризуется тем, что $A_Q = 0$, $E_1 = 0$. Тогда

$$A_P - A_F = E_2; \quad A_P = A_F + E_2.$$

Работа движущей силы при пуске расходуется на преодоление трения и разгон машины. Чем меньше A_F , тем быстрее происходит разгон.

Для периода установившегося движения $E_2 = E_1$, тогда

$$A_P - A_Q - A_F = 0; \quad A_P = A_Q + A_F.$$

Работа движущей силы при установившемся движении расходуется на полезную работу и работу сил трения. Разделим последнее уравнение на A_P :

$$1 = A_Q/A_P + A_F/A_P = \eta + \psi,$$

где η — коэффициент полезного действия (КПД); ψ — коэффициент потерь.

Определенный таким образом КПД носит название циклового КПД.

Мгновенный КПД определяется как отношение мощности сил полезного сопротивления к мощности движущей силы, определенной с учетом сил трения, но без учета сил инерции.

КПД характеризует совершенство механизма с точки зрения экономного расходования энергии. Поскольку работа сил трения превращается в тепловую энергию и представляет собой безвозвратные потери, КПД можно повысить за счет уменьшения потерь на трение.

Третий период работы машины — выбег, для него $E_2 = 0$, $A_P = 0$:

$$-A_Q - A_F = -E.$$

В этот период кинетическая энергия расходуется на работу сил полезного сопротивления и работу сил трения. Для того чтобы уменьшить продолжительность выбега, вводят дополнительное торможение.

3.9.4. Регулирование неравномерности хода машины

Три периода движения машины, отнесенные к главному валу машины, представлены графически на рис. 3.20. В течение цикла угловая скорость главного вала достигает максимального и минимального значений, оставаясь вблизи некоторого среднего значения $\omega_{\text{ср}}$:

$$\omega_{\text{ср}} = (\omega_{\text{max}} + \omega_{\text{min}})/2. \quad (3.16)$$

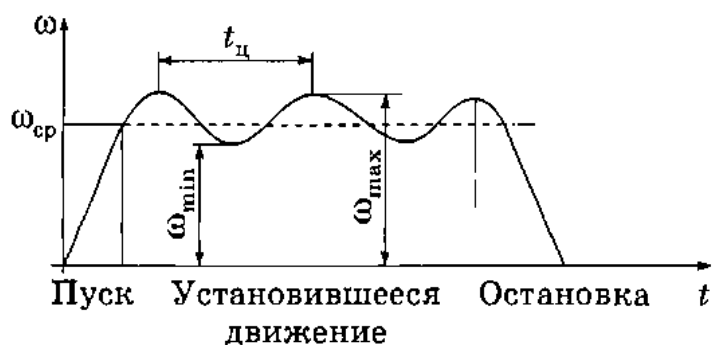


Рис. 3.20. График угловой скорости главного вала машины

Степень отклонения скорости от среднего значения характеризуется коэффициентом неравномерности хода машины:

$$\delta = (\omega_{\text{max}} - \omega_{\text{min}})/\omega_{\text{ср}}. \quad (3.17)$$

Из формул (3.16) и (3.17) следует:

$$(1 + 0,5\delta)\omega_{\text{ср}} = \omega_{\text{max}};$$

$$(1 - 0,5\delta)\omega_{\text{ср}} = \omega_{\text{min}}.$$

Коэффициент неравномерности для различных классов машин колеблется в широких пределах. Экспериментально установлены следующие значения δ :

Электрические генераторы	1/300...1/150
Двигатели внутреннего сгорания	1/80...1/150
Металлорежущие станки	1/20...1/50
Сельхозмашины	1/10...1/50
Прессы, ножницы	1/5...1/20

Неравномерность хода машины можно уменьшить с помощью маховика. *Маховиком* называется звено в форме диска или обода со спицами, обладающее большим моментом инерции.

Рассмотрим периоды движения, когда скорость машины изменяется от ω_{\max} до ω_{\min} . Запишем уравнение (3.15) в виде

$$A_{\text{изб}} = E_{\max} - E_{\min},$$

где $A_{\text{изб}} = A_P - A_Q - A_F$.

При наличии маховика около 90 % всей кинетической энергии машины сосредоточено в нем. Тогда

$$\begin{aligned} A_{\text{изб}} &= I_M \omega_{\max}^2 / 2 - I_M \omega_{\min}^2 / 2 = \\ &= I_M (\omega_{\max} + \omega_{\min})(\omega_{\max} - \omega_{\min}) / 2 = I_M \omega_{\text{ср}}^2 \delta, \end{aligned}$$

где I_M — момент инерции маховика.

Отсюда

$$\delta = A_{\text{изб}} / \omega_{\text{ср}}^2 I_M. \quad (3.18)$$

Из анализа формулы (3.18) следует, что с увеличением момента инерции маховика коэффициент неравномерности хода машины уменьшается. Задавая допустимую неравномерность хода, найдем требуемый момент инерции маховика. Предварительно нужно определить избыточную работу за период, в течение которого угловая скорость кривошипа изменяется от максимума до минимума.

Момент инерции маховика связан с его массой и размерами зависимостью $I_M = mR_{\text{ср}}^2$, где $R_{\text{ср}}$ — средний радиус обода маховика. Обычно радиус $R_{\text{ср}}$ задают исходя из допустимой по условию прочности обода скорости внешних точек обода маховика $v_{\max} \leq 70 \dots 120$ м/с для стальных маховиков и $v_{\max} \leq 45 \dots 90$ м/с для чугунных. Для увеличения прочности маховики в последнее время стали делать намотанными из проволоки или стальной ленты.

Размеры маховика зависят от места установки, поэтому устанавливать его стремятся на быстроходном валу машины. В некоторых случаях маховики используются как аккумуляторы энергии. Такое применение они находят, например, в маховичных двигателях, гирозовах, прессах и т.д.

Регулирование хода машины при случайных возмущениях рассматривается в прил. 4. В прил. 5 рассмотрена динамика механизма с учетом упругости звеньев. Определение упругих характеристик звеньев рассматривается в прил. 6. Задача виброзащиты машин рассматривается в прил. 7.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие задачи решает динамика машин?
2. Что такое сила инерции?
3. Как формулируется принцип Даламбера для механизмов? В чем состоит причина его использования при решении динамических задач для механизмов?
4. Как учитываются силы инерции при вращательном движении? Что такое момент инерции тела?
5. В чем состоит сущность метода планов сил?
6. На чем базируется метод рычага Жуковского? Что на самом деле представляет собой этот рычаг?
7. Что такое ротор и почему его следует уравновешивать?
8. Как практически осуществляется балансировка роторов?
9. Какие законы трения принимаются во внимание при исследовании механизмов?
10. Что такое самоторможение и как оно проявляется в механизмах?
11. Что такое звено приведения? Для чего вводится это понятие?
12. Определите усилие, которое нужно приложить к шатуну со стороны кривошипа в кривошипно-ползунном механизме для преодоления полезной нагрузки Q , построив для этого план сил. Размеры механизма и полезную нагрузку выберите произвольно.
13. Рассчитайте массу груза, который нужно закрепить на ободе автомобильного колеса диаметром 0,5 м для его уравновешивания, если дебаланс колеса $1200 \text{ г} \cdot \text{см}$.
14. Рассчитайте кинетическую энергию маховика, вращающегося с угловой скоростью 100 рад/с , если его средний диаметр 0,5 м, а масса, распределенная на этом диаметре, 10 кг.



СИНТЕЗ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ



Задачи синтеза механизмов

Наибольший интерес для конструктора представляет задача синтеза механизмов. Под синтезом понимается проектирование механизма по заданным условиям. Синтез представляет собой задачу, обратную анализу, и, как все обратные задачи, он сложен. В синтезе нет таких простых общих методов, как изученные методы анализа. Многие задачи синтеза еще требуют решения.

Различают три стадии синтеза рычажных механизмов. Первая стадия — *синтез структурной схемы*. Эта задача относительно проста и сводится к выбору механизма, удовлетворяющего общим требованиям к такого рода механизмам. На этой стадии изучаются аналоги данного механизма, используется справочная литература (например, [1], [3], [6]).

Вторая стадия — *метрический синтез*. На этой стадии определяются размеры звеньев механизма, при соблюдении которых удовлетворяются поставленные требования. Метрический синтез опирается на приемы кинематического анализа, так что зачастую синтез сводится к многократному повторению анализа.

Третья стадия — *динамический синтез*. Это наиболее общая задача синтеза, в которой учитываются не только кинематические, но и динамические требования к механизму.

По причине сложности задач синтеза ограничимся изложением частных случаев, имеющих простое, в основном геометрическое решение. Задачи такого рода в инженерной практике встречаются довольно часто. Подавляющее большинство применяемых рычажных механизмов представляют собой разновидности четырехзвенных механизмов, поэтому остановимся в основном на них.

Общие методы синтеза рычажных механизмов изложены в прил. 8.

Структурный синтез рычажных механизмов

Изучая модель шарнирного четырехзвенника, можно обнаружить, что в зависимости от того, какое звено принято за неподвижное, а какое — за входное, изменяются основные свойства механизма: механизм может быть кривошипно-коромысловым, двухкривошипным, двухкоромысловым. Наиболее широкое применение находят кривошипно-коромысловые механизмы.

Выясним условия существования кривошипа. Для этого следует рассмотреть механизм в момент, когда ведомое звено занимает *крайнее* положение. Признак крайнего положения в кривошипно-коромысловом механизме — кривошип и шатун располагаются на одной линии (рис. 4.1, *а*). В двухкоро-

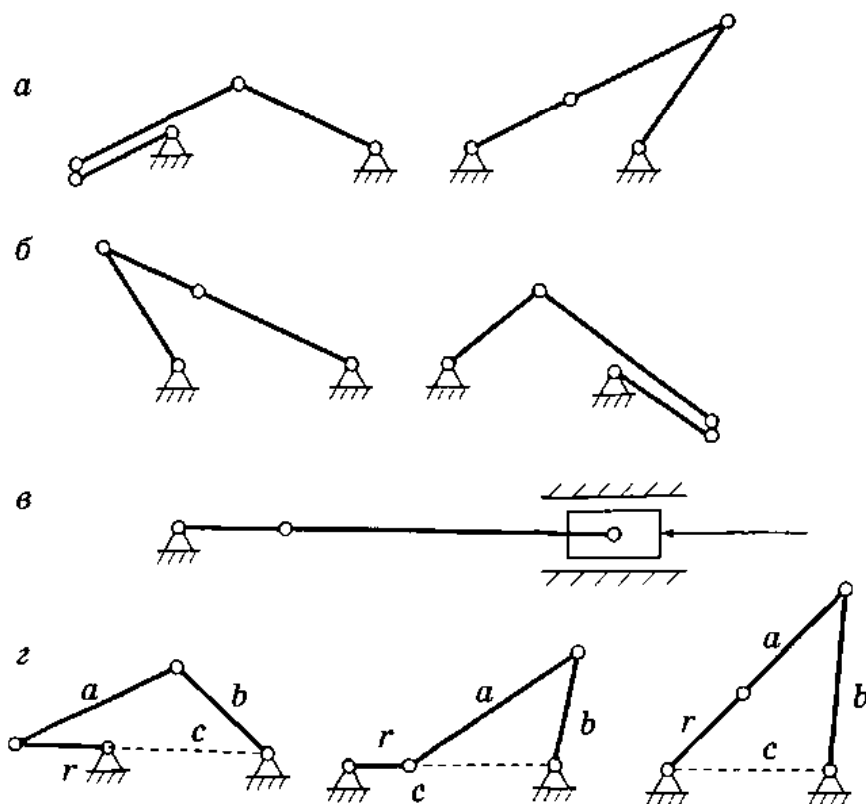


Рис. 4.1. Особые положения шарнирного четырехзвенника: *а* — крайние положения кривошипно-коромыслового механизма; *б* — крайние положения двухкоромыслового механизма; *в* — «мертвое» положение; *г* — условия существования кривошипа

мысловом механизме в крайних положениях на одной линии располагаются шатун и коромысло (рис. 4.1, б).

«Мертвым» называется положение, при котором возникает неопределенность движения ведомого звена (рис. 4.1, в). Для выхода из «мертвого» положения необходимо подтолкнуть ведомое звено, например, силами инерции маховика.

Существование кривошипа — это наличие у него возможности повернуться вокруг центра вращения на 360° . Наиболее критическими в этом отношении являются положения, в которых кривошип и стойка лежат на одной линии (две первые схемы на рис. 4.1, г). Исходя из свойств длин сторон треугольника можно записать неравенства:

$$r + c < a + b; \quad b < c - r + a; \quad r + b < c + a; \quad r + a < b + c.$$

Складывая первое неравенство со вторым, второе — с третьим и первое — с третьим, получим

$$r < a; \quad r < c; \quad r < b.$$

Отсюда следует, что для существования кривошипа необходимо соблюдать следующие условия:

- кривошип есть наименьшее звено;
- сумма длин наименьшего и наибольшего звеньев меньше суммы длин двух других звеньев (эти условия известны как *теорема Грасгофа*).

Если в кривошипно-коромысловом механизме сделать стойкой наименьшее звено, то получится двухкривошипный механизм, а если звено, противоположное наименьшему, то двухкоромысловый (рис. 4.2, а).

Если в шарнирном четырехзвеннике длины звеньев попарно равны ($r = b, a = c$), то получится шарнирный параллелограмм (рис. 4.2, б). Это двухкривошипный механизм, у которого шатун движется поступательно. Он находит применение, например, в качестве спарника колес тепловоза, входит в состав пантографов. В другой сборке получается шарнирный антипараллелограмм.

Если $r = c$ и $a = b = 2r$, получается двухкривошипный механизм Галловея, у которого за один оборот кривошипа b криво-

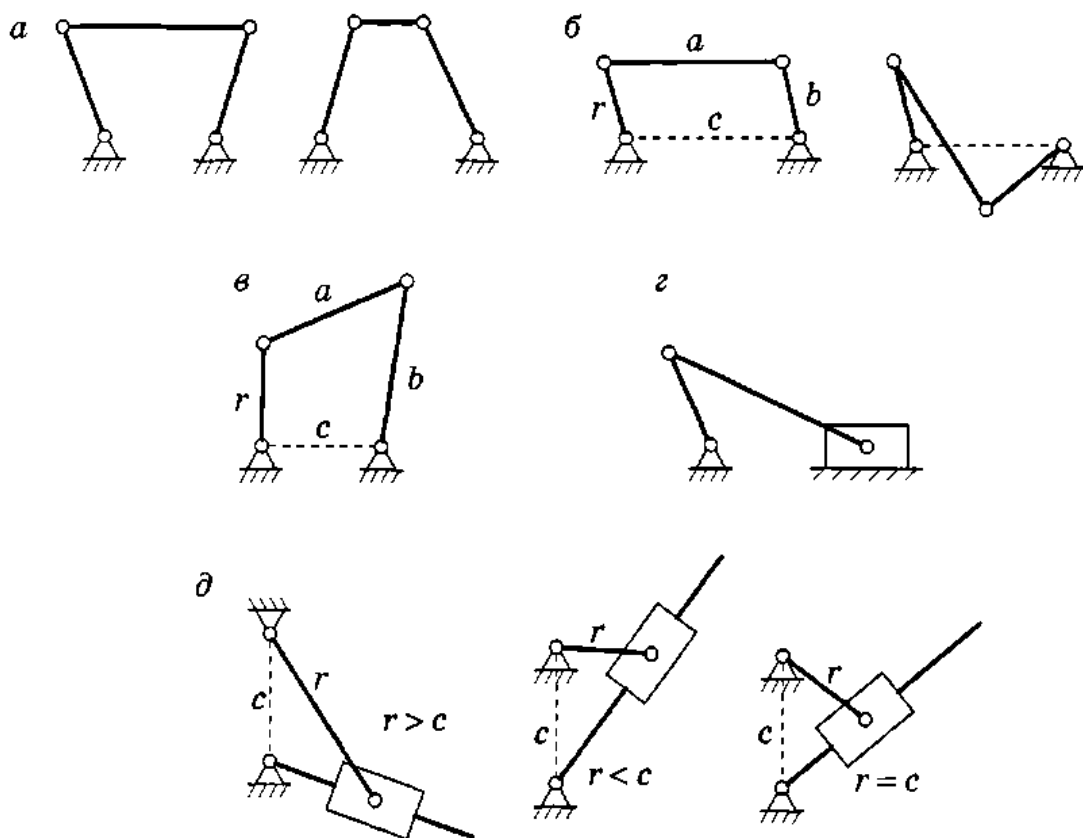


Рис. 4.2. Варианты четырехзвенных механизмов:
a — двухкривошипный и двухкоромысловый; *б* — шарнирный параллелограмм и антипараллелограмм; *в* — механизм Галлоуэя; *г* — кривошипно-ползунный механизм, *д* — кулисные механизмы

шип r делает два оборота (рис. 4.2, *в*). Если коромысло кривошипно-коромыслового механизма сделать бесконечно большим, траектория точки B будет представлять собой прямую линию. Механизм превратится в кривошипно-ползунный (рис. 4.2, *г*).

Принимая за стойку различные звенья кривошипно-ползунного механизма, получим другие механизмы. Если длина кривошипа больше длины стойки, получим механизм с вращающейся кулисой, если длина кривошипа меньше длины стойки — механизм с качающейся кулисой (рис. 4.2, *д*). Если их длины равны, за каждые два оборота кривошипа кулиса совершает один оборот. Кулисные механизмы с качающейся кулисой применяются для получения медленного рабочего хода и быстрого холостого хода.

Синтез четырехзвенных механизмов по заданным положениям звеньев

Пусть требуется спроектировать кривошипно-коромысловый механизм, у которого коромысло занимает два заданных крайних положения, или, иными словами, задан размах колебания коромысла ψ . Выберем центр вращения кривошипа — точку O . Зададим произвольные значения длины кривошипа r и длины шатуна a (рис. 4.3, *a*). Тогда в левом крайнем положении

$$a - r = OB_1,$$

в правом крайнем положении

$$a + r = OB_2.$$

Отрезки OB_1 и OB_2 можно измерить на чертеже. Получим два линейных уравнения относительно r и a , решения которых находятся элементарно:

$$\begin{aligned} r &= (OB_2 - OB_1)/2; \\ a &= (OB_2 + OB_1)/2. \end{aligned} \quad (4.1)$$

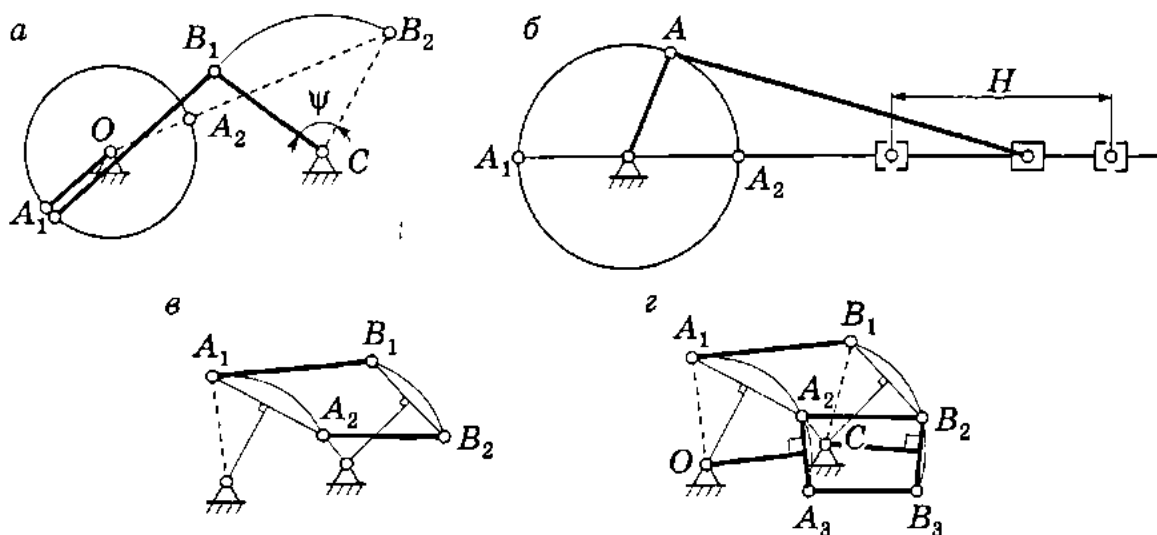


Рис. 4.3. Синтез четырехзвенных механизмов:
a — по заданным положениям коромысла; *б* — по заданным положениям ползуна; *в, г* — по заданным положениям шатуна

Поскольку точка O выбрана произвольно, задача имеет бесконечное множество решений.

Аналогичным образом можно спроектировать кривошипно-ползунный механизм по заданным положениям ползуна (рис. 4.3, б). Для него из формул (4.1) следует:

$$r = H/2,$$

где H — ход ползуна.

Пусть требуется спроектировать механизм, у которого шатун занимает два произвольных заданных положения (рис. 4.3, в). Соединим точки A_1 и A_2 , B_1 и B_2 отрезками прямых, в их серединах восстановим перпендикуляры. На этих перпендикулярах выберем точки O и C . Приняв их за центры вращения кривошипа и коромысла, построим механизм, у которого точки A и B , двигаясь по дугам A_1A_2 и B_1B_2 , попадут в точки A_2 и B_2 . Задача имеет бесконечное множество решений, так как выбор центров вращения произволен. Так можно спроектировать различные опрокидыватели, перегружатели и т.д.

В отличие от рассмотренной задачи, проектирование механизма по трем заданным положениям шатуна имеет единственное решение. Центры вращения кривошипа и коромысла находятся в точках пересечения соответствующих перпендикуляров, проведенных к серединам отрезков A_1A_2 , A_2A_3 , B_1B_2 , B_2B_3 (рис. 4.3, г).

Синтез механизмов по коэффициенту производительности

Коэффициентом производительности циклового механизма называется отношение средней скорости холостого хода к средней скорости рабочего хода:

$$k = v_x/v_p.$$

Название объясняется тем, что соотношение этих скоростей влияет на производительность машины, в которой используется такой механизм.

Выразим k через геометрические параметры механизма:

$$k = v_x/v_p = \varphi_p/\varphi_x, \quad (4.2)$$

где φ_p , φ_x — углы поворота кривошипа, соответствующие рабочему и холостому ходу ведомого звена.

Здесь использованы соотношения

$$v_x = S/t_x; \quad v_p = S/t_p; \quad t_p = \varphi_p/\omega; \quad t_x = \varphi_x\omega,$$

где ω — скорость вращения кривошипа.

Коэффициент производительности кулисных механизмов обычно находится в пределах 1,5...2,0.

Построим кулисный механизм в двух крайних положениях (рис. 4.4, *a*), когда кривошип перпендикулярен кулисе. Полный угол поворота кривошипа, соответствующий циклу работы механизма, состоит из угла рабочего хода φ_p и угла холостого хода φ_x . Так как требуется $k > 1$, φ_p принимается большим из двух углов между положениями кривошипа в крайних положениях механизма. Из построений на рис. 4.4, *a* нетрудно увидеть, что

$$\varphi_p = 180^\circ + \psi;$$

$$\varphi_x = 180^\circ - \psi,$$

где ψ — угол между OA_2 и OA_1 — угол размаха (качания) кулисы.

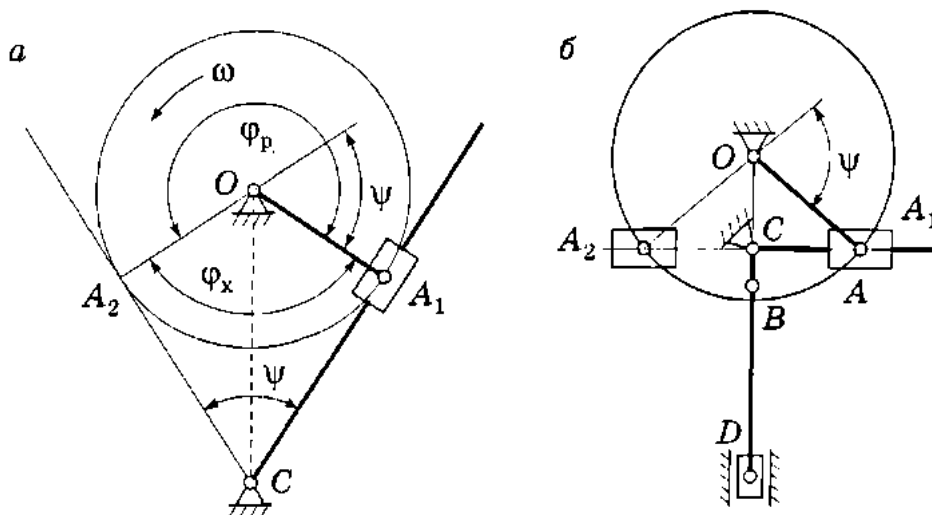


Рис. 4.4. К синтезу рычажных механизмов с качающейся и вращающейся кулисой

Подставив значения φ_p и φ_x в (4.2), получим

$$k = (180^\circ + \psi)/(180^\circ - \psi),$$

откуда следует:

$$\psi = 180^\circ(k - 1)/(k + 1). \quad (4.3)$$

Радиус кривошипа найдем, рассмотрев треугольник OA_1C :

$$r = c \sin(\psi/2),$$

где c — длина стойки OC .

В механизме, включающем механизм с вращающейся кулисой (рис. 4.4, б), крайние положения определяются присоединенной группой, представляющей собой центральный кривошипно-ползунный механизм. Изобразив его в крайних положениях, найдем соответствующие положения кривошипа OA_1 и OA_2 и углы φ_p и φ_x . Из треугольника OAC следует:

$$r = c/\sin(\psi/2),$$

где c — длина стойки OC .

Углы φ_p и φ_x определяются между двумя кратчайшими положениями кривошипа (см. рис. 4.4, а).

Учет угла давления при синтезе механизмов

Углом давления θ называется угол между направлением силы и направлением перемещения, вызванного этой силой. *Углом передачи* μ называется угол, дополняющий угол давления до 90° .

На рис. 4.5, а показаны угол давления и угол передачи в точке B шарнирного четырехзвенника. Разложим силу на нормальную и касательную составляющие. Чем больше угол давления, тем меньше составляющая R^n и больше составляющая R^t . Полезно используется только составляющая R^t ,

а составляющая R^n создает трение в кинематических парах. Следовательно, чем меньше угол давления, тем выше КПД. В наилучшем случае угол давления равен нулю. Однако в соответствии с характером работы механизма этот угол не может оставаться постоянным. В шарнирных механизмах допускается угол давления до 45° , в механизмах с поступательными парами — до 30° . В ответственных механизмах, таких как кривошипно-ползунный механизм двигателя внутреннего сгорания, угол давления принимается еще меньше — до 15° . На рис. 4.5, б представлен пример неудачно спроектированного механизма обжима борта в станке для сборки автомобильных шин. Здесь угол давления принят слишком большим. В результате для преодоления полезной нагрузки необходимо прилагать очень большое усилие.

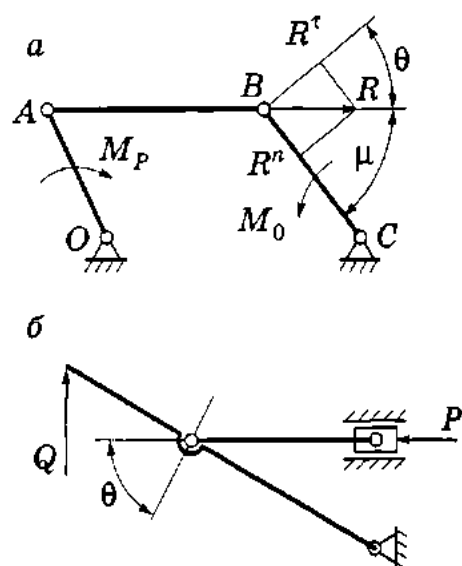


Рис. 4.5. К понятию угла давления в рычажном механизме

Примеры синтеза рычажных механизмов

4.6.1. Направляющие механизмы. Механизмы с выстоями

Направляющие рычажные механизмы предназначены для осуществления движения исполнительной точки по заданной траектории. Известно большое количество рычажных механизмов, служащих для построения графиков простейших функций. Сведения о них можно найти в различных справочниках, например [3]. С помощью таких механизмов можно построить очень сложные кривые, например, аэродинамический профиль лопасти турбины.

В том случае, если нельзя найти готовой схемы, можно воспользоваться следующим методом синтеза механизма, при-

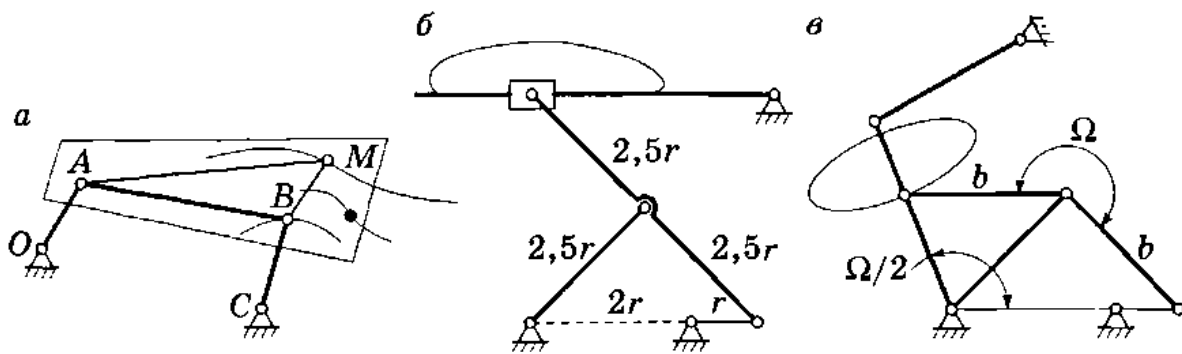


Рис. 4.6. Направляющие механизмы:

a — синтез механизма по заданной кривой; *б* — лямбдообразный механизм Чебышева; *в* — круговой направляющий механизм Чебышева

ближенно воспроизводящего заданную кривую (рис. 4.6, *a*). Выберем произвольную точку *O*, кривошип *OA* и шатун *AB*. Свяжем с шатуном планшет с нанесенными на нем чертящими точками. Заставляя точку *M* планшета двигаться по заданной траектории, построим траектории остальных чертящих точек. Выберем среди них наиболее близкую к окружности. Найдем ее центр и поместим в него шарнир *C*. Соединив чертящую точку *B* с точками *A* и *C*, получим шарнирный четырехзвенник, у которого точка *M* шатуна будет приближенно воспроизводить заданную кривую.

Среди множества механизмов, созданных П.Л. Чебышевым, наиболее широко известны прямолинейно направляющий («лямбдообразный») механизм (рис. 4.6, *б*) (траектория конца шатуна на определенном участке представляет собой почти прямую линию) и круговой направляющий механизмы (рис. 4.6, *в*) (траектория конца шатуна на определенном участке представляет собой дугу окружности).

Механизмом с выстоем называется такой механизм, в котором при непрерывном движении ведущего звена ведомое звено часть времени неподвижно. Эти механизмы основываются на упомянутых механизмах Чебышева. Механизмы с выстоями применяются в различных машинах-автоматах.

Мгновенный выстой называется *остановкой*. Механизмы с остановками применяются с целью улучшения динамики процесса.

4.6.2. Шаговые механизмы. Мальтийские механизмы

Шаговый механизм — это механизм, в котором выходное звено совершает движение в одном направлении с периодическими остановками при однонаправленном движении входного звена. К таким механизмам относятся широко известный **храповый механизм** (рис. 4.7, а), который применяется в качестве стопорного устройства в грузоподъемных машинах, а также в передачах периодического вращательного движения, и **анкерный механизм** (рис. 4.7, б), используемый в механизмах механических маятниковых часов. В шаговых механизмах вместо храпового устройства чаще всего применяется **механизм свободного хода (МСХ)** (рис. 4.7, в), который работает на принципе заклинивания и расклинивания тела качения в клиновом зазоре.

Мальтийский механизм широко применяется в машинах-автоматах для получения прерывистого движения при непрерывном движении ведущего звена. Мальтийские механизмы существуют в различном исполнении и могут быть выполнены с наружным и внутренним зацеплением, могут передавать движение между валами с параллельными и пересекающимися осями, между вращающимися и поступательно движущимися звеньями.

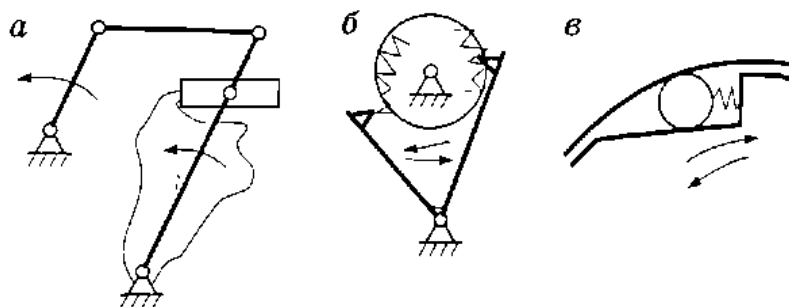


Рис. 4.7. Шаговые механизмы:

а — храповый; б — анкерный; в — шариковый МСХ

В основе мальтийского механизма лежит кулисный механизм с качающейся кулисой (рис. 4.8). Отличие его от обычного кулисного механизма, рассмотренного ранее, состоит в том, что здесь паз кулисы выполнен открытым, поэтому кулисная

пара может размыкаться, после чего ведомое звено останавливается. Таким образом, используется только период движения, соответствующий углу поворота кривошипа φ_d . Это показано на графике скорости на рис. 4.8, *a*. Ведомое звено снабжено несколькими пазами, расположенными так, что кривошип последовательно зацепляется за каждый из них. За один цикл движения кривошип поворачивается на угол φ_d , а крест — на угол $\psi = 2\pi/z$, где z — число пазов. Отношение времени движения креста t_d к времени цикла $T_{ц}$ называется коэффициентом движения:

$$k_d = t_d/T_{ц}.$$

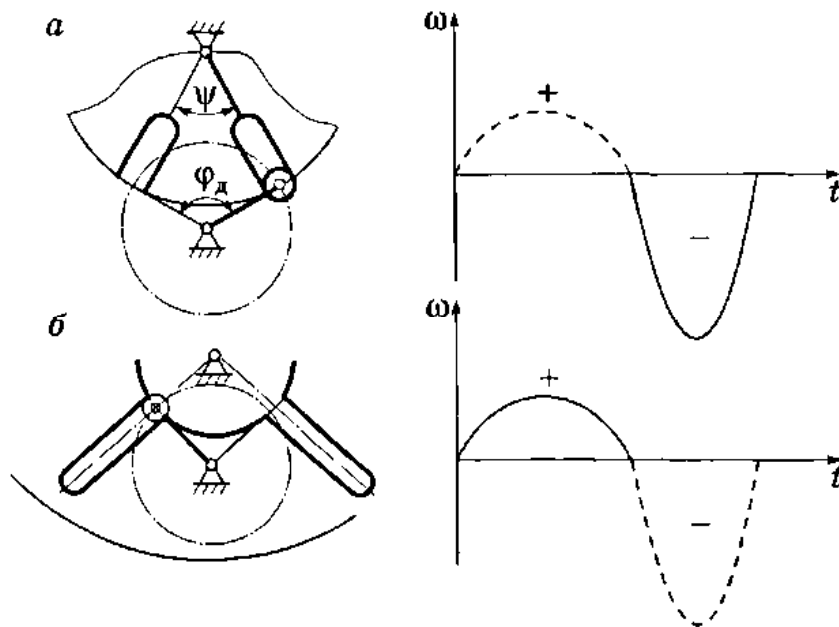


Рис. 4.8. Мальтийский механизм:

a — с внешним зацеплением; *b* — с внутренним зацеплением

Для равномерного движения кривошипа

$$k_d = \varphi_d/2\pi.$$

Из построения на рис. 4.8, *a* следует:

$$\varphi_d = \pi - \psi,$$

Тогда

$$\varphi_d = \pi(z - 2)/2k_d = (z - 2)/2z.$$

Обычно используются кресты с числом пазов от 3 до 24, тогда $k_d = 0,16 \dots 0,5$. Для того чтобы крест во время свободного движения кривошипа был неподвижен, его блокируют посредством запирающего валика. В механизме с внутренним зацеплением (рис. 4.8, б) используется положительная часть графика скорости. Благодаря тому что угол движения здесь больше, коэффициент движения также больше — в пределах $0,54 \dots 0,83$.

4.6.3. Механизмы пантографов

Механизмы пантографов служат для подобного преобразования кривых. В их основе лежат шарнирные параллелограммы. Так, например, в качестве широко известного чертежного прибора (рис. 4.9, а) используется плоский двухпараллелограммный пантограф. В таком приборе ориентация линеек сохраняется постоянной при любом их положении.

Пантограф, представленный на рис. 4.9, б, предназначен для подобного преобразования фигур с отношением подобия $k = OA/OB$ и центром подобия в точке O . Пантограф, изображенный на рис. 4.9, в, производит преобразование с поворотом фигуры на 180° относительно центра подобия — точки O .

Пантографы применяются в прямолинейно-направляющих механизмах манипуляторов, в механизмах токосъемников поездов, в механизмах для компенсации несоосности валов, в разнообразных копирующих станках и во многих других устройствах.

В передаче движения к звеньям от приводов в некоторых роботах используется шарнирный параллелограмм. Так, например, часто движение звеньев кисти манипулятора осуществляется с помощью двигателей, расположенных на поворотной колонне манипулятора, через систему параллелограммных механизмов (рис. 4.10). При изменении конфигурации манипулятора противоположные звенья параллелограммов остаются параллельными друг другу, что обеспечивает независимость вращательных движений.

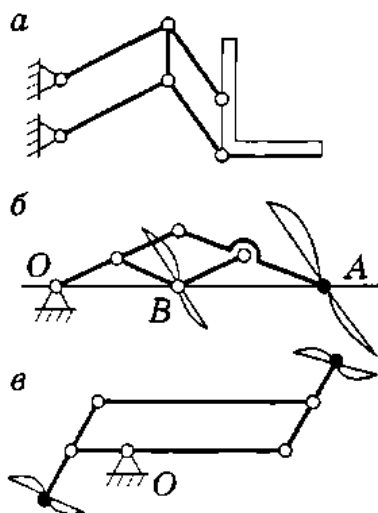


Рис. 4.9. Схемы пантографов

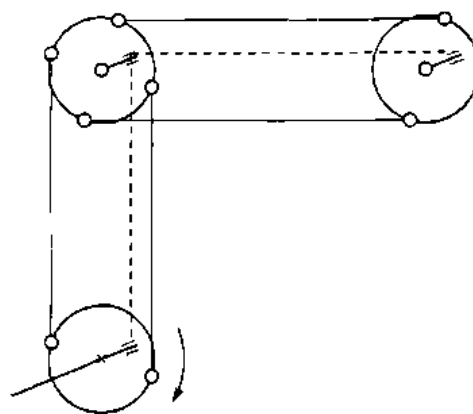


Рис. 4.10. Двухпараллелограммный механизм передачи движения между параллельными валами

На рис. 4.11, *a* показана схема работы параллелограммного механизма. При изменении координаты φ_1 абсолютная координата φ_2 остается неизменной. В качестве устройства передачи движения применяются также тросовые и цепные передачи, работающие по принципу параллелограмма (рис. 4.11, *б*).

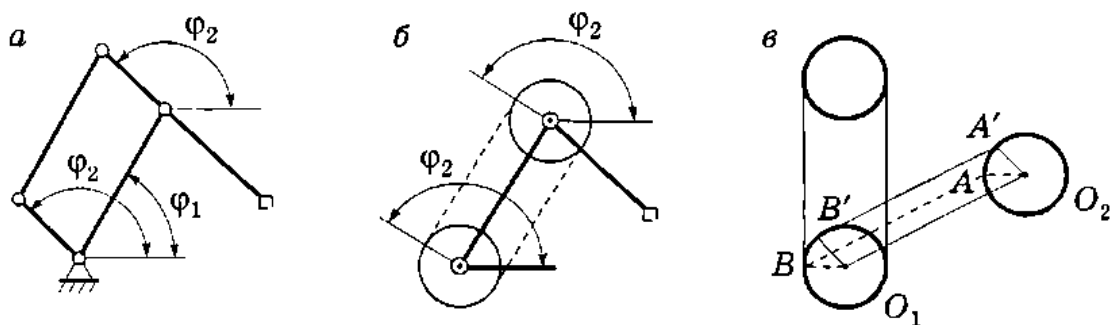


Рис. 4.11. Параллелограммные механизмы:
a — рычажный; *б* — цепной; *в* — схема, поясняющая их принцип действия

При одинаковых размерах шкивов параллелограммного механизма из условия наложения гибкой связи вытекает равенство дуг $\cup BB' = \cup AA'$. Отсюда следует параллельность звеньев BO_1 и AO_2 при любых положениях, т.е. фигура BO_1O_2A является параллелограммом (рис. 4.11, *в*).

Синтез сферических рычажных механизмов

В технике широко применяются четырехзвенные сферические рычажные механизмы. В основе таких механизмов лежит открытая кинематическая цепь с вращательными парами, оси которых пересекаются в точке O , а длины звеньев определены углами a, b, c (рис. 4.12, *a*). Замкнув последнее звено вращательной парой D со стойкой, получим сферический четырехзвенник $ABCD$ (рис. 4.12, *б*). Подобно плоскому четырехзвеннику, в зависимости от соотношения размеров звеньев он может иметь разные модификации: кривошипно-коромысловый, двухкривошипный, двухкоромысловый.

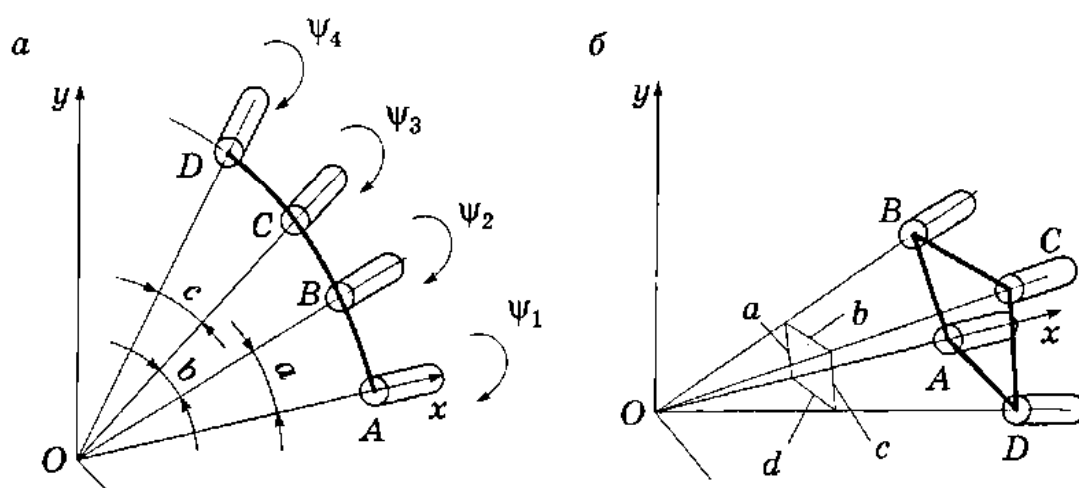


Рис. 4.12. Образование четырехзвенного сферического механизма:
a — открытая кинематическая цепь; *б* — замкнутая кинематическая цепь

На рис. 4.13 представлен частный случай сферического четырехзвенника с размерами звеньев, определенными углами $a = b = c = \pi/2$, $d = \pi + \alpha$. Механизм изображен в положении, когда плоскость большого круга звена d совпадает с плоскостью чертежа. В таком случае угол α — это угол между осями шарниров A и D .

Представленный на рис. 4.13 механизм называется шарниром Гука. Другие его названия — универсальный шарнир

или *кардан* (по имени итальянского изобретателя Дж. Кардана). Механизм широко применяется в автомобилях и в других механизмах для передачи вращения между несоосными валами.

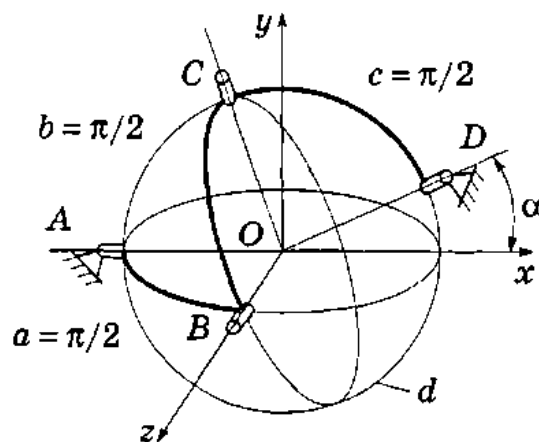


Рис. 4.13. Четырехзвенный сферический механизм — шарнир Гука

Основное уравнение кинематики шарнира Гука

$$\operatorname{tg} \psi_3 = \operatorname{tg} \psi_1 \cos \alpha.$$

Угловые скорости и угловые ускорения валов связаны уравнениями

$$\omega_3 = \left(\cos \alpha / (1 - \sin^2 \psi_1 \sin^2 \alpha) \right) \omega_1;$$

$$\varepsilon_3 = (2 \sin \psi_1 \cos \psi_1 \sin^2 \alpha / (1 - \sin^2 \psi_1 \sin^2 \alpha)) \omega_3 \omega_1.$$

(Вывод этих, а также приведенных далее для ключа Гука уравнений приводится в книге [5].)

Иногда эти уравнения записываются немного иначе, но это объясняется другим выбором осей, относительно которых указываются углы.

Из анализа этих уравнений вытекает, что при равномерном вращении входного вала вращение выходного вала будет неравномерным и эта неравномерность тем больше, чем больше угол α . Для передачи движения между несоосными параллельными валами к колесам автомобиля используется так называемый карданный вал с двумя шарнирами Гука на концах. В таком случае неравномерность вращения, вызванная первым шарниром Гука, полностью компенсируется вторым шарниром Гука и выходное вращение получается равномерным.

В случае, когда угол $\alpha = 90^\circ$, а угловой размер звена $a = \pi/2$, при равномерном вращении входного вала выходной вал осуществляет колебательное движение. Это, пожалуй, простейший и надежнейший механизм такого назначения. Механизм получил название *прямой ключ Гука*. Его другое название — *механизм косо́й шайбы*. Наиболее известное применение этого механизма — в сельхозмашинах, для привода ножей косилки. Основное уравнение для этого механизма

$$\operatorname{tg} \psi_3 = \operatorname{tg} (\beta - \pi/2) \cos \psi_1,$$

где β — угол между осями шарниров A и B (в шарнире Гука он равен 90°).

Шарнир Гука относится к *асинхронным карданам*. Существуют также *синхронные карданы*, т.е. механизмы, обеспечивающие равномерное вращение выходного вала при любом угле между валами. Среди большого количества таких механизмов наиболее интересен кардан Рзеппа. Он применяется в большинстве современных переднеприводных легковых автомобилей для передачи движения от двигателя к ведущим колесам. Его техническое название — *шарнир равных угловых скоростей* (ШРУС) (рис. 4.14). Рассмотрим устройство этого остроумного механизма и обоснуем его свойства.

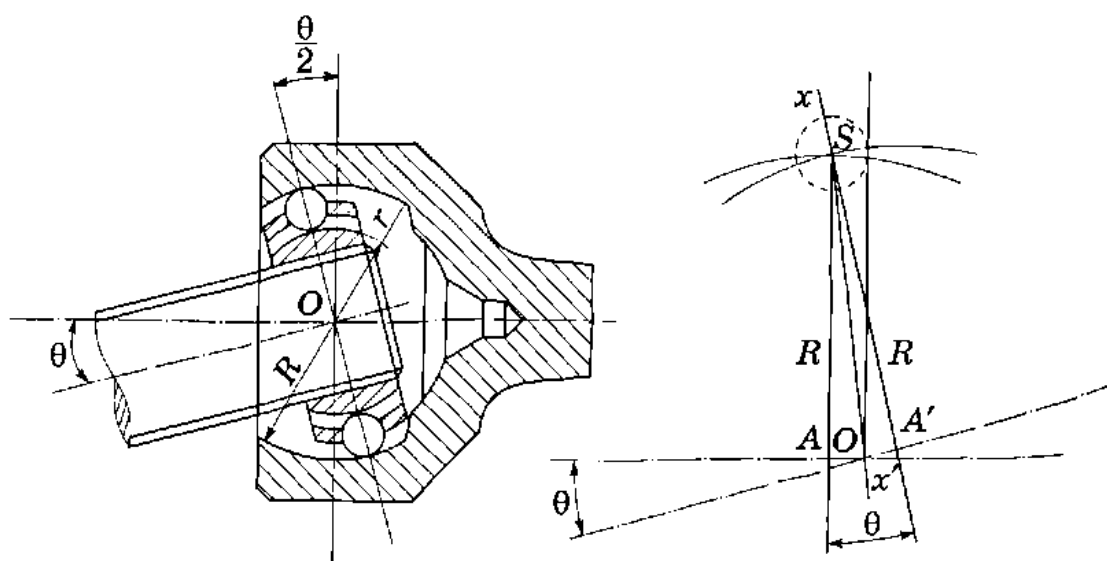


Рис. 4.14. Синхронный кардан Рзеппа

В кардане Рзеппа связь входного и выходного валов осуществляется посредством шариков. Если бы шарики были зафиксированы относительно одного из валов, то это был бы кардан типа шарнира Гука. В кардане Рзеппа постоянная угловая скорость обеспечивается за счет того, что шарики принудительно устанавливаются в биссектральную плоскость угла между входным и выходным валами. Это происходит благодаря смещению канавок внутренней втулки и вилки относительно оси и криволинейности их в меридиональной плоскости. Центры этих канавок расположены симметрично относительно центра шарнира. Шарики удерживаются в плоскости постоянной частоты вращения специальной обоймой. Контактующие поверхности обоймы и внутренней и внешней втулок выполнены сферическими с общим центром в точке O . Принудительное перемещение шариков в биссектральную плоскость осуществляется за счет специального выполнения канавок на втулках.

Принцип обеспечения передачи вращения со строго постоянной частотой поясняется рис. 4.14. Здесь требуется доказать, что линия $x-x'$ располагается в биссектральной плоскости угла AOA' , образованного осями входного и выходного валов.

Центр шарика располагается в точке S . Угол θ — это угол между осями валов. Точки A и A' — центры окружностей канавок внешней и внутренней втулок, установленных на выходном и входном валах соответственно. Эти центры расположены на одинаковых расстояниях от общего центра шарнира — точки O .

Канавки на втулках определяют единственно возможное положение шарика. При любом положении осей центр шарика располагается в точке пересечения радиусов R , проведенных из центров окружностей канавок. Поскольку треугольники OAS и $OA'S$ равны, ось $x-x'$ располагается в биссектральной плоскости.

Контрольные вопросы и задания

1. В чем состоят и как решаются задачи синтеза механизмов?
2. Что такое структурный синтез, кинематический синтез, динамический синтез?
3. Какие механизмы можно получить из шарнирного четырехзвенника изменением размеров звеньев?
4. Что такое коэффициент производительности циклового механизма?
5. Какое значение для работы механизма имеет угол давления?
6. Приведите примеры шаговых механизмов.
7. Какими особенностями обладают механизмы пантографов?
8. Спроектируйте центральный кривошипно-ползунный механизм, в котором ход ползуна составляет 100 мм, а угол давления в кинематической паре «шатун — ползун» не превышает 30° .
9. Постройте график скорости выходного вала шарнира Гука, приняв угол $\alpha = 30^\circ$, а угловую скорость ведущего вала — $\psi_3 = 100$ рад/с.



СИНТЕЗ ЗУБЧАТЫХ МЕХАНИЗМОВ



Классификация зубчатых механизмов

Зубчатые механизмы — это самый распространенный и, пожалуй, самый важный вид механизмов. Трудно найти такую машину, в которой нет зубчатого механизма. Они применяются в станках, грузоподъемных машинах, автомобилях, разнообразных технологических машинах и т.д. Основные достоинства зубчатых механизмов, определившие их широкое применение, — строго постоянное передаточное отношение, большая передаваемая мощность на единицу массы, компактность, долговечность, высокий КПД. Недостаток — сложность изготовления и высокая стоимость.

Зубчатые механизмы в основном предназначены для передачи вращательного движения и преобразования его параметров. Как правило, двигатели обладают скоростью и моментом, не подходящим для использования в технологическом процессе. Преобразование параметров вращательного движения возможно посредством прижатых друг к другу гладких дисков, образующих фрикционную передачу (рис. 5.1). Ее недостатки — ограниченная мощность из-за большой нагрузки на подшипники, неизбежное проскальзывание, износ поверхностей, потери мощности. Практически передаваемая мощность в таких механизмах не превышает 10...20 кВт.

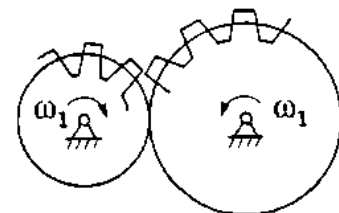


Рис. 5.1. Зубчатая передача

Чтобы устранить отмеченные недостатки, диски снабжаются чередующимися выступами и впадинами, располагающимися с определенным интервалом. Такие выступы называются *зубьями*. Контактующие между собой зубья являются высшей кинематической парой с линейным или в некоторых случаях точечным касанием. Наличие высшей кинематической

пары обуславливает высокие требования к твердости и шероховатости контактирующих поверхностей.

Зубчатым колесом называется звено с замкнутой системой зубьев, обеспечивающей непрерывность движения. Применяются также зубчатый сектор и зубчатая рейка.

Зубчатая передача — трехзвенный механизм, состоящий из двух колес и стойки. Важнейшей характеристикой зубчатой передачи является *передаточное отношение* i — отношение угловых скоростей колес. Заметим, что в ряде случаев при расчетах используется термин «*передаточное число*», под которым понимается отношение чисел зубьев колес (более подробно об этом см. в 5.14).

Две или более зубчатые передачи образуют **зубчатый механизм**.

Зубчатые колеса, зубчатые передачи и зубчатые механизмы чрезвычайно разнообразны. Поэтому целесообразно ознакомиться с их простейшей классификацией.

Зубчатые колеса бывают:

- а) цилиндрические (рис. 5.2, а) и конические (рис. 5.2, б);
- б) прямозубые, винтовые, шевронные (рис. 5.2, в);
- в) эвольвентные, циклоидальные, цевочные, трохойдальные, круговинтовые;
- г) с внешним и с внутренним зацеплением.

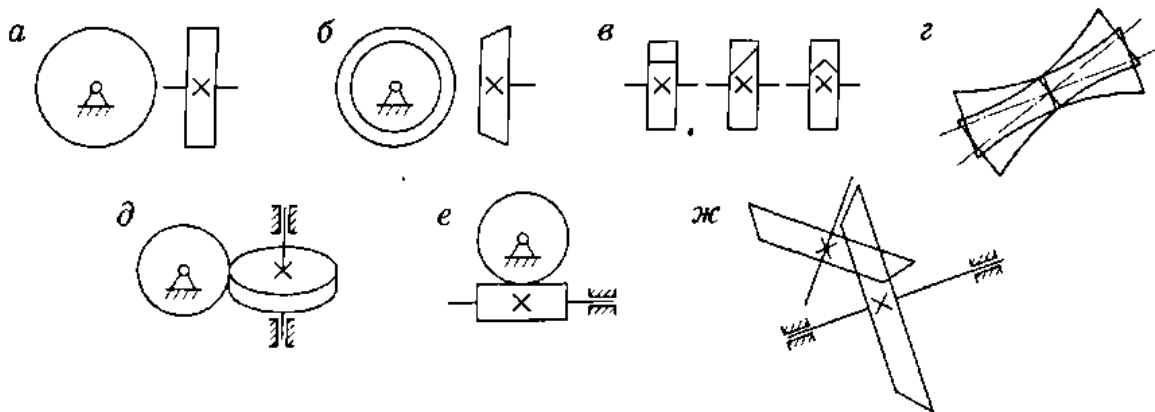


Рис. 5.2. Зубчатые колеса и зубчатые передачи:

а — цилиндрическое колесо; б — коническое колесо; в — прямозубое, винтовое, шевронное колеса; г — гиперболоиды вращения; д — винтовая передача; е — червячная передача; ж — гипоидная передача

Винтовые колеса могут быть с левым и с правым наклоном зуба. Винтовые колеса с винтовой линией постоянного шага называют косозубыми.

Зубчатые передачи бывают:

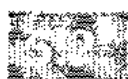
- а) с постоянным и переменным передаточным отношением (некруглые колеса);
- б) плоские и пространственные;
- в) понижающие и повышающие частоту вращения (редукторы и мультипликаторы);
- г) внешнего и внутреннего зацепления, реечные передачи;
- д) с параллельными, пересекающимися и скрещивающимися осями колес.

По последнему признаку различают цилиндрические, конические, гиперboloидные передачи.

В гиперboloидных передачах в основу образования зубчатых колес положены гиперboloиды вращения. *Гиперboloид* — линейчатая поверхность, образуемая при вращении произвольно расположенной в пространстве прямой линии относительно некоторой оси. Образующей поверхности гиперboloида является прямая линия. Два сопряженных гиперboloида перекатываются друг по другу без скольжения и касаются по прямой линии. Если снабдить их зубьями, образуется точная гиперboloидная передача (рис. 5.2, з). На практике используется приближенная гиперboloидная передача, образованная из цилиндрических и конических колес. В таком случае касание их происходит не по линии, а в точке. Частными случаями гиперboloидной передачи являются винтовая (рис. 5.2, д), червячная (рис. 5.2, е) и гипоидная (рис. 5.2, ж) передачи.

Зубчатые механизмы бывают:

- а) с неподвижными осями колес (рядовые) и с подвижными осями (планетарные);
- б) предназначенные для передачи большой мощности (силовые) и для преобразования параметров движения (кинематические);
- в) с одной степенью подвижности и зубчатые дифференциалы.



Центроидные механизмы

Зубчатые передачи относятся к разряду центроидных механизмов, в основе образования которых лежат центроиды. Из теоретической механики известно, что мгновенное плоское движение твердого тела можно привести к одному мгновенному вращению вокруг определенной оси, называемой мгновенным центром вращения (МЦВ). Мгновенный центр вращения меняет свое положение во время движения тела, траектория МЦВ называется *центроидой*. Различают подвижную и неподвижную центроиды, причем подвижная центроиды считается жестко связанной с твердым телом, а неподвижная — с системой отсчета. В теоретической механике доказывается, что любое плоское движение можно реализовать перекатыванием подвижной центроиды по неподвижной, подобрав надлежащие центроиды. Сказанное хорошо иллюстрируется моделью шарнирного антипараллелограмма $OABC$. В этом случае центроидами являются эллипсы (рис. 5.3). Снабдив их зубьями, получим эллиптическую зубчатую передачу, в которой при равномерном движении ведущего звена ведомое вращается неравномерно. Такие передачи используются, например, в текстильных машинах.

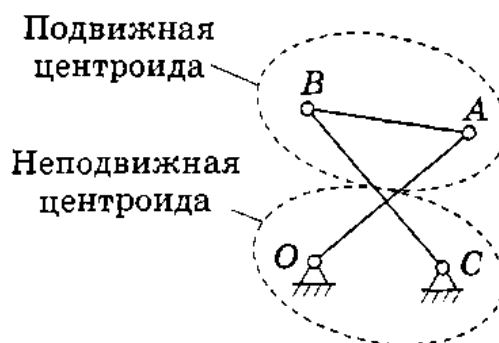


Рис. 5.3. Центроиды зубчатых колес

На практике применяются в основном механизмы, центроидами которых являются окружности. Такие окружности в теории зубчатых передач получили название начальных окружностей.



Основной закон зацепления

Простейшие зубчатые механизмы применялись еще в древнейшие времена, например, для передачи движения с водяного колеса на жернов. Профиль зубьев мог быть любым, выдержи-

вался только постоянный шаг. Увеличение быстроходности передачи потребовало соответствующего профилирования зубьев. При случайном выборе профиля зубьев мгновенное передаточное отношение переменное, что недопустимо, так как колебания скорости выходного звена вызывают инерционные нагрузки, удары в передаче. Профиль зубьев должен быть таким, чтобы угловая скорость выходного звена была строго постоянной.

Чтобы ответить на вопрос, каким должен быть профиль зубьев, познакомимся с *основным законом зацепления*: нормаль, проведенная через точку касания двух профилей, делит межосевое расстояние на части, обратно пропорциональные угловым скоростям этих профилей.

Пусть требуется доказать, что $O_1P/O_2P = \omega_2/\omega_1$ (рис. 5.4).

Через точку A проведем нормаль $N-N$ и касательную $T-T$ и разложим скорости точек A_1 и A_2 на эти направления. Заметим, что $v_1 = \omega_1 r_1$, $v_2 = \omega_2 r_2$. Кроме того, $v_1^n = v_2^n$ — из условия отсутствия вдавливания профилей или их размыкания. Тангенциальные составляющие $v_1^t \neq v_2^t$, что обуславливает скольжение профилей.

Из подобия треугольников $A v_1 v_1^n$ и $O_1 B_1 A$ следует:

$$v_1^n / v_1 = r_{b1} / r_1,$$

откуда $v_1^n = \omega_1 r_{b1}$.

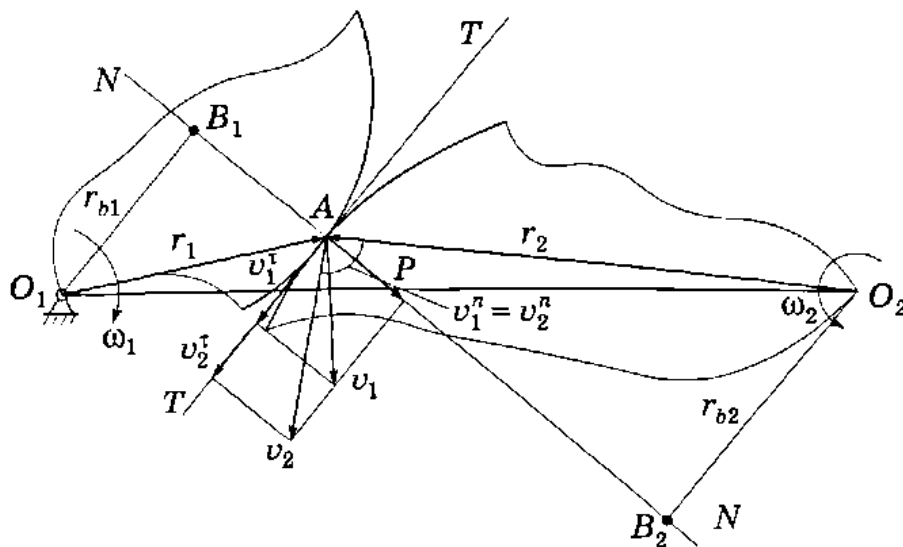


Рис. 5.4. Зацепление двух профилей

Из подобия треугольников $A v_2 v_2^n$ и $O_2 B_2 A$ следует:

$$v_2^n / v_2 = r_{b2} / r_2,$$

откуда $v_2^n = \omega_2 r_{b2}$.

Учитывая, что $v_1^n = v_2^n$, получим $\omega_1 r_{b1} = \omega_2 r_{b2}$.

Из подобия треугольников $O_1 B_1 P$ и $O_2 B_2 P$ следует $r_{b1} / r_{b2} = O_1 P / O_2 P$. С учетом записанных ранее соотношений получим $\omega_1 / \omega_2 = O_2 P / O_1 P$, что и требовалось доказать.

Для обоснования выбора профиля зубьев важнейшее значение имеет *следствие из основного закона зацепления*: для постоянства передаточного отношения необходимо, чтобы нормаль, проведенная через точку касания двух профилей, пересекала межосевую линию в постоянной точке (полюсе зацепления). Иными словами, требуется неизменность положения полюса.

В качестве профилей зубьев могут использоваться кривые, для которых выполняется указанное требование. Такие кривые называются сопряженными, к ним, в частности, относится эвольвента окружности.

Эвольвента окружности и ее свойства

5.4.1. Образование и построение эвольвенты

Геометрическое место центров кривизны какой-либо кривой называют эволютой, а саму кривую — *эвольвентой*. При профилировании зубьев в качестве эволюты используется окружность, называемая в дальнейшем *основной окружностью*, а сами зубья очерчиваются эвольвентой окружности (рис. 5.5, а). Единственным параметром, отличающим одну эвольвенту от другой, является радиус основной окружности.

Рассмотрим следующий способ образования эвольвенты. Выбираются основная окружность радиуса r_b , касающаяся ее производящая прямая и чертящая точка A на ней. Перекатывая производящую прямую по окружности без скольжения,

получаем траекторию чертящей точки, которая является эвольвентой, так как мгновенные радиусы ее кривизны лежат на основной окружности. Другим способом эвольвенту можно получить, наматывая нить с чертящей точкой на диск. Две чертящие точки дадут две эквидистантные (равноотстоящие) эвольвенты.

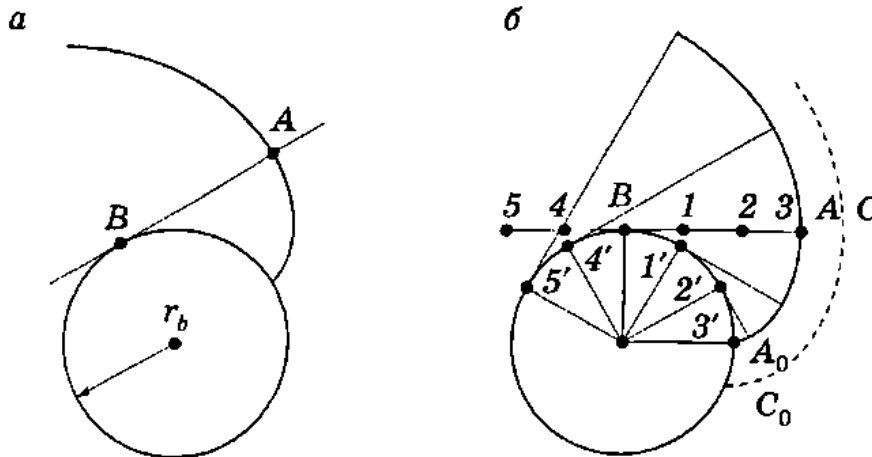


Рис. 5.5. Образование эвольвенты:
a — эвольвента окружности; *б* — построение эвольвенты

Приближенное графическое построение эвольвенты как кривой, составленной из множества дуг окружностей, представлено на рис. 5.5, б. Для этого следует разделить отрезок AB на несколько равных участков (участки 1, 2, 3), отложить длины этих участков по основной окружности и из точек деления на основной окружности провести небольшие участки дуг окружностей радиусами BA , $1A$, $2A$. По полученным дугам приближенно строится огибающая кривая, которая и будет являться эвольвентой, так как ее основные характеристики удовлетворяют признакам эвольвенты. Для построения остальной части эвольвенты нужно повторить ту же процедуру для участков $B4$, $B5$ и т.д. Чем большее число участков деления принято, тем точнее будет построена эвольвента.

Из определения эвольвенты и ее построения вытекают следующие очевидные свойства:

1. Нормаль эвольвенты касается основной окружности.
2. Радиус кривизны эвольвенты равен длине нормали.

3. Длина нормали эвольвенты равна длине соответствующей дуги основной окружности.

4. Расстояние между эквидистантными эвольвентами равно длине соответствующей дуги основной окружности.

5.4.2. Уравнение эвольвенты в полярных координатах

Наиболее удобная форма записи уравнения эвольвенты — в полярных координатах в параметрической форме. В качестве параметра принимается *угол профиля эвольвенты* α_y — угол между направлением радиус-вектора к текущей точке Y эвольвенты и направлением касательной $T-T$ (рис. 5.6). Он изменяется в пределах $0 \dots 90^\circ$, на практике же используется участок эвольвенты, где $\alpha_y = 0 \dots 30^\circ$.

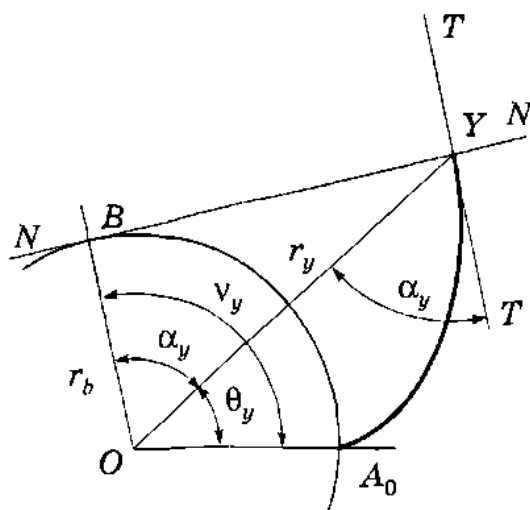


Рис. 5.6. К выводу уравнения эвольвенты

Полярные координаты r_y и θ_y укажут положение текущей точки Y . Установим зависимость r_y и θ_y от угла профиля эвольвенты α_y . Проведем из точки Y нормаль $N-N$, которая, согласно 1-му свойству эвольвенты, коснется основной окружности в точке B . Заметим, что угол BOY равен углу профиля эвольвенты в данной точке. Из треугольника OBY следует:

$$r_y = r_b / \cos \alpha_y.$$

Таким образом, получено первое уравнение.

Для получения второго уравнения введем угол ν_y , как показано на рис. 5.6, тогда $\nu_y = \alpha_y + \theta_y$, откуда $\theta_y = \nu_y - \alpha_y$.

В силу 3-го свойства эвольвенты длина дуги BA_0 равна BY . Из треугольника BYO следует $BY/r_b = \operatorname{tg} \alpha_y$. На основании приведенных зависимостей нетрудно установить, что центральный угол $\nu_y = \operatorname{tg} \alpha_y$. Функция $\theta_y = \operatorname{tg} \alpha_y - \alpha_y$ получила название эвольвентной функции, или *инволюты*. Иногда используется условное обозначение $\theta_y = \operatorname{inv} \alpha_y$.

Для облегчения использования приведенных формул составлены таблицы значений инволют для различных углов. Эти таблицы приводятся во многих математических справочниках наряду со значениями других элементарных тригонометрических функций.

5.4.3. Эвольвентное зацепление

На рис. 5.7 представлено зацепление эвольвентных профилей. Общая нормаль $N-N$, проведенная через точку касания двух профилей, согласно 1-му свойству эвольвенты, обязана коснуться основных окружностей. Поскольку таких окружностей две, положение нормали единственно и неизменно. Тем самым подтверждается выполнение следствия основного закона зацепления. Таким образом доказано, что если используются эвольвентные профили, то в процессе взаимодействия двух таких профилей движение передается со строго постоянной

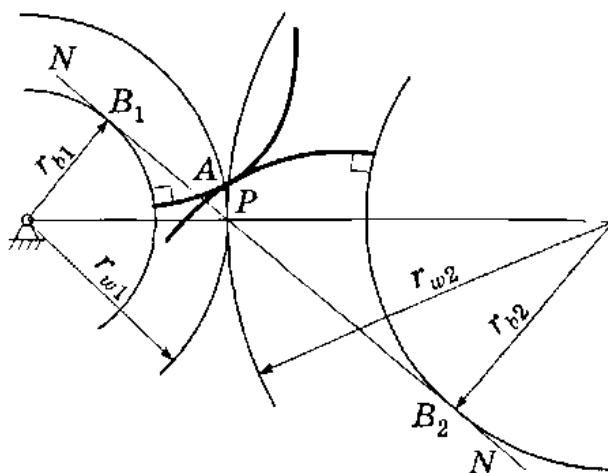


Рис. 5.7. Эвольвентное зацепление

скоростью. Этим объясняется использование в качестве боковых профилей зубьев зубчатых колес эвольвент.

В процессе зацепления точка касания профилей не может сойти с общей нормали $N-N$, так как в противном случае было бы нарушено 1-е свойство. Кроме того, установлено, что при эвольвентном зацеплении профилей точка касания движется по общей нормали с постоянной скоростью. После окончания зацепления одной пары зубьев в зацепление вступает вторая пара, что обеспечивает непрерывную передачу вращения с постоянной скоростью.

Эвольвентные кривые — не единственные профили, которые могут обеспечить постоянное передаточное отношение, однако эвольвентное зацепление получило широкое распространение благодаря ряду полезных свойств:

1. Эвольвентное зацепление нечувствительно к небольшому изменению межосевого расстояния, что удешевляет изготовление корпусных деталей.

2. Для нарезания эвольвентных зубчатых колес можно применять простой инструмент с прямолинейной режущей кромкой.

3. При изготовлении колес путем простого смещения инструмента можно добиваться новых положительных свойств.



Определение параметров зубчатых колес

5.5.1. Изготовление зубчатых колес

Существует два способа изготовления зубчатых колес: копирование и обкатка.

Способ *копирования* заключается в том, что дисковой или пальцевой фрезой на фрезерном станке вырезается впадина между зубьями (рис. 5.8, а). Поскольку в зависимости от числа зубьев размеры впадины при одном и том же модуле изменяются, нужно иметь очень много фрез. На практике же одной фрезой нарезаются колеса в некотором диапазоне чисел

зубьев, указанном на фрезе, что не очень точно. Неточность может быть исправлена последующей шлифовкой.

Способ копирования недостаточно производителен, так как одновременно в работе находится один зуб, много времени затрачивается на перестановку инструмента и заготовки. Поэтому этот способ применяется в единичном и мелкосерийном производстве, при нарезании неотчетливых, тихоходных колес.

При способе *обкатки* инструмент и заготовка совершают относительное движение обкатывания (рис. 5.8, б). Инструмент своими режущими кромками постепенно внедряется в заготовку, как бы сам себе прокладывая путь. Таким образом, возникает станочное зацепление, аналогичное обычному зацеплению, с той разницей, что одно из звеньев является инструментом. Инструмент выполняется в виде гребенки, червячной фрезы или долбяка. Обкатка требует применения специальных зубофрезерных станков. В одних конструкциях станков инструмент обкатывается вокруг неподвижной заготовки, в других — инструмент движется поступательно, а заготовка поворачивается, в третьих — заготовка и инструмент (долбяк) вращаются (рис. 5.8, б).

Способ обкатки получил наибольшее распространение. Он производителен, так как обрабатывается несколько зубьев сразу, процесс зубонарезания идет непрерывно. Профиль зуба формируется с учетом числа зубьев колеса, поэтому нарезание точное. По такому же принципу производится чистовая обработка, шлифование зубьев.

5.5.2. Исходный контур

Из описания способов изготовления зубчатых колес ясно, что размеры зуба полностью зависят от профиля инструмента.

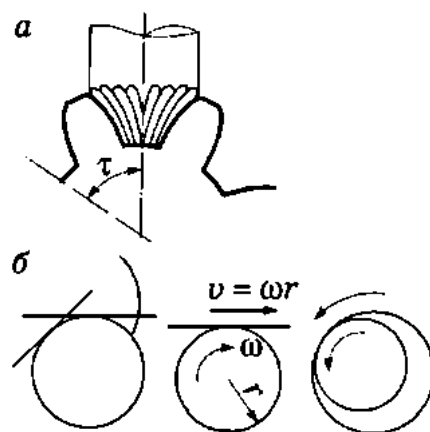


Рис. 5.8. Способы изготовления зубчатых колес:
а — копирование;
б — обкатка

По ГОСТ профиль инструмента стандартизован заданием так называемого исходного контура. На рис. 5.9, а представлен теоретический исходный контур. Он выполнен в виде рейки с трапециевидными зубьями.

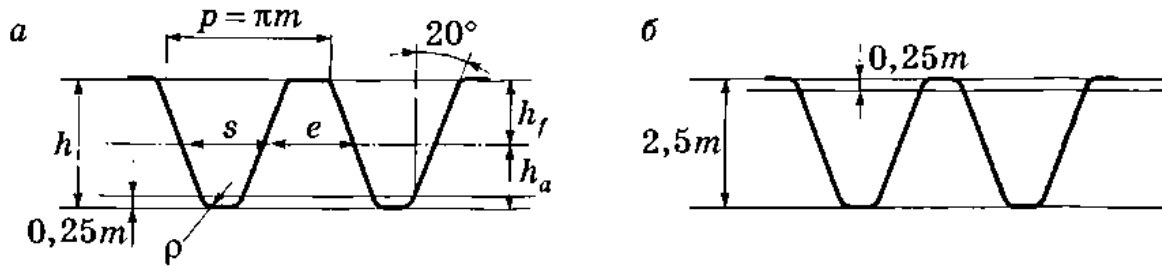


Рис. 5.9. Исходные контуры:
а — теоретический; б — производящий

Размеры рейки выражаются через один основной параметр, называемый *модулем*. Модуль t измеряется в миллиметрах и выбирается из ряда рациональных чисел от 0,05 до 100.

Шагом рейки p называется расстояние между одноименными точками двух соседних зубьев. Шаг зубьев складывается из толщины зуба s и ширины впадины e .

Единственная прямая исходного контура, на которой толщина зуба равна ширине впадины, называется *делительной прямой* рейки, остальные прямые называются *начальными прямыми* рейки. Шаг зубьев рейки $p = \pi t$, толщина зуба $s = e = \pi t / 2$.

Делительная прямая рейки делит зуб на головку и ножку. Высота головки $h_a = 1,25t$, высота ножки $h_f = t$, высота всего зуба $h = 2,25t$. Головка закруглена радиусом $\rho = 0,38t$.

Инструмент изготавливается по производящему исходному контуру, отличающемуся от теоретического исходного контура тем, что впадина сделана глубже на $0,25t$ и закруглена так же, как головка (рис. 5.9, б). Это сделано для того, чтобы впадина инструмента не касалась заготовки. Следовательно, впадина не участвует в нарезании зуба. Зуб нарезают прямолinéйные боковые кромки и скругленная вершина зуба. Рейку можно рассматривать как зубчатое колесо бесконечно большого радиуса. В этом случае эвольвента превращается в прямую линию.

5.5.3. Элементы нулевого зубчатого колеса

У нарезаемого зубчатого колеса на различных окружностях, построенных из одного центра, различный шаг зубьев. Та единственная окружность, на которой шаг зубьев равен шагу зубьев рейки, называется *делительной*. Шаг на делительной окружности измеряется по дуге длиной $l = pz = \pi d$, откуда $d = pz/\pi = mz$, где z — число зубьев, d — диаметр делительной окружности.

Исходя из этой формулы можно дать определение делительной окружности как окружности, на которой модуль зуба равен модулю рейки.

Инструмент можно устанавливать на различных расстояниях от центра заготовки. Рассмотрим частный случай, когда делительная прямая касается делительной окружности. Нарезаемое таким образом колесо называется *нулевым*. Почему оно так названо, выяснится в дальнейшем (см. 5.5.4).

Поскольку шаги на делительной окружности и на делительной прямой одинаковы, эти линии катятся друг по другу без скольжения (рис. 5.10, а). Толщина зуба делительной прямой рейки воспроизводится без искажения на делительной окружности как ширина впадины колеса (рис. 5.10, б). Тогда

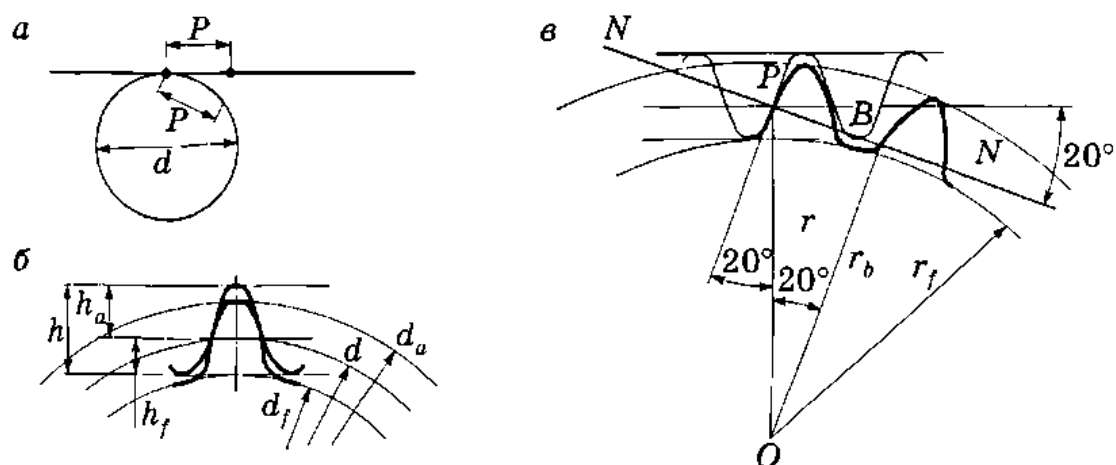


Рис. 5.10. Изготовление колес без смещения:

- а — взаимное расположение делительной прямой и делительной окружности;
- б — относительное расположение зуба рейки и зуба колеса;
- в — к определению диаметра основной окружности

$s = \pi m / 2$, аналогично определяется ширина впадины. Прочие размеры колеса также определены размерами рейки:

$$h = 2,25m;$$

$$h_a = m;$$

$$h_f = 1,25m;$$

$$d_a = m(z + 2);$$

$$d_f = m(z - 2,5).$$

Прямолинейные режущие кромки нарезают эвольвентную часть зуба, которая идет до основной окружности. Для определения диаметра основной окружности проведем через точку P общую нормаль $N-N$. Она проходит под углом 20° к делительной прямой. Основная окружность касается общей нормали. Из построения на рис. 5.10, в следует, что $r_b = \frac{1}{2} m z \cos 20^\circ$.

Из рассмотрения рис. 5.10, в следует еще один важный вывод, используемый в дальнейшем: угол профиля эвольвенты в точке, лежащей на делительной окружности, равен углу наклона боковой линии рейки, т.е. 20° .

5.5.4. Нарезание зубчатых колес со смещением

Рассмотрим случай, когда делительная прямая не касается делительной окружности и смещена от нее в направлении от центра колеса на некоторое расстояние X (рис. 5.11). Это расстояние называется *смещением* и выражается через модуль и *коэффициент смещения* x :

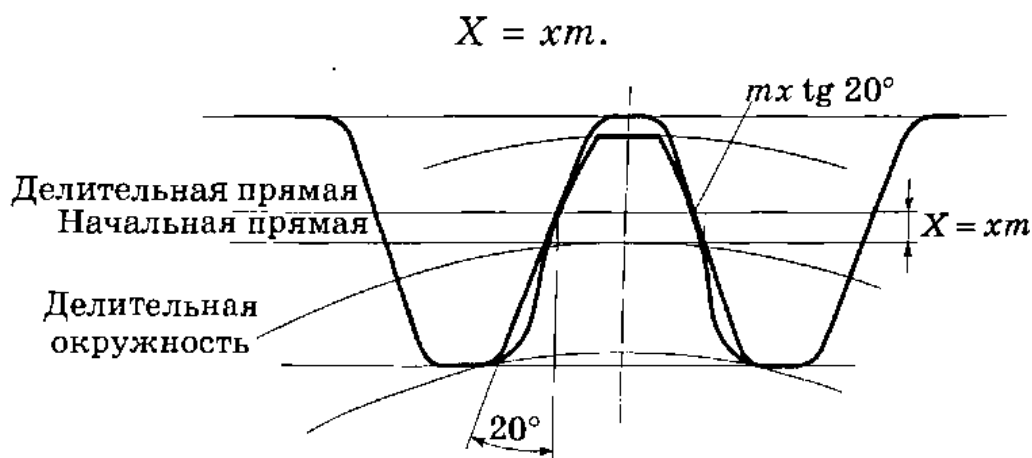


Рис. 5.11. Изготовление колес со смещением

Делительная окружность касается некоторой начальной прямой. Поскольку шаг на начальной прямой равен шагу на делительной окружности, то можно считать, что начальная прямая перекачивается по делительной окружности без скольжения и отпечатывает на ней толщину зуба и ширину впадины.

Из построения на рис. 5.11 следует, что толщина зуба на делительной окружности

$$s = \pi m / 2 + 2mx \operatorname{tg} 20^\circ,$$

ширина впадины

$$e = \pi m / 2 - 2mx \operatorname{tg} 20^\circ,$$

диаметры окружностей вершин и впадин

$$d_a = m(z - 2,5 + 2x),$$

$$d_f = m(z - 2,5 + 2x).$$

Рассмотренный случай называется положительным смещением. Коэффициент смещения x здесь считается положительным. Если сместить рейку в направлении к центру колеса, то ее делительная прямая пересечет делительную окружность. Такой случай называется отрицательным смещением. Нетрудно убедиться в том, что все выведенные формулы для него справедливы, если принять в них коэффициент смещения отрицательным. Если принять $x = 0$, то получим формулы для нулевого колеса.

5.5.5. Влияние смещения на профиль зуба

Рассмотрим, как смещение влияет на профиль зуба. На рис. 5.12 представлены три профиля зубьев колес с одинаковыми модулем и числом зубьев, но с различными коэффициентами смещения. Из сравнения их следуют выводы:

1. Диаметры делительной d и основной d_b окружностей не изменяются.

2. При $x > 0$ диаметры вершин и впадин увеличиваются.

3. При $x > 0$ толщина зуба s увеличивается, ширина впадины уменьшается, ножка зуба становится толще и короче, что увеличивает изгибную прочность зуба.

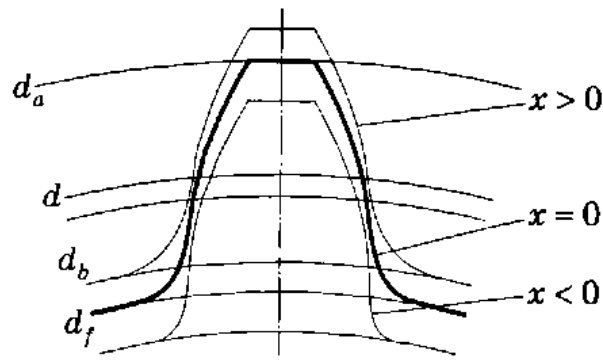


Рис. 5.12. Профиль зубьев, изготовленных с разным смещением

4. Смещение не изменяет делительного и основного шагов, поэтому зацепление колес с различным смещением происходит нормально.

5. При $x > 0$ профиль зуба располагается на участках с меньшей кривизной эвольвенты, что увеличивает контактную прочность зуба.

6. При $x > 0$ толщина зуба по окружности вершин уменьшается.

При отрицательном смещении происходят изменения в противоположном направлении и зуб несколько ослабляется. Так как колесо обычно прочнее шестерни, для создания равнопрочной передачи шестерне придают положительное смещение, а колесу — отрицательное. Правильно подобрав смещение, можно значительно повысить прочность передачи.

5.5.6. Подрезание, интерференция, заострение

Подрезание проявляется в утончении ножки зуба и приводит к уменьшению его изгибной прочности и, кроме того, из-за сокращения эвольвентного участка — к нарушению закона зацепления на части профиля.

Боковой профиль зуба состоит из главной части и переходной кривой, разделенных граничной точкой L (рис. 5.13, а). При заданном числе

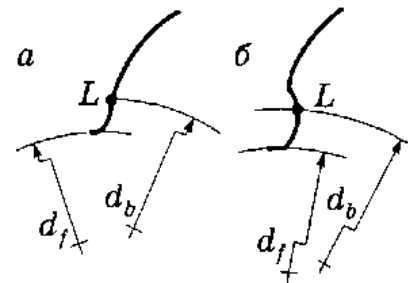


Рис. 5.13. Подрезание ножки зуба

зубьев положение точки L зависит от коэффициента смещения. Коэффициент смещения x , при котором точка L лежит на основной окружности, называется минимальным коэффициентом смещения. Если $x < x_{\min}$, переходная кривая пересечет главный профиль дальше основной окружности и часть эвольвенты будет срезана, т.е. зуб окажется подрезанным (рис. 5.13, б).

Для установления зависимости коэффициента смещения x рассмотрим схему зацепления при нарезании нулевого колеса. Установлено, что подрезание происходит, если начальная прямая рейки, проходящая через конец прямолинейной части зуба рейки, заходит за точку касания нормали с основной окружностью (точка B на рис. 5.10, в) и пересекает общую нормаль $N-N$ в точке A . Для устранения подрезания дадим рейке положительное смещение $X = xm$, такое, чтобы точки A и B совпали (рис. 5.14). Из треугольника ATO имеем

$$0,5mz + xm - m = 0,5mz \cos^2 20^\circ.$$

Отсюда

$$x = 1 - 0,5z(1 - \cos^2 20^\circ) \approx (17 - z)/17. \quad (5.1)$$

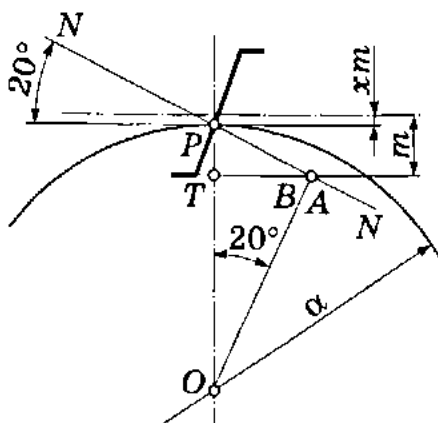


Рис. 5.14. К расчету минимального смещения

Коэффициент смещения, определенный по формуле (5.1), представляет собой минимальный коэффициент смещения, при котором отсутствует подрезание. Минимальное число зубьев, не подверженных подрезанию, равно 17 — в этом случае $x = 0$. Все колеса с числом зубьев меньше 17 обычно изготавливаются со смещением. Впрочем, небольшое подрезание допус-

кается и даже полезно для уменьшения кромочных ударов при зацеплении.

При рассмотрении картины зацепления может обнаружиться, что главный профиль головки зуба, сопрягаясь с переходной кривой, внедряется в нее. Такое явление при изготовлении колес приводит к подрезанию, а при их зацеплении — к непрочности и поломке зубьев и называется *интерференцией*. Интерференции не будет, если эвольвентный профиль сопрягается только с эвольвентным. Наиболее часто интерференция возникает при внутреннем зацеплении. Имеется следующая рекомендация: при отсутствии смещения колес необходимо проектировать внутреннее зацепление так, чтобы разница чисел зубьев колес была не менее 7–8. Впрочем, автору в результате проведенных исследований удалось спроектировать ряд работоспособных зубчатых передач внутреннего зацепления с разностью чисел зубьев в один зуб за счет назначения обоим колесам соответствующих коэффициентов смещений. Эти передачи были использованы в одной из схем планетарных механизмов.

Толщина зуба по окружности вершин зависит от смещения — с увеличением смещения она уменьшается. *Заострение* зуба может возникнуть, когда его толщина по окружности вершин $s_a = 0$. Заострение нежелательно из-за снижения прочности зуба — вершина заостренного зуба совершенно не способна выдерживать нагрузку. Обычно принимают $s_a > 0,25m$ — для кинематических передач и $s_a > 0,4m$ — для силовых. Толщину зуба по окружности вершин можно проверить по приводимой в 5.7.2 формуле.



Построение картины зацепления

Для построения картины зацепления необходимо определить параметры зубчатых колес: $d_1, d_2, d_{a1}, d_{a2}, d_{f1}, d_{f2}, d_{b1}, d_{b2}, s_1, s_2, p$. Межосевое расстояние вычисляется по формуле

$$a_w = (d_{w1} + d_{w2})/2. \quad (5.2)$$

В частном случае $a_w = a$, где a — делительное межосевое расстояние, $a = (d_1 + d_2)/2$. Отложим межосевое расстояние a_w , отметим центры вращения колес O_1 и O_2 , построим для каждого колеса окружности вершин, окружность впадин, делительную окружность, основную окружность (рис. 5.15).

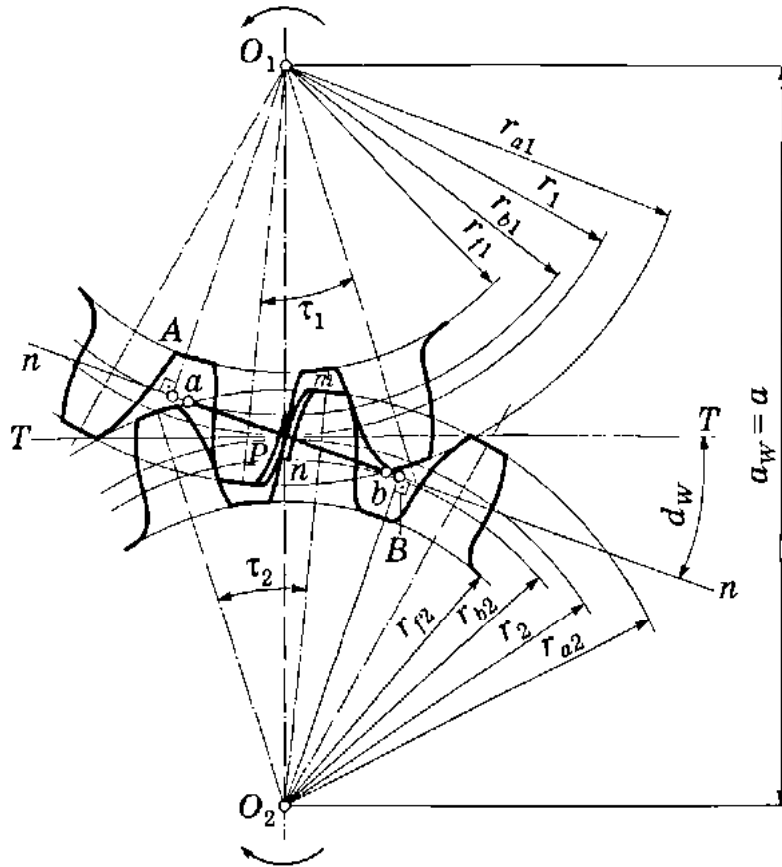


Рис. 5.15. Картина зацепления

Проведем общую нормаль $T-T$ касательно к основным окружностям. Она пересечет межосевое расстояние в точке P — полюсе зацепления, через который проходят начальные окружности. Используя общую нормаль как производящую прямую, построим эвольвентный участок профиля зуба первого колеса (способ построения эвольвенты описан в 5.4).

Переходная кривая условно оформляется как радиальная прямая, сопряженная с окружностью впадин галтелью радиусом $\rho = 0,4m$. Отложим половину толщины зуба по делительной окружности и проведем ось симметрии зуба. Для этого удобно воспользоваться шаблоном. Откладывая угловой шаг $\tau_1 = 2\pi/z_1$

и используя шаблон зуба, строим 3–4 зуба. Точно так же строятся зубья второго колеса.

На картине зацепления можно отметить следующие элементы:

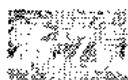
□ AB — *теоретическая линия зацепления*, являющаяся геометрическим местом точек касания профилей зубьев в процессе их зацепления;

□ ab — *активная линия зацепления*, часть теоретической линии, ограниченная окружностями вершин;

□ tp — *активная часть профиля зуба*, непосредственно участвующая в зацеплении. Для ее определения нужно перенести точку a радиусом Oa на профиль зуба;

□ α_w — *угол зацепления*, угол между линией зацепления и общей касательной $T-T$. Угол зацепления равен углу профиля эвольвенты α_y в точке, лежащей на делительной окружности.

Качественные характеристики



зацепления

5.7.1. Коэффициент перекрытия

Одной из важнейших качественных характеристик зацепления является *коэффициент перекрытия*. Он характеризует плавность зацепления колес. Коэффициент перекрытия равен отношению угла перекрытия φ_α к угловому шагу τ :

$$\varepsilon_\alpha = \varphi_\alpha / \tau. \quad (5.3)$$

Углом перекрытия является угол поворота зубчатого колеса от положения входа зуба в зацепление до положения выхода из зацепления. Его можно определить, рассмотрев два положения зуба: в моменты входа в зацепление и выхода из него (рис. 5.16).

Угол перекрытия должен быть больше углового шага. Благодаря этому первая пара зубьев еще не успевает разомкнуться

(прийти в точку b), как вторая пара зубьев входит в зацепление. Таким образом, существуют периоды двухпарного зацепления, что обеспечивает непрерывность зацепления. Чем больше ε_α , тем плавнее работает передача.

Установим зависимость ε_α от параметров зацепляющихся колес. Умножим числитель и знаменатель формулы (5.3) на r_b — радиус основной окружности. С учетом 4-го свойства эвольвенты получим $\varphi_\alpha r_{b1} = ab$, кроме того, $\tau_1 r_{b1} = p_b$ — шаг зубьев по основной окружности, следовательно, получим

$$\varepsilon_\alpha = ab/p_b. \quad (5.4)$$

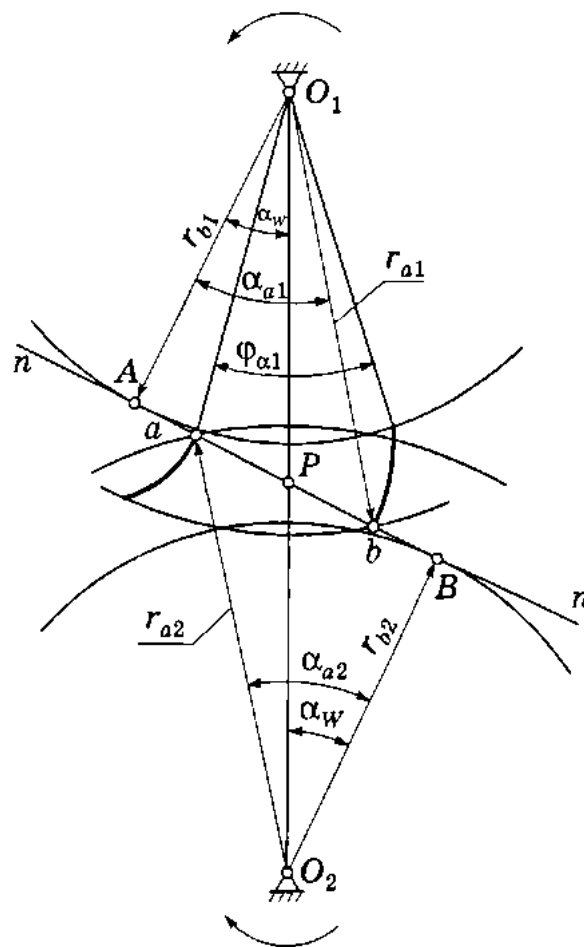


Рис. 5.16. К определению коэффициента перекрытия

Формулу (5.4) можно использовать, если построена картина зацепления, на которой можно измерить длину активной линии зацепления ab .

Для получения аналитической зависимости следует представить длину активной линии зацепления в виде функции от параметров колес. Из построения на рис. 5.16 следует:

$$Ab = Pb = aP;$$

$$Pb = Ab - pA;$$

$$AP = Ba - PB.$$

Из треугольников O_1Ab и O_1AP следует:

$$ab = r_{b1} \operatorname{tg} \alpha_{a1}; \quad PA = r_{b1} \operatorname{tg} \alpha_w.$$

Из треугольников O_2Ba и O_2BP следует

$$Ba = r_{b2} \operatorname{tg} \alpha_{a2}; \quad PB = r_{b2} \operatorname{tg} \alpha_w.$$

Подставив полученные выражения в формулу (5.4) и выполнив необходимые преобразования, получим

$$\varepsilon_\alpha = (z_1(\operatorname{tg} \alpha_{a1} - \operatorname{tg} \alpha_w) + z_2(\operatorname{tg} \alpha_{a2} - \operatorname{tg} \alpha_w))/2\pi.$$

Здесь

$$\alpha_{a1} = \arccos(d_{b1}/d_{a1}); \quad \alpha_{a2} = \arccos(d_{b2}/d_{a2}).$$

Как вычисляется α_w , будет показано в 5.8.

Коэффициент перекрытия для прямозубых колес должен находиться в пределах $1,2 < \varepsilon_\alpha < 1,98$.

5.7.2. Толщина зуба на окружности произвольного радиуса

Определим толщину зуба s_y на окружности диаметром d_y . Из построений на рис. 5.17 следует:

$$s_y = \Psi_y d_y; \tag{5.5}$$

$$\Psi_y = \psi + \theta - \theta_y,$$

где $\theta = \operatorname{inv} 20^\circ$, $\theta_y = \operatorname{inv} \alpha_y$.

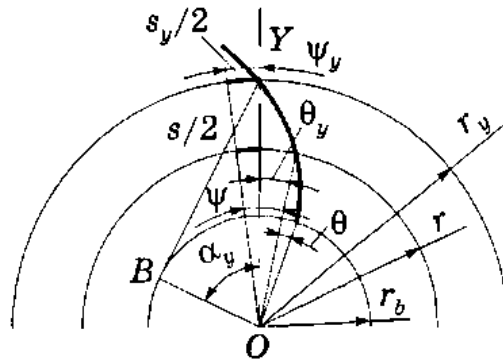


Рис. 5.17. К расчету толщины зуба на окружности произвольного радиуса

Для определения α_y рассмотрим треугольник OBY :

$$\alpha_y = \arccos(d_b/d_y).$$

Угол ψ определяется из соотношения $\psi = s/d$, где s — толщина зуба на делительной окружности. Используя формулу (5.5), получим

$$\psi = \pi/2z + 2x \operatorname{tg} 20^\circ/z.$$

Тогда

$$\psi_y = \pi/2z + 2x \operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{inv} 20^\circ - \operatorname{inv} \alpha_y.$$

Толщина зуба и ширина впадины определяются из следующих выражений:

$$s_y = d_y(\pi/2z + 2x \operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{inv} 20^\circ - \operatorname{inv} \alpha_y);$$

$$e_y = d_y(\pi/2z - 2x \operatorname{tg} 20^\circ - \operatorname{inv} 20^\circ + \operatorname{inv} \alpha_y).$$

Геометрический расчет зубчатой передачи

Рассмотрим более общий случай зубчатой передачи в сравнении с тем, который был рассмотрен в 5.6. При построении картины зацепления межосевое расстояние O_1O_2 определяется

по формуле (5.2). Диаметры начальных окружностей можно найти, рассмотрев треугольники O_1AP и O_2BP (см. рис. 5.15):

$$\begin{aligned}d_{W1} &= mz_1(\cos 20^\circ / \cos \alpha_W); \\d_{W2} &= mz_2(\cos 20^\circ / \cos \alpha_W).\end{aligned}\tag{5.6}$$

В таком случае начальное межосевое расстояние рассчитывается по формуле

$$a_W = 0,5m(z_1 + z_2)(\cos 20^\circ / \cos \alpha_W).\tag{5.7}$$

Как уже указывалось, во время работы зубчатой передачи начальные окружности перекатываются друг по другу без скольжения. В случае беззазорного зацепления толщина зуба на начальной окружности одного колеса равна ширине впадины на начальной окружности другого колеса,

$$s_{W1} = e_{W2}.$$

Выполнив подстановку соответствующих выражений для толщины зуба и ширины впадины и произведя соответствующие преобразования, получим

$$\operatorname{inv} \alpha_W = 2 \operatorname{tg} 20^\circ (x_1 + x_2) / (z_1 + z_2) + \operatorname{inv} 20^\circ.\tag{5.8}$$

Полученное выражение называется *уравнением зацепления*, оно позволяет определить угол зацепления исходя из заданных чисел зубьев и коэффициентов смещений.

Формулы (5.6)–(5.8) образуют основу для геометрического расчета зубчатой передачи. В зависимости от сочетания коэффициентов смещений различают четыре варианта передач (табл. 5.1).

Таблица 5.1

Варианты зубчатых передач

Передача	x_1, x_2	$\sum x$	α_W	d_W	a_W
Нулевая	$x_1 = x_2 = 0$	0	20°	d	a
Равносмещенная	$x_1 = -x_2$	0	20°	d	a
Положительная	$x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$	> 0	$> 20^\circ$	$> d$	$> a$
Отрицательная	$x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$	< 0	$< 20^\circ$	$< d$	$< a$

Иногда формулу (5.6) представляют в виде

$$a_w = a + ym,$$

где y — коэффициент воспринимаемого смещения:

$$y = 0,5(z_1 + z_2)(\cos 20^\circ - \cos \alpha_w)/\cos \alpha_w.$$

Кроме того, вводится обозначение коэффициента уравнительного смещения

$$\Delta y = \sum x - y.$$

Согласно ГОСТ 16532–72, рассчитывать геометрические параметры зубчатой передачи следует с использованием этих коэффициентов.



Блокирующие контуры

Как уже было показано, коэффициенты смещения существенно влияют на качественные показатели зубчатой передачи и ее геометрию. Использование колес со смещением позволяет соблюсти заданное межосевое расстояние. При увеличении коэффициента смещения x увеличиваются контактная и изгибная прочность. Смещение влияет на скорость скольжения профилей, а значит, и на их износ. Помимо этого увеличение смещения ведет к заострению, интерференции и снижению коэффициента перекрытия. В то же время невозможно назначить смещение, оптимальное со всех точек зрения. Для каждой отдельной передачи следует рассмотреть всю совокупность эффектов, вызываемых смещением, что является весьма трудоемкой задачей.

С целью облегчения практического использования колес со смещением разработан метод блокирующих контуров. Результаты расчетов представлены в виде диаграмм — так называемых блокирующих контуров. Диаграммы позволяют обоснованно назначать коэффициенты смещения, не прибегая к трудоемким расчетам.

Блокирующий контур строится для каждой пары чисел зубьев z_1 и z_2 . На координатных осях откладываются значения x_1 и x_2 так, что точка A соответствует передаче, составленной из колес с положительным смещением, точка B — из колес с отрицательным смещением, точка O — из нулевых колес (рис. 5.18). Таким образом, каждой точке координатного поля соответствует свой вариант передачи.

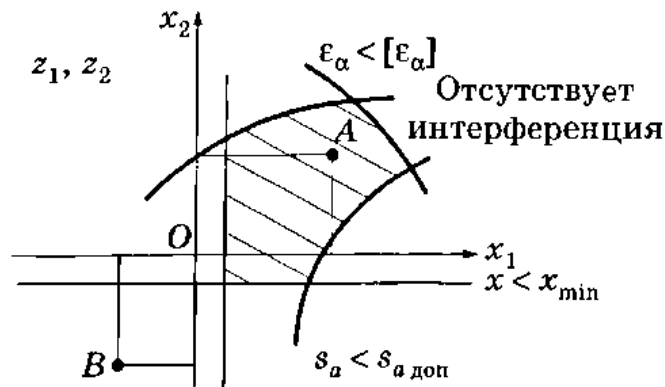


Рис. 5.18. Блокирующие контуры

Однако не все точки этого поля можно использовать. Некоторые неприемлемы по условиям существования передачи: наличию интерференции, подрезанию, заострению, малому коэффициенту перекрытия. Предельно допустимому значению каждого из параметров соответствуют безусловные границы в виде линий, в совокупности образующие блокирующий контур. Для каждой пары чисел зубьев формы контура будут разными. Внутри контура могут быть нанесены условные границы, например, $\epsilon_\alpha = 1,2$, $s_a = 0,25m$, $x = x_{\min}$ и т.д. Блокирующие контуры для различных сочетаний чисел зубьев колес содержатся в соответствующих справочниках.



Косозубые колеса

В предыдущих пунктах мы рассматривали прямозубые колеса. Перейдем теперь к косозубым колесам.

Винтовые колеса с постоянным шагом винтовой линии называются *косозубыми*. Боковая поверхность зуба образуется

чертящей прямой AB , лежащей в производящей плоскости P , при обкатывании ее вокруг основного цилиндра Q . Если чертящая прямая параллельна образующей основного цилиндра, получается прямозубое колесо, если она составляет с образующей угол β_b — косозубое. Косозубое колесо можно рассматривать как множество прямозубых колес бесконечно малой толщины, сдвинутых друг относительно друга. Боковая поверхность зуба пересекает основной цилиндр по винтовой линии с углом подъема $90^\circ - \beta_b$. Угол подъема винтовой линии, измеренный на поверхности делительного цилиндра, находится из зависимости $\operatorname{tg} \beta = (r/r_b) \operatorname{tg} \beta_b$.

Рассмотрим развертку делительного цилиндра на плоскости (рис. 5.19). На ней можно указать три шага зубьев: нормальный p_n , торцевой p_t , осевой p_a . Соответственно этому имеется три модуля: нормальный m_n , торцевой m_t , осевой m_a . Из построения на рисунке следует, что $p_t = p_n / \cos \beta$, следовательно, $m_t = m_n / \cos \beta$.

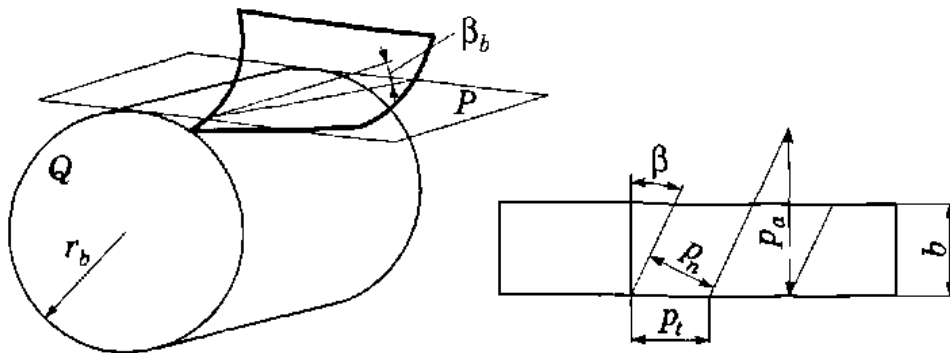


Рис. 5.19. Косозубое колесо и его развертка на плоскость

Косозубые колеса изготавливаются тем же инструментом, что и прямозубые, но заготовка разворачивается относительно инструмента на угол β . В нормальном сечении зуб получается таким же, как у соответствующего прямозубого колеса. Размеры зубьев в торцевом сечении рассчитываются по приведенным ранее формулам, но модуль применяется торцевой, выраженный через стандартный модуль инструмента.

Основная особенность косозубых колес состоит в том, что зубья входят в зацепление не по всей своей длине, как это

происходит в прямозубых колесах, а по контактной линии, параллельной образующей основного цилиндра, длина которой непрерывно изменяется. Благодаря этому увеличивается продолжительность контакта пары зубьев, что выражается в увеличении коэффициента перекрытия. Для косозубых колес коэффициент перекрытия

$$\varepsilon_{\gamma} = \varepsilon_{\alpha} + \varepsilon_{\beta},$$

где ε_{α} — коэффициент перекрытия соответствующего прямозубого колеса; ε_{β} — добавочный коэффициент перекрытия из-за наклона линии зуба,

$$\varepsilon_{\beta} = \varphi_{\beta} / \tau,$$

где τ — угловой шаг.

Из построения на рис. 5.19 следует:

$$\varphi_{\beta} = b \operatorname{tg} \beta / r.$$

К достоинствам косозубых колес относятся плавность работы и бесшумность, их недостаток — наличие осевого усилия на подшипники. Для устранения этого усилия применяют шевронные колеса, составленные из двух зубчатых колес с равным, но противоположным наклоном зубьев.



Другие виды зацеплений

Помимо эвольвентного зацепления ограниченное распространение получили и другие виды зацепления. В прошлом было широко распространено *циклоидальное (циклоидное) зацепление*. Если чертящую точку взять не на прямой, а на производящей окружности и перекатывать ее по основной окружности, то точка будет описывать кривую, называемую циклоидой. Причем если производящая окружность катится снаружи основной, получается эпициклоида, если внутри — гипоциклоида. В циклоидальном зубчатом колесе профиль головки зуба выполняется по эпициклоиде, а профиль ножки

зуба — по гипоциклоиде. Преимущество циклоидального зацепления в том, что с его помощью возможен контакт выпукло-вогнутых поверхностей и, как следствие, уменьшение контактных напряжений. Недостаток — нельзя изменять межцентровое расстояние и вообще менять колеса в парах.

Разновидностью циклоидального является часовое зацепление, в котором эпициклоида головки зуба заменена дугой окружности, а гипоциклоида — прямой. Достоинствами такого зацепления являются большие передаточные отношения и уменьшенный износ по сравнению с эвольвентным зацеплением.

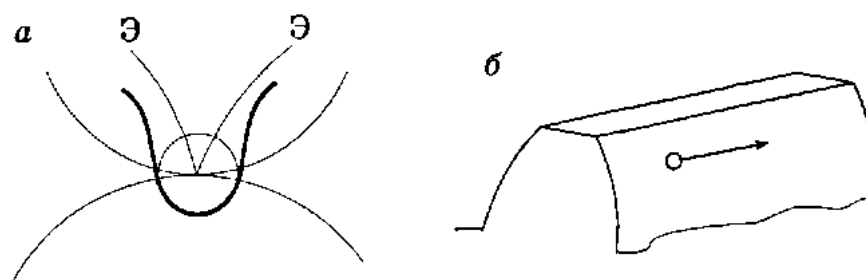


Рис. 5.20. Зацепления:
a — цевочное; *б* — зацепление Новикова

Другой разновидностью циклоидального зацепления является *цевочное зацепление*. Боковой профиль зуба шестерни выполняется по эпициклоиде Э, зуб другого колеса — в виде цилиндрического ролика, называемого цевкой (рис. 5.20, *a*). При соответствующем выборе параметров профили будут сопряженными. Такое зацепление применяется там, где большое колесо по технологическим соображениям выполнить невозможно. Колеса собирают из дисков, по окружности которых равномерно размещены цевки. Такие колеса применяются, например, для привода поворотных платформ больших экскаваторов.

Циклоидально-цевочное зацепление имеет ряд преимуществ по сравнению с эвольвентным зацеплением, но оно довольно сложно в технологическом отношении. В настоящее время широко распространены планетарные редукторы с таким видом зацепления.

Существует также *круговинтовое зацепление* (зацепление *Новикова*). Если в обычном эвольвентном зацеплении зубья касаются по контактной линии, которая перемещается по высоте зуба, то в круговинтовом зацеплении контакт происходит в точке, которая перемещается вдоль зуба. Профилями зубьев здесь служат дуги окружностей (рис. 5.20, б). Так как разница радиусов кривизны невелика, контактные напряжения малы. Поскольку точка контакта перемещается вдоль зуба, его высоту можно делать небольшой, тем самым увеличивая прочность. Зубчатые колеса с круговинтовыми зубьями, несмотря на их достоинства, применяются ограниченно из-за сложности изготовления инструмента для их нарезания.

Пространственные зубчатые передачи

Винтовая передача — это передача между цилиндрическими колесами со скрещивающимися осями (рис. 5.21, а). Передача образована обычными косозубыми колесами, у которых углы наклона зубьев β_1 и β_2 и угол скрещивания осей β находятся в соотношении $\beta = \beta_1 + \beta_2$.

В винтовой передаче происходит точечное касание, что является ее недостатком. Передаточное отношение здесь колеблется в пределах 1...5. При передаточном отношении $i \geq 5$ винтовая передача становится червячной (рис. 5.21, б).

Червячные передачи находят широкое применение в технике. Их достоинства — большое передаточное отношение, плавность, бесшумность, в большинстве случаев наличие само-

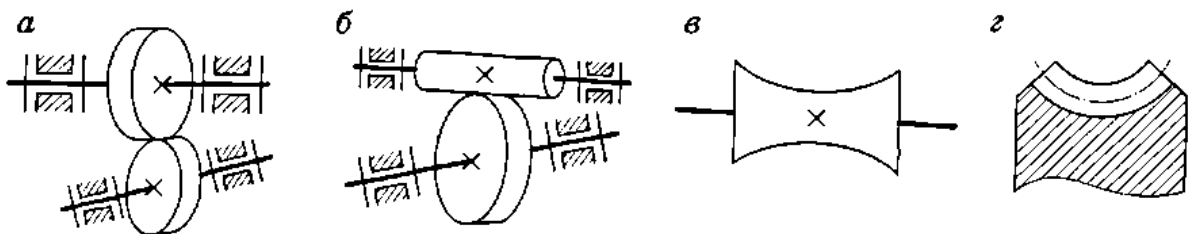


Рис. 5.21. Зубчатые передачи:
а — винтовая; б-г — червячные

торможения. Недостатки — низкий КПД, большие осевые усилия на подшипники, повышенный износ червячного колеса.

Червяк представляет собой широкое винтовое зубчатое колесо малого диаметра с большим углом наклона зуба. Червяки, как и винты, могут быть одно- и многозаходными (под числом заходов понимается число зубьев червяка). Червячное колесо представляет собой косозубое эвольвентное колесо с углом наклона зуба $\beta = 90^\circ - \gamma$, где γ — угол подъема винтовой линии на делительной окружности червяка. Для повышения долговечности передач и улучшения смазки колесам придают специальную форму: червяк делают глобоидным (рис. 5.21, в), а червячному колесу придают форму, показанную на рис. 5.21, г.

Передаточное отношение червячной передачи определяется по формуле

$$i = Z_k / Z_{\text{ч}},$$

где Z_k — число зубьев колеса; $Z_{\text{ч}}$ — число зубьев (заходов) червяка.

Передаточное отношение однозаходного червяка равно числу зубьев червячного колеса, что и объясняет большое передаточное отношение червячных передач.

Коническая передача образована коническими зубчатыми колесами с пересекающимися осями (рис. 5.22). В основе передачи лежат начальные конусы, перекатывающиеся друг по другу без скольжения. Часть зуба, выступающая за начальный конус, является головкой зуба, а часть, лежащая внутри, — его ножкой. Высота головки и ножки, а также остальные размеры зубьев, в том числе модуль, уменьшаются при переходе от наружного торца колеса к внутреннему.

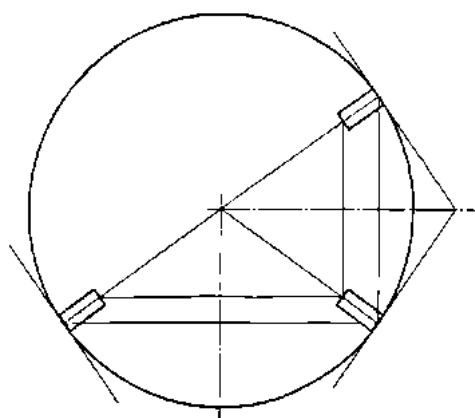


Рис. 5.22. Коническая передача

За модуль колеса принимается наибольший, относящийся к делительной окружности наружного торца колеса. Размеры зубьев подсчитываются по тем же формулам, что и для прямозубых колес.

Нарезание конических колес с прямыми зубьями возможно только на специальных зубострогальных станках. Применяются также конические колеса с криволинейными зубьями.

Передаточное отношение и передаточное число

Передаточным отношением зубчатой передачи i называется отношение угловой скорости ведущего зубчатого колеса к угловой скорости ведомого зубчатого колеса (ГОСТ 16530–83).

Понятие передаточного отношения для зубчатого механизма стандартом не определено, поэтому обычно пользуются общепринятым определением, аналогичным определению передаточного отношения зубчатой передачи: передаточное отношение зубчатого механизма есть отношение угловых скоростей его звеньев. Передаточное отношение принято снабжать индексами, указывающими номера зубчатых колес, например, $i_{12} = \omega_1/\omega_2$. Из рассмотрения зубчатой передачи, изображенной на рис. 5.23, а и б, следует:

$$v_{A_1} = \omega_1 r_1; \quad v_{A_2} = \omega_2 r_2; \quad v_{A_1} = v_{A_2}.$$

Тогда

$$i_{12} = \omega_1/\omega_2 = r_2/r_1 = mZ_2/mZ_1 = Z_2/Z_1.$$

Передаточному отношению присваивается знак «+», если входное и выходное колеса вращаются в одном направлении,

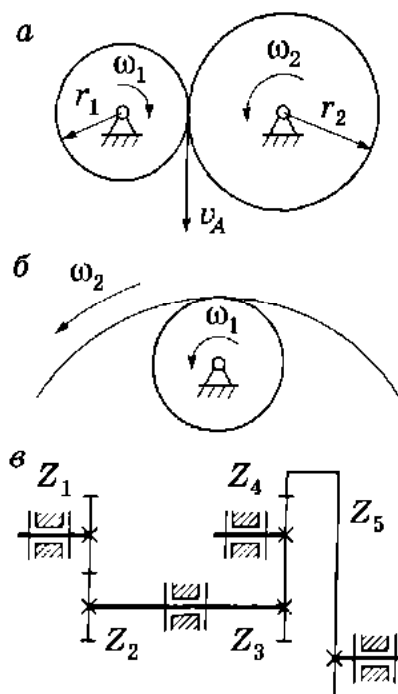


Рис. 5.23. Зубчатая передача зацепления; а — внешнего; б — внутреннего зацепления; в — рядовой зубчатый механизм

и знак «-», если они вращаются в разных направлениях. Для зубчатой передачи внешнего зацепления передаточное отношение i_{12} отрицательное, для передачи внутреннего зацепления — положительное. При передаточном отношении больше единицы зубчатая передача служит редуктором (происходит замедление скорости вращения), при передаточном отношении меньше единицы — мультипликатором (скорость увеличивается).

В подавляющем большинстве случаев механизмы являются редукторами. Их назначение — уменьшать частоту вращения двигателя до той, которая необходима для нормальной работы исполнительного органа машины. Одновременно с уменьшением частоты вращения повышается крутящий момент. Так как КПД зубчатой передачи очень высок (0,95...0,98), то можно считать, что мощность $N_1 = N_2$, где $N_1 = M_1\omega_1$, $N_2 = M_2\omega_2$. Отсюда следует, что $M_2 = M_1i_{12}$.

Передаточное отношение не следует путать с *передаточным числом* u , под которым понимается отношение числа зубьев большего колеса к числу зубьев меньшего, называемого обычно шестерней. Передаточное число всегда больше единицы и знака не имеет.

Рядовой зубчатой передачей (зубчатым рядом) называется зубчатый механизм, образованный зубчатыми колесами с неподвижными осями. Зубчатый ряд состоит из одной или нескольких зубчатых передач.

Рассмотрим механизм, изображенный на рис. 5.23, в. Он составлен из трех зубчатых передач, образованных колесами Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5 . Запишем их передаточные отношения:

$$i_{12} = \omega_1/\omega_2; \quad i_{34} = \omega_3/\omega_4; \quad i_{45} = \omega_4/\omega_5,$$

откуда

$$\omega_2 = \omega_1/i_{12}; \quad \omega_4 = \omega_3/i_{34}; \quad \omega_5 = \omega_4/i_{45}.$$

Выполнив последовательную подстановку выражений для $\omega_2, \omega_4, \omega_5$, получим

$$\omega_5 = \omega_1/i_{45}i_{34}i_{12},$$

откуда найдем передаточное отношение всей передачи:

$$i_{15} = \omega_1/\omega_5 = i_{15} = i_{12}i_{34}i_{45}.$$

Полученная формула является частным случаем общего правила, формулируемого следующим образом: передаточное отношение рядовой зубчатой передачи равно произведению передаточных отношений входящих в нее зубчатых передач, при этом следует учитывать знаки передаточных отношений составляющих зубчатых передач.

Передаточное отношение также можно выразить через числа зубьев:

$$i_{15} = Z_2Z_4Z_5/Z_1Z_2Z_4. \quad (5.9)$$

Полученная формула также является частным случаем общего правила, формулируемого следующим образом: передаточное отношение рядовой зубчатой передачи равно дроби, в числителе которой стоят числа зубьев выходных колес, а в знаменателе — входных. Знак берется согласно приведенному ранее правилу знаков. В формуле колесо Z_4 не влияет на численное значение передаточного отношения, но влияет на знак. Такое колесо называется *паразитным*.

Пример 5.1. Рассмотрим расчет коробки передач легкового автомобиля, в основе которой — рядовой зубчатый механизм (рис. 5.24).

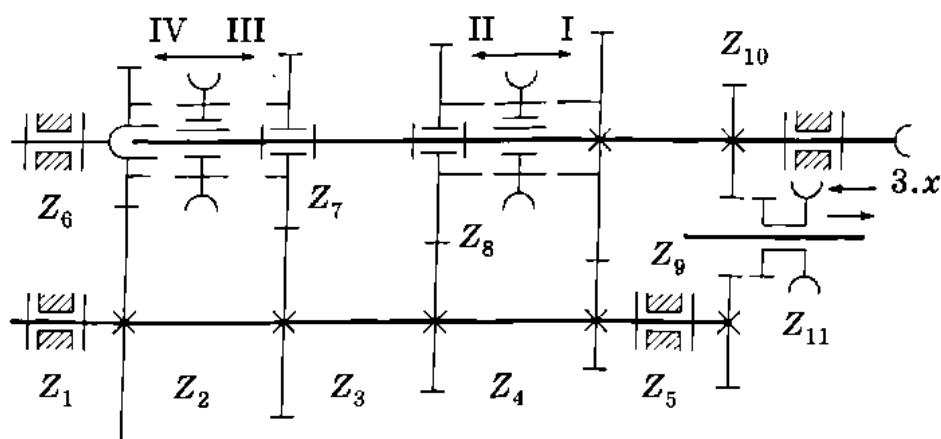


Рис. 5.24. Коробка передач автомобиля

Коробка передач состоит из входного, выходного и промежуточного валов. На промежуточном валу жестко закреплены колеса с числами зубьев $Z_1 = 29$, $Z_2 = 24$, $Z_3 = 20$, $Z_4 = 15$, $Z_5 = 15$, на входном валу — колесо с $Z_6 = 17$. На выходном валу подвижно установлены колеса с $Z_7 = 24$, $Z_8 = 27$, $Z_9 = 33$.

Для включения передачи I рычагом переключения передач передвигаем кулачковую муфту направо так, что она кулачками сцепляется с колесом Z_9 . Передвигая муфту влево, включаем передачу II, аналогично посредством муфты включаются передачи III и IV. При указанных числах зубьев колес рассчитаем передаточные отношения на I, II, III и IV передачах:

$$\begin{aligned}i_I &= 29 \cdot 33 / 17 \cdot 15 = 3,75; \\i_{II} &= 29 \cdot 27 / 17 \cdot 20 = 2,303; \\i_{III} &= 29 \cdot 21 / 17 \cdot 24 = 1,49; \\i_{IV} &= 1.\end{aligned}$$

Вводя в зацепление с колесами $Z_5 = 15$ и $Z_{10} = 34$ паразитное колесо $Z_{11} = 17$, получаем передачу заднего хода с передаточным отношением

$$i_{з.х} = -29 \cdot 34 / 17 \cdot 15 = -3,87.$$



Планетарные зубчатые механизмы

Планетарным называется зубчатый механизм, содержащий колеса с подвижными осями. Планетарные зубчатые механизмы широко распространены в технике, особенно транспортной, так как они, обладая большим передаточным отношением, имеют малые габариты и вес. Иногда эти механизмы называют эпициклическими, так как траектории точек колес с подвижными осями при внешнем зацеплении представляют собой эпициклоиды. Схема простейшего планетарного механизма представлена на рис. 5.25, а. Колесо 2 с подвижной осью называется сателлитом, центральное колесо 1 — солнечным, звено,

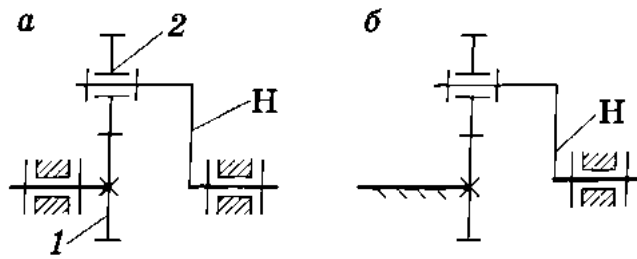


Рис. 5.25. Схемы простейшего планетарного механизма:
 а — дифференциальный; б — планетарный

несущее ось сателлита, называется *водилом*, его принято обозначать Н.

Если колесо 1 подвижно, то степень подвижности механизма, рассчитанная по формуле Чебышева, равна 2. Если остановить колесо 1, получится механизм со степенью подвижности $W = 1$ (рис. 5.25, б). Механизмы, у которых $W > 1$, называются *дифференциальными* (зубчатыми дифференциальными). Если у планетарного механизма остановить водило, оставив колеса свободными, получится рядовая передача.

Схемы планетарных механизмов могут быть очень разнообразными. Практическое применение нашли, в основном, лишь несколько схем. Наиболее распространенные представлены на рис. 5.26.

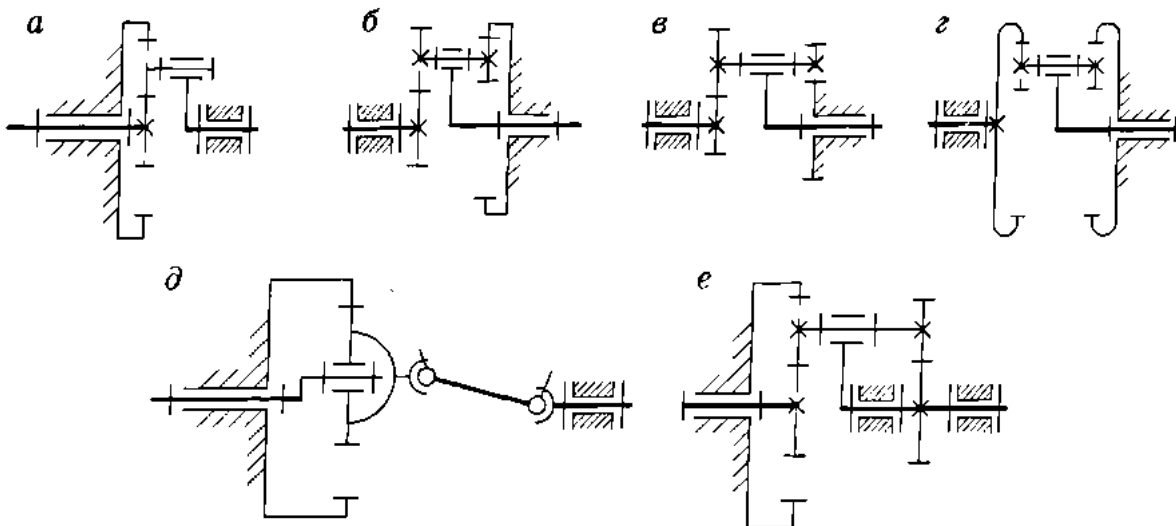


Рис. 5.26. Схемы планетарных механизмов:
 а — трехколесный (механизм Джеймса); б, в, г — четырехколесные;
 д — двухколесный с ведущим водилом; е — комбинированный пяти-
 колесный

Шире других применяются механизмы, создаваемые по схеме *a*. Они характеризуются высоким КПД, практический диапазон передаточных отношений у них $i = 3 \dots 8$. Механизмы, создаваемые по схемам *b* и *г*, могут иметь очень большие передаточные отношения, но у них низкий КПД. По схеме *e* выполняются мотор-редукторы, сочетающие в одном агрегате двигатель и редуктор. Особенно перспективна схема *д*: у таких механизмов всего два колеса, высокий КПД и большое передаточное отношение.

Аналитический метод определения передаточного отношения и угловых скоростей планетарных механизмов

Кинематический расчет планетарных механизмов значительно более сложен, чем расчет рядовых механизмов. Он основан на методе обращения движения. Рассмотрим его на примере механизма, изображенного на рис. 5.27, *a*. Считаем, что заданы количества зубьев колес Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 и угловая скорость входного колеса ω_1 . Требуется определить передаточное отношение i_{1H} , угловую скорость выходного звена *H* и угловую скорость колеса *2*.

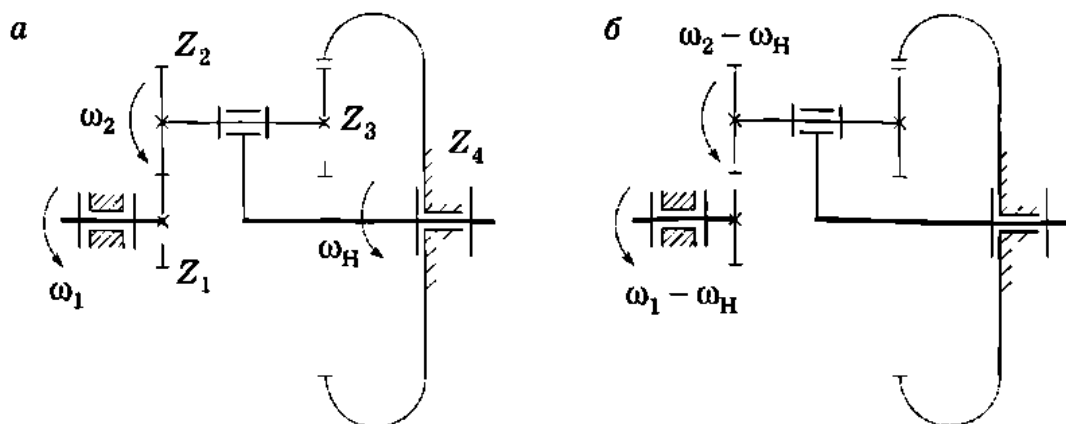


Рис. 5.27. Планетарный механизм (*a*) и соответствующий ему обращенный механизм (*б*)

Сущность метода обращения движения состоит в следующем: придадим стойке механизма скорость вращения водила ω_H , но в противоположном направлении. Тогда водило окажется неподвижным в абсолютной системе отсчета, а остальные звенья приобретут дополнительную скорость ω_H . Обращенный механизм изображен на рис. 5.27, б. Механизм с неподвижным водилом является зубчатым рядом, для него справедливы полученные ранее соотношения

$$i_{14}^H = (\omega_1 - \omega_H)/(\omega_4 - \omega_H). \quad (5.10)$$

Здесь верхний индекс «Н» указывает на то, что параметры относятся к обращенному механизму. Согласно формуле (5.9) имеем

$$i_{14}^H = -Z_2 Z_4 / Z_1 Z_3.$$

Из формулы (5.10) после некоторых преобразований следует:

$$i_{1H} = \omega_1 / \omega_H = 1 - i_{14}^H.$$

Полученная формула справедлива для любой схемы планетарного механизма. Она носит название *формулы Виллиса*.

Если требуется определить передаточное отношение от водила к колесу 1, то, имея в виду, что $i_{H1} = 1/i_{1H}$, получим

$$i_{H1} = 1 / (1 - i_{14}^H).$$

Зная i_{1H} , можно найти ω_H :

$$\omega_H = \omega_1 / i_{1H}.$$

Для определения скорости ω_2 следует рассмотреть одну ступень планетарного механизма и изобразить соответствующий ей обращенный механизм (рис. 5.28). Для обращенного механизма

$$i_{12} = (\omega_1 - \omega_H) / (\omega_2 - \omega_H).$$

Отсюда легко определить ω_2 .

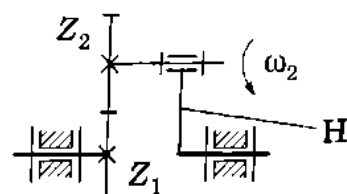


Рис. 5.28. Первая ступень планетарного механизма

Кинематический анализ автомобильного дифференциала

5.16.1. Кинематика автомобильного дифференциала

Рассмотренный ранее метод кинематического исследования применим и к анализу дифференциальных зубчатых механизмов. Одним из наиболее известных является автомобильный дифференциальный механизм (дифференциал) (рис. 5.29). Его назначение — передача движения от карданного вала автомобиля к колесам. Механизм, представленный на рис. 5.29, *а*, включает главную передачу, образованную коническими колесами Z_1 и Z_2 , корпус дифференциала, являющийся в то же время водилом дифференциального механизма, несколько сателлитов Z_4 и два центральных колеса Z_3 и Z_5 , жестко посаженных на полуоси колес.

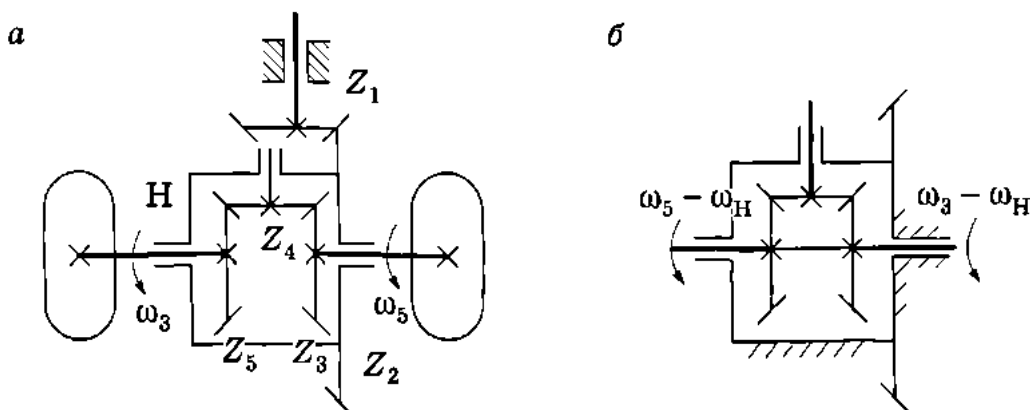


Рис. 5.29. Автомобильный дифференциал:
а — схема; *б* — обращенная схема

Применим к этому механизму принцип обращения движения, сообщив всем звеньям механизма дополнительную скорость ω_H . На рис. 5.29, *б* изображена схема обращенного механизма.

Для него можно записать

$$i_{35}^H = (\omega_3 - \omega_H) / (\omega_5 - \omega_H) = Z_5 / Z_3.$$

Поскольку $Z_5 = Z_3, i_{35}^H = -1$. Знак «минус» указывает на то, что колеса Z_3 и Z_5 в обращенном механизме вращаются в противоположном направлении. Произведя подстановку, получим уравнение автомобильного дифференциала:

$$\omega_3 + \omega_5 = 2\omega_H. \quad (5.11)$$

Проанализируем формулу (5.11). При движении по прямому участку дороги $\omega_3 = \omega_5 = \omega_H$, следовательно, дифференциал как бы жестко связывает полуоси, происходит кинематическая блокировка дифференциала. Совершенно по-другому ведет себя дифференциал при движении по закруглению. Внешнее колесо движется с большей угловой скоростью, чем внутреннее, но так, что их средняя скорость равна скорости водила. Если бы колеса были связаны жесткой осью, происходила бы пробуксовка одного или обоих колес, что ухудшало бы условия эксплуатации автомобиля.

В том случае, когда одно колесо свободно пробуксовывает, второе колесо неподвижно, при этом скорость буксующего колеса равна $2\omega_H$. В этих условиях автомобиль не может двигаться. В таких случаях применяют механическую блокировку дифференциала.

5.16.2. Замкнутые дифференциальные механизмы

Замкнутые дифференциальные механизмы позволяют получать очень большие передаточные отношения при высоких КПД. Схемы таких механизмов чрезвычайно разнообразны. Рассмотрим механизм, построенный на основе трехколесного дифференциала (рис. 5.30).

Для получения большого передаточного отношения необходимо, чтобы солнечные колеса Z_1 и Z_3 вращались в разные стороны. Это достигается введением замыкающей кинематической цепи, выполненной в виде рядового зубчатого механизма. В отдельных случаях возможно получение передаточного отношения порядка 700...1000. При анализе такие ме-

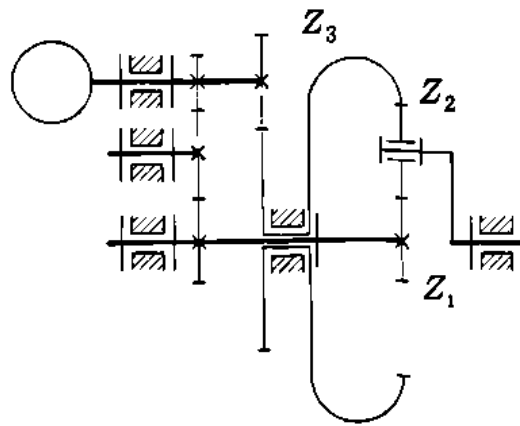


Рис. 5.30. Замкнутый дифференциальный механизм

ханизмы надо разделить на рядовую и планетарную ступени и исследовать каждую ступень, используя формулы, приведенные ранее.

5.16.3. Дифференциальные коробки передач

Дифференциальные коробки передач получили широкое распространение в транспортных машинах, например, в большегрузных автомобилях, тяжелых тракторах, тяговых лебедках и т.д. Они представляют собой дифференциальные механизмы, которые посредством фрикционных муфт можно преобразовать в различные комбинации рядовых и планетарных механизмов (при этом изменяется общее передаточное отношение механизма).

В качестве примера рассмотрим привод тяговой лебедки (рис. 5.31). Привод составлен на основе двух последовательно

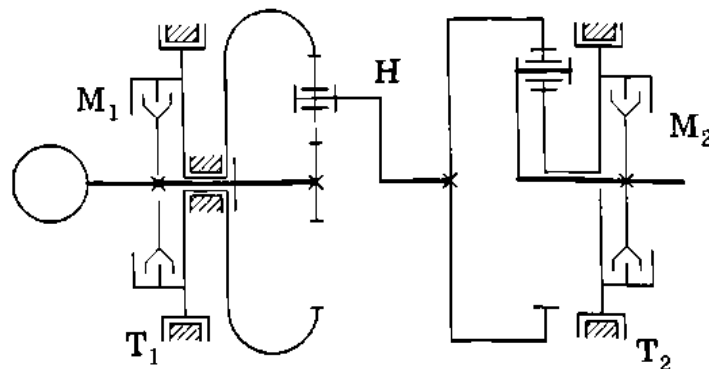


Рис. 5.31. Привод лебедки

установленных трехколесных дифференциалов, снабженных ленточными тормозами T_1 и T_2 и фрикционными муфтами M_1 и M_2 .

Здесь возможны четыре режима передач. При включении тормозов T_1 и T_2 дифференциалы работают как последовательно установленные планетарные механизмы, при этом обеспечивается наибольшее передаточное отношение, равное произведению передаточных отношений планетарных механизмов. Для получения второй передачи включаются тормоз T_1 и муфта M_2 . Тем самым блокируется второй дифференциал, который ведет себя как одно звено, и работает только планетарный механизм первой ступени. Третья передача получается, если включить тормоз T_2 и муфту M_1 . Четвертая передача получается при включении муфт M_1 и M_2 . Это режим прямой передачи без редукции.

Графический метод анализа планетарных механизмов



В ряде случаев полезно выполнить кинематическое исследование планетарного механизма графическим методом. В основе этого метода лежат два положения кинематики.

1. Скорость точки звена, совершающего вращательное движение, является линейной функцией радиуса вращения. В таком случае график зависимости скорости от радиуса есть прямая линия.

2. Любое плоское движение можно рассматривать как мгновенное вращательное движение вокруг мгновенного центра скоростей (МЦС).

В качестве примера рассмотрим механизм, представленный на рис. 5.32. Он включает планетарную и рядовую ступень, состоящую из колес Z_5 и Z_6 .

Схема механизма должна быть построена в масштабе $k_l = l_{OA}/OA$. Справа от схемы построена линия полюсов $p-p$. От этой линии откладываются скорости точек звеньев в мас-

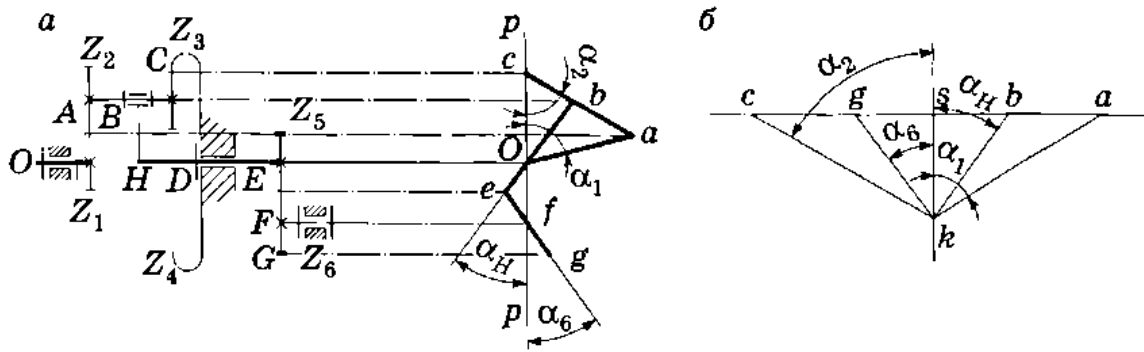


Рис. 5.32. Графический метод анализа планетарного механизма:
 а — план линейных скоростей; б — план угловых скоростей

штабе $k_v = v_A/ra$. Условимся положительные скорости откладывать вправо, отрицательные — влево. Точки на линии полюсов находятся в проекционной связи с точками на механизме. Построение плана скоростей начинается с точки А. Скорость точки С равна нулю, эта точка является МЦС для блока сателлитов. Линия ca на плане линейных скоростей (рис. 5.32, а) называется картиной распределения скоростей. Она обладает тем свойством, что на ней находятся концы векторов скоростей точек, лежащих на блоке сателлитов. Это свойство обосновано ранее. Тогда, проведя линию проекционной связи, найдем скорость точки В. Соединив точки В и О, получим картину скоростей водила. Дальнейшее построение ясно из рисунка.

Покажем, что угловая скорость звена пропорциональна тангенсу угла наклона соответствующей картины скоростей. Это следует из соотношения

$$\omega_1 = v_A/l_{OA} = \operatorname{tg} \alpha_1 k_\omega, \quad (5.12)$$

где $k_\omega = k_v/k_l$.

Аналогичные выражения можно записать для угловых скоростей остальных звеньев.

Формула (5.12) позволяет по углу наклона найти угловые скорости. Однако можно избежать необходимости рассчитывать их, если дополнительно построить план угловых скоростей (рис. 5.32, б). Выбирается произвольный вертикальный отрезок sk , из точки k под углами α строятся лучи до пересечения с горизонталью, проведенной через точку s . Из построений

следует, что $\operatorname{tg} \alpha = sa/sk$. Следовательно, отрезки sa , sc , sb , sg выражают в масштабе угловые скорости ω_1 , ω_2 , ω_H , ω_6 .

Графическое исследование дифференциального механизма производится аналогично, с той лишь разницей, что скорость точки C принимается равной заданному значению.

5.33 Синтез планетарных механизмов

В отличие от рядовых механизмов, планетарный механизм может существовать только при выполнении определенных соотношений между количеством зубьев колес. Прежде всего должно быть выполнено *условие соосности*. Оно состоит в том, что оси двух центральных — подвижного солнечного и неподвижного опорного — колес, а также водила должны совпадать. В противном случае механизм заклинит. Из рассмотрения схемы, изображенной на рис. 5.33, *а*, следует:

$$a + b = c + d.$$

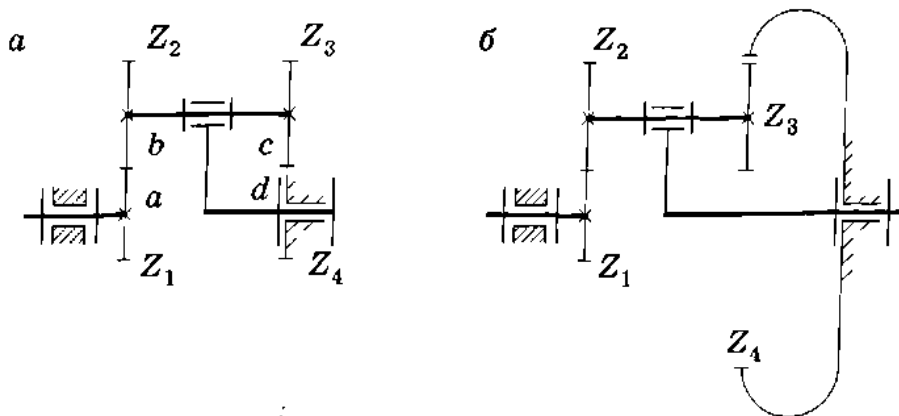


Рис. 5.33. Условие соосности:

а — механизм с внешним зацеплением; *б* — механизм с внутренним зацеплением

Поскольку колеса изображены их делительными окружностями, то нетрудно, используя диаметры делительных окружностей, это равенство представить в виде

$$Z_1 + Z_2 = Z_3 - Z_4.$$

Аналогичным образом для механизма, изображенного на рис. 5.33, б, получено условие

$$Z_1 + Z_2 = Z_4 - Z_3.$$

Условие соседства сателлитов выражается в том, что соседние сателлиты не должны касаться друг друга окружностями вершин (рис. 5.34). Из геометрических построений выводится соотношение

$$2r_{2a} < 2R_H \sin \pi/k,$$

где r_{2a} — радиус окружности вершин сателлита; R_H — радиус водила; k — число сателлитов в механизме.

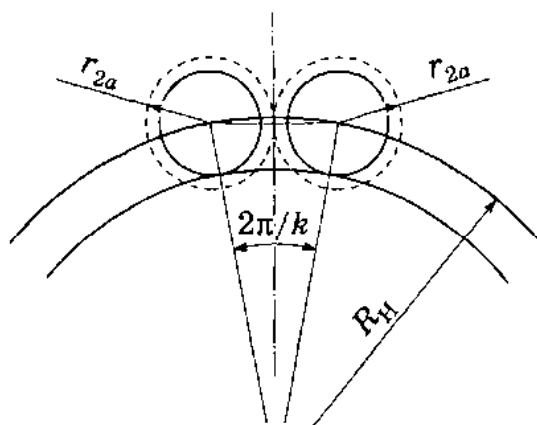


Рис. 5.34. К выводу условия соседства сателлитов

Выразив радиусы колес через модули и количество зубьев и произведя преобразования, получим

$$\sin \pi/k > (Z_2 + 2)/(Z_1 + Z_2). \quad (5.13)$$

Формула (5.13) позволяет подсчитать максимальное число сателлитов. Впрочем, эту задачу можно решить и чисто графически.

При сборке трехколесного планетарного механизма может оказаться, что после установки первого сателлита остальные сателлиты установить нельзя. Это происходит потому, что поставленный первым сателлит полностью определяет взаимное положение центральных колес.

Установим налагаемые на количество зубьев условия, при которых собрать механизм возможно (*условие сборки*) (рис. 5.35). Заметим, что это очень важное условие, несоблюдение которого приводит к невозможности реализации механизма на практике.

Будем считать, что сателлит имеет четное число зубьев, тогда впадины на центральных колесах можно расположить друг против друга. Повернем колесо I на целое число E угловых шагов $\varphi_1^E = E\varphi_1$, где $\varphi_1 = 2\pi/Z_1$. Тогда впадины между зубьями расположатся друг против друга и можно будет поставить следующий сателлит. Подсчитаем угол поворота водила:

$$\varphi_1^E / \varphi_H^E = i_{1H},$$

отсюда

$$\varphi_H^E = 2\pi E / Z_1 i_{1H}.$$

Воспользовавшись формулой Виллиса, выразим i_{1H} через i_{13}^H и преобразуем записанную ранее формулу:

$$\varphi_H^E = 2\pi E / (Z_1 + Z_3).$$

Таким образом можно установить K сателлитов, если расположить их равномерно:

$$K = 2\pi / \varphi_H^E = (Z_1 + Z_3) / E,$$

откуда

$$E = (Z_1 + Z_3) / K.$$

Поскольку K — целое число, сумма $Z_1 + Z_3$ должна быть кратна числу сателлитов. Аналогичные результаты получены и при нечетном числе зубьев сателлитов. Для передач с двойными сателлитами условие сборки можно получить тем же способом.

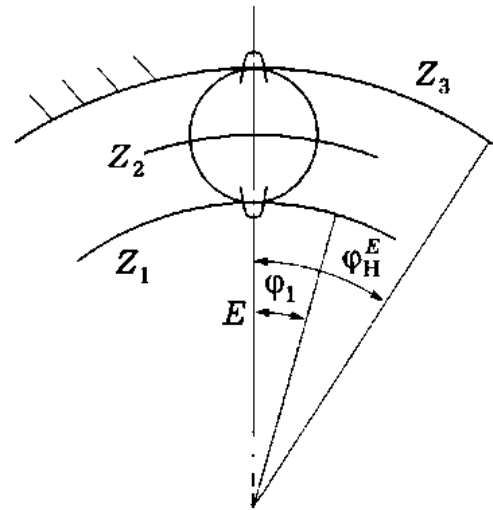


Рис. 5.35. К выводу условия сборки

Пример 5.2. Рассмотрим методику синтеза планетарного механизма, ограничиваясь соблюдением условия заданного передаточного отношения и условия соосности и не учитывая условия сборки. Пусть выбрана схема механизма (рис. 5.36), для которой надо подобрать количества зубьев колес, обеспечивающие требуемое передаточное отношение. В качестве примера возьмем передаточное отношение, равное 12.

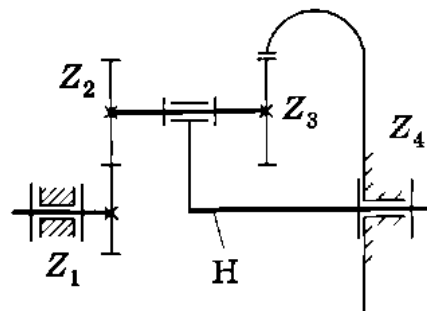


Рис. 5.36. Схема планетарного механизма

1. Определим передаточное отношение соответствующего обращенного механизма:

$$i_{14}^H = 1 - i_{1H} = -11.$$

2. Разложим полученное передаточное отношение на множители. Здесь возможны разнообразные варианты, например:

$$i_{14}^H = Z_2 Z_4 / Z_1 Z_3 = 220/20 = 4 \cdot 55 / 4 \cdot 5.$$

3. Запишем условие соосности и проверим его выполнение для принятых чисел зубьев:

$$Z_1 + Z_2 = 4 + 4 = 8;$$

$$Z_4 - Z_3 = 55 - 5 = 50.$$

4. Условие соосности, как правило, не выполняется. Для его выполнения нужно умножить первую формулу на 50, а вторую — на 8. Тогда

$$Z_1 = 200; \quad Z_2 = 200; \quad Z_4 = 440; \quad Z_3 = 40.$$

Полученные количества зубьев можно сократить так, чтобы получились реально выполнимые колеса с числом зубьев в пределах 10...100.

Передаточные механизмы для мехатронных устройств

5.19.1. Волновая передача

В 1959 г. в США была запатентована зубчатая передача, которая получила название *волновой передачи*. Она в определенной степени напоминает планетарную передачу. Ее основные достоинства — большое передаточное отношение, высокий КПД, способность передавать движение в герметичные полости, многопарность зацепления (до 30 % зубьев), малые скольжение и износ.

В волновой передаче одно из колес изготавливается гибким, способным деформироваться под действием звена, называемого *генератором волн*. Волновые передачи весьма разнообразны. Чаще всего они выполняются с неподвижным жестким звеном и внутренним гибким колесом. Возможны двухволновые и многоволновые механизмы с генератором в виде эллипсоидного звена с гибким подшипником качения. Преобразование движения происходит за счет деформации упругой оболочки.

Легче всего принцип действия волновой передачи объяснить исходя из аналогии с планетарной передачей. Волновая передача, представленная на рис. 5.37, а, эквивалентна двухколесной планетарной передаче (рис. 5.37, б), у которой число зубьев сателлита равно числу зубьев гибкого колеса.

Для планетарного механизма

$$i_{12}^H = (\omega_1 - \omega_H) / (\omega_2 - \omega_H) = Z_2 / Z_1;$$

$$\omega_1 / \omega_H = 1 - Z_2 / Z_1;$$

$$i_{пл} = \omega_H / \omega_1 = 1 / (1 - Z_2 / Z_1).$$

Если $Z_2 / Z_1 \approx 1$, то $i_{пл}$ получается очень большим и имеет отрицательный знак.

Еще один вариант исполнения волновой передачи представлен на рис. 5.37, в. Здесь посредством гибкой стенки гер-

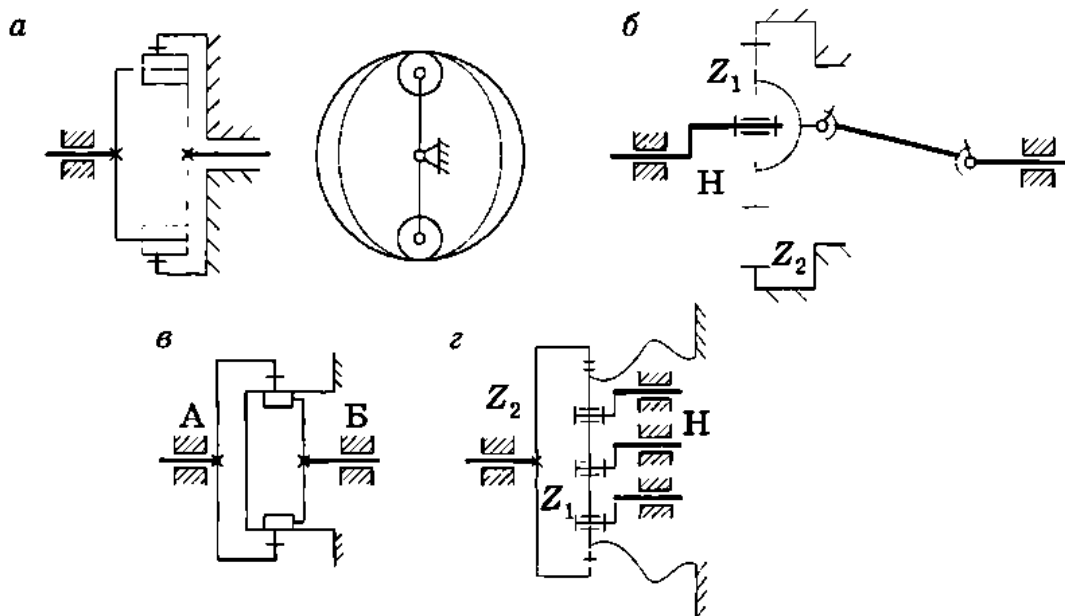


Рис. 5.37. Волновые передачи и их планетарные аналоги:
 а — волновая передача с гибким колесом; б — ее планетарный аналог;
 в — волновая передача с герметичным разделением полостей;
 г — ее планетарный аналог

метично разъединены полости А и Б. Планетарным аналогом служит механизм с поступательно движущимся сателлитом (рис. 5.37, г). Для него

$$i_{12}^H = (\omega_1 - \omega_H) / (\omega_2 - \omega_H) = Z_2 / Z_1;$$

$$i_{2H} = \omega_2 / \omega_1 = 1 - i_{21}^H;$$

$$i_{пл} = \omega_H / \omega_2 = (Z_2 / Z_1) / (Z_2 / Z_1 - 1).$$

Здесь передаточное отношение положительное, что обуславливает большой КПД. Высокий КПД является одной из причин применения волновой передачи в тех случаях, когда экономия энергии крайне необходима, например в космической технике.

Несмотря на отмеченные положительные качества волновых передач, они не получили широкого распространения в технике из-за технологических трудностей, связанных с изготовлением надежного и долговечного гибкого колеса. Область применения их ограничена относительно малыми мощностями, в основном в приборах и мехатронных устройствах типа роботов.

5.19.2. Планетарные механизмы робототехнического назначения

Планетарные механизмы находят широкое применение в робототехнических устройствах. В некоторых случаях они обеспечивают основные движения роботов, как, например, механизм ориентации кисти робота. В основу его положен зубчатый дифференциальный механизм с коническими колесами.

Для объяснения принципа работы этих довольно своеобразных механизмов рассмотрим вначале схему простейшего конического дифференциала (рис. 5.38, а). Угловая скорость колеса 2 находится из соотношения

$$\omega_2 = \omega_H + \omega_{2H},$$

где ω_2 и ω_H — векторы абсолютной угловой скорости для колеса 2 и водила соответственно; ω_{2H} — вектор угловой скорости звена 2 относительно водила.

Сообщим всему механизму обратное движение вокруг колеса 1 со скоростью водила, но в противоположном направлении. Это не изменит относительного движения звеньев, однако позволит рассматривать обращенный механизм как рядовую коническую передачу (рис. 5.38, б). Для нее справедливо выражение

$$\frac{\omega_{1H}}{\omega_{2H}} = \frac{Z_2}{Z_1}, \quad (5.14)$$

где $\omega_{1H} = \omega_1 - \omega_H$.

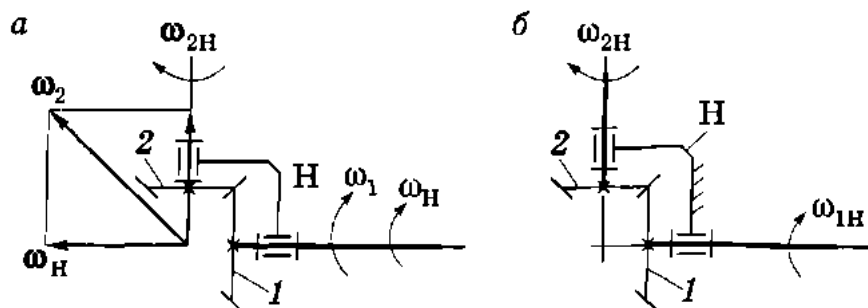


Рис. 5.38. Двухколесный конический дифференциал:
а — схема; б — обращенная схема

Анализ формулы (5.14) показывает, что при $\omega_1 = 0$

$$\omega_{2H} = -\omega_H \frac{Z_1}{Z_2} \text{ — механизм планетарный;}$$

при $\omega_H = 0$

$$\omega_{2H} = \omega_1 \frac{Z_1}{Z_2} \text{ — механизм рядовой.}$$

Конический дифференциал применяется в механизме кисти робота. Из приведенных ранее соотношений вытекает, что при качании кисти происходит и ее ротация, т.е. поворот вокруг собственной оси. Чтобы разделить эти движения, следует сообщить центральному колесу 1 угловую скорость $\omega_1 = \omega_H$.

Уравнение кинематической связи для симметричного конического дифференциала (рис. 5.39), также широко применяемого в роботах, имеет вид

$$\omega_1 + \omega_3 = 2\omega_H.$$

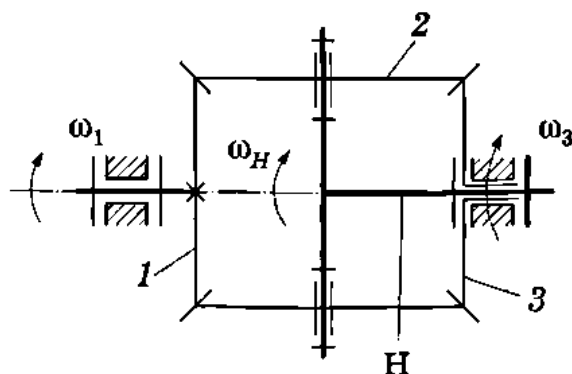


Рис. 5.39. Симметричный конический дифференциал

Из него следует, что если скорости центральных колес одинаковы, дифференциал заблокирован ($\omega_1 = \omega_H = \omega_3$), а если одно из центральных колес неподвижно, то $\omega_H = \frac{\omega_1}{2}$, т.е. скорость

водила равна половине скорости ведущего колеса при одинаковом направлении вращения.

Для преобразования вращательного движения в поступательное применяется *реечная зубчатая передача*, представляю-

щая собой, по существу, вариант зубчатой передачи, у которой зубчатое колесо имеет бесконечно большой радиус. Реечные передачи могут выполняться и по дифференциальным схемам.

Линейные скорости точек механизма (рис. 5.40) связаны соотношением

$$v_A = v_H + v_{AH}, \quad (5.15)$$

где v_H — скорость водила; v_{AH} — скорость точки A относительно водила.

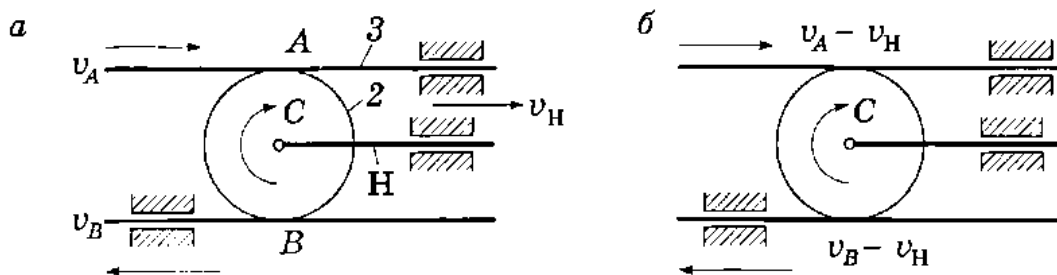


Рис. 5.40. Реечный дифференциал:
а — схема; б — обращенная схема

Сообщим механизму обращенное поступательное движение со скоростью $-v_H$. Для обращенного механизма

$$v_{AH} = v_A - v_H = -(v_B - v_H). \quad (5.16)$$

После подстановки выражения (5.16) в (5.15) получим уравнение реечного дифференциала

$$v_A = 2v_H - v_B.$$

Если скорость точки B равна нулю, то $v_A = 2v_H$, т.е. происходит удвоение скорости водила, а значит, ход звена 3 в два раза больше хода водила.

В роботах находит применение планетарный механизм с гибким тяговым органом, в качестве которого может служить цепь. Цепь охватывает неподвижную звездочку 1 и подвижную звездочку 2, закрепленную на несущем подвижном звене (рис. 5.41, а). Звездочка 2 здесь играет роль сателлита, а несущее подвижное звено — роль водила. При вращении

водила с угловой скоростью ω_H сателлит из-за наличия гибкой связи приобретает абсолютную угловую скорость ω_2 и вращается в направлении, противоположном вращению водила.

Применим принцип обращения движения и рассмотрим получившийся механизм (рис. 5.41, б). Это рядовая цепная передача, для которой кинематическое уравнение имеет вид

$$\frac{-\omega_H}{\omega_2 - \omega_H} = \frac{Z_2}{Z_1},$$

откуда следует уравнение для планетарного механизма:

$$\omega_2 = \omega_H \frac{Z_2/Z_1 - 1}{Z_2/Z_1}.$$

Пусть, например, $Z_2 = Z_1$, тогда $\omega_2 = 0$ и звездочка 2 сохраняет направление вращения водила неизменным. Если же $Z_2 = 0,5 Z_1$, то $\omega_2 = -\omega_H$, т.е. водило и сателлит вращаются в разные стороны с одинаковой скоростью. Оба механизма используются в манипуляторах: первый — для развязки вращательных движений, второй — для получения прямолинейного движения за счет использования двух звеньев равной длины, вращающихся с одинаковыми скоростями, но в противоположных направлениях.

Еще одно интересное применение этого механизма предложено автором настоящего пособия — использование его в качестве передаточного механизма. Для этого нужно уменьшить длину водила, разность чисел зубьев обеих звездочек свести к минимуму, вплоть до единицы. Это не изменит физической сущности механизма, представленного на рис. 5.41. Передаточное отношение такого механизма будет рассчитываться по формуле

$$i = \omega_H / \omega_2 = i_{12}^H / (i_{12}^H - 1).$$

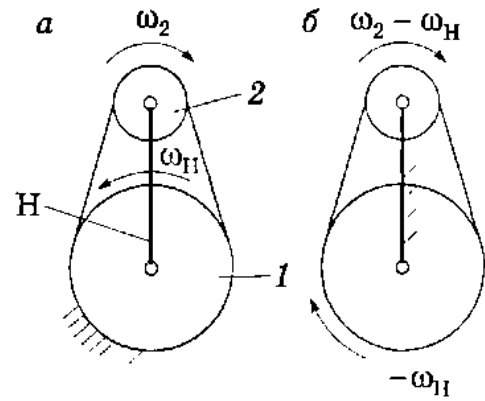


Рис. 5.41. Цепной планетарный механизм: а — схема; б — обращенная схема

Цепная передача может быть заменена зубчатым ремнем (рис. 5.42). Для симметричности нагружения ремня здесь добавлен зубчатый шкив 3. Кинематика этого редуктора полностью описывается приведенными ранее формулами. Его достоинства — малые габариты при больших передаточных отношениях — обусловлены тем, что разность чисел зубьев зубчатых шкивов 2 и 3 равна единице. Кроме того, использование зубчатого ремня обеспечивает уменьшение шума передачи и массы по сравнению с планетарными механизмами обычного типа.

Из-за наличия большого числа зубьев, находящихся в зацеплении, повышается нагрузочная способность передачи. Благодаря использованию в передаче ремня уменьшается момент инерции подвижных частей, а значит, улучшаются динамические характеристики привода. Ремень изготавливается из резины или полиуретана. Ременная передача может работать при отсутствии смазки. Более подробные сведения о механизме привода приводятся в книге [4].

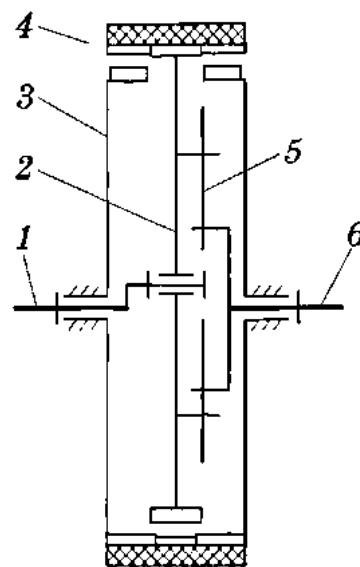


Рис. 5.42.

Зубчато-ременный планетарный редуктор:

1 — входной вал; 2 — подвижный шкив; 3 — неподвижный шкив-звездочка; 4 — зубчатый ремень; 5 — крестовая муфта; 6 — выходной вал

Контрольные вопросы и задания

1. Охарактеризуйте достоинства зубчатых механизмов
2. Какие передачи относятся к классу гиперболоидных передач?
3. В чем состоит основной закон зацепления?
4. Какими основными свойствами обладает эвольвента окружности?

5. В чем состоят преимущества эвольвентного зацепления перед другими видами зацепления?
6. Назовите два метода нарезания колес. Охарактеризуйте их особенности.
7. Что такое смещение?
8. Что такое делительная окружность? Какие еще окружности можно указать на зубчатом колесе?
9. Какие качественные характеристики зацепления можно определить с помощью картины зацепления?
10. На что указывает коэффициент перекрытия?
11. В чем заключаются преимущества косозубых колес?
12. Что такое передаточное отношение? Как оно выражается через числа зубьев колес для рядового зубчатого механизма?
13. В чем состоит отличие планетарного механизма от рядового? Какие названия имеют его звенья и почему?
14. Приведите пример дифференциального механизма.
15. Определите передаточное отношение трехколесного планетарного механизма; числа зубьев сателлитов и количество сателлитов, которое можно установить в данной передаче; диаметры всех колес, если модуль $m = 2$, а $Z_1 = 23$, $Z_3 = 73$.



СИНТЕЗ КУЛАЧКОВЫХ МЕХАНИЗМОВ

Виды кулачковых механизмов

Кулачковым механизмом называется механизм, в состав которого входит *кулачок* — звено, рабочая поверхность которого имеет переменную кривизну.

Кулачковые механизмы широко применяются в двигателях внутреннего сгорания, текстильных машинах, полиграфических машинах, машинах-автоматах различного назначения, в разнообразных приборах. Достоинство кулачковых механизмов — возможность воспроизводить почти любой закон движения, причем синтез их относительно несложен. Недостатки — наличие высшей кинематической пары и, как следствие, ограниченная долговечность, сложность изготовления, высокая стоимость. Высшая кинематическая пара предъявляет повышенные требования к твердости и точности изготовления рабочих поверхностей.

Кулачковый механизм состоит из кулачка (обычно вращающегося) и толкателя, совершающего возвратно-поступательное движение. Иногда толкатель совершает колебательное движение, в таком случае он называется *коромыслом*. Для уменьшения трения толкатель снабжают роликом. Схемы кулачковых механизмов чрезвычайно разнообразны: они бывают плоские и пространственные, с толкателем или коромыслом, имеющим в качестве рабочего элемента острие, ролик или плоскость, центральные и дезаксиальные (рис. 6.1).

Соприкосновение звеньев в кулачковом механизме обеспечивается силовым или геометрическим замыканием. Силовое замыкание осуществляется с помощью пружины (рис. 6.2, а, б). Геометрическое замыкание осуществляется с помощью паза, в котором помещается ролик толкателя (рис. 6.2, в). Недостатками такой конструкции являются трудоемкость точного

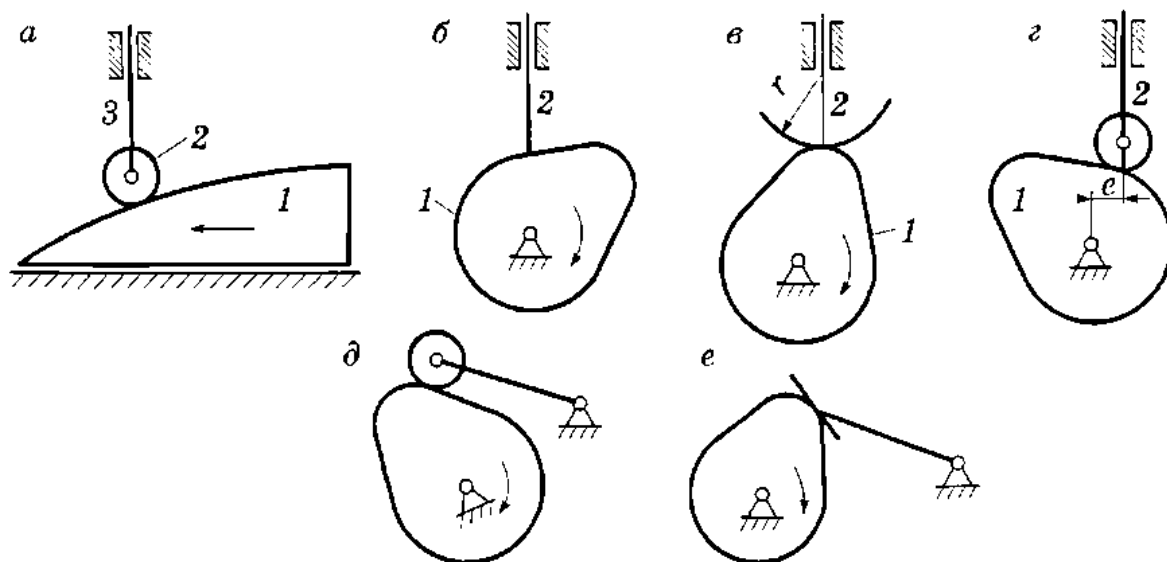


Рис. 6.1. Виды кулачковых механизмов:

a — с поступательно движущимся кулачком; *б* — с острием; *в* — с криволинейной тарелкой; *г* — с роликом; *д* — с коромыслом; *е* — с плоским коромыслом

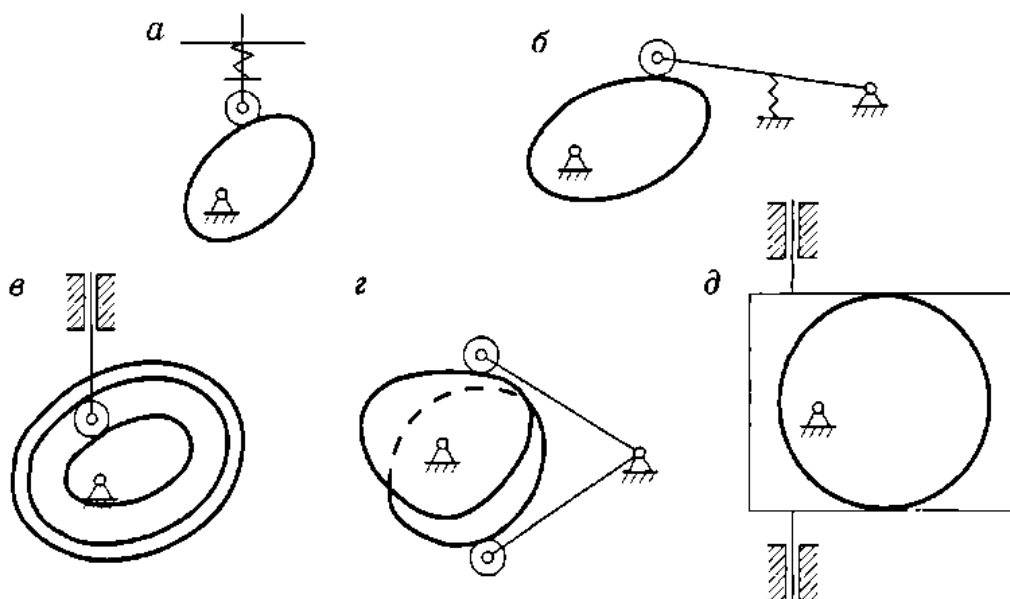


Рис. 6.2. Силовое и геометрическое замыкание:

a, б — с помощью пружины; *в* — с пазом; *г* — двухдисковый кулачок; *д* — кулачок с рамочным толкателем

выполнения паза и наличие удара при реверсировании движения толкателя из-за неизбежного зазора между роликом и пазом. Этому недостатка лишен двухдисковый кулачок (рис. 6.2, *г*). Еще одну разновидность соприкосновения обес-

печивает диаметральный кулачок с рамочным толкателем (рис. 6.2, *д*).

Кулачковый механизм может быть заменен кинематически эквивалентным рычажным механизмом. В основе этой процедуры лежит принцип замены механизма с высшей парой механизмом с низшими парами: через точку касания элементов высшей пары следует провести общую нормаль к профилям и в центрах кривизны профилей поместить шарниры или поступательные пары (если одним из профилей является прямая линия). На рис. 6.3 представлены кулачковые механизмы и заменяющие их рычажные механизмы.

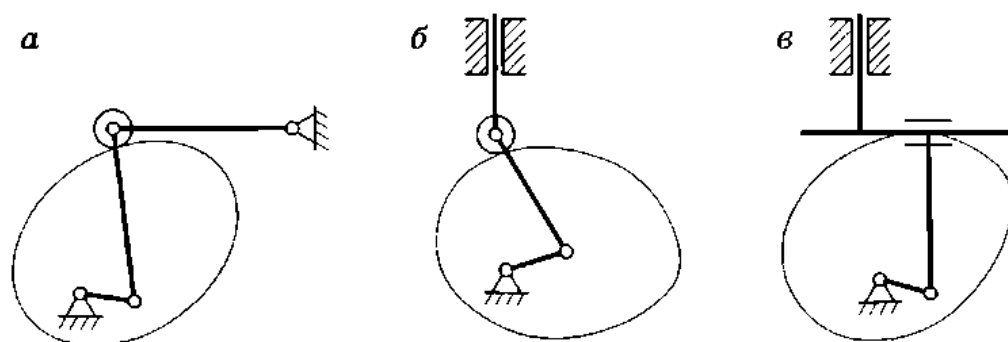


Рис. 6.3. Заменяющие механизмы:

а — шарнирный четырехзвенник; *б* — кривошипно-ползунный механизм; *в* — синусный механизм

Движение ведомых звеньев будет одинаковым в кулачковых и заменяющих их рычажных механизмах. Следует подчеркнуть, что речь идет о мгновенно заменяющих механизмах, так как из-за непрерывного изменения радиуса кривизны кулачка меняются длины кривошипа и шатуна. Таким образом, задачу кинематического исследования кулачкового механизма можно свести к исследованию соответствующего мгновенно заменяющего рычажного механизма.

6.2. Элементы профиля кулачка

Профили кулачков чрезвычайно разнообразны, однако у всех них есть общие элементы. У всякого кулачка можно найти точки, наиболее и наименее удаленные от центра враще-

ния, и указать соответствующие им максимальный радиус R_{\max} и минимальный радиус R_{\min} (рис. 6.4). Окружность радиусом R_{\min} называется *окружностью минимального радиуса*. Она играет важную роль в анализе кулачковых механизмов. В моменты, когда толкатель контактирует с точками профиля, соответствующими R_{\min} и R_{\max} , он неподвижен. Если такая точка одна, то толкатель останавливается на мгновение; если таких точек много, так что они образуют дугу радиусом R_{\min} или R_{\max} , наблюдается нижний или верхний *выстой*.

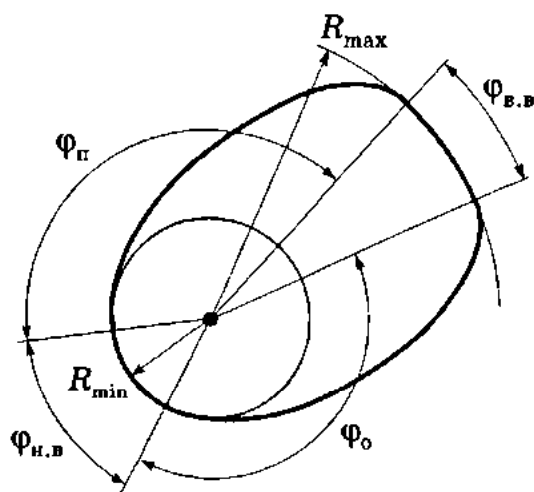


Рис. 6.4. Элементы профиля кулачка

Между периодами остановок (выстоев) существуют периоды подъема и опускания толкателя. Они соответствуют левому и правому рабочим профилям кулачка (именно рабочий профиль определяет закон перемещения толкателя при подъеме или опускании). Соответствующие периоды называются фазами работы толкателя и на профиле кулачка определяются фазовыми углами: углом нижнего выстоя $\varphi_{н.в}$, углом подъема $\varphi_{п}$, углом верхнего выстоя $\varphi_{в.в}$, углом опускания $\varphi_{о}$.

Фазовые углы связаны соотношением

$$\varphi_{п} + \varphi_{в.в} + \varphi_{о} + \varphi_{н.в} = 360^{\circ}.$$

Диаграмма перемещений толкателя любого кулачкового механизма имеет характерный вид, представленный на рис. 6.5.

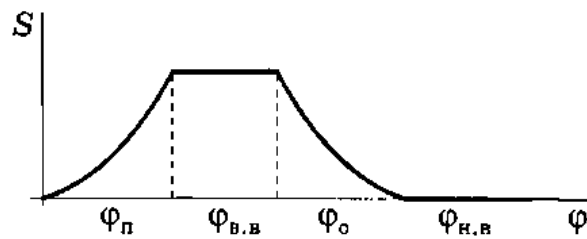


Рис. 6.5. Диаграмма перемещений

Разнообразие законов движения достигается за счет различного сочетания длительностей фаз, а также различных законов подъема и опускания толкателя.



Выбор закона движения толкателя

В ряде технологических машин, таких как текстильные, полиграфические и т.п., закон движения толкателя кулачкового механизма полностью определен той операцией, для выполнения которой механизм предназначен. В таком случае выбирать закон движения не приходится. Однако во многих случаях, например в машинах-автоматах, автомобильных двигателях и др., технологическим процессом задаются только фазовые углы и величины перемещений. Внутри каждой фазы подъема и опускания закон движения может быть не задан технологическими условиями, тогда он выбирается таким, чтобы механизм был оптимальным в динамическом отношении.

Простейшим законом движения является закон постоянной скорости (рис. 6.6, а). Скорость в точке 1 теоретически мгновенно изменяет направление, следовательно, ускорение стремится к бесконечности. На практике из-за упругости звеньев изменение направления происходит за некоторый малый промежуток времени, поэтому ускорение не бесконечно, но велико, следовательно, велика и сила инерции. Это явление носит название «жесткий удар». Такой закон движения может быть применен только для тихоходных механизмов, на которых лежит небольшая ответственность.

Жесткого удара можно избежать, если принять закон постоянного ускорения (рис. 6.6, б). Однако здесь мгновенно

изменяется направление ускорения и, следовательно, направление силы инерции. Это тоже проявляется в виде удара — «мягкого удара», который вызывает колебания и дополнительные динамические нагрузки. При применении закона косинусоидального ускорения в точке 1 сила инерции равна нулю, но мягкий удар в точке 2 все же происходит, если далее следует выстой толкателя (рис. 6.6, в).

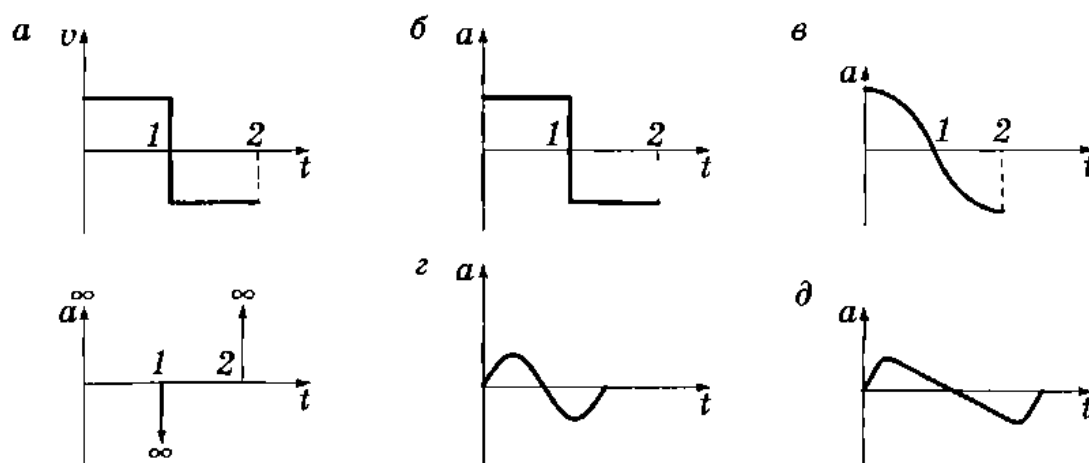


Рис. 6.6. Законы движения толкателя:

a — закон постоянной скорости; *б* — закон постоянного ускорения; *в* — косинусоидальный закон; *г* — синусоидальный закон; *д* — полиномиальный закон

Безударными будут синусоидальный закон (рис. 6.6, *г*) и полиномиальный закон (рис. 6.6, *д*). Однако применение двух последних законов требует очень высокой точности при изготовлении кулачков.

Раньше обычно применялись кулачки, очерченные дугами сопряженных окружностей. Несмотря на то что профиль таких кулачков был абсолютно гладким, в точках сопряжения происходили мягкие удары, так как радиусы кривизны изменялись мгновенно.

С совершенствованием технологий стали применяться кулачки с более сложным профилем.



Изготовление кулачков

Кулачковые механизмы очень чувствительны к точности профиля кулачков, поэтому требуется особо тщательно изготавливать последние. Основным методом изготовления кулачков — по точкам. На требуемом расстоянии от оси кулачка устанавливается фреза, и элемент профиля обрабатывается. Затем заготовка с помощью делительного устройства поворачивается на $0,5...1^\circ$, фреза устанавливается в новое положение, и процесс нарезания повторяется. Процесс очень трудоемок, так как требует большого числа установок фрезы. Возникающие при таком способе изготовления на профиле гребешки удаляются при последующей доработке.

Для изготовления кулачков применяются также копировально-фрезерные станки и станки с числовым программным управлением. В этом случае профиль кулачка задается в числовом виде и автоматически воспроизводится на заготовке.



Анализ кулачковых механизмов

Анализ кулачкового механизма состоит в определении кинематических параметров движения толкателя: перемещения, скорости и ускорения. Рассмотрим эту задачу на примере центрального кулачкового механизма с толкателем, имеющим острие (рис. 6.7).

Как видно из рисунка, для данного положения кулачкового механизма перемещение толкателя есть разность между радиус-вектором профиля кулачка и окружностью минимального радиуса. Для определения перемещения в другом положении следует повернуть кулачок и снова найти эту разность. Однако с целью облегчения построений удобно сообщить механизму обратное движение со скоростью, равной скорости вращения кулачка, но в обратном направлении. В таком случае кулачок останется неподвижным, а ось толкателя будет занимать последовательные положения 1, 2, 3 и т.д.

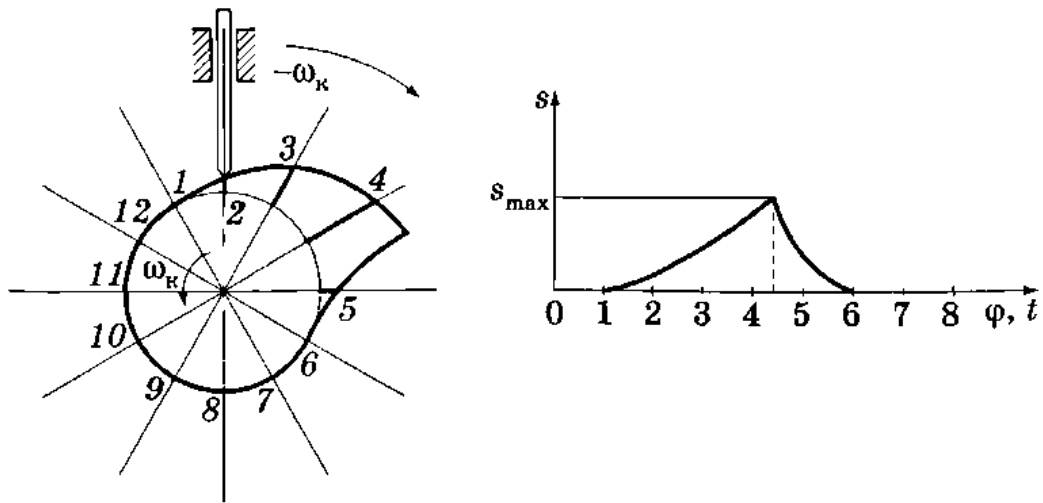


Рис. 6.7. Анализ кулачкового механизма

За начало отсчета принимают точку отрыва профиля кулачка от окружности минимального радиуса. Обычно окружность разбивают на 12 частей. Части берутся равными, так как, согласно формуле $\varphi = \omega t$, при постоянной скорости вращения углы поворота φ на равных интервалах времени тоже будут равными. Измерив перемещения и отложив их как ординаты графика, соединяют точки плавной кривой. Полученный график есть график $s(\varphi)$ или, в другом масштабе, график $s(t)$. Графики $v(t)$ и $a(t)$ получаются в результате графического дифференцирования графика $s(t)$.

Если толкатель снабжен роликом, то следует рассмотреть эквивалентный механизм, у которого центр ролика работает как острие по центровому профилю кулачка. **Центровым профилем** называется траектория центра ролика в обратном движении. Центральной профилем является эквидистантным (равноотстоящим) по отношению к действительному профилю. Расстояние между ними, измеренное по нормали к профилю, равно радиусу ролика.

Анализ кулачковых механизмов других видов принципиально подобен рассмотренному ранее. Особенности их анализа будут объяснены в дальнейшем, в задачах синтеза кулачковых механизмов.

Угол давления и его связь с размерами кулачка

Синтез кулачкового механизма является очень важной для практики и в то же время сложной задачей. Синтез выполняется в два этапа. Первый этап — определение основных размеров механизма: минимального радиуса кулачка, диаметра ролика, длины коромысла, положения неподвижных элементов механизма. Второй этап — определение профиля кулачка по заданному закону движения. Минимальный радиус кулачка определяется на основании угла давления.

Углом давления в кулачковом механизме называется угол между направлением силы, действующей со стороны кулачка на толкатель, и направлением перемещения толкателя, вызванного этой силой. В кулачковом механизме с роликовым толкателем сила действует по общей нормали, проведенной через точку касания ролика и кулачка, направление перемещения — по оси толкателя (рис. 6.8). Угол θ между этими направлениями и является углом давления.

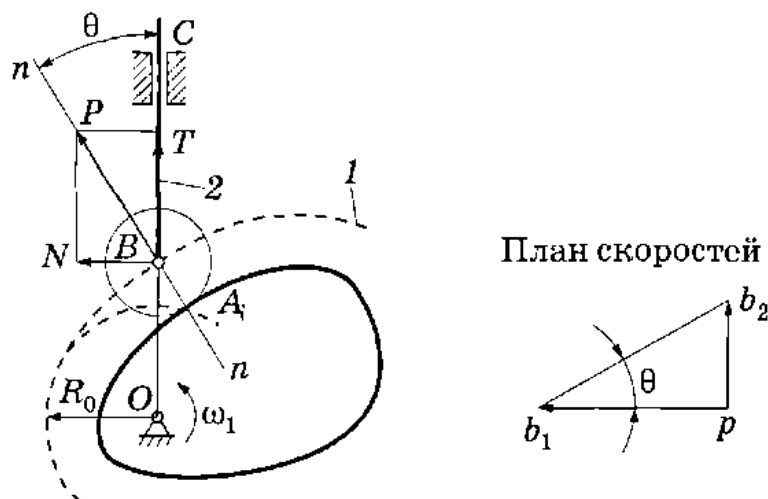


Рис. 6.8. Угол давления в кулачковом механизме

Перенесем силу P по линии действия $n-n$ в точку B и разложим на составляющие N и T . Сила T является движущей силой для толкателя, сила N прижимает толкатель к направ-

ляющей, в результате чего возникает сила трения F . Запишем соответствующие соотношения:

$$T = P \cos \theta;$$

$$N = P \sin \theta;$$

$$F = fP \sin \theta,$$

где f — коэффициент трения.

С увеличением угла давления θ движущая сила T уменьшается, а сила N , а значит, и сила трения F увеличиваются. При некотором предельном значении угла θ движущая сила станет равной силе трения — толкатель застопорится. Выясним эти условия:

$$F = T;$$

$$fP \sin \theta = P \cos \theta.$$

Отсюда $\operatorname{tg} \theta = 1/f$, т.е. предельный угол давления определяется коэффициентом трения f . В правильно спроектированном кулачковом механизме угол давления должен быть значительно меньше предельного. Рекомендуется на практике использовать допустимый угол давления до 30° для механизмов с роликовым толкателем и до 45° — для механизмов с роликовым коромыслом.

Выбирая соответствующие размеры кулачка, всегда можно удовлетворить поставленному требованию к углу давления. Выясним связь между размерами кулачка и углом давления. Для этого рассмотрим кулачковый механизм с острым толкателем, работающим по центровому профилю (см. рис. 6.8), эквивалентный исходному кулачковому механизму с роликовым толкателем.

Построим план скоростей для этого механизма:

$$v_{b2} = v_{b1} + v_{b2,b1}.$$

Из плана скоростей следует:

$$\operatorname{tg} \theta = v_{b2}/v_{b1} = v_b/\omega(R_0 + s). \quad (6.1)$$

Анализ этой формулы показывает, что между углом давления и минимальным радиусом существует нелинейная связь, такая, что с увеличением минимального радиуса R_0 угол давления уменьшается. Уменьшение угла давления благоприятно сказывается на КПД механизма, однако это достигается за счет увеличения его габаритов.

На основании формулы (6.1) разработан графический прием определения минимального радиуса, используемый обычно при курсовом проектировании (рис. 6.9). Предварительно нужно построить графики зависимости перемещения толкателя от времени $s(t)$, скорости от времени $v(t)$, ускорения от времени $a(t)$. Эту операцию можно выполнить с использованием метода графических диаграмм, рассмотренного в 2.7.

На основании графиков движения толкателя $s(t)$ и $v(t)$ методом исключения общей переменной строится график $v(s)$, а затем переходом к новой переменной $s = v/\omega$ — график $s(s')$ (рис. 6.9). Переменная s' называется аналогом скорости. Положительным направлением оси s' принимается направление вращения кулачка. В связи с тем что размерности s и s' одинаковы, масштабные коэффициенты по обеим осям выбираются также одинаковыми.

Если от точки O вниз отложить минимальный радиус, а затем точку O_1 соединить вспомогательной линией с произвольной точкой 1 на графике $s(s')$, то эта линия образует с осью ординат угол θ — это вытекает из имеющегося соответствия отрезков на рис. 6.9 и формулы (6.1).

Действительно, формулу (6.1) можно представить в виде

$$\operatorname{tg} \theta = s' / (R_0 + s').$$

На рис. 6.9 отрезок O_21 представляет s' , а отрезок O_1O_2 — $R_0 + s'$.

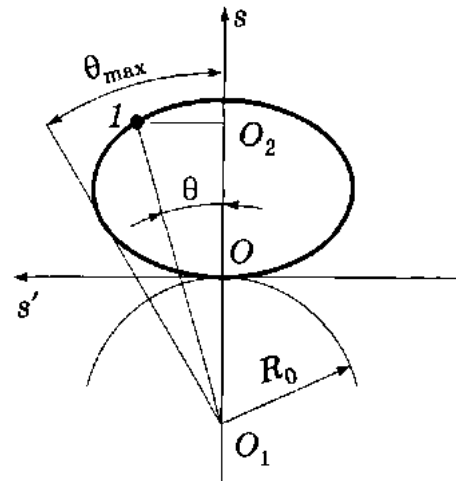


Рис. 6.9. Определение минимального радиуса в центральном и дезаксиальном кулачковом механизме с роликовым толкателем

Максимальный угол давления получится, если из точки O_1 провести касательную к левой части графика. Для кулачка с силовым замыканием достаточно рассмотреть только левую часть графика, так как опасность заклинивания существует только на фазе подъема. Для дезаксиального кулачкового механизма вспомогательная линия строится до линии дезаксиала (см. рис. 6.9), которая проводится параллельно оси Oz на расстоянии, равном дезаксиалу кулачка.

Определение основных размеров

6.7.7 кулачкового механизма с коромыслом

В основе определения минимального радиуса для кулачкового механизма с коромыслом также лежит соотношение (6.1) между минимальным радиусом и углом давления. Различие заключается в своеобразии построения графика $s(s')$, учитывающего непрерывное изменение направлений s и s' . Угол давления для такого механизма определится как угол между направлением общей нормали $n-n$ и вектором скорости v_B (рис. 6.10).

График $s(s')$ строится следующим образом (рис. 6.11). Сначала отмечаются крайние положения коромысла B_1C и B_2C . Дуга B_1B_2 , представляющая собой траекторию точки B , делится на равные части, и через точки деления проводятся лучи

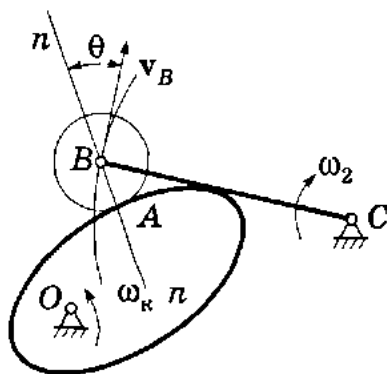


Рис. 6.10. Угол давления в кулачковом механизме с коромыслом

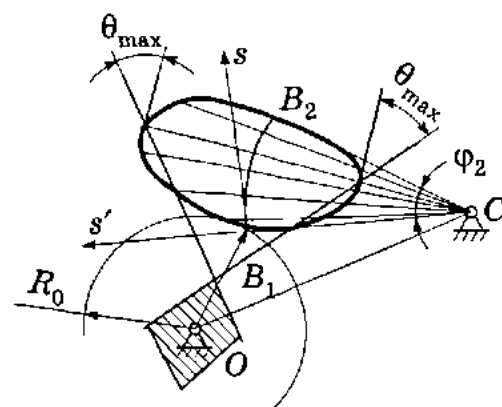


Рис. 6.11. Определение минимального радиуса в кулачковом механизме с коромыслом

из точки C . Для каждого положения коромысла соответствующий участок дуги и луч можно рассматривать как оси s и s' . Откладываем на лучах в принятом масштабе аналоги скорости s' , истинные значения которых рассчитываются по формуле

$$s' = l_{BC}\omega_2/\omega_1.$$

Значения ω_2 берутся из построенного для этой цели методом кинематических диаграмм графика $\omega_2(\varphi_2)$.

На фазе подъема аналоги скоростей откладываются от центра C , на фазе опускания — к центру. В точках, где аналоги скоростей максимальны, строятся перпендикуляры к лучам, и к ним под допустимым углом давления проводятся прямые линии.

Если выбрать центр вращения кулачка в заштрихованной зоне, то отрезок OB_1 можно принять за минимальный радиус. В таком случае приближенно будет удовлетворяться допустимый угол давления. Выбрав положение точки O , мы тем самым определяем еще один размер механизма — расстояние между центрами вращения кулачка и коромысла — точками O и C .

Определение размеров кулачкового механизма с плоским (тарельчатым)



толкателем

Если из-за размерных ограничений не удастся поставить ролик или он оказывается недолговечным, применяют плоский или несколько выпуклый (тарельчатый) толкатель. Условия контакта толкателя со всеми точками профиля требуют, чтобы кулачок везде был выпуклым. Далее будет показано, что условие выпуклости связано с минимальным радиусом R_0 . Заметим, что для данного вида кулачкового механизма угол давления во всех положениях равен нулю и, следовательно,

не может служить основанием для выбора минимального радиуса.

Для данного кулачкового механизма, как это было описано ранее, построим мгновенный заменяющий рычажный механизм $OABC$ (в данном случае синусный механизм) (рис. 6.12, а) и запишем уравнение, связывающее ускорения точек B_2 и B_1 :

$$a_{B_2} = a_A + a_{B_2B_1}. \quad (6.2)$$

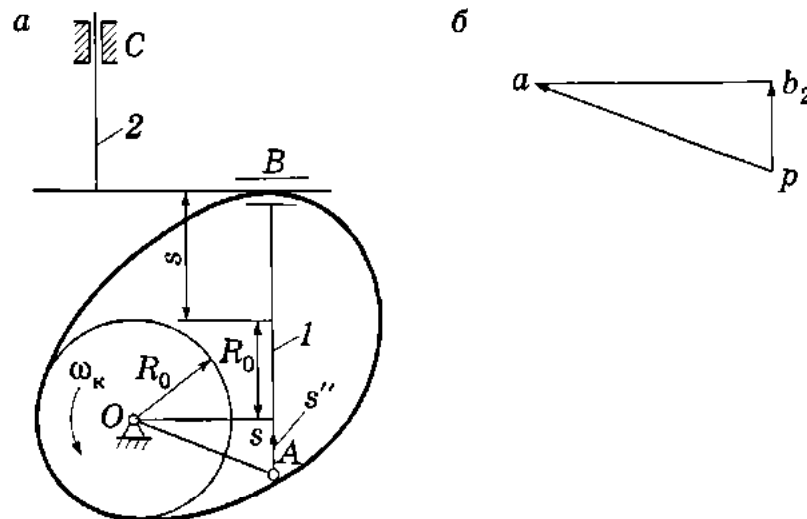


Рис. 6.12. Кулачковый механизм с плоским толкателем:
а — схема; б — план ускорений

Следует иметь в виду, что в заменяющем механизме шатун AB движется поступательно, тогда скорость точки B_1 равняется скорости точки A .

Построим соответствующий план ускорений в масштабе кривошипа и перенесем его на схему механизма, как показано на рис. 6.12, б. Значение масштабного коэффициента плана ускорений определяется по формуле

$$k_a = \omega_k^2 k_l,$$

где k_l — масштабный коэффициент кинематической схемы механизма.

Используя введенные масштабные коэффициенты, можно записать:

$$k_l p b_2 = a_{B_2} / \omega_k^2 = s''.$$

Параметр s'' принято называть аналогом ускорений. Если продифференцировать по времени выражение, получаемое из определения аналога скорости $v = s'\omega_k$, его связь с другими параметрами будет видна из выражения

$$a = s''\omega_k^2 + s'\epsilon. \quad (6.3)$$

При равномерном вращении кулачка $\epsilon = 0$, тогда $s'' = a/\omega_k^2$. Таким образом, на основании формулы (6.3) и рис. 6.12 установлено, что истинное значение отрезка pb_2 представляет собой аналог ускорения s'' .

Условие выпуклости кулачка математически выражается неравенством $\rho \geq 0$, где ρ — радиус кривизны профиля кулачка. Из построения на рис. 6.12 следует:

$$s'' + R_0 + s = \rho \geq 0,$$

откуда

$$R_0 \geq -s'' - s. \quad (6.4)$$

Формула (6.4) устанавливает связь между условием выпуклости кулачка и его минимальным радиусом в кулачковом механизме с тарельчатым толкателем.

Графический метод определения R_0 на основе формулы (6.4) состоит в следующем. Строится график $s''(s)$, и через точку с максимальной абсциссой на отрицательной ветви графика под углом 45° к оси проводится прямая линия до пересечения с осью ординат (рис. 6.13).

Если принять отрезок O_1O за R_0 в масштабе $k_s = k_{s''}$, то из рассмотрения образующегося равнобедренного прямоугольного треугольника вытекает соотношение

$$R_0 = -s'' - s.$$

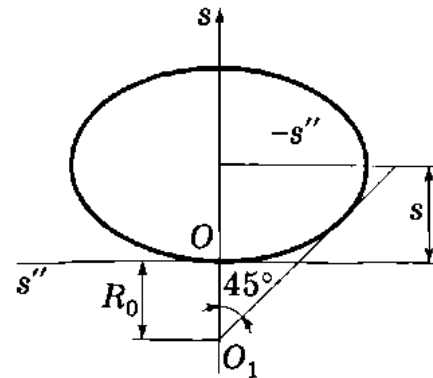


Рис. 6.13. Определение минимального радиуса в кулачковом механизме с плоским толкателем

Для того чтобы выполнялось условие (6.4), R_0 принимают несколько бóльшим.

Вопрос окончательного выбора минимального радиуса кулачка относится к компетенции конструктора, который должен принимать во внимание соображения минимизации размеров конструкции и технологичности деталей кулачкового механизма.

Построение профиля кулачка



по заданному закону движения толкателя

При синтезе кулачкового механизма необходимо определить профиль кулачка. Профиль кулачка представляет собой совокупность отдельных точек, поэтому для его построения нужно знать координаты этих точек. Удобнее всего пользоваться полярной системой координат, т.е. задавать положение каждой точки направлением радиус-вектора и его величиной (модулем).

Рассмотрим графический метод синтеза профиля кулачка для центрального кулачкового механизма с роликовым толкателем (рис. 6.14). Пусть заданы график $s(\varphi)$, минимальный

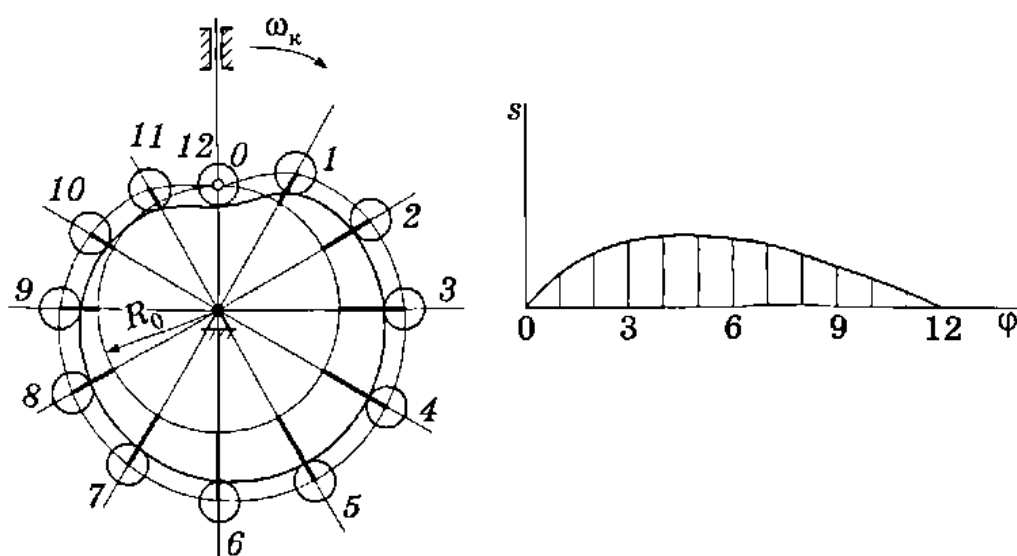


Рис. 6.14. Построение профиля кулачка для центрального кулачкового механизма с роликовым толкателем

радиус центрального профиля R_0 и радиус ролика r . В выбранном масштабе k_l строится окружность минимального радиуса. Ось абсцисс графика и окружность минимального радиуса делятся на равные части. Из центра окружности через точки деления проводятся лучи, определяющие положение оси толкателя в обратном движении. Вдоль этих лучей от окружности минимального радиуса откладываются перемещения толкателя, взятые как соответствующие ординаты графика $s(\varphi)$. Соединив полученные точки плавной кривой, получим центральный профиль кулачкового механизма. Действительный профиль строится внутри центрального профиля на расстоянии, равном радиусу ролика. Как видно из этого описания, синтез производится в порядке, обратном порядку графического анализа.

Однако для изготовления кулачка нужен не чертеж профиля, а координаты точек центрального профиля, совпадающих с центром фрезы. Нетрудно установить, что полярные координаты точек профиля определяются выражениями

$$R = R_0 + s(\varphi); \quad \beta = \varphi,$$

где R — модуль радиус-вектора; β — полярный угол; φ — угол поворота кулачка.

Синтез профиля кулачка дезаксиального механизма выполняется аналогично. Отличие состоит лишь в том, что перемещения толкателя откладываются от окружности минимального радиуса вдоль линий, касательных к окружности дезаксиала. Эти линии представляют положения оси толкателя в обратном движении (рис. 6.15).

При синтезе профиля кулачка для механизма с коромыслом задаются закон движения в виде графика $\varphi_2(\varphi_k)$, длина коромысла l_{BC} , расстояние между центрами вращения кулачка и коромысла l_{OC} , радиус ролика r . В выбранном масштабе строится окружность минимального радиуса и концентрично ей — окружность радиусом l_{OC} , представляющая собой траекторию точки C в обратном движении (рис. 6.16). Эта окружность разбивается на равные части, так же как и ось φ_k графика $\varphi_2(\varphi_k)$. Строится траектория точки B в виде дуги окружности

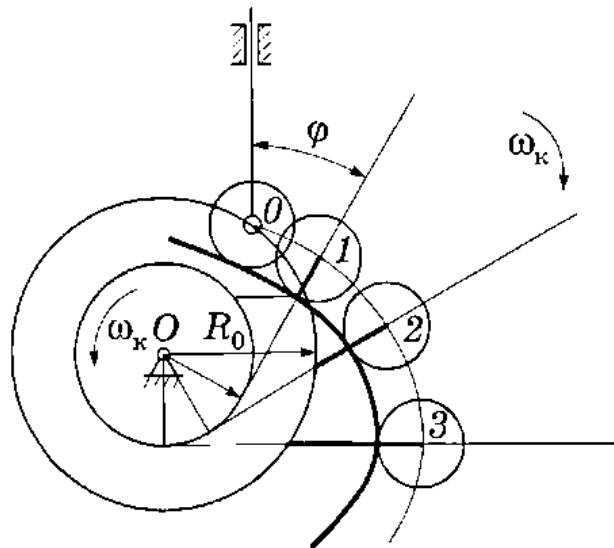


Рис. 6.15. Построение профиля кулачка для дезаксиального кулачкового механизма

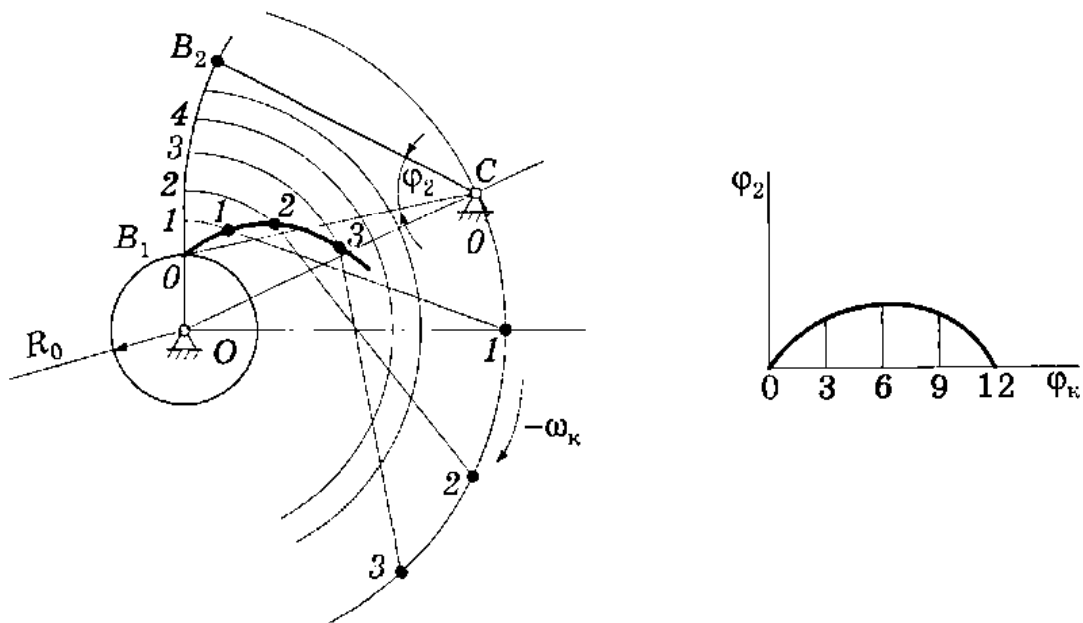


Рис. 6.16. Построение профиля кулачка для коромыслового кулачкового механизма

радиусом l_{BC} и разбивается на участки, пропорциональные углам поворота коромысла ϕ_2 . Через точки деления проводятся концентрические окружности. Из точек равномерного деления окружности радиусом l_{OC} делаются засечки радиусом коромысла l_{BC} на соответствующих концентрических окружностях. Полученные точки определяют центровой профиль кулачка.

Для кулачкового механизма с тарельчатым толкателем перемещения тарелки, определяемые по графику, откладываются на радиальных прямых, проведенных из центра окружности минимального радиуса (рис. 6.17). Эти прямые представляют собой положения оси толкателя в обращенном движении. Через найденные точки проводятся линии, перпендикулярные оси толкателя, обозначающие положения тарелки толкателя. Профиль кулачка строится как огибающая множество положений тарелки. Отметим, что точки касания профиля и тарелки не совпадают с точками пересечения профиля и оси толкателя.

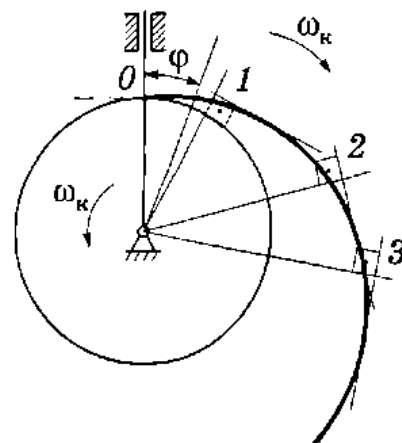


Рис. 6.17. Построение профиля кулачка для механизма с тарельчатым толкателем

Формулы для расчета координат центрального профиля для рассмотренных вариантов кулачковых механизмов приводятся в справочных пособиях (см., например, [7]).

Действительный профиль кулачка строится внутри центрального профиля на расстоянии, равном радиусу ролика. Радиус ролика выбирается из конструктивных и технологических соображений, однако при этом следует учитывать возможность заострения действительного профиля кулачка. Соответствующий выпуклому участку центрального профиля участок действительного профиля также должен быть выпуклым. В противном случае возникает заострение действительного профиля.

Условие заострения на основании связи между двумя эквидистантными профилями можно выразить неравенством

$$\rho = \rho_0 - r \geq 0,$$

где ρ — радиус кривизны действительного профиля; ρ_0 — радиус кривизны центрального профиля; r — радиус ролика. Обычно принимается $r = 0,7\rho_{0\min}$. При больших радиусах кривизны, когда заострение неопасно, радиус ролика вычисляется в зависимости от минимального радиуса центрального профиля по формуле $r = 0,4R_0$.

Динамический анализ кулачковых механизмов с учетом упругости рассматривается в прил. 9.

Контрольные вопросы и задания

1. В каких случаях применяются кулачковые механизмы?
2. Что такое фазовые углы кулачка?
3. Что такое мягкий удар и жесткий удар? Как их избежать?
4. В чем состоит задача анализа кулачкового механизма?
5. Что такое угол давления и как он влияет на работу кулачкового механизма?
6. Что нужно сделать, чтобы при прочих равных условиях уменьшить угол давления в кулачковом механизме?
7. В чем состоит задача синтеза кулачкового механизма?
8. Как выбирается радиус ролика?
9. Нарисуйте кулачок произвольной формы и определите для него минимальный радиус, максимальный радиус и рабочий угол.
10. Постройте график перемещения толкателя в эксцентриковом кулачковом механизме с плоским толкателем, приняв размеры механизма произвольно. (Эксцентриковый кулачковый механизм — это простейший кулачковый механизм, в котором профиль кулачка представляет собой окружность, центр которой не совпадает с центром вращения кулачка.)



ОСНОВЫ ТЕОРИИ МАШИН-АВТОМАТОВ

Основные понятия теории машин-автоматов

Машина-автомат — это устройство, в котором все преобразования энергии, материалов и информации осуществляются без участия человека. Так, например, в станках-автоматах без участия человека выполняются все рабочие и вспомогательные движения. После выполнения совокупности движений устройство приходит в точно такое же состояние, в котором оно находилось перед началом работы. Эта совокупность движений называется *циклом*. Машина-автомат выполняет цикл за циклом самостоятельно. Машина-полуавтомат требует вмешательства человека на границах цикла, например, для съема или установки детали.

Совокупность машин-автоматов, предназначенная для выполнения определенного технологического процесса, называется *автоматической линией*. Обычно наряду с основным технологическим оборудованием в нее входят транспортные и другие вспомогательные устройства. Участие человека в работе автоматических линий состоит лишь в контроле работы линий, наладке, устранении неисправностей.

Основная сфера применения автоматов и автоматических линий — массовое и крупносерийное производство, так как переналадка их на новое изделие требует больших материальных затрат и много времени.

Машина-автомат состоит из одного или нескольких *исполнительных органов*, непосредственно воздействующих на обрабатываемый предмет, и *блока управления*, вырабатывающего управляющие воздействия на исполнительные органы. Источник, из которого блок управления черпает информацию,

называется программой. *Программа* — это совокупность команд, которые должны быть выполнены для обеспечения технологического процесса. Программа разрабатывается заранее на основании проекта технологического процесса. Она физически реализуется на программноносителе. Существует два принципиально различных способа задания программы: в аналоговом и в цифровом виде.

Аналоговые системы управления

Программа в аналоговом виде задается профилем кулачков, копиров, расстановкой упоров и конечных выключателей. Например, в приводе суппорта токарного станка-автомата имеются кулачковый механизм и зубчато-реечная передача, преобразующая поворот коромысла в поступательное движение суппорта (рис. 7.1).

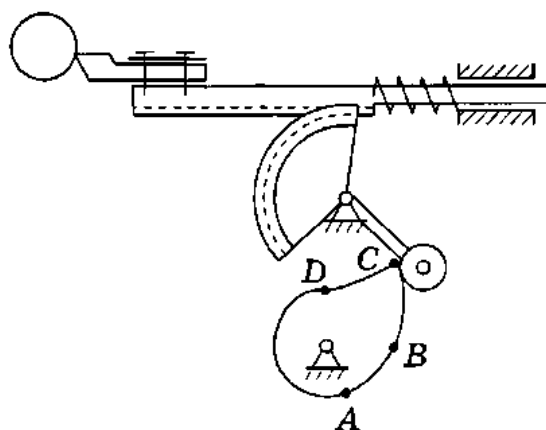


Рис. 7.1. Управление от кулачков

На кулачке имеются участки быстрого подвода инструмента AB и быстрого удаления CD , которые обычно выполняются по параболе, а также участок рабочей подачи BC . Так как обычно подача равномерная, участок BC представляет собой спираль Архимеда.

Кулачок является не только программноносителем аналогового типа, но и механизмом привода исполнительного органа,

в данном случае — суппорта. Задавая различные профили кулачка, можно получать различные законы движения исполнительного органа. Достоинства системы управления с кулачками — простота устройства и высокая точность. Недостатки — высокая стоимость изготовления кулачков и недостаточная долговечность вследствие больших нагрузок на кулачок.

Другой способ задания программы в аналоговом виде — от копиров. Он обычно применяется при обработке деталей со сложным профилем типа кулачков, турбинных лопаток и т.д. На рис. 7.2 представлена схема обработки фасонной цилиндрической поверхности способом непосредственного копирования.

Стол фрезерного станка получает задающую подачу S_z . В результате прокатывания ролика-щупа по поверхности копира К возникает следящая подача S_c . Режущий инструмент, обрабатывающий деталь Д, полностью копирует движение щупа. Недостаток этого способа заключается в том, что для создания большого усилия резания пружина П должна быть достаточно мощной. А это создает большие нагрузки на щуп и копир, снижающие их долговечность. Этот недостаток можно устранить, если применить следящий привод.

Принцип действия следящего привода поясняется схемой на рис. 7.3. Отличие данного способа от предыдущего состоит в том, что усилие резания создается не пружиной, а силовым гидроцилиндром, питаемым от гидронасоса через сервоклапан.

Управление сервоклапаном осуществляется от копира посредством щупа. Сервоклапан выполнен так, что при одина-

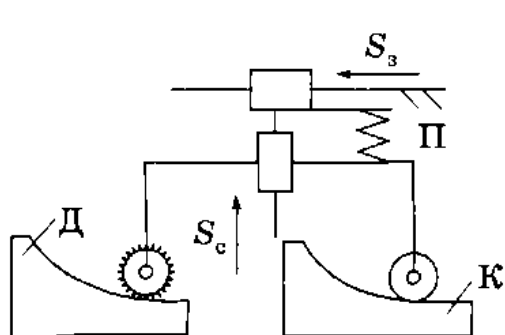


Рис. 7.2. Управление от копиров

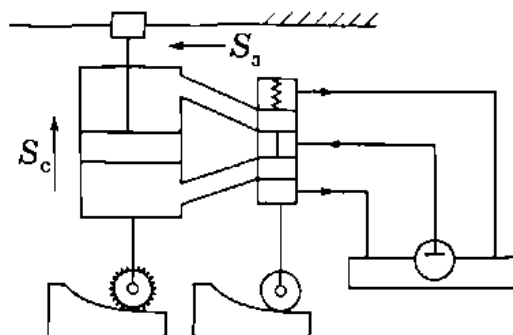


Рис. 7.3. Гидравлический следящий привод

ковых расстояниях от фрезы и щупа до корпуса силового гидроцилиндра пояски клапана перекрывают каналы, связывающие его поршневую и штоковую полости. При появлении задающей подачи S_3 щуп под действием копира перемещается вверх и соединяет штоковую полость с напорной магистралью, а поршневую — со сливной магистралью. Вследствие этого корпус гидроцилиндра, а вместе с ним и фреза переместятся вверх на некоторое расстояние. Движение корпуса прекратится, как только сервоклапан перекроет каналы, питающие гидроцилиндр. Процесс слежения всегда характеризуется некоторым запаздыванием подъема гидроцилиндра, вызывающим погрешность слежения. Надлежащим выбором параметров системы эту погрешность, а также колебания, возникающие из-за инерционности системы, можно свести к минимуму.

Наиболее простой является система управления по упорам. В качестве программносителя здесь выступает линейка или вращающийся барабан с закрепленными на них в определенных местах упорами. Эти упоры воздействуют на концевые выключатели, которые вырабатывают соответствующие сигналы и посылают их в систему управления. Например, с помощью упоров можно составить программу управления обработкой на токарном станке ступенчатого валика (рис. 7.4). Сигнал, вырабатываемый концевым выключателем, управляет поперечной подачей S_{Π} .

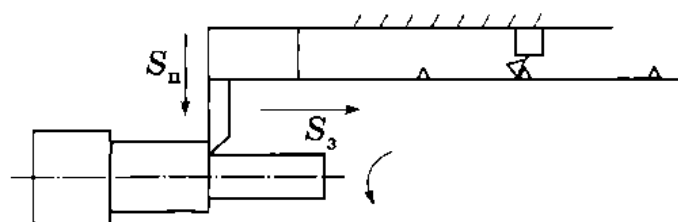


Рис. 7.4. Система управления по упорам

Эта система широко применяется в автоматических линиях, в автооператорах, входит в состав систем блокировок и сигнализации различных устройств. Она конструктивно проста, универсальна, обеспечивает дистанционное управление и легко перенастраивается.



Система управления по времени

Графически рабочий цикл машины-автомата в масштабе времени дается цикловой диаграммой (циклограммой). **Циклограмма** — это программа для системы управления по времени.

Циклограммы могут быть линейными или круговыми. Они дают картину состояния исполнительных органов с привязкой ко времени. Циклограммой оговариваются не законы движения, а только сам факт движения и его направление. На линейных циклограммах движение обычно обозначается наклонными линиями, а состояние покоя — горизонтальными с пояснением соответствующими подписями. На циклограмме можно привести и другую полезную информацию.

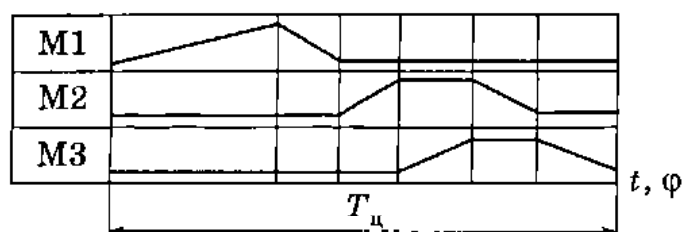


Рис. 7.5. Циклограмма машины-автомата

В качестве примера рассмотрим линейную циклограмму автомата для сверления отверстий (рис. 7.5). Механизм М1 выполняет сверление отверстий, механизм М2 разжимает крепление обработанной детали, механизм М3 снимает деталь и ставит новую. После этого начинается новый цикл.

Наиболее просто блок управления по времени реализуется с помощью кулачкового распределительного вала, вращающегося с постоянной скоростью. Полный поворот вала осуществляется за время $T_{ц}$. Отдельные исполнительные органы включаются с помощью кулачков, повернутых относительно друг друга на углы, пропорциональные соответствующим временным интервалам на циклограмме. В таком случае механизмы будут включаться в нужные моменты времени. Углами установки кулачков являются углы между начальными прямыми, т.е. прямыми, соответствующими началу подъема толкателя (рис. 7.6). Для кулачкового механизма с центральным толкателем

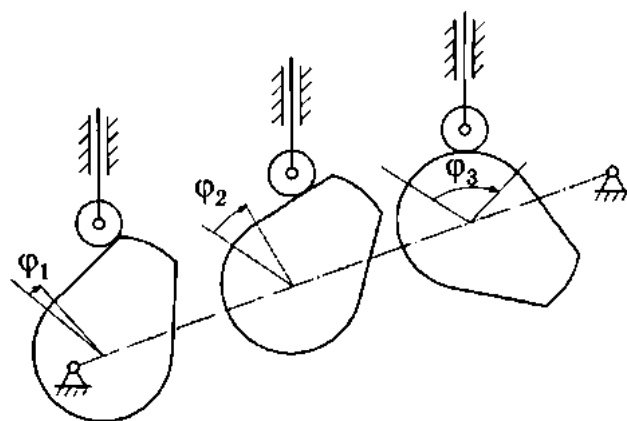


Рис. 7.6. Кулачковый распределительный вал

лем и для одинаковых кулачковых механизмов с коромыслом углы установки кулачков совпадают с углами на циклограмме. Если используются неодинаковые кулачковые механизмы, углы установки определяются графическими построениями или аналитически.

Анализируя циклограмму, можно установить, что некоторые движения могут быть полностью или частично совмещены во времени. Появляется возможность уплотнить циклограмму и тем самым уменьшить $T_{ц}$, что положительно скажется на производительности машины.

Наиболее характерным примером использования этой системы управления является распределительный вал автомобильного двигателя.

Кулачковый распределительный вал выполняет две функции: программоносителя и передаточного механизма от двигателя к исполнительному органу. Возникающие при этом большие нагрузки снижают долговечность механизма. Этого недостатка лишен кулачковый командоаппарат. Он представляет собой равномерно вращающийся кулачковый распределительный вал, воздействующий на переключатели, которые управляют индивидуальными приводами исполнительных органов.



Числовое программное управление

Системы управления, работающие по программе, заданной в цифровом виде, называются *системами с числовым программным управлением (ЧПУ)*. Они широко применяются в металло-режущих станках, в некоторых видах технологического оборудования, в промышленных роботах. Основное достоинство этого способа — возможность быстрой подготовки и смены программы, поэтому оборудование с ЧПУ целесообразно использовать при серийном и мелкосерийном производстве. При задании программы в цифровом виде программносителем в простейшем случае является перфолента или магнитная лента.

Информация о величине требуемого перемещения каждого исполнительного органа задается в виде информационного числа Z :

$$Z = S/\Delta S,$$

где S — величина требуемого перемещения; ΔS — величина единичного перемещения — шаг.

Для того чтобы реализовать шаговые перемещения, чаще всего используются шаговые электрические двигатели. Цепь питания этих двигателей включается импульсами, при каждом включении ротор поворачивается на определенный угловой шаг (рис. 7.7).

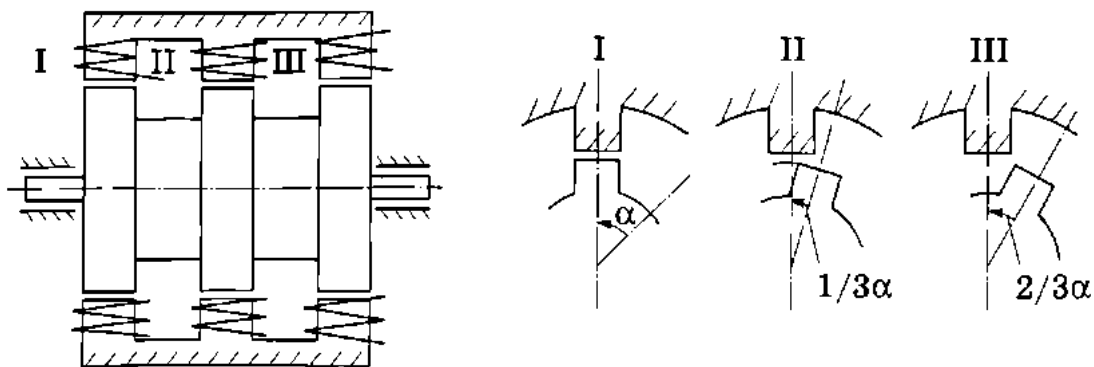


Рис. 7.7. Схема шагового электродвигателя

Полюса статора представляют собой электромагниты. Они разделены вдоль оси статора на секции I, II, III. Ротор также состоит из секций, которые являются постоянными магнитами с числом зубцов, равным числу полюсов статора. Секции ротора повернуты относительно друг друга на $1/3$ полюсного угла α .

Если подать импульс постоянного тока на первую секцию, то вследствие притяжения разноименных полюсов они установятся друг против друга, а полюса второй и третьей секций расположатся со смещением на углы $1/3\alpha$ и $2/3\alpha$ так, как показано на рис. 7.7. Если отключить первую секцию и включить вторую, то под действием электромагнитных сил полюса во второй секции установятся друг против друга, а ротор повернется на угол $1/3\alpha$. Затем, если выключить вторую и включить третью секцию, ротор повернется на угол $2/3\alpha$.

При переключении с первой секции на вторую и третью ротор вращается против часовой стрелки. При переключении с первой секции на третью, а затем вторую — по часовой стрелке. Скорость вращения ротора определяется частотой поступающих в двигатель импульсов тока, а общий угол поворота определяется количеством импульсов.

Основы синтеза логических систем управления



При синтезе систем управления машин-автоматов часто требуется реализовать определенную последовательность работы исполнительных органов при изменяющейся длительности и изменяющихся параметрах технологического процесса. Использовать систему с кулачковым распределительным валом здесь нельзя, так как она пригодна только для жестко регламентированных по времени и неизменных по структуре процессов. Такие системы управления реализуются с помощью логических устройств. Действие их подчиняется законам алгебры логики, или булевой алгебры. Изложим некоторые основные положения этой алгебры.

Отличие булевой алгебры от обычной состоит прежде всего в том, что в ней переменные и их функции могут принимать только два значения — 0 и 1. Поэтому эта алгебра называется также двоичной, а переменные и функции — двоичными.

Простейшими логическими функциями являются функции повторения (ДА), отрицания (НЕ), умножения (И), сложения (ИЛИ). Для обозначения логических операций используются соответствующие символы. Функция повторения $f = x$ означает, что значение переменной сохраняется. Функция отрицания $f \neq x$ означает, что значение переменной x отрицается, т.е. если $x = 1$, то $f = 0$, если $x = 0$, то $f = 1$. Функция умножения $f = x_1x_2$ означает, что $f = 1$ в том и только в том случае, когда x_1 и x_2 одновременно равны 1. Функция сложения $f = x_1 + x_2$ означает, что $f = 1$, если равна 1 хотя бы одна из переменных. На основании простейших логических функций могут быть построены более сложные функции.

Применение двоичной алгебры к задачам управления объясняется тем, что для исполнительных органов характерны два состояния — начало и конец движения. Электрические (пневматические, гидравлические) цепи, управляющие работой исполнительных органов, могут находиться только в двух состояниях — есть ток (давление) или нет. Эти два состояния можно описать сигналами, принимающими значения 0 и 1.

В системах управления машин-автоматов значения аргументов представляют собой входные сигналы, а значения функций — выходные сигналы. Каждому набору входных сигналов соответствует определенное состояние системы управления.

Логические функции можно задавать как в алгебраическом, так и в табличном виде. В качестве примера в табл. 7.1 представлены функции $f = x_1x_2x_3$ и $f_2 = \bar{x}_1x_2\bar{x}_3$.

Эта таблица называется *таблицей состояний*. По функции, заданной в алгебраическом виде, таблицу состояний составить несложно, обратный переход выполнить труднее. При синтезе систем управления возникает задача составления выражений, называемых *формулами включения*, по известной таблице состояний.

Таблица состояний

Состояние	x_1	x_2	x_3	$f_1 = x_1 x_2 x_3$	$f_2 = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$
1	1	1	1	1	0
2	1	0	1	0	0
3	0	1	1	0	0
4	0	0	1	0	0
5	1	1	0	0	0
6	1	0	0	0	0
7	0	1	0	0	1
8	0	0	0	0	0

Физическая реализация логических функций возможна с помощью устройств, которые могут находиться в двух конечных состояниях. Такие устройства называются *реле* или *логическими элементами*. Оформлены они могут быть по-разному. Применяются механические, электрические, пневматические, полупроводниковые, магнитные и другие логические элементы. Логические элементы, реализующие простейшие логические функции, выпускаются серийно. Они служат основой для создания автоматических устройств, реализующих сложные логические функции. Для примера рассмотрим электрические и электромагнитные логические элементы, которые применяются наиболее часто (рис. 7.8).

Электрический логический элемент повторения представляет собой нормально разомкнутый электрический выключа-

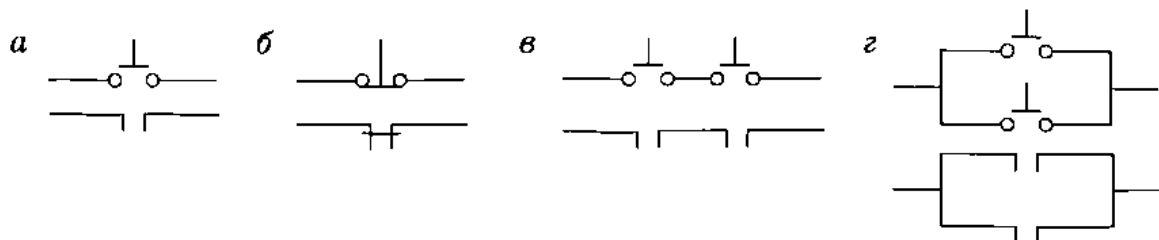


Рис. 7.8. Электрические и электромагнитные логические устройства:

a — элемент ДА; b — элемент НЕТ; $в$ — элемент И;
 $г$ — элемент ИЛИ

тель (кнопку). При нажатии на него ($x = 1$) цепь замыкается ($f = 1$).

Электромагнитное реле того же назначения имеет замыкающие контакты, срабатывающие при перемещении якоря электромагнита. При наличии тока в обмотке электромагнита ($x = 1$) цепь замыкается ($f = 1$). В обоих устройствах, если нет сигнала ($x = 0$), цепь разомкнута ($f = 0$).

Электрический логический элемент отрицания представляет собой нормально замкнутый выключатель. При нажатии на него ($x = 1$) цепь размыкается ($f = 0$). Электромагнитное реле имеет контакты, которые размыкаются при появлении тока в обмотке электромагнита.

Логические элементы сложения и умножения представляют собой, соответственно, последовательно и параллельно соединенные нормально открытые электрические контакты или электромагнитные реле с замыкающими контактами.

Синтез избирательной системы управления

Избирательной системой управления называется система, выбирающая одну из возможных комбинаций выходных сигналов в зависимости от значений входных сигналов. Примером такой системы является система управления контрольно-сортировочным автоматом, который измеряет изделия и в зависимости от результатов измерения сортирует изделия на три группы (рис. 7.9).

Размеры изделия измеряются с помощью проходного и непроходного калибров. Калибры, проходя через диаметр изделия, нажимают выключатели, создавая сигналы x_1 и x_2 .

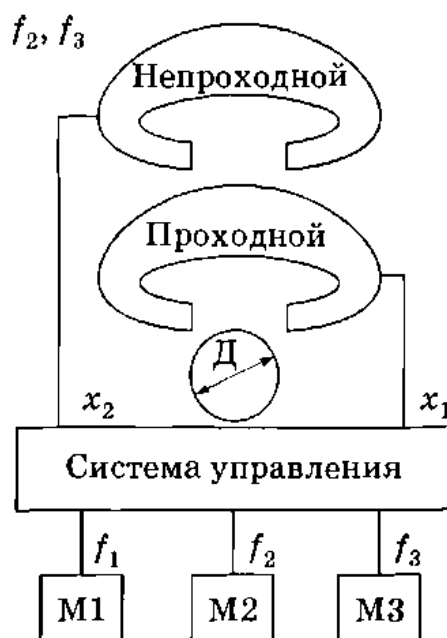


Рис. 7.9. Избирательная система управления сортировочным автоматом

Если проходят оба калибра, изделие бракуется — соответствующие входные сигналы $x_1 = 1$ и $x_2 = 1$. Если прошел проходной калибр и не прошел непроходной, деталь годна — соответствующие сигналы $x_1 = 1$ и $x_2 = 0$. Если деталь не прошла обе скобы, она возвращается на дополнительную обработку — соответствующие сигналы $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$.

Эти условия являются программой действия системы управления механизмов М1, М2, М3, производящих соответствующее адресование изделий, и могут быть представлены в виде таблицы состояний (табл. 7.2).

Таблица 7.2

Таблица состояний

Состояние	x_1	x_2	f_1	f_2	f_3
1	1	1	1	0	0
2	1	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1

Выходные сигналы, формируемые системой управления, обозначены f_1, f_2, f_3 . В состоянии 1 входных сигналов, определяющих брак, выходным сигналом f_1 должен включаться механизм М1. Механизмы М2 и М3 должны быть выключены, т.е. $f_2 = 0, f_3 = 0$. Таким же образом определяются выходные сигналы в состояниях 2 и 3.

На основании таблицы состояний составим формулы включения, рассматривая выходные сигналы как логические произведения входных сигналов:

$$f_1 = x_1 x_2; \quad f_2 = x_1 \bar{x}_2; \quad f_3 = \bar{x}_1 \bar{x}_2.$$

Упростим формулы включения. Из анализа таблицы состояний следует, что f_1 в состояниях 1, 2, 3 принимает значения 1, 0, 0 соответственно. Такие же значения в этих состояниях имеет и сигнал x_2 , тогда $f_1 = x_2$. Сигнал f_3 равен инверсному сигналу x_1 . Функция f_2 упрощению не поддается. Итак, после упрощений имеем

$$f_1 = x_2; \quad f_2 = x_1 \bar{x}_2; \quad f_3 = \bar{x}_1.$$

Следующий этап — построение структурной схемы (блок-схемы) системы управления, общей для логических элементов любых типов. Согласно формулам включения, необходимо иметь два элемента повторения ДА, два элемента отрицания НЕ, один элемент умножения И. Изображаем так называемый «черный ящик», обозначаем входы в него x_1 , x_2 и выходы f_1 , f_2 , f_3 , соединяем входы и выходы согласно формулам включения (рис. 7.10).

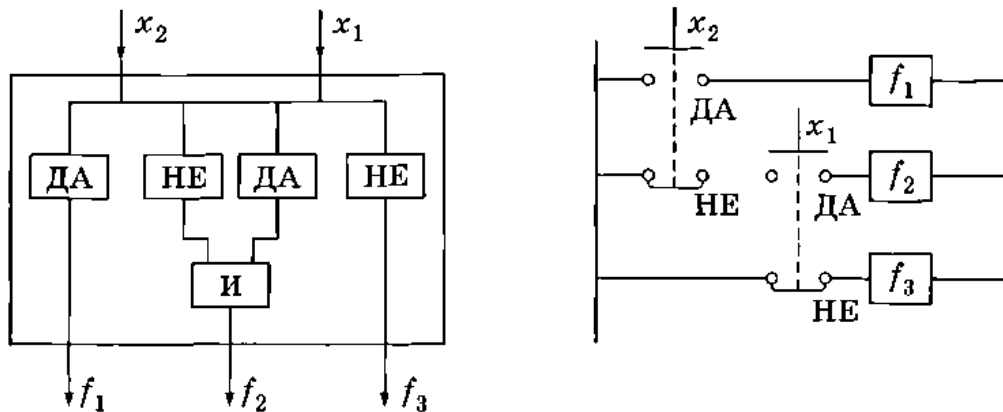


Рис. 7.10. Блок-схема системы управления и ее реализация на электрических выключателях и электромагнитных реле

Реализация блок-схемы на электрических выключателях и электромагнитных реле также представлена на рис. 7.10. Механизмы М1, М2 и М3 включаются от выходных электромагнитных реле.

Проверим правильность работы схемы: нажаты оба выключателя — включен механизм М1 — брак; нажат выключатель x_1 и не нажат x_2 — включен механизм М2 — изделие годно; оба выключателя не нажаты — включен механизм М3.

Контрольные вопросы и задания

1. Какими признаками характеризуется машина-автомат?
2. Приведите примеры аналогового управления машинами-автоматами.
3. Как осуществляется числовое управление?
4. Что такое система управления по времени?

5. В чем состоит преимущество логической системы управления?
6. На чем основано построение логических систем управления?
7. Что представляют собой логические элементы?
8. Приведите пример функционирования избирательной системы управления.
9. Спроектируйте схему механизма и нарисуйте циклограмму системы управления с кулачковым распределительным валом для управления включением и выключением электродвигателя таким образом, чтобы продолжительность включения равнялась половине времени полного оборота распределительного вала.
10. Нарисуйте схему реализации системы управления на электрических выключателях и электромагнитных реле, аналогичную изображенной на рис. 7.10, но с четырьмя управляемыми механизмами. Словесно опишите результирующий физический процесс функционирования такой системы.



РОБОТЫ И МАНИПУЛЯТОРЫ

Общие сведения о роботах и манипуляторах

Робототехника как новое научно-техническое направление возникла в результате огромного прогресса, достигнутого современной наукой в развитии вычислительной техники и механики. Роботы — это наиболее характерный пример нового класса машин, выполняющих функции одновременно рабочих и информационных машин.

Большие успехи автоматизации машиностроения в массовом и крупносерийном производстве на основе использования неперепрограммируемых автоматических устройств позволили достичь высокой производительности труда при минимальной себестоимости продукции. Однако 70 % продукции машиностроения выпускается малыми и средними сериями. В этих условиях не могут быть применены традиционные средства автоматизации и необходимая гибкость производства достигается за счет использования ручного труда.

Слово «робот» ввел в обращение К. Чапек в своей пьесе «R.U.R.» в 1920 г. — так назывались искусственно созданные механические работники, использующиеся на тяжелых физических работах. Чешское слово «robota» означает тяжелый физический труд. Предсказания писателя оказались пророческими — мы являемся свидетелями того, как фантастическая идея реализуется в виде универсального автомата, способного выполнять трудовые функции человека, заменив его на тяжелых, вредных, малоэффективных работах.

Что же такое робот, каково научно-техническое содержание этого термина? Существует большое число определений понятия «робот». Их анализ показывает, что к существенным свойствам робота относят его антропоморфизм (уподобление

человеку) при взаимодействии с окружающей средой: универсальность, наличие элементов интеллекта, способность обучаться, наличие памяти, способность самостоятельно ориентироваться в окружающей среде и т.п. На основании указанных свойств сформулировано следующее определение: робот — это машина-автомат, предназначенная для воспроизведения двигательных и умственных функций человека, а также наделенная способностью к адаптации и обучению в процессе взаимодействия с внешней средой.

Робот — это машина-автомат нового типа. Обычные автоматы предназначены для многократного выполнения одной и той же операции. Типичными примерами являются станки-автоматы, автоматы для размена монет, продажи билетов, газет и т.д. В отличие от них роботы — универсальные системы многоцелевого назначения; они способны не только выполнять много разных операций, но и оперативно переобучаться с одной операции на другую.

Роботы получили наибольшее распространение в промышленности, прежде всего в машиностроении. Такие роботы называются промышленными. Уже накоплен определенный опыт эксплуатации промышленных роботов, позволяющий отметить их достоинства.

Повышение безопасности труда — одно из первоочередных назначений роботов. Известно, что большинство несчастных случаев в промышленности составляют травмы рук, особенно при загрузочно-разгрузочных операциях. Применение роботов позволяет улучшить условия труда, потенциально опасного для здоровья людей: в литейных цехах, при использовании радиоактивных материалов, вредных химических веществ, при переработке хлопка, асбеста и т.п.

При использовании роботов наблюдаются интенсификация рабочего процесса, повышение производительности труда, стабилизация ее в течение смены, увеличение коэффициента сменности основного технологического оборудования, что улучшает технико-экономические показатели производства. Повышается качество продукции, например, улучшается качество сварного шва по причине строгого соблюдения технологиче-

ского режима. Снижаются потери от брака, связанного с ошибками оператора. Возможна также экономия материалов. Например, при покраске автомобиля рабочим только 30 % краски попадает непосредственно на автомобиль, остальная удаляется при вентилировании рабочего места. Роботу же вентиляция не нужна, так что потери краски можно уменьшить. С применением роботов создаются принципиально новые производства и технологические процессы, максимально уменьшающие неблагоприятные воздействия на человека.

Внедрение роботов в производство сопряжено с определенными трудностями. Роботы пока еще очень дороги и не всегда достаточно эффективны. Промышленный робот не всегда способен полностью заменить рабочего, обслуживающего технологическое оборудование или выполняющего технологическую операцию. Зачастую он может лишь освободить человека от монотонного физического труда, изменив характер и содержание последнего, приближая его к труду наладчика. Эффективным применение роботов становится только при правильной организации его взаимодействия с обслуживаемым оборудованием и внешней средой. Поэтому задачей робототехники является не только создание роботов, но и организация полностью автоматизированных производств.



История развития робототехники

Идея создания и использования механического двойника человека зародилась очень давно. Вначале это были культовые статуи, театральные и зрелищные автоматы. В средние века создавались часы с движущимися фигурами, автоматические человекоподобные игрушки в виде писцов и рисовальщиков, некоторые из них дошли до нашего времени. В них использовались механизмы типа часовых, в качестве программных устройств применялись кулачки. Кулачковые механизмы встречались во всех программируемых автоматических механизмах и были наиболее широко распространены в станках и машинах-автоматах вплоть до недавнего времени.

В 1805 г. был разработан автоматический ткацкий станок, в котором рисунок задавался, выражаясь современным языком, «перфокартой». Этот метод программирования был использован в первых механических калькуляторах. Перфокарты и сейчас являются одним из способов хранения цифровых данных.

Предшественниками современных роботов явились различные технические устройства для осуществления манипуляционных действий, управляемые человеком. Впервые такие манипуляторы были созданы в 1940–1950 гг. для использования в атомной промышленности. Вначале они приводились в движение за счет мускульной силы человека, затем были созданы манипуляторы с приводами, но управляемые человеком.

Робототехника возникла в последние десятилетия XX в., когда были созданы необходимые предпосылки в кибернетике и вычислительной технике. Изобретение компьютера позволило реализовать новый принцип управления. Техника управления с помощью ЭВМ основана на непрерывном сравнении потока данных о реальном состоянии объекта с заданным состоянием. Блоки сравнения и коррекции образуют цепь обратной связи. Принцип управления с обратной связью называется *сервоуправлением*.

Первый робот «Versatran», предназначенный для практического использования, появился в США в 1962 г. Затем появились роботы «Unimate-1900», которые применялись на заводах фирм «Дженерал Моторс» и «Форд». В 1967 г. начался выпуск этих роботов по лицензии США в Англии, а затем в Японии и Швеции.

В настоящее время почти половина всех выпускаемых в мире роботов — это простейшие пневматические роботы, остальное приходится на долю гидравлических и электромеханических роботов. Однако ожидается, что в дальнейшем это соотношение изменится в пользу роботов с электроприводом. Динамика роста парка роботов за рубежом в последние годы даже превышает оптимистические прогнозы. Предполагается,

что в скором времени роботы будут широко внедрены во все сферы деятельности человека, в том числе в сферу обслуживания и домашнего хозяйства.

Классификация роботов

Современные роботы весьма разнообразны. В широком смысле роботами называют класс технических систем, которые воспроизводят двигательные и интеллектуальные функции человека. При таком подходе к роботам можно отнести вычислительные и логические машины, машины, играющие в шахматы, сочиняющие музыку, автоматические переводчики, кассиры, автопилоты и т.д. Поэтому все роботы можно разделить на манипуляционные, локомоционные (шагающие, самодвижущиеся, экзоскелетоны), информационные, творчески-игровые. Далее будут рассматриваться только манипуляционные роботы.

Следует различать биотехнические, интерактивные и автоматические роботы.

Биотехническими называются роботы, которые не обладают собственной памятью и непрерывно управляются человеком. Простейшими являются *роботы с командным управлением*, когда нажатием на кнопку, тумблер или рукоятку человек-оператор пускает в ход привод одной степени подвижности (рис. 8.1, а). Точности этого робота невелика. Такое устройство еще нельзя назвать в полном смысле роботом — это его низшая ступень.

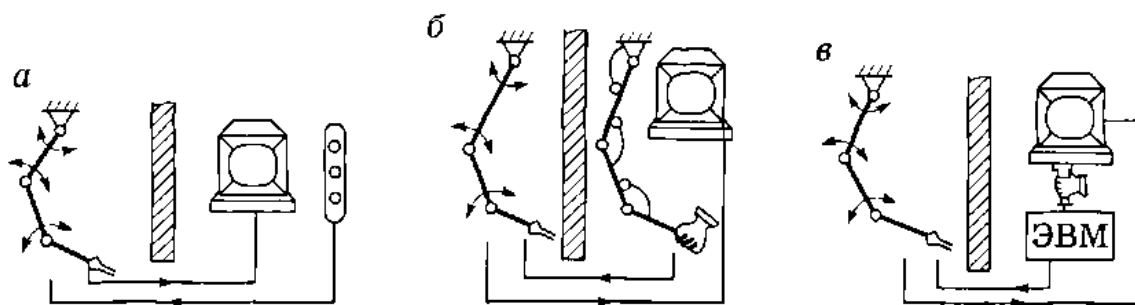


Рис. 8.1. Способы управления биотехническими роботами: а — командный; б — копирующий; в — полуавтоматический

Следующий вид биотехнического робота — *копирующий робот*. Обычно имеется задающее устройство, кинематически подобное руке робота. В его суставах находятся датчики следящих систем, приводы которых размещаются в соответствующих суставах исполнительной руки (рис. 8.1, б). Перемещая рукоятку задающего устройства, оператор задает нужную ориентацию рабочего органа руки. Недостатком такого вида управления является отсутствие обратной связи по усилию: оператор не ощущает действия нагрузки. Чтобы устранить этот недостаток, управляющая рукоятка снабжается автоматическим устройством имитации нагрузки. Тем не менее, такой способ управления довольно утомителен.

В *полуавтоматических роботах*, в отличие от предыдущих, имеется специализированное вычислительное устройство. Сигнал управления подается человеком с помощью управляющей рукоятки, которая может иметь любую схему, отличающуюся от схемы руки робота (рис. 8.1, в). Нажимая на рукоятку в произвольном направлении, человек-оператор задает направление и скорость движения рабочего органа. Сигналы, снимаемые с рукоятки, поступают в специальное вычислительное устройство, в котором формируются команды для любой степени подвижности. Такой способ управления более удобен для человека, энергетически экономичен и менее утомителен, чем предыдущие.

К *интерактивным* роботам относятся роботы с системой управления «человек — машина».

У *автоматизированных интерактивных* роботов биотехнические и автоматические режимы работы чередуются. При выполнении некоторых задач робот работает в автоматическом режиме по программе, а задачи, которые нельзя запрограммировать, реализуются под управлением человека.

При супервизорном управлении человек-оператор наблюдает на экране обстановку в месте действия робота и подает в управляющую ЭВМ команды, предписывающие перемещения его звеньев. Робот выполняет эти команды в автоматическом режиме.

Диалоговое управление осуществляется при взаимодействии ЭВМ с человеком на языках различного уровня, в том числе на естественном языке. При этом все манипуляции производятся автоматически, но планирует их ЭВМ совместно с человеком. ЭВМ участвует также в выработке решений о дальнейших действиях и наилучшем способе управления.

Смысл применения интерактивных систем управления — использование интеллекта человека в сложных, непредвиденных ситуациях.

Функциональная схема *автоматического* робота представлена на рис. 8.2.

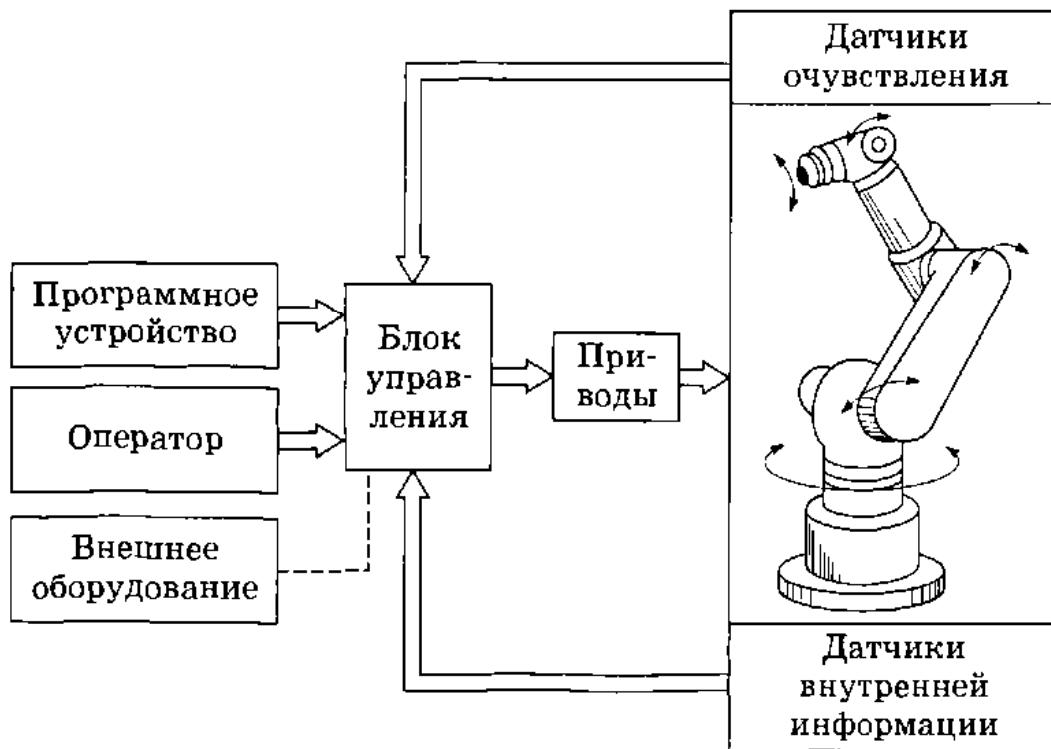


Рис. 8.2. Функциональная схема автоматического робота

Достаточно развитый автоматический робот состоит из трех систем: информационной, управляющей и исполнительной.

Информационная (сенсорная) система, как и органы чувств человека, предназначена для сбора информации о состоянии внешней среды. В качестве ее элементов используются телевизионные, светолокационные, ультразвуковые, тактильные и иные датчики.

Управляющая система, как и мозг человека, служит для выработки законов управления двигателями исполнительных органов на основании существующих предписаний (программ) и собранной информации.

Исполнительная система служит для отработки управляющих сигналов. Она реализуется в виде манипулятора, оснащенного приводными двигателями.

Манипулятор — оснащенное рабочим органом механическое устройство, предназначенное для перемещения в пространстве тела (объекта манипулирования), удерживаемого захватом. Манипулятор (лат. *manipulus* — кисть руки) можно рассматривать как аналог руки человека. Его конструкция в значительной степени определяет возможности робота.

Возможности руки робота значительно ниже возможностей руки человека, которая обладает 27 степенями подвижности (если не учитывать движения пальцев руки — 12 степенями подвижности). Число степеней подвижности манипулятора ограничено и обычно не превышает 7.

Промышленные роботы

Автоматические роботы, получившие распространение в промышленности, называются промышленными роботами (ПР). ГОСТ 25686–85 дает следующее определение этого понятия.

Промышленный робот — это автоматическая машина, состоящая из исполнительного устройства в виде манипулятора, имеющего несколько степеней подвижности, и перепрограммируемого устройства для выполнения в производственном процессе двигательных или управляющих функций.

Промышленные роботы по степени совершенства принято делить на роботы 1, 2 и 3-го поколений.

Роботы 1-го поколения имеют жесткую программу (поэтому они называются также программными роботами) и требуют точного позиционирования деталей, с которыми работают.

Большинство применяемых в настоящее время в промышленности роботов относятся к 1-му поколению. Они состоят из манипулятора и программных блоков: генератора машинного времени, устройства считывания, устройства ввода и хранения программы.

Человек-оператор через панель управления задает режим работы (обучения, автоматический, ручного управления, поциклового исполнения программы), запускает и останавливает робота. Робот может управлять технологическим оборудованием. Темп исполнения программы определяется генератором машинного времени.

Программные устройства могут иметь различные принципы построения и реализовываться на различной элементной базе. В целом они строятся на аналоговых либо на цифровых принципах. В качестве хранителей программы (элементов памяти) используются штекерные панели, штекерные барабаны, кассеты с магнитной лентой и т.п.

Первоначальная программа действий робота записывается в его память, как правило, с помощью человека. Это называется этапом обучения робота. Различают три метода обучения:

1) с помощью настройки механических устройств типа кулачков, конечных переключателей, барабанов — «обучение по точкам»;

2) с помощью пульта управления, как у станков с ЧПУ, — «обучение с пульта», аналитическое программирование;

3) непосредственно рукой оператора — «обучение показом».

Информация запоминается, т.е. хранится в элементах памяти, затем по сигналу пуска воспроизводится, считывается и обрабатывается приводами.

Роботы 2-го поколения представляют собой более совершенные устройства, в определенной степени приспособленные к изменяющейся внешней обстановке и не требующие точного позиционирования деталей. Поэтому их называют также адаптивными. Роботы 2-го поколения имеют большое преимущество перед роботами 1-го поколения, так как не требуют разработки дополнительных устройств и обладают необходимой

гибкостью. Сфера применения таких роботов значительно шире, чем роботов 1-го поколения. В настоящее время ведутся интенсивные работы по доводке адаптивных роботов до промышленных образцов.

Функциональная схема управления роботом 2-го поколения представляет собой схему управления роботом 1-го поколения, дополненную элементами адаптации. К блокам адаптации относятся датчики процесса и блоки коррекции сигналов управляющих устройств. Средства очувствления адаптивных роботов весьма разнообразны. Сравнительно просто реализуется тактильное очувствление. Тактильные датчики устанавливаются непосредственно на рабочих органах — губках схватов. Применяются также локационные датчики, работа которых основана на различных принципах. Чаще всего они действуют на небольших расстояниях от предметов. Локационные датчики дают возможность еще до соприкосновения манипулятора с предметом управлять направлением и скоростью сближения. В качестве сенсорных устройств могут применяться любые датчики, определяющие температуру, цвет предметов, магнитные и электрические свойства, химический состав и т.п.

Роботы 3-го поколения способны воспринимать окружающую обстановку и в зависимости от нее выбирать способ движения для достижения цели, сформулированной в программе в общем виде. Их называют интегральными или интеллектуальными. Такой робот должен уметь строить модели внешней среды на основе информации, получаемой от различных датчиков. Человек по отношению к роботу 3-го поколения выступает уже не как оператор, а как диспетчер (выдает задания и принимает информацию об исполнении).

Термин «поколение» применительно к роботам надо понимать лишь как степень развития их технических возможностей. Рассматриваемые разновидности роботов не вытесняют друг друга, каждая из них будет существовать наряду с другими при постепенном совершенствовании их элементной базы.

По степени специализации ПР разделяются на специальные, специализированные (целевые) и многоцелевые. Специ-

альным называется робот, предназначенный для выполнения определенных технологических операций или обслуживания конкретной модели технологического оборудования.

Специализированные роботы служат для выполнения технологических операций одного вида (сварка, окраска, сборка и т.п.) или для обслуживания определенной группы моделей технологического оборудования (например, группы моделей станков с горизонтальной осью шпинделя).

Многоцелевые роботы предназначены для выполнения различных основных и вспомогательных технологических операций. Они конструктивно не зависят от обслуживаемого оборудования и характеризуются разнотипностью совершаемых движений.

По *выполняемым функциям* ПР подразделяются на вспомогательные, технологические и универсальные. *Вспомогательные* роботы выполняют операции типа «взять — перенести». *Технологические* роботы используются в качестве производящих или обрабатывающих машин на таких операциях, как гибка, сварка, сборка, окраска, контроль и т.п. *Универсальными* называются роботы, совмещающие функции вспомогательного и технологического роботов.

Под *грузоподъемностью* ПР понимается наибольшая масса объектов манипулирования (включая массу рабочего органа), которые могут перемещаться рукой робота при заданных условиях (при максимальной или минимальной скорости, при максимальном вылете руки и т.п.). По грузоподъемности ПР делятся на *сверхлегкие* (до 1 кг), *легкие* (до 10 кг), *средние* (до 200 кг), *тяжелые* (до 1000 кг) и *сверхтяжелые* (свыше 1000 кг).

Рабочая зона манипулятора — это пространство, в котором находится его рабочий орган при всех возможных положениях манипулятора. Рабочая зона характеризуется объемом. По *объему рабочей зоны* ПР делятся на *микророботы*, выполняющие особо точные операции с весьма мелкими деталями (например, при производстве изделий микроэлектроники), *мини-роботы* для точных операций с мелкими деталями (на-

пример, при производстве часовых механизмов), *малые роботы*, предназначенные, например, для операций холодной штамповки, *средние роботы* — для операций, которые рабочие выполняют стоя, *крупногабаритные роботы* — для выполнения операций, превышающих физические возможности человека, и, наконец, *мобильные роботы*, перемещающиеся по рельсовому пути, монорельсу или как-нибудь иначе.

По числу степеней подвижности ПР подразделяются на роботы с двумя, тремя, четырьмя и более степенями подвижности.

По форме рабочей зоны ПР делятся на прямоугольные, цилиндрические, сферические, ангулярные (антропоморфные) и комбинированные (рис. 8.3). Такое деление определяется типом системы обобщенных координат манипулятора.

По виду привода ПР подразделяются на электромеханические, гидравлические, пневматические, роботы с комбинированным приводом.

Под программным управлением понимается автоматическое управление исполнительным устройством промышленного робота по заранее введенной управляющей программе. По типу системы управления ПР подразделяются на роботы с позиционным управлением и с контурным управлением.

Под позиционным управлением понимается программное управление ПР, при котором рабочий орган движется по заданным точкам позиционирования. Отклонение от требуемого положения при подходе к конечным точкам сводится к минимуму, движение между этими точками не контролируется, не контролируется также сочетание движений по отдельным степеням подвижности. Такое перемещение приемлемо для операций загрузки-выгрузки металлорежущих станков, точечной сварки, но не подходит для операций окраски или дуговой сварки.

Частным случаем позиционного управления является *цикловое* управление, при котором точки позиционирования задаются при помощи жестких упоров. При цикловом управлении программируется только последовательность движений.

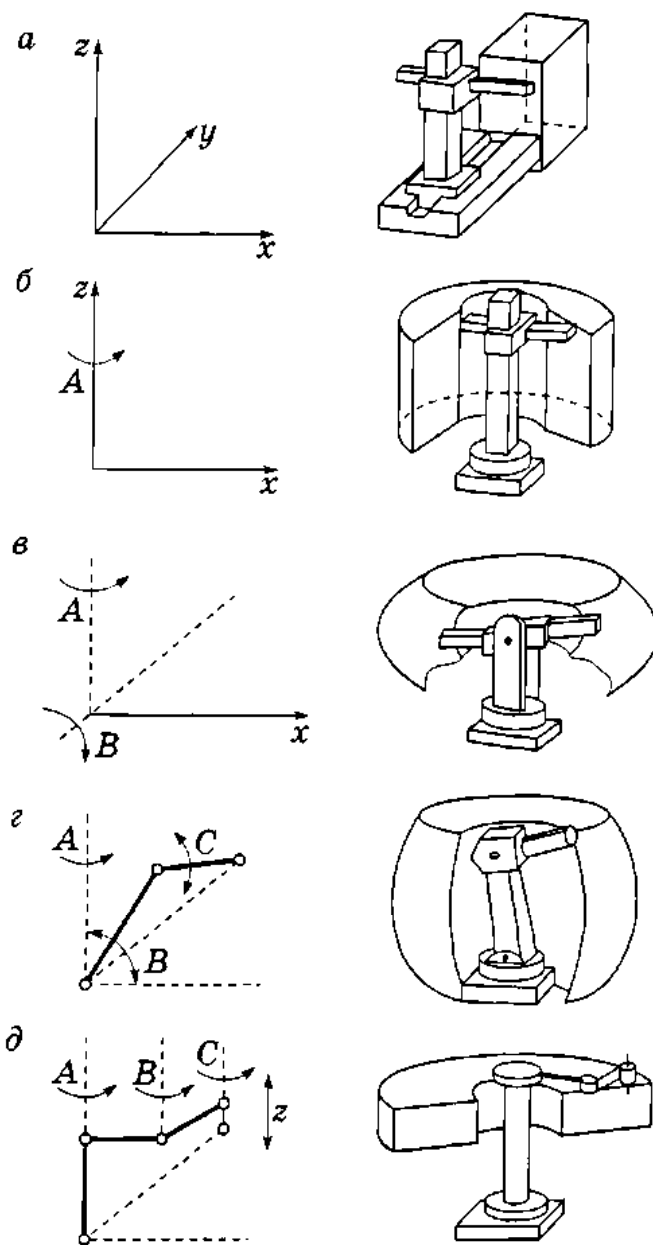


Рис. 8.3. Схемы промышленных роботов:
 а — прямоугольная; б — цилиндрическая; в — сферическая;
 г — антропоморфная; д — комбинированная

Под **контурным** управлением понимается управление ПР, при котором движение рабочего органа происходит по заданной траектории с определенной скоростью.

Для обеспечения такого движения необходимо, чтобы системы контурного управления координировали управление движением по всем степеням подвижности. Обычно используется способ контурного управления с интерполятором. Это, по существу, позиционное управление, дополненное специальным

вычислительным блоком — интерполятором, который по определенному алгоритму рассчитывает отрезки траекторий между заданными программными точками.

Структура и геометрические характеристики манипуляторов

Движения, совершаемые человеком и воспроизводимые роботом, можно разделить на три класса: глобальные, региональные и локальные.

Глобальные движения — это перемещения на расстояния, превышающие размеры робота. Робот, совершающий глобальные движения, называется мобильным, а не совершающий — стационарным. Глобальные движения робот совершает, перемещаясь по подвесному монорельсу. Так, например, работают роботы, обслуживающие группу металлорежущих станков, установленных на одной линии. Большинство роботов не предназначены для глобальных движений.

Движения, совершаемые рукой робота в пределах его рабочей зоны и соизмеримые с его габаритами, называются *региональными*. Их также называют переносными, так как они обеспечивают перенос объекта в требуемую точку. Эти движения соответствуют движениям плеча и предплечья руки человека.

Локальные движения — это перемещения рабочего органа в малой зоне. Они соответствуют движениям кисти руки. Основное назначение этих движений — ориентирование объекта манипулирования в данной точке рабочего пространства, поэтому их также называют ориентирующими.

С введением понятий регионального и локального движений кинематическую цепь стационарного манипулятора можно расчленить на две функциональные части, отвечающие за эти движения, — переносную и ориентирующую и, соответственно, выделить переносные и ориентирующие степени подвижности, обеспечивающие эти движения.

Как известно из механики, положение тела в пространстве определяется шестью обобщенными координатами. Произвольное движение твердого тела может быть разложено на поступательное перемещение, связанное с некоторой произвольно выбранной точкой, и вращение относительно этой точки. Соответственно, из шести независимых обобщенных координат, описывающих движение твердого тела, три координаты задают перемещение некоторой фиксированной точки тела в пространстве, а три характеризуют его вращение. Пространственный манипулятор в общем случае должен иметь шесть степеней подвижности: три для отработки региональных (переносных) движений и три — для локальных (ориентирующих).

В том случае, когда приходится манипулировать несвободными предметами, на которые наложены дополнительные связи, может оказаться, что перечисленных степеней подвижности мало. Так, например, для того чтобы наживить и завинтить гайку или поднять с пола ящик стола для установки его в направляющие, достаточно иметь манипулятор с шестью степенями подвижности. Однако без седьмого движения — винтового или прямолинейно-поступательного вдоль направляющих — нельзя навинтить гайку и задвинуть ящик в стол, иначе как используя сложную комбинацию движений.

Число степеней подвижности более шести может оказаться необходимым при выполнении сложных работ, связанных с дополнительными ограничениями на перемещение звеньев манипулятора при работе в ограниченном пространстве. Увеличение числа степеней подвижности наделяет манипулятор полезным свойством избыточности, однако усложняет его и повышает его стоимость.

Для ПР, работающих в организованном рабочем пространстве, где рабочие зоны упорядочены и, как правило, расположены в горизонтальных и вертикальных плоскостях, при выполнении рабочих операций обычно оказывается достаточно четырех-пяти степеней подвижности (трех переносных и одной-двух ориентирующих). Простейшие неперепрограммируемые роботы, называемые автооператорами, могут иметь одну-две степени подвижности.

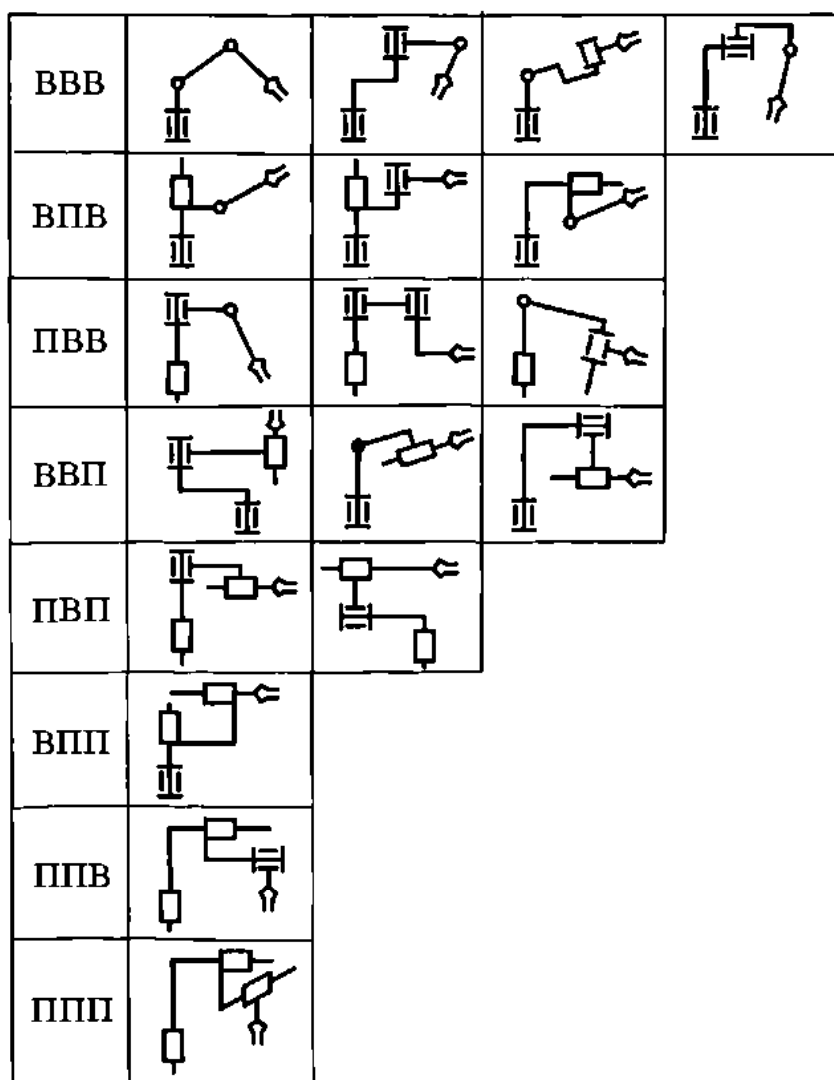


Рис. 8.4. Структурные схемы ортогональных манипуляторов

Кинематическая цепь региональных движений обычно реализуется с использованием кинематических пар пятого класса (вращательных (В) и поступательных (П) соединений) и содержит три звена. Возможны следующие последовательности расположения кинематических пар: ВВВ, ВВП, ВПВ, ПВВ, ППВ, ПВП, ВПП, ППП. Оси соседних кинематических пар могут располагаться относительно друг друга самым различным образом, однако получили распространение манипуляторы с коллинеарными или ортогональными осями (их называют ортогональными манипуляторами).

Схемы манипуляторов весьма разнообразны (рис. 8.4). Из приведенных схем наиболее распространены структурные схемы типа ВВВ₁, ВВП₂, ВПП, ППП. Одной из простейших

является схема ППП (рис. 8.5) с прямоугольной системой координат, форма ее рабочей зоны — параллелепипед. Такая схема наиболее удобна для выполнения прямолинейных движений.

Здесь максимально упрощено программирование робота, так как нет необходимости пересчета декартовых координат в обобщенные координаты ($q_1 = h_1 = z_S$, $q_2 = h_2 = y_S$, $q_3 = h_3 + h_S = x_S$). Эта система применяется в станках с ЧПУ, которые также являются своеобразными манипуляторами, и в сборочных роботах. Недостатки такого исполнения — увеличение габаритов устройства, сравнительно низкое быстродействие, сложность изготовления направляющих.

В настоящее время наибольшее распространение получили роботы со схемой манипулятора ВПП — роботы с цилиндрической системой координат (рис. 8.6). Их рабочее пространство имеет форму цилиндра или его части. Рука может двигаться по горизонтали и вертикали и поворачиваться вокруг оси колонны. Робот в таком исполнении компактен, при том что обслуживает большой объем, относительно прост для программирования. Его недостатком является наличие «мертвого» необслуживаемого пространства у основания. Такую схему обычно имеют транспортные роботы.

Манипулятор исполнения ВВП₂ имеет сферическую систему координат, его рабочее пространство — сферический сег-

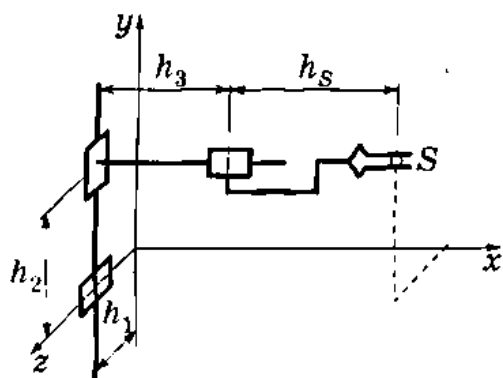


Рис. 8.5. Манипулятор с прямоугольной системой координат

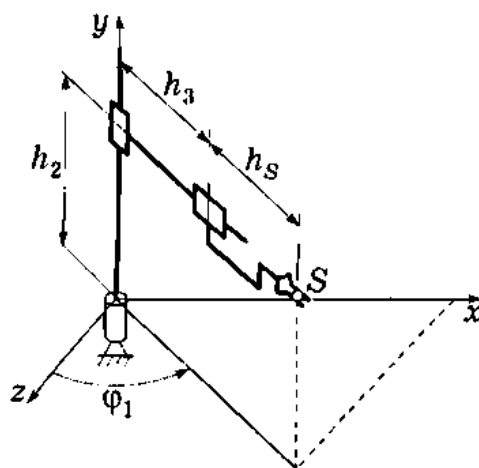


Рис. 8.6. Манипулятор с цилиндрической схемой и его обобщенные координаты

мент (рис. 8.7). Роботы с такой системой координат сложнее, чем с цилиндрической, но компактнее, обслуживают больший объем, включая зоны, выходящие за их габариты сверху и снизу. Роботы такого исполнения имеют повышенную жесткость, что позволяет использовать их при больших нагрузках, например при автоматизации точечной сварки и т.п.

Манипулятор исполнения ВВВ₁ со сложной сферической системой координат (рис. 8.8) называется ангулярным, шарнирным или антропоморфным. Основное достоинство такого манипулятора — значительно меньшие габариты, чем у манипулятора с поступательными парами, при большой зоне обслуживания. Он может применяться в стесненной зоне обслуживания. Такие манипуляторы обычно хорошо уравновешены и поэтому часто используются, когда программирование осуществляется методом обучения рукой человека на операциях окраски, нанесения защитных покрытий и т.п.

Каждая из рассмотренных схем обладает определенными достоинствами и недостатками, поэтому выбор схемы является компромиссным решением и выполняется с учетом предъявляемых к данному роботу требований. При выборе схем надо принимать во внимание не только их функциональные возможности, но и упрощение конструкции, технологичность ее

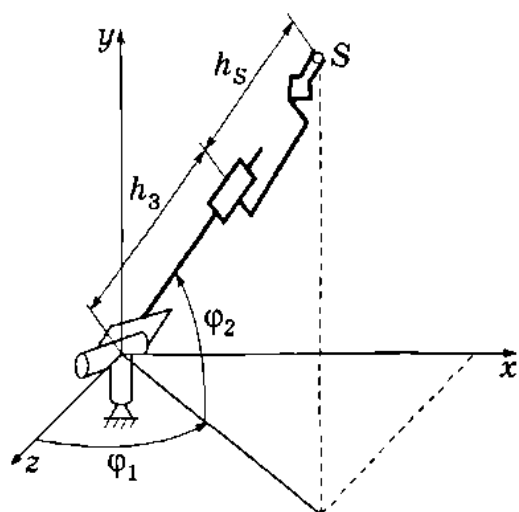


Рис. 8.7. Манипулятор со сферической схемой и его обобщенные координаты

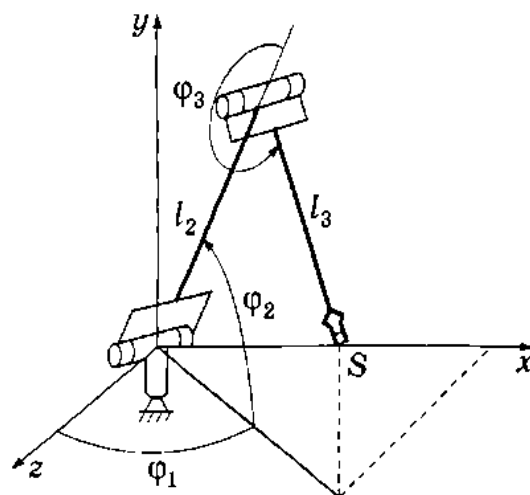


Рис. 8.8. Манипулятор с антропоморфной схемой (шарнирный манипулятор) и его обобщенные координаты

изготовления, стоимость. При решении этих вопросов следует руководствоваться уже накопленным опытом проектирования роботов.

Основные технические характеристики робота — грузоподъемность, размеры зоны обслуживания, быстродействие, точность — тесно связаны между собой и с его компоновкой. Улучшить одни характеристики можно только за счет ухудшения других. Так, в частности, большая грузоподъемность несовместима с большим размером зоны обслуживания, большая скорость — с высокой точностью. Отсюда следует, что нет такой схемы робота, которая была бы оптимальной во всех случаях.

Кинематическая цепь, реализующая локальные движения, называется кистью робота, поскольку она выполняет функции, аналогичные функциям кисти руки человека. Назначение кисти — ориентирующие движения.

Из механики известно, что произвольную ориентацию твердому телу можно задать тремя последовательными плоскими поворотами относительно несовпадающих осей, связанных с телом. Механической моделью, физически реализующей такие движения, служит карданов подвес, представляющий собой трехзвенную кинематическую цепь с только вращательными парами, причем оси пар пересекаются в одной точке. При этом движение выходного звена будет сферическим с центром в точке пересечения осей. Оно является композицией трех движений (рис. 8.9): прецессии (движения тела 1 по отношению к телу 0), нутации (движения тела 2 по отношению к телу 1), чистого вращения, или ротации (движение тела 3 по отношению к телу 2).

Для удержания объекта манипулирования кисть снабжается захватным устройством. Назначение переносных и ориентирующих движений — поместить захватное устройство в любую точку рабочей зоны. Однако не всякая точка рабочей зоны манипулятора в равной степени доступна захватному устройству, так как на его положение накладываются ограничения, связанные с конструкцией кинематических пар и длиной звеньев. Эти ограничения не позволяют подводить захват (схват) к данной точке под любым желаемым углом.

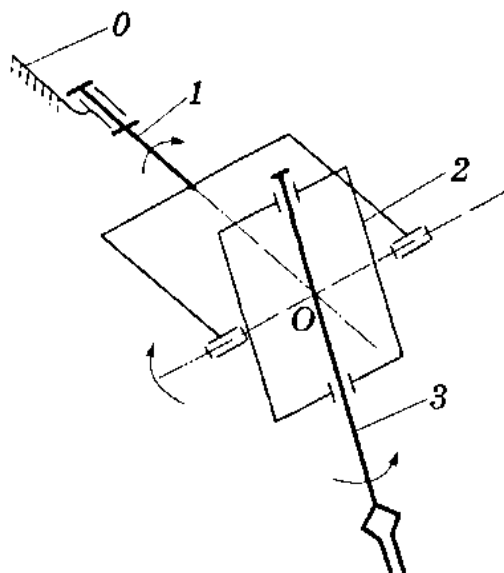


Рис. 8.9. Устройство для ориентации кисти на основе карданова подвеса

Углом сервиса называется телесный угол, в пределах которого может находиться продольная ось захвата в том случае, если его центр находится в данной точке пространства. Рассмотрим манипулятор, схема которого приведена на рис. 8.10. Площадь F сферической поверхности с центром в точке S и радиусом $r = SA$ равна $4\pi r^2$, где $4\pi r^2$ — телесный угол для сферы. Ось захвата манипулятора $CBAS$ может занимать положение внутри некоторого шарового сектора, являющегося лишь частью сферы, определяя тем самым сферическую поверхность площади $\Phi_i = \theta_i r^2$, где θ_i — угол сервиса, причем $\theta_i < 4\pi$. Отношение $\xi_i = \Phi_i / F = \theta_i / (4\pi)$ называется коэффициентом сервиса

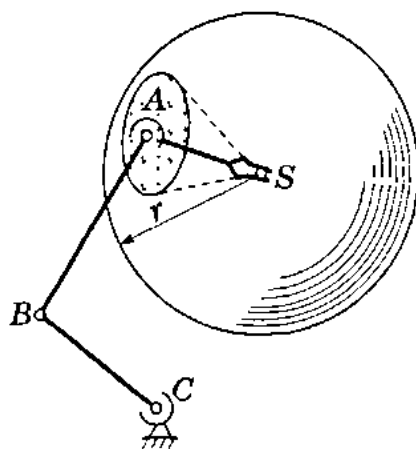


Рис. 8.10. Зона обслуживания манипулятора

для манипулятора в данной точке. На границе рабочего пространства этот угол, очевидно, равен нулю. Максимальное значение коэффициента сервиса равно единице. В этом случае захват совершает полное сферическое движение вокруг данной точки. Интегральной оценкой совершенства манипулятора является полный коэффициент сервиса, вычисляемый по формуле

$$\xi = \sum_{i=1}^n \frac{\xi_i \Delta V_i}{V},$$

где ΔV_i — элемент объема рабочей зоны V .

ГОСТ 25686–85 вводит ряд определений, касающихся роботов и их геометрических характеристик.

Исполнительным устройством называется устройство, выполняющее все двигательные функции робота.

Рабочий орган — составная часть исполнительного устройства для непосредственного выполнения технологических операций и/или вспомогательных переходов.

Рабочее пространство манипулятора — часть физического пространства, в котором может находиться исполнительное устройство при функционировании манипулятора.

Рабочая зона — пространство, в котором может находиться рабочий орган.

Зона обслуживания — пространство, в котором рабочий орган выполняет свои функции в соответствии с назначением.

Погрешность позиционирования рабочего органа манипулятора — отклонение положения рабочего органа от заданного управляющей программой.

Погрешность отработки траектории — отклонение траектории от заданной.



Задание ориентации твердого тела

Рассмотрим твердое тело в трехмерном векторном пространстве. Пусть xuz — неподвижная система координат, а E — соответствующее ей векторное пространство. Система

координат $\xi\eta\zeta$ — подвижная, жестко скрепленная с телом, а I — соответствующее ей векторное пространство (рис. 8.11).

Оператором преобразования координат от пространства I к пространству E , соответствующим данной ориентации твердого тела, назовем оператор τ , осуществляющий следующее преобразование векторов:

$$\mathbf{R} = \tau \mathbf{r}. \quad (8.1)$$

Вектор \mathbf{r} , т.е. радиус-вектор некоторой точки тела, рассматривается в пространстве I , ему соответствует вектор \mathbf{R} , с которым он «совпадает» в пространстве E .

Здесь следует пояснить, что нужно различать геометрическое и математическое представления вектора. В геометрическом смысле вектор представляет собой направленный отрезок прямой и характеризуется величиной и направлением, которые сохраняются неизменными вне зависимости от пространства, к которому принадлежит этот вектор. В математическом представлении вектора обязательно присутствует указание пространства, в котором он рассматривается. Один и тот же геометрический вектор будет иметь разные компоненты в разных пространствах, так как тройки чисел, представляющие собой проекции вектора на оси выбранного пространства, в общем случае будут различными. В понимании этого факта состоит одна из основных трудностей при описании кинематики пространственного движения.

Равенство (8.1) можно записать иначе, в виде развернутой матричной записи, имея в виду, что $\mathbf{r} = [\xi, \eta, \zeta]$, $\mathbf{R} = [x, y, z]$ — векторы-столбцы в системах I и E соответственно, а элементами матрицы τ служат направляющие косинусы осей ξ, η, ζ . Чтобы убедиться в этом, рассмотрим преобразование координат

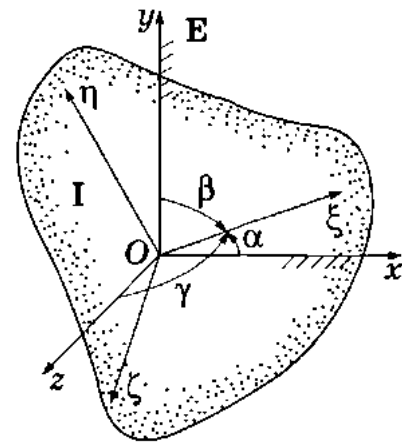


Рис. 8.11. Задание ориентации системы координат твердого тела с помощью направляющих косинусов

нат на плоскости (рис. 8.12). Из геометрических построений выводятся уравнения преобразования координат:

$$x = \cos \varphi \xi - \sin \varphi \eta;$$

$$y = \sin \varphi \xi + \cos \varphi \eta.$$

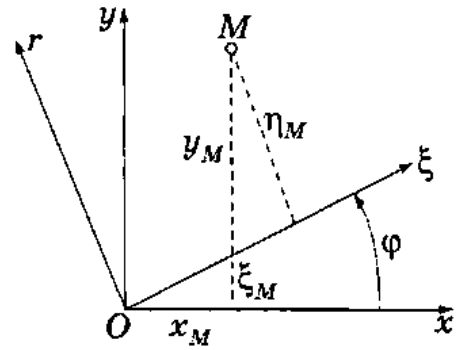


Рис. 8.12. Преобразование координат на плоскости

Эти же уравнения в векторах пространства E и I представлены в виде равенства (8.1), записанного с помощью векторно-матричной символики. Отсюда следует, что элементами матрицы τ служат направляющие косинусы осей ξ, η относительно осей x, y . Это справедливо и для трехмерного пространства.

Приведенные ранее уравнения известны в математике как уравнения преобразования координат. Они очень часто используются в разнообразных геометрических задачах, где необходимо совершить переход от одной координатной системы к другой.

Аналогичным образом для случая пространственного преобразования координат, где используются трехмерные векторы, можно получить матрицу τ :

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix}.$$

Эту матрицу используют для задания ориентации тела в пространстве.

Как будет показано в дальнейшем, при описании кинематики пространственного движения все операции с векторами следует проводить в одном пространстве, хотя сами они могут задаваться в различных пространствах. Чаще всего для этого используется неподвижное пространство, поэтому возникает задача преобразования координат вектора (или, что то же самое, самого вектора) в подвижном пространстве в координаты в неподвижном. Для такого преобразования используются

уравнения преобразования координат. В этом и состоит большое значение уравнений преобразования координат, а также сложность описания пространственной кинематики многозвенной кинематической цепи.

Пусть выбранные оси связаны с твердым телом (которое для большей наглядности представим в виде параллелепипеда) таким образом, что совпадают с ребрами a, b, c (рис. 8.13). В начальном положении тела оси i_1, i_2, i_3 совпадают с одноименными неподвижными осями e_1, e_2, e_3 . Повернем тело вокруг ребра a на угол φ_1 — это первый поворот. В новом положении тела ребра a, b, c определяют новое положение связанной системы — базис I_1 . Произведем второй поворот вокруг ребра b

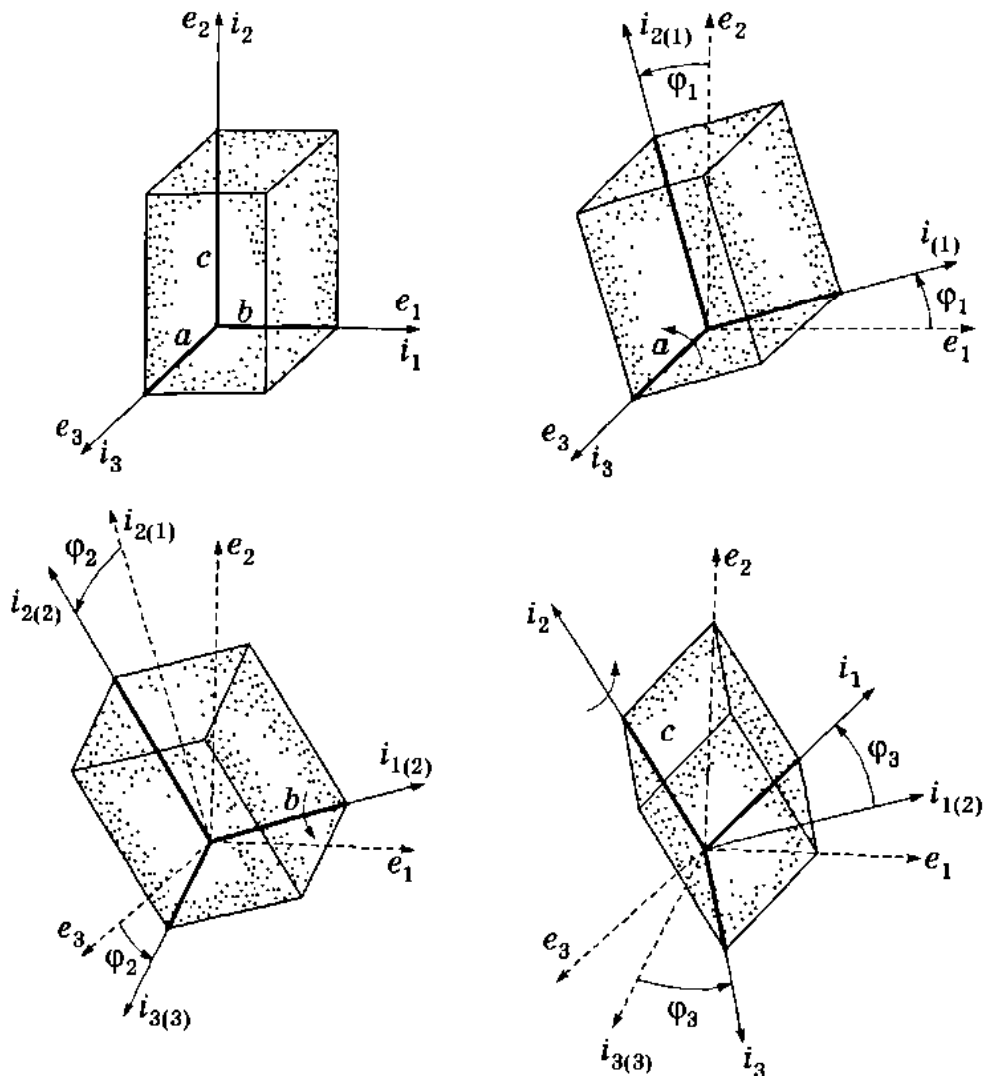


Рис. 8.13. Последовательность поворотов твердого тела вокруг трех осей, связанных с телом

на угол φ_2 . В новом положении ребра a, b, c определяют базис I_2 . Выполним третий поворот — вокруг ребра c на угол φ_3 . Координаты некоторой точки M , принадлежащей твердому телу, для каждой пары систем связаны уравнениями

$$\mathbf{r}_{M(2)} = \mathbf{T}_3 \mathbf{r}_{M(3)}; \quad \mathbf{r}_M = \mathbf{r}_{M(3)};$$

$$\mathbf{r}_{M(1)} = \mathbf{T}_2 \mathbf{r}_{M(2)};$$

$$\mathbf{R}_M = \mathbf{T}_1 \mathbf{r}_{M(1)},$$

откуда следует:

$$\mathbf{R}_M = \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_3;$$

$$\tau = \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_3. \quad (8.2)$$

Последовательные повороты дают последовательные линейные преобразования координат. Их можно представить в виде одного линейного преобразования с матрицей, равной произведению матриц последовательных преобразований, причем матрицы расставляются слева направо в порядке следования поворотов.

Из теоретической механики известно, что три последовательных поворота тела вокруг различных осей задают его произвольную ориентацию. Вычислим матрицы операторов преобразования координат, соответствующие поворотам тела вокруг координатных осей (такие повороты будем называть *элементарными*). Итак, пусть системы xuz и $\xi\eta\zeta$ — прямоугольные одинаково ориентированные системы координат с началом в одной и той же точке O . В качестве положительного направления примем вращение против часовой стрелки, если смотреть с положительного направления оси поворота.

Предположим, что система $\xi\eta\zeta$ получена из системы xuz поворотом на угол ψ в положительном направлении вокруг оси Ox (рис. 8.14). Соответствующий оператор преобразования координат обозначим X . Для его матрицы имеем

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix}.$$

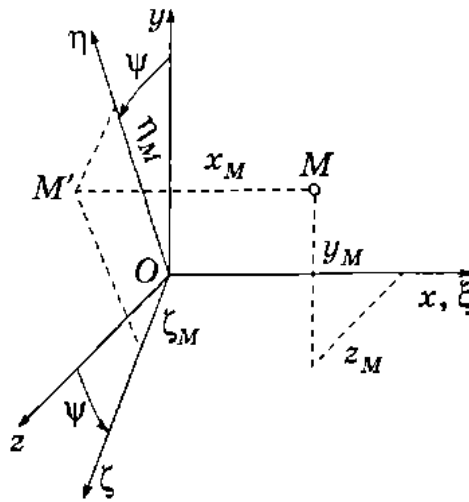


Рис. 8.14. Элементарный поворот вокруг оси x

Матрица X составлена из направляющих косинусов осей ξ, η, ζ по отношению к осям x, y, z .

Если система $\xi\eta\zeta$ получена из системы xuz поворотом в положительном направлении на угол θ вокруг оси Oy , для соответствующего оператора преобразования координат Y подобным образом находим матрицу

$$Y = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Наконец, если система $\xi\eta\zeta$ получена из системы xuz поворотом в положительном направлении на угол φ вокруг оси Oz , для матрицы соответствующего оператора преобразования координат Z имеем

$$Z = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



Кинематика манипулятора

Манипулятор представляет собой физический аналог системы, в которой происходит многократное последовательное преобразование пространств, связанных со звеньями манипу-

лятора, в неподвижное рабочее пространство. Поэтому исследование его кинематики будет сводиться к разбиению системы на пары пространств и последовательному применению соответствующих этим преобразованиям кинематических соотношений. Рассмотрим вначале эти соотношения.

Поворот твердого тела вокруг неподвижной точки при совмещении начала связанной с телом координатной системы $\xi\eta\zeta$ с неподвижной точкой тела задается при помощи оператора преобразования координат (он же оператор поворота), структура которого описана ранее:

$$\mathbf{R} = \text{tr}. \quad (8.3)$$

Найдем вектор скорости некоторой точки M этого тела в неподвижном пространстве. Для этого продифференцируем по времени соотношение (8.3). После дифференцирования и некоторых последующих преобразований получим

$$\mathbf{v} = \mathbf{W}\mathbf{R},$$

где \mathbf{W} — кососимметричная матрица вида

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица \mathbf{W} сформирована на основе компонентов вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]$, разложенного по осям x, y, z .

После дифференцирования уравнения для скорости получим формулу для ускорения точки M :

$$\mathbf{a} = (\mathbf{E} + \mathbf{W}^2)\mathbf{R},$$

где \mathbf{E} — кососимметричная матрица, составленная из компонентов вектора углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z]$ по той же схеме, что и матрица \mathbf{W} .

Рассмотрим общий случай движения твердого тела, который задается векторным равенством

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_A + \text{tr}, \quad (8.4)$$

где \mathbf{R}_A — радиус-вектор полюса связанной системы осей (рис. 8.15). Дифференцируя это равенство по времени, получим выражение для скорости точки M , принадлежащей твердому телу:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_A + \mathbf{W}(\mathbf{R} - \mathbf{R}_A), \quad (8.5)$$

где \mathbf{v}_A — скорость полюса — точки A . Матрица \mathbf{W} характеризует вращательное движение тела.

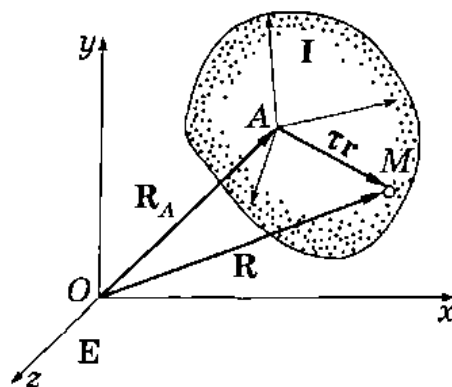


Рис. 8.15. Общий случай движения твердого тела

Дифференцируя полученную формулу еще раз по времени, получим выражение для ускорения:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_A + \mathbf{E}(\mathbf{R} - \mathbf{R}_A) + \mathbf{W}^2(\mathbf{R} - \mathbf{R}_A), \quad (8.6)$$

где \mathbf{E} — кососимметричная матрица, составленная из компонентов углового ускорения вращательного движения твердого тела.

Заметим, что в записанных формулах фигурируют векторы абсолютной угловой скорости и абсолютного углового ускорения тела, т.е. скорости и ускорения относительно неподвижной системы координат. Для определения этих векторов при исследовании движения манипуляторов нужно уметь определять их значения по известным параметрам относительного вращательного движения, т.е. по параметрам движения в шарнирах манипулятора.

Рассмотрим операции сложения угловых скоростей и угловых ускорений в векторно-матричной формулировке. Пусть I — координатное пространство, соответствующее координатной системе, жестко связанной с твердым телом (рис. 8.16). Предпо-

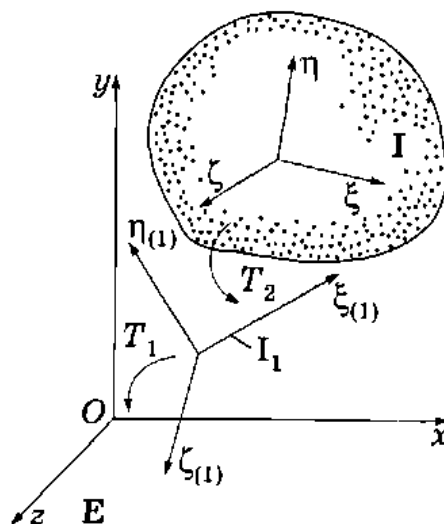


Рис. 8.16. Сложение поворотов твердого тела

ложим, что задано еще одно подвижное пространство I_1 . Наконец E — неподвижное пространство.

Пусть задано вращение твердого тела относительно пространства I_1 , а также движение пространства I_1 относительно неподвижного пространства E . В таком случае, как известно из теоретической механики, угловая скорость абсолютного движения твердого тела равна сумме угловых скоростей первого и второго относительных движений. Векторы относительных угловых скоростей первого и второго движений должны быть приведены к неподвижному пространству:

$$\omega = \Omega_1 + \Omega_2, \quad (8.7)$$

где Ω_1 и Ω_2 — векторы относительной угловой скорости первого и второго движений, приведенные к неподвижному пространству.

Для абсолютного углового ускорения получено выражение

$$\varepsilon = E_1 + E_2 + W_1\Omega_2, \quad (8.8)$$

где E_1 и E_2 — векторы относительного углового ускорения первого и второго движений, приведенные к неподвижному пространству; W_1 — кососимметричная матрица угловой скорости первого движения; Ω_2 — вектор относительной угловой скорости второго движения. Векторы угловой скорости также приведены к неподвижному пространству.

Из последней формулы следует, что если первое и второе вращения равномерны, движение относительно неподвижного пространства не будет равномерным движением, за исключением случая, когда векторы угловой скорости первого и второго движений параллельны. (В этом, в сущности, и состоит объяснение причин возникновения гироскопического эффекта.)

Приведенные ранее формулы универсальны — они применяются во всех задачах механики сложного движения. В теоретической механике они обычно приводятся в несколько иной форме записи.

Матричная форма записи удобна тем, что она вносит ясность и единообразие при решении таких сложных задач, как математическое описание механики сложного движения. Единообразное представление важно с точки зрения организации вычислений при решении задач управления манипулятором. Перемножение матриц осуществляется по известному алгоритму. Задача сложения поворотов возникает при анализе движения манипуляторов с шарнирным соединением звеньев руки. Такие манипуляторы имеют наибольшее распространение, несмотря на некоторую сложность управления ими. Рука человека является биологическим примером манипулятора с большим числом шарнирных соединений.

В кинематике манипулятора следует различать две задачи: прямую и обратную. Обе они находят применение при управлении манипулятором, а также при исследовании его динамики.

Прямая задача кинематики манипулятора состоит в следующем. Пусть заданы схема шарнирного манипулятора (рис. 8.17), его обобщенные координаты, а также угловые скорости и ускорения в шарнирах. Требуется определить координаты, скорости и ускорения звеньев и характерных точек манипулятора.

Для упрощения решения задачи очень важно правильно выбрать начальную конфигурацию шарнирного манипулятора. На рис. 8.17 все звенья манипулятора вытянуты по одной линии. Возможно, такое положение звеньев нехарактерно для рабочего процесса, но это очень упрощает последующее описание кинематики.

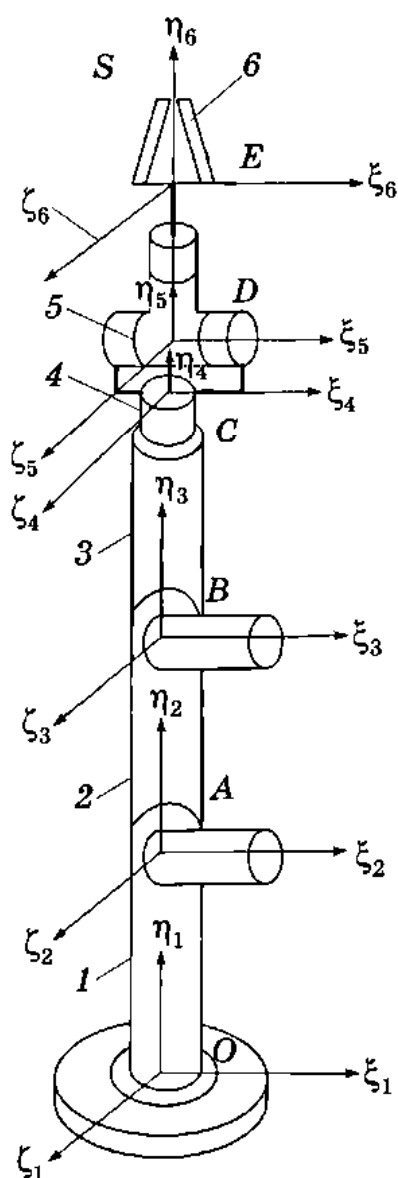


Рис. 8.17. Системы координат шестизвеного манипулятора

Введем связанные со звеньями системы координат, как показано на рисунке. Благодаря выбору прямолинейного начального положения координатные системы звеньев в начальном положении совпадают с неподвижной системой координат

Зная обобщенные координаты звеньев, можно сформировать матрицы элементарных поворотов и затем перемножить их согласно выражению (8.2). Для последнего звена шести-звенного манипулятора — захвата матрица ориентации получается из общего выражения для матрицы ориентации

$$\tau_6 = T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 T_6,$$

где T_i — матрицы элементарных поворотов.

Для конкретной схемы манипулятора (см. рис. 8.17) с учетом вида матриц элементарных поворотов матрица ориентации последнего звена имеет вид

$$\tau_6 = Y_1 X_2 X_3 Y_4 X_5 Y_6.$$

Подставив сюда значения углов поворота в шарнирах, отсчитываемые от начальных положений соответствующих координатных осей звеньев, и произведя соответствующие вычисления, определим матрицу ориентации захвата.

Отметим, что, согласно общему правилу сложения поворотов, матрицы элементарных поворотов расставляются в порядке следования поворотов, начиная от неподвижного звена манипулятора. Соответствующие матрицы ориентации для остальных звеньев выглядят аналогичным образом, но несколько проще.

Для определения координат центров кинематических пар O, A, B, C, D воспользуемся формулой (8.4). Ее последовательное применение к соответствующим парам звеньев даст следующее выражение для определения координат некоторой точки S , принадлежащей захвату манипулятора:

$$\mathbf{R}_S = \mathbf{R}_1 + \tau_2 \mathbf{r}_2 + \tau_3 \mathbf{r}_3 + \tau_4 \mathbf{r}_4 + \tau_5 \mathbf{r}_5 + \tau_6 \mathbf{r}_6.$$

Выражения для остальных точек выглядят аналогично.

Угловые скорости и угловые ускорения звеньев определяются последовательным применением формул (8.7) и (8.8), а линейные скорости и ускорения центров кинематических пар — формул (8.5) и (8.6). Подробная запись этих выражений довольно трудоемка, поэтому здесь она не приводится. Расчет с использованием этих формул предполагает применение вычислительной техники.

Обратная задача кинематики манипулятора

Рекуррентные соотношения (8.4)–(8.6) позволяют определить положение, скорость и ускорение любых точек и звеньев манипулятора, если заданы обобщенные координаты и их производные по времени. Рассмотрим обратную задачу: определим обобщенные координаты, их скорость и ускорение, если задано движение рабочего манипулятора — кисти, несущей захватное устройство или инструмент. Именно эта задача представляет непосредственный интерес при разработке алгоритма управления движением рабочего органа.

В общем случае положение исполнительного звена задается шестью эйлеровыми координатами: координатами полюса, в качестве которого может быть задан центр масс захватного устройства вместе с объектом манипулирования, и тремя углами, определяющими ориентацию захватного устройства связанной системы в неподвижном пространстве. Возникает шестимерная обратная задача по определению шести обобщенных координат.

Целесообразно максимально снизить размерность задачи. Такая возможность обычно существует благодаря тому, что присоединение кисти робота к несущей руке можно смоделировать сферической кинематической парой. Тогда, рассматривая кисть как твердое тело, осуществляющее предписанное пространственное движение, по известным формулам кинематики определим движение центра сферической пары. Задача стала трехмерной: требуется определить три обобщенные коор-

динаты для трехзвенной кинематической цепи позиционирующих движений по заданным координатам исполнительной точки.

Решается эта задача методом последовательных приближений. Первым приближением задаются значения обобщенных координат и по алгоритму прямой задачи определяются координаты исполнительной точки, затем полученные значения сравниваются с заданными. Одним из известных математических методов находится поправка и вводятся новые значения обобщенных координат — так продолжается до тех пор, пока не будет найдено точное решение.

Для простейших манипуляторов, схемы которых рассмотрены ранее, существует возможность составления конечного алгоритма решения обратной задачи, более простого, чем метод последовательных приближений.

Решение обратной задачи кинематики для манипуляторов с прямоугольной, цилиндрической и сферической системами координат не вызывает затруднений. Анализируя схемы, представленные на рис. 8.5–8.7, можно вычислить обобщенные координаты по заданному положению исполнительной точки S .

Для манипулятора с прямоугольной системой координат

$$\begin{aligned}q_1 &= h_1 = z; \\q_2 &= h_2 = y; \\q_3 &= h_3 = x - h_S;\end{aligned}$$

для манипулятора с цилиндрической системой координат

$$\begin{aligned}q_1 &= \varphi_1 = \text{arctg}(x/z); \\q_2 &= h_2 = y; \\q_3 &= h_3 = \sqrt{x^2 + z^2} - h_S;\end{aligned}$$

для манипулятора со сферической системой координат

$$\begin{aligned}q_1 &= \varphi_1 = \text{arctg}(x/z); \\q_2 &= \varphi_2 = \text{arctg}\left(y/\sqrt{x^2 + z^2}\right); \\q_3 &= h_3 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - h_S.\end{aligned}$$

Дифференцируя эти соотношения, можно получить формулы для скоростей и ускорений. Для манипулятора с шарнирной схемой задача решается несколько сложнее. Подробнее об этом можно прочитать в книге [5].

Предварительный силовой расчет манипулятора

Предварительный силовой расчет манипулятора можно выполнить по упрощенной схеме кинестатического расчета, считая звенья геометрическими с сосредоточенными точечными массами, помещенными в центрах масс. На этапе предварительного расчета манипулятора ориентировочно рассчитывается мощность двигателя и определяется быстродействие манипулятора. При расчете мощности двигателя учитываются такие параметры, как масса переносимого груза, максимальный радиус вылета руки (для телескопической руки), предельные перемещения груза по координатам, номинальная скорость движения. Расчет выполняется для периода неустановившегося движения, каковым является период пуска.

Рассмотрим, например, вращательное движение модуля поворота руки шарнирного манипулятора, схема которого представлена на рис. 8.18. В период пуска момент двигателя складывается из статического момента, создаваемого весом руки, рабочего органа и переносимого груза, и динамического

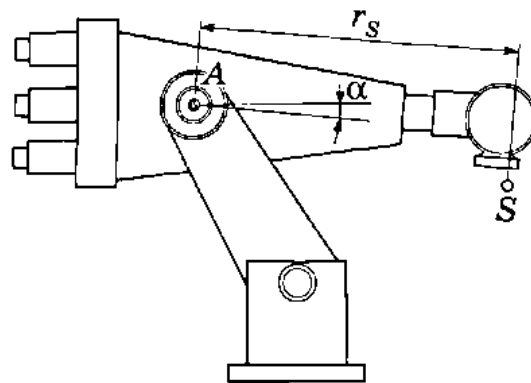


Рис. 8.18. Манипулятор со статически уравновешенной рукой

момента, связанного с неравномерностью движения по координате φ :

$$M = M_{\text{ст}} + M_{\text{дин}}.$$

В случае статически уравновешенной руки $M_{\text{ст}}$ определяется только весом груза и радиусом размещения его относительно шарнира A . Вопрос уравновешивания руки имеет важное практическое значение как для облегчения управления при обучении, так и для энергетического баланса манипулятора.

Для достижения статической уравновешенности необходимо, чтобы при изменении положения системы центр масс оставался неподвижным. Эта задача для звена, совершающего вращательное движение, решается добавлением к нему дополнительной массы (так называемого дебаланса) или таким распределением массы звена, чтобы центр его масс оказался в центре шарнира. Этот прием непригоден при телескопической руке, так как из-за движения в поступательной паре положение центра масс изменяется, следовательно, необходимо непрерывно корректировать положение дебаланса, что трудно выполнимо. Для статического уравновешивания руки манипулятора наиболее массивные его части, к которым относятся двигатели с редукторами, располагаются за шарниром, как показано на рис. 8.18, с таким расчетом, чтобы центр масс оказался в точке A . Перераспределение веса может увеличить динамическую неуравновешенность. Поэтому для статического уравновешивания руки применяются также специальные пружинные или пневматические уравновешивающие устройства.

Даже при полной статической уравновешенности руки существует статический момент от неуравновешенной массы переносимого груза. С учетом остаточной статической неуравновешенности

$$M_{\text{ст}} = k_c = mgr_S \cos \alpha,$$

где k_c — коэффициент статической неуравновешенности руки (согласно полученным на практике данным принимается равным 1,5); m — масса груза; r_S — постоянный радиус центра масс груза; α — угол наклона руки к горизонту.

Динамический момент $M_{\text{дин}}$, преодолеваемый двигателем в случае вращательного движения вокруг оси,

$$M_{\text{дин}} = -J\varepsilon,$$

где J — общий момент инерции руки и переносимого груза относительно центра вращения; ε — угловое ускорение.

Эту же формулу можно представить в виде

$$M_{\text{дин}} = k_{\text{д}} = mr_S^2\varepsilon,$$

где $k_{\text{д}}$ — коэффициент динамической неуравновешенности руки, учитывающий момент инерции вращающихся частей привода и самой руки без груза (по имеющимся данным, для существующих конструкций роботов обычного типа $k_{\text{д}} = 1,8 \dots 2,3$).

Динамический момент зависит в первую очередь от углового ускорения ε . Выбирать допустимое значение ε следует на основании имеющегося опыта эксплуатации роботов. На рис. 8.19 представлена осциллограмма движения руки робота, переносящей груз. Она включает периоды разгона $t_{\text{р}}$, установившегося движения $t_{\text{уст}}$, торможения $t_{\text{т}}$. Здесь обозначены также v — скорость движения, a — ускорение, S — перемещение, ΔS — малые упругие колебания руки, $T_{\text{п}}$ — полное время движения, включающее время успокоения рабочего ор-

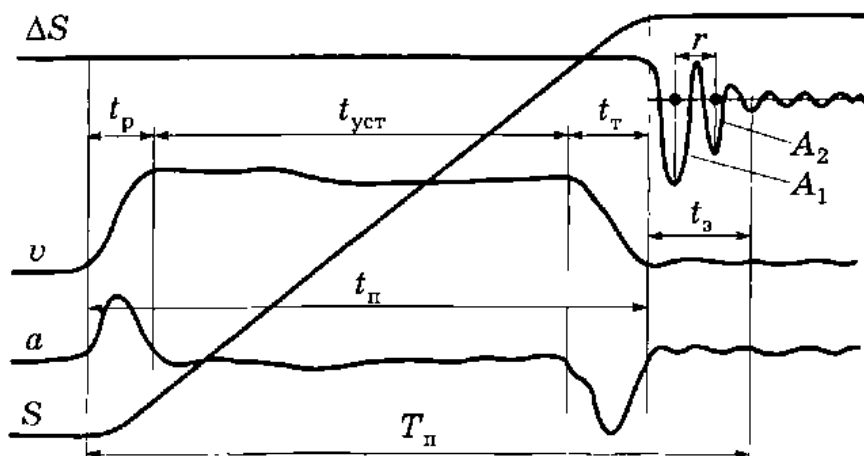


Рис. 8.19. Типовая осциллограмма параметров движения руки при переносе груза

гана, t_3 — время затухания колебаний, t_n — время рабочего движения. Там же видно, как происходит успокоение рабочего органа, на что требуется значительное время.

Закон изменения скорости обычно принимается трапецеидальным, тогда разгон и замедление происходят с постоянным ускорением. Длины путей разгона и торможения обычно принимают равными и составляющими некоторую часть общего перемещения:

$$\varphi_p = \varphi_t = k_\varphi \varphi,$$

где k_φ — коэффициент быстродействия.

Чем меньше k_φ , тем быстрее нарастает скорость, а следовательно, увеличиваются динамические нагрузки на звенья. С целью ограничения максимальных ускорений до значений $\varepsilon = 10 \dots 20 \text{ рад/с}^2$, что для манипулятора средних размеров соответствует линейным ускорениям $5 \dots 10 \text{ м/с}^2$; при ориентировочном расчете можно принимать $k_\varphi = 0,1 \dots 0,2$.

Таблица 8.1

Предельные параметры перемещений руки человека

Движение	Рабочий ход, рад	Скорость, рад/с	Ускорение, рад/с ²	Мощность, Вт
Захват	1,5	15	350	40
Вращение кисти	1,5	15	450	40
Изгиб кисти	3	20	500	50
Вращение предплечья	2	15	200	120
Изгиб предплечья	3	17	300	150
Вращение плеча	1,5	10	120	200
Изгиб плеча	1,5	7	70	200

Динамическое совершенство руки-манипулятора еще очень невысоко. В табл. 8.1 приведены среднестатистические характеристики перемещения руки человека. Здесь они даются для того, чтобы показать, насколько современные манипуляторы далеки от совершенства человеческой руки.

Путь разгона для принятого закона равноускоренного движения связан с продолжительностью движения и угловой скоростью зависимостями

$$\varphi_p = \varepsilon t_p^2 / 2; \quad \varphi_p = \omega^2 / (2\varepsilon).$$

На базе анализа этих формул можно обоснованно назначать значения скоростей и ускорений.

Как следует из изложенного, увеличение быстродействия манипулятора благоприятно сказывается на его производительности, но приводит к росту динамической составляющей момента, поэтому возникает задача оптимизации параметров быстродействия, которая решается с учетом приведенных соотношений и имеющегося опыта эксплуатации роботов.

Мощность привода вращательного движения определяется по формуле

$$N = M\omega/\eta,$$

где η — общий КПД передачи (в зависимости от вида редуктора и значения передаточного отношения $\eta = 0,3 \dots 0,8$). Двигатель должен обладать достаточной мощностью для обеспечения надежной работы манипуляторов в переходных режимах.

Контрольные вопросы и задания

1. Что понимается под словом «робот» в широком смысле слова?
2. Как классифицируются манипуляционные роботы?
3. Начертите функциональную схему автоматического робота.
4. Что такое промышленный робот?
5. По каким признакам квалифицируются промышленные роботы?
6. Охарактеризуйте назначение глобального, регионального и локального движений робота.
7. Сколько степеней свободы должен иметь полный манипулятор?
8. Как реализуется кинематическая цепь региональных движений?

9. Дайте сравнительную оценку манипуляторов с прямоугольной, цилиндрической и сферической системами координат.
10. Нарисуйте схему шарнирного робота.
11. Как обычно осуществляется кинематическая цепь ориентирующих движений?
12. Как задается ориентация тела в пространстве?
13. Запишите матрицы элементарных поворотов вокруг осей x , y , z .
14. В чем состоит прямая задача кинематики манипулятора?
15. В чем состоит обратная задача кинематики манипулятора?
16. В чем состоит предварительный силовой расчет манипулятора?
17. Как определить мощность привода для вращательного движения уравновешенной руки манипулятора?
18. Подсчитайте число степеней свободы кисти руки человека.

1. Элементы матричной алгебры

Матрица представляет собой прямоугольную таблицу, элементами которой могут быть числа, функции, другие матрицы и т.п. В дальнейшем речь будет идти только о числовых матрицах. Элементы матриц образуют ее строки и столбцы. Число строк m и число столбцов n определяют размерность матрицы. Если число строк равно числу столбцов, матрица называется квадратной, в противном случае — прямоугольной размерностью $m \times n$. Матрица, содержащая только один столбец (размерностью $m \times 1$), называется *вектором*.

К понятию матрицы легко прийти, рассматривая, например, две декартовы прямоугольные системы координат xuz и $\xi\eta\zeta$, имеющие общее начало и повернутые относительно друг друга. Положение системы $\xi\eta\zeta$ относительно системы xuz будет определено, если известно направление трех ее осей. Положение каждой оси задается значениями трех углов относительно осей x, y, z или, что удобнее, значениями косинусов этих углов (так называемых направляющих косинусов), так как косинусы углов принимают положительные значения в пределах от 0 до 1.

Удобно представить значения направляющих косинусов в виде таблицы.

Ось	ξ	η	ζ
x	a_{11}	a_{12}	a_{13}
y	a_{21}	a_{22}	a_{23}
z	a_{31}	a_{32}	a_{33}

В этой таблице второй, третий и четвертый столбцы составлены из направляющих косинусов осей ξ, η, ζ относительно осей x, y, z соответственно. Такая таблица и представляет собой матрицу. Ее можно записывать в развернутом виде или символически обозначать полужирной буквой, например **A**,

B, a, b, t и т.д. Достоинство матриц в том и состоит, что они позволяют упростить запись громоздких многомерных систем, тем самым облегчая формализацию задачи и позволяя сосредоточить внимание на ее содержательной части.

Матрицы могут иметь любую размерность. Матрицы одинаковой размерности можно складывать. Результат представляет собой новую матрицу той же размерности, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов составляющих матриц, например:

$$c_{mn} = a_{mn} + b_{mn}.$$

При записи элементов первый индекс является номером строки, а второй — номером столбца.

Возможно также выполнение обратных операций — разложение матрицы на составляющие и вычитание матриц.

Особенно часто практикуется умножение матриц. Оно выполняется по следующему правилу: умножение двух матриц дает новую матрицу, каждый элемент которой c_{mk} , стоящий в m -й строке и k -м столбце, вычисляется по правилу

$$c_{mk} = \sum a_{ms} b_{sk} \quad (s = 1, 2, \dots, n).$$

Умножаться могут только согласованные матрицы, у которых число столбцов равно числу строк, причем размерность вновь полученной матрицы $(m \times n) (n \times l) = m \times l$.

Воспользовавшись этой схемой, легко установить, что результатом умножения числовой матрицы на вектор является вектор, а результатом умножения матрицы-строки на матрицу-столбец — скаляр, т.е. обычное число. Отсюда же вытекает и очень важное свойство матричного произведения — матричное произведение некоммутативно, т.е. при перестановке мест сомножителей получается другой результат: $AB \neq BA$.

Квадратная матрица называется симметричной, если элементы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны между собой. Матрица называется кососимметричной, если на главной диагонали стоят нули, а элементы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны по величине, но противоположны по знаку.

Транспонированной называется матрица, полученная из исходной матрицы простой перестановкой местами строк и столбцов. Матрица, транспонированная по отношению к данной матрице A , обозначается A^T . В таком случае для симметричной матрицы $A^T = A$, для кососимметричной матрицы $B^T = -B$.

Единичной называется матрица, на главной диагонали которой стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю. Она будет обозначаться буквой E или 1 .

Квадратная матрица, определитель которой отличен от нуля, называется невырожденной. Для такой матрицы существует обратная матрица, т.е. такая, при умножении которой на исходную матрицу с любой стороны получается единичная матрица. Обратная матрица используется при решении системы линейных уравнений. Обычную систему линейных уравнений в краткой символической матричной записи можно представить в следующем виде:

$$x = Ay, \quad (\text{П1.1})$$

где x — вектор-столбец, составленный из переменных, стоящих в левой части системы линейных уравнений; A — матрица, составленная из коэффициентов при переменных в правой части системы уравнений (некоторые из них могут быть равны нулю); y — переменные правой части уравнений. Операторно-матричная запись (П1.1) означает, что вектор y матричным оператором A преобразуется в другой вектор x .

Умножим обе части матричного уравнения (П1.1) на обратную матрицу, которую будем обозначать A^{-1} , и получим

$$A^{-1}x = A^{-1}Ay.$$

В силу того что по определению $A^{-1}A = E$ и $Ey = y$, получаем решение системы (П1.1), записанное в матричном виде:

$$y = A^{-1}x.$$

Произведение матриц обладает следующими свойствами:

$$(AB)^T = B^T A^T; \quad (kA)B = A(kB) = k(AB);$$

$$(A + B)C = AC + BC; \quad C(A + B) = CA + CB;$$

$$A(BC) = (AB)C,$$

где k — скалярный множитель.

Исходя из геометрического представления вектора в трехмерном евклидовом пространстве можно записать:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a \cos \alpha \\ a \cos \beta \\ a \cos \gamma \end{bmatrix} = ae.$$

Компонентами орта e служат направляющие косинусы. В курсе теоретической механики используется представление вектора через орты осей базиса xuz :

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k},$$

причем базисные векторы представляются следующим образом:

$$\mathbf{i} = [1, 0, 0]^T; \quad \mathbf{j} = [0, 1, 0]^T; \quad \mathbf{k} = [0, 0, 1]^T.$$

Здесь и далее для удобства записи вектор-столбец с помощью символа транспонирования будет представляться в виде вектор-строки.

С помощью матриц можно представить все операции векторной алгебры, в том числе скалярное и векторное умножение векторов. Под скалярным произведением двух векторов понимается скалярная величина, равная произведению модулей a и b векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} , умноженному на косинус угла между ними:

$$ab = ab \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Тот же результат получится, если рассматривать матричное произведение вектора-строки \mathbf{a}^T на вектор-столбец \mathbf{b} :

$$\mathbf{a}^T \mathbf{b} = \sum a_i b_i, \quad i = x, y, z.$$

Два вектора, скалярное произведение которых равно нулю, являются ортогональными. Это очевидно, так как их скалярное произведение определяет проекцию одного вектора на направление другого. Скалярное произведение находит применение

в рассматриваемых задачах механики манипулятора, когда возникает необходимость проецирования одного вектора на направление другого.

Скалярное произведение векторов обладает следующими основными свойствами:

$$\mathbf{a}^T \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \mathbf{a};$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})^T \mathbf{c} = \mathbf{a}^T \mathbf{c} + \mathbf{b}^T \mathbf{c};$$

$$\mathbf{a}^T \mathbf{a} = a^2.$$

Под векторным произведением двух векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} , определенных в трехмерном евклидовом векторном пространстве, понимается вектор \mathbf{c} , выражающийся через компоненты векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} по правилу

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = [a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x]^T.$$

Тот же результат можно представить в операторно-матричной записи:

$$\mathbf{c} = \lambda(\mathbf{a})\mathbf{b},$$

где оператором $\lambda(\mathbf{a})$ является матрица следующего вида:

$$\lambda(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица $\lambda(\mathbf{a})$ является кососимметричной. Элементами матрицы $\lambda(\mathbf{a})$ служат элементы вектора $\mathbf{a} = [a_x, a_y, a_z]^T$. Такой вектор по отношению к кососимметричной матрице называется сопутствующим.

Результатом векторного умножения двух векторов является третий вектор, ортогональный к ним и численно равный площади параллелограмма, построенного на этих векторах. Векторное произведение находит широкое применение в механике. В частности, момент силы относительно некоторой точки представляет собой векторное произведение радиус-вектора точки приложения силы на вектор силы, линейная скорость —

векторное произведение вектора угловой скорости на радиус-вектор точки и т.д. Можно отметить следующие свойства векторного произведения:

$$\lambda(\mathbf{a})\mathbf{b} = -\lambda(\mathbf{b})\mathbf{a};$$

$$\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = \lambda(\mathbf{a})\mathbf{c} + \lambda(\mathbf{b})\mathbf{c};$$

$$\lambda(\mathbf{a})[\lambda(\mathbf{b})\mathbf{c}] = \lambda(\mathbf{c})[\lambda(\mathbf{b})\mathbf{a}] - \lambda(\mathbf{b})[\lambda(\mathbf{c})\mathbf{a}].$$

Произведение трех векторов $\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ называется смешанным произведением и является скаляром. Его можно представить в виде

$$\mathbf{a}^T \lambda(\mathbf{b})\mathbf{c}.$$

Для смешанного произведения возможны перестановки векторов по правилам

$$\mathbf{a}^T \lambda(\mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{b}^T \lambda(\mathbf{c})\mathbf{a} = \mathbf{c}^T \lambda(\mathbf{a})\mathbf{b};$$

$$\mathbf{a}^T \lambda(\mathbf{b})\mathbf{c} = -\mathbf{a}^T \lambda(\mathbf{c})\mathbf{b}.$$

Особое значение для применения в механике имеет матрица направляющих косинусов, которую в дальнейшем будем обозначать буквой $\boldsymbol{\tau}$. Направляющие косинусы связаны условиями ортогональности. Из девяти значений направляющих косинусов, входящих в матрицу $\boldsymbol{\tau}$, только три независимые, так как между ними шесть уравнений связей: первые три уравнения утверждают то, что сумма квадратов направляющих косинусов какой-либо оси равна единице, и еще три уравнения вытекают из того, что скалярные произведения ортогональных векторов равны нулю.

Рассмотрим транспонированную матрицу $\boldsymbol{\tau}^T$. Произведение матрицы $\boldsymbol{\tau}^T$ и матрицы $\boldsymbol{\tau}$ дает единичную матрицу \mathbf{E} (это вытекает из приведенных ранее условий ортогональности). Следовательно, $\boldsymbol{\tau}^T = \boldsymbol{\tau}^{-1}$, где $\boldsymbol{\tau}^{-1}$ — обратная матрица. Матрицы, обладающие таким свойством, называются ортогональными.

Преобразование переменных, описываемое системой линейных уравнений, называется линейным преобразованием. Ему соответствует определенная матрица. Декартова система координат представляет собой ортонормированный базис, так

как орты ее осей ортогональны между собой. Линейное преобразование, переводящее вектор из одного ортонормированного базиса в другой, называется ортогональным преобразованием. Оператором такого преобразования служит ортогональная матрица.

Приведем некоторые свойства ортогонального преобразования. Всякое ортогональное преобразование является невырожденным, т.е. для него существует обратная матрица, причем $\tau^T = \tau^{-1}$, а определитель матрицы равен единице. Ортогональное преобразование не изменяет скалярного произведения двух векторов:

$$(\tau a)^T \tau b = a^T b.$$

Для векторного произведения справедливо следующее правило:

$$\tau \lambda(a) b = \lambda(\tau a) \tau b.$$

Матрицу можно рассматривать либо как оператор, действующий на систему координат, либо как оператор, действующий на вектор и преобразующий его в другой вектор. Рассмотрим случай, когда имеют место обе интерпретации, — задачу о преобразовании оператора при изменении системы координат. Пусть A означает оператор, действующий на вектор x и преобразующий его в вектор y :

$$y = Ax.$$

Пусть теперь рассматриваемая координатная система преобразуется матрицей B . Тогда в новой координатной системе компоненты вектора y будут определяться равенством

$$By = BAx,$$

что можно представить также в виде

$$By = B A B^{-1} Bx.$$

Здесь Bx — вектор x , выраженный в новой системе координат.

Полученное уравнение показывает, что если на вектор x , выраженный в новой системе координат, воздействовать опе-

ратором BAV^{-1} , получается вектор y , также выраженный в новой системе. Поэтому произведение BAV^{-1} можно рассматривать как оператор A , преобразованный к новым осям. Такое преобразование называется подобным. Всякий раз, когда будет встречаться выражение вида BAV^{-1} , это будет означать, что произошло преобразование оператора к новым осям.

При изучении линейных преобразований также часто рассматривается векторное уравнение вида

$$Ax = \lambda x, \quad (\text{П1.2})$$

в котором λ — некоторая постоянная, возможно, комплексная. Значения λ , при которых уравнение (П1.2) имеет отличные от нуля решения, называются характеристическими или собственными значениями матрицы A . Поэтому задачу об отыскании векторов x , удовлетворяющих этому уравнению, называют задачей о собственных значениях данной матрицы, а векторы, удовлетворяющие этому уравнению, — собственными векторами матрицы A :

$$(A - \lambda E)x = 0. \quad (\text{П1.3})$$

Уравнение (П1.3) представляет собой систему n однородных линейных уравнений относительно составляющих x_1, \dots, x_n собственного вектора x , которая определяет их с точностью до скалярного множителя. Физический смысл этих соотношений состоит в том, что однозначно определенным является только направление собственного вектора, а не его модуль. Будучи однородными, уравнения (П1.3) могут иметь нетривиальные (ненулевые) решения только тогда, когда детерминант, составленный из их коэффициентов, равен нулю.

Таким образом, получаем уравнение относительно λ :

$$\text{Det}[A - \lambda E] = 0. \quad (\text{П1.4})$$

Уравнение (П1.4) называется характеристическим уравнением матрицы A , корнями его являются собственные значения λ матрицы A .

Составляющие собственных векторов можно записать в виде x_{jk} , где первый индекс означает номер составляющей собствен-

ного вектора, а второй — номер самого собственного вектора. С учетом этих обозначений уравнения (1.1) можно представить в виде

$$\mathbf{AX} = \mathbf{X}\Lambda, \quad (\text{П1.5})$$

где \mathbf{X} — матрица с элементами x_{jk} :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix};$$

Λ — диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Умножив обе части уравнения (П1.5) слева на \mathbf{X}^{-1} , получим

$$\mathbf{X}^{-1}\mathbf{AX} = \Lambda.$$

Левая часть этого уравнения записана в форме матрицы, подобной матрице Λ .

Таким образом, задачу о нахождении собственных значений матрицы можно свести к поиску такой матрицы \mathbf{X} , которая подобным преобразованием сводит матрицу \mathbf{A} к диагональной. Элементы полученной диагональной матрицы будут искомыми собственными значениями. Задача об отыскании собственных значений возникает при исследовании малых колебаний многоэлементных механических систем.

2. Обобщенные координаты, уравнения связей, математическая модель пространственной кинематической цепи

Твердое тело — это система материальных точек, расстояние между которыми не изменяется при его движении. Определим, сколько независимых координат необходимо для задания положения тела в выбранном пространстве. Каждая точка в отдельности имеет три независимые координаты. На положение точек, составляющих твердое тело, налагается условие постоянства расстояния между ними вида $r_{ij} = c_{ij}$ (где r_{ij} — расстояние между i -й и j -й точками, c_{ij} — постоянная), из-за чего число независимых координат уменьшается. Однако не обязательно определять расстояние от каждой точки до трех произвольно выбранных точек. Таким образом, если задано положение трех точек твердого тела, положение остальных точек определяется с помощью приведенного уравнения. Три точки твердого тела также не вполне независимы. Их координаты связаны уравнениями жесткой связи $r_{12} = c_{12}$, $r_{23} = c_{23}$, $r_{13} = c_{13}$, которые уменьшают число степеней свободы с 9 до 6. Итак, твердое тело обладает шестью степенями свободы: для задания его положения в пространстве требуется шесть независимых координат.

Положение твердого тела в пространстве не обязательно задавать декартовыми координатами точек. Положение произвольной точки M твердого тела в пространстве E определяется радиус-вектором \mathbf{R} :

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_A + \boldsymbol{\tau}\rho, \quad (\text{П2.1})$$

где \mathbf{R}_A — радиус-вектор начала связанной системы тела; $\boldsymbol{\tau}$ — матрица направляющих косинусов связанной системы; ρ — радиус-вектор точки M в связанной системе.

Поскольку точка M — произвольная, уравнением преобразования координат (П2.1) определяется положение любой точки, а значит, самого тела. В этом уравнении двенадцать переменных параметров: три декартовы координаты начала — точки A

и девять направляющих косинусов τ_{ij} . Однако направляющие косинусы связаны шестью условиями ортогональности:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{11}^2 + \tau_{21}^2 + \tau_{31}^2 &= 1; \\ \tau_{12}^2 + \tau_{22}^2 + \tau_{32}^2 &= 1; \\ \tau_{13}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{33}^2 &= 1; \\ \tau_{11}\tau_{12} + \tau_{21}\tau_{22} + \tau_{31}\tau_{32} &= 0; \\ \tau_{12}\tau_{13} + \tau_{22}\tau_{23} + \tau_{32}\tau_{33} &= 0; \\ \tau_{11}\tau_{13} + \tau_{21}\tau_{23} + \tau_{31}\tau_{33} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{П2.2})$$

уменьшающими число свободно задаваемых параметров тела до шести. Можно выразить матрицу τ через эйлеровы углы. Тогда независимыми координатами, определяющими положение тела, будут служить три декартовы координаты и три эйлеровых угла. Таковую совокупность координат полюсов и эйлеровых углов будем называть *эйлеровыми координатами тела*.

Любая совокупность параметров q_s , достаточная для определения положения системы в пространстве, носит название обобщенных координат системы. Между обобщенными и декартовыми координатами точек должны существовать явные соотношения вида

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_n).$$

Таким соотношением, в частности, является (П2.1).

Кинематическая цепь — это агрегат, образованный из подвижно соединенных между собой твердых тел. Из одной и той же системы тел можно получить различные агрегаты, отличающиеся друг от друга структурой (под структурой понимается способ соединения отдельных тел в агрегате). Тела соединяются с помощью устройств, называемых кинематическими парами. До объединения в связанную систему тела образовывали систему свободных тел с общим числом степеней свободы $6n$, где n — число тел. При соединении тел посредством кинематических пар на координаты точек этих тел накладываются определенные ограничения, уменьшающие общее число степе-

ней свободы системы. Соотношения, возникшие в результате соединения тел с помощью кинематических пар и связывающие обобщенные координаты, называются *обобщенными уравнениями связей* или просто уравнениями связей. Здесь будут рассматриваться только конечные (голономные) связи, которые накладывают ограничения на координаты точек. Они представляются уравнениями вида

$$F_K(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0. \quad (\text{П2.3})$$

Это справедливо для любой материальной системы, в том числе и для отдельного твердого тела. Так, например, если положение твердого тела задано с помощью направляющих косинусов, уравнениями вида (П2.3) являются шесть условий ортогональности (П2.2), выражающих в конечном счете неизменность расстояний между точками в твердом теле.

Практический интерес представляют только пары 3–5-го классов: шаровой шарнир, шаровой шарнир с пальцем, вращательная пара (цилиндрический шарнир), поступательная пара, винтовая пара.

Очевидно, что для кинематической цепи число уравнений должно быть меньше числа переменных n (обобщенных координат), в противном случае система становится «затвердевшей». Система уравнений (П2.3) определяет t переменных как неявные функции от остальных $n - t$ переменных. Эти $v = n - t$ переменных служат независимыми обобщенными координатами кинематической цепи. Задавая их в области существования функции F_K , получим систему t уравнений с t неизвестными. Такая замкнутая система имеет определенное решение и представляет собой математическую модель механизма как системы, обладающей определенностью движения. В случае замкнутой цепи все уравнения (П2.3) взаимосвязаны. Система для открытой цепи распадается на t независимых уравнений, что упрощает задачу.

3. Принцип Даламбера и его использование в задачах механики машин

Механизм представляет собой систему связанных между собой материальных тел, обычно называемых звеньями. Каждое звено движется под действием приложенных к нему активных сил и реакций связей со стороны соседних звеньев. Реакции связей — это силы более сложной структуры, чем активные силы. Если активные силы полностью определяются внешними условиями и от движения звеньев не зависят, то реакции связей зависят как от внешних сил, так и от движения звеньев.

На основе 2-го закона Ньютона для механизма можно составить столько дифференциальных уравнений, сколько в нем подвижных звеньев. Задача, таким образом, получается очень сложной. Полученная система уравнений может быть решена только в том случае, если известны зависимости реакций связей от координат точек системы (от конфигурации системы), т.е. упругость связей.

Обойти возникшее затруднение смог французский математик Даламбер, предложивший метод расчета, названный принципом Даламбера: если нельзя вычислить реакции связей, то их надо исключить, составив специальным образом уравнение движения.

В принцип Даламбера прежде всего вводится гипотеза об абсолютно жестких связях. В реальных механизмах эта гипотеза вполне оправдана, так как из-за малой деформации звеньев упругость связей практически не изменяет движение.

Следующим моментом в принципе Даламбера является сведение задачи о движении к задаче о равновесии. Таким образом, имеем:

$$\mathbf{F} - m\mathbf{a} + \mathbf{R} = \mathbf{0}.$$

Отсюда видно, что вектор $(\mathbf{F} - m\mathbf{a})$ уравнивается силами, действующими со стороны связей. Поэтому к нему можно применить принцип возможных перемещений, состоящий в том, что в случае равновесия системы сил сумма работ всех сил, приложенных к телу на возможном перемещении, равна

нулю. Это является третьим моментом в принципе Даламбера. Из получившихся уравнений реакции связей исключаются, так как при абсолютно жестких связях перемещение в направлении сил, действующих со стороны связей, невозможно.

Принцип Даламбера не вводит никаких новых сил. До Даламбера представление об абсолютно жестких связях применялось редко. После него это представление стало широко использоваться, так как очень упрощало задачу и вместе с тем позволяло достаточно точно описать движение. В дальнейшем в формулировку принципа Даламбера стали вводить термин «силы инерции», называя так вектор $-ma$. Однако для неподвижного наблюдателя никаких сил, кроме активной силы F и реакции R , не существует, поэтому выражение $-ma$ вообще не сила. Если бы $-ma$ признать силой, то оказалось бы, что сумма всех сил, действующих на тело, равна нулю, но, несмотря на это, тело обладает ускорением, отличным от нуля. Кроме того, неизвестно, откуда эта сила взялась, так как нет других тел, которые могли бы ее вызвать.

Интерпретации принципа Даламбера приведенным разъяснением не исчерпываются, из-за чего и возникают различные понимания этого принципа и споры вокруг термина «силы инерции». Одна из точек зрения состоит в следующем. Поскольку тело M движется с ускорением a , это означает, что оно находится под действием сил со стороны других тел, равнодействующая которых равна ma . Это означает, что, согласно 3-му закону Ньютона, ускоренное тело M действует на ускоряющее тело с силой $-ma$. Выражение $-ma$ может быть названо силой инерции, и оно на самом деле является силой. Однако эта сила приложена к ускоряющим телам, а не к ускоряемому телу M . Поэтому принцип Даламбера можно интерпретировать и так: если к ускоряемому телу M приложить активную силу F , силу реакции R и силу инерции $-ma$, то в сумме они равны нулю, т.е. уравнивают друг друга. Однако это равновесие является фиктивным, так как мы получаем нуль в результате сложения сил, действующих на разные тела. Поэтому часто при формулировке принципа Даламбера к термину «силы инерции» добавляют «фиктивные».

Резюмируя сказанное, сделаем вывод, что можно вкладывать различный смысл в понятие «силы инерции», однако всегда следует пояснять ту точку зрения, с которой это понятие введено. В противном случае неизбежна путаница.

При решении динамических задач возможны два подхода: с точки зрения наблюдателей, находящихся в инерциальной системе и в неинерциальной. Первый наблюдатель для объяснения явления использует 2-й закон Ньютона, второй наблюдатель — принцип Даламбера, для чего ему нужно дополнительно к активным силам ввести силы инерции. Оба подхода являются справедливыми и дают правильное решение.

Рассмотрим, например, круговое движение тела, закрепленного на нити. С точки зрения неподвижного наблюдателя, в системе $xу$ движение тела по круговой траектории происходит под действием реакции нити, направленной к центру вращения и действующей в соответствии с законом

$$R = ma,$$

где R — *центростремительная сила*; a — ускорение центра тяжести тела.

Для наблюдателя, находящегося в системе $\xi\eta$, тело m не движется. Это возможно только потому, что на него действуют две силы, R и U , находящиеся в равновесии. Сила инерции U называется в этом случае *центробежной силой*.

Для решения обратных задач динамики более удобным является второй подход, так как он приводит к рассмотрению условия равновесия сил. Это объясняет причину широкого использования в технических расчетах сил инерции.

Пример ПЗ.1. Тело M совершает вращательное движение вокруг некоторой точки O . Такое движение можно осуществить разными способами, но всегда должна существовать связь, обуславливающая окружную траекторию точек тела. Эту связь можно осуществить, например, с помощью нити (рис. ПЗ.1).

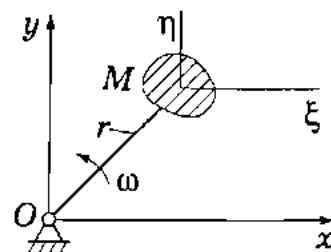


Рис. ПЗ.1. Связь с помощью нити

Предположим, что телу M посредством толчка сообщен начальный импульс в направлении, касательном к окружной траектории. Требуется объяснить равномерное вращательное движение. Существование связи проявляется в виде реакции, т.е. в виде внешней силы, действующей на тело M . Эту силу должен принимать во внимание наблюдатель, находившийся как в инерциальной, так и в неинерциальной системе. Но для второго тело M неподвижно, так как его система отсчета $\xi\eta$ жестко связана с телом. Это возможно лишь в том случае, если равнодействующая всех сил, приложенных к телу, равна нулю. Значит, кроме реакции, на тело действует еще одна сила, равная реакции связи, но противоположно направленная. Это сила инерции. Поскольку тело M неподвижно в неинерциальной системе отсчета $\xi\eta$, сила инерции представляется только одной составляющей — переносной силой инерции U^e . Для определения ее величины и направления нужно знать величину и направление переносного ускорения a_M^e . При любом варианте выбора подвижной системы $\xi\eta$ переносное ускорение совпадает с центростремительным ускорением центра тяжести тела M при его равномерном движении по окружной траектории.

На основании изложенного определяются сила инерции

$$U^e = -m\omega^2 r$$

и реакция связи

$$R = m\omega^2 r.$$

Для наблюдателя, находящегося в неподвижной системе отсчета $xу$, никаких сил инерции не существует, но зато тело M движется по окружной траектории и, следовательно, обладает ускорением. Единственная сила, приложенная к нему, — реакция связи. Она и объясняет наличие ускорения. Действительно, реакция связи, осуществляемой нитью, может быть направлена только по нити к центру, что и обуславливает появление в этом направлении ускорения. Поскольку это ускорение всегда направлено к центру, оно называется центростремительным. Значение его, как известно из кинематики, равно $\omega^2 r$.

Из приводимых объяснений пока не ясна причина возникновения реакции связи. После начального толчка тело, двигаясь в направлении импульса, т.е. касательно к окружной траектории, растягивает нить. Растяжение продолжается до тех пор, пока возникающая при этом сила упругой деформации нити не сообщит телу ускорение, необходимое для движения по окружности. При этом длина нити увеличивается по сравнению с первоначальной. Но обычно предполагается, что связь достаточно жесткая, и этой деформацией пренебрегают. Однако существование деформации принципиально важно для объяснения наблюдаемого движения.

Реакцию связи можно определить исходя из того, что известно центростремительное ускорение центра тяжести тела M :

$$R = m\omega^2 r.$$

Эту реакцию иногда называют центростремительной силой, так как она обуславливает центростремительное ускорение. Природа центростремительной силы — в упругой деформации связи. Находящийся в неинерциальной системе наблюдатель, имеющий дело с равновесием сил, вторую силу, силу инерции, естественно, может называть центробежной силой, отчего она не перестает быть силой инерции.

Основываясь на изложенном, объясним причины разрушения связей, в частности разрушения быстровращающихся маховиков и шлифовальных кругов.

Всякое вращательное движение связано с деформацией связи, причем чем больше ускорение тела, тем больше деформация связи. Ускорение может быть каким угодно, а величина деформации не может превышать допустимую из условия прочности связи. Если начальный импульс будет слишком велик за счет сообщения телу очень большой скорости, то это приведет к очень большому ускорению в последующем вращательном движении. Это вызвано тем, что сообщенная телу скорость должна сохраниться и во вращательном движении, что в случае достаточно жесткой связи возможно лишь за счет большой угловой скорости. Связь разрушится из-за несоот-

ветствия допустимой деформации и ускорения, обусловленного начальным импульсом.

Если большой скорости тело M достигает в результате постепенного увеличения угловой скорости, как это происходит при разгоне быстровращающихся маховиков и шлифовальных кругов, разрушается оно из-за невозможности обеспечить требуемое ускорение посредством связи, обладающей ограниченной деформационной способностью. Таким образом, причиной разрушения маховиков и шлифовальных кругов является не появление каких-то дополнительных сил, а, наоборот, отсутствие возможности обеспечить необходимую упругую силу посредством деформируемой связи.

Приведенное объяснение является точкой зрения наблюдателя, находящегося в инерциальной системе, но вывод справедлив и для находящегося в неинерциальной системе, так как и в этом случае сила инерции является не причиной, а следствием возникающего движения с ускорением. Само движение возможно лишь при выполнении тех же условий, что и в первом случае.

Пример П3.2. Тело M имеет возможность перемещаться по прямолинейному рычагу 1 , вращающемуся с угловой скоростью ω . Траектория движения центра тяжести тела M представляет собой некоторую кривую (рис. П3.2).

Наблюдатель, находящийся в инерциальной системе xu , наблюдает движение по кривой с ускорением. Полное ускорение a может быть разложено на нормальное a^n , направленное внутрь кривой, и касательное a^t — вдоль кривой. Сила, вызывающая ускорение a , есть реакция со стороны рычага 1 . Так как в отсутствие сил трения направление реакции перпендикулярно рычагу, всегда можно указать направление полного ускорения a .

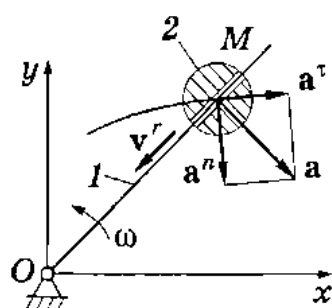


Рис. П3.2. Вращение тела с возможностью перемещения на прямолинейном рычаге

Наблюдатель, связанный с подвижной системой координат $\xi\eta$ (рис. ПЗ.3), также наблюдает движение тела M и объясняет его действием реакции \mathbf{R} и силы инерции \mathbf{U} .

Поскольку наблюдаемое им движение происходит вдоль прямолинейного рычага, так же должна быть направлена и результирующая сила. Сила инерции в данном случае представлена переносной и кориолисовой силами инерции. Переносное и кориолисово ускорения, определяемые по известным правилам, показаны на рис. ПЗ.3.

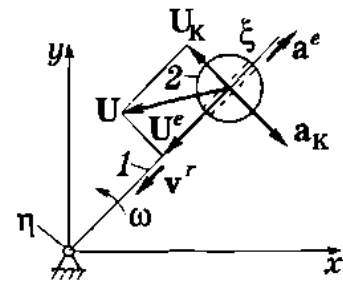


Рис. ПЗ.3. Направление сил инерции, действующих на тело при вращательном движении рычага

4. Автоматические регуляторы скорости

Назначение автоматических регуляторов — поддержание скорости машины в заданных пределах при периодическом или случайном изменении нагрузки. Некоторые машины, например асинхронные электродвигатели, обладают свойством саморегулирования. Турбины, двигатели внутреннего сгорания этим свойством не обладают и при уменьшении нагрузки могут пойти вразнос. Чтобы этого не происходило, они снабжаются автоматическими регуляторами.

На рис. П4.1 представлена схема центробежного регулятора прямого действия. При увеличении угловой скорости вала регулятора его ползун перемещается вверх. Связанная с ним дроссельная заслонка перекрывает трубопровод с паром или топливной смесью, что снижает скорость машины. Если угловая скорость вала регулятора уменьшается,

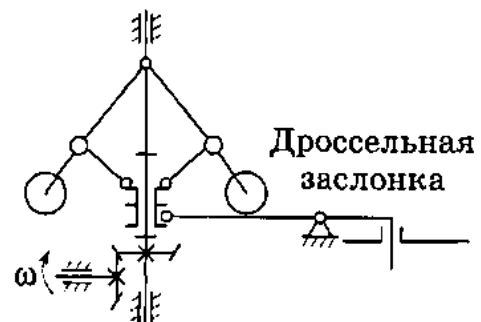


Рис. П4.1. Центробежный регулятор Уатта

дроссельная заслонка увеличивает проходное сечение, что ведет к возрастанию скорости.

Вследствие инерционности регулятора в нем возникает колебательный процесс. В правильно спроектированном регуляторе он быстро затухает (рис. П4.2, а). Это качество системы регулирования называется устойчивостью. Если система неустойчива, амплитуда колебаний возрастает до бесконечности (рис. П4.2, б).

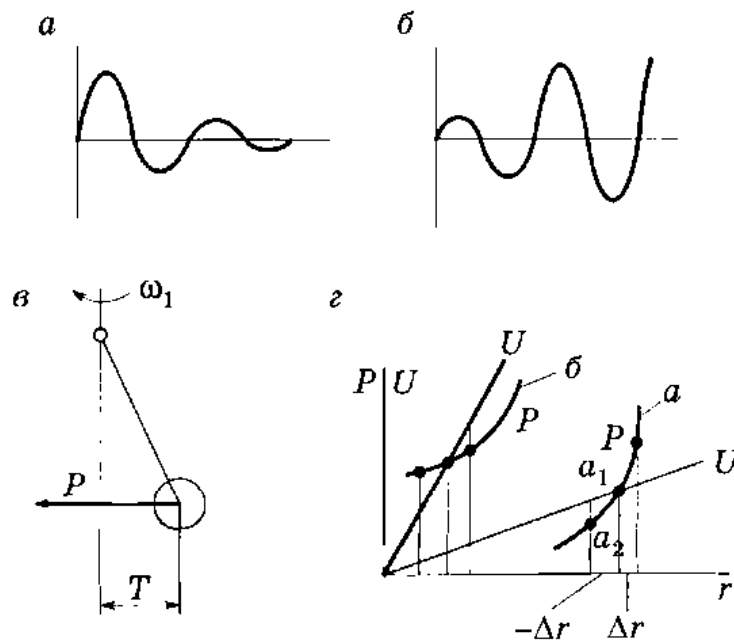


Рис. П4.2. Характеристики центробежного регулятора: а — затухающий колебательный процесс; б — неустойчивый колебательный процесс; в — статическое равновесие регулятора; г — устойчивая и неустойчивая характеристики регулятора

Из условия статического равновесия регулятора (рис. П4.2, в) следует, что в положении, определенном обобщенной координатой φ , на груз действует горизонтальная сила P . Зависимость этой силы от расстояния от центра груза до оси вращения представляет собой статическую характеристику регулятора, определяемую экспериментально.

При вращении грузов возникает сила инерции U . Сила инерции линейно зависит от радиуса ($U = m\omega^2 r$), ее график — прямая линия. Точка пересечения графика силы инерции и характеристики регулятора определяет расстояние от центра грузов до оси вращения в положении равновесия.

Пусть характеристика имеет вид кривой a (рис. П4.2, z) и регулятор находится в равновесном состоянии при угловой скорости ω_1 . По каким-то случайным причинам радиус r получил положительное приращение Δr . В новом положении a_1 сила P больше силы U , следовательно, грузы переместятся в направлении силы P , т.е. к точке a_1 . Если радиус получил отрицательное приращение ($-\Delta r$), то в положении a_2 сила инерции U больше силы P — грузы переместятся в направлении силы U , т.е. снова к точке равновесия.

Таким образом, установлено, что характеристика a на рис. П4.2, z устойчивая. Из аналогичных рассуждений следует, что характеристика b на рис. П4.2, z неустойчивая.

Характеристики реальных регуляторов состоят из участков устойчивости и неустойчивости. Поэтому на практике используется не вся характеристика, а только ее устойчивая часть. Для этого регулятор снабжают ограничительными упорами.

Помимо статической устойчивости следует рассмотреть и динамическую устойчивость. Для этого нужно исследовать соответствующее дифференциальное уравнение на устойчивость. Эта сложная в математическом смысле задача изучается в специальном курсе теории автоматического регулирования.

5. Динамическая упругая модель механизма

Более точно, чем в схеме с абсолютно жесткими звеньями, свойства механической системы описываются с помощью динамической модели, учитывающей упругость звеньев. Исследование упругих свойств механизма следует начинать с изучения простейшей одномассовой динамической модели. К такой модели, в частности, сводится динамическая система силового модуля. Динамическую модель механизма можно рассматривать как совокупность одномассовых моделей.

Динамическая модель колебательной системы с одной степенью свободы представлена на рис. П5.1, a . Ее реализация возможна, если деформации подчинены закону Гука ($F = cq$), а сила трения пропорциональна скорости ($\Phi = kq'$).

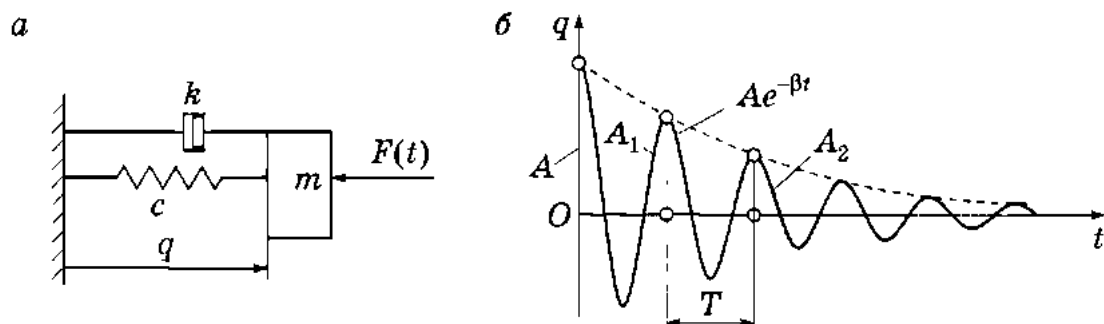


Рис. П5.1. Колебательная система с одной степенью свободы:
 а — динамическая модель; б — колебательный процесс

Физическая природа механических колебаний связана с упругоинерционными свойствами твердых тел. При выведении системы из равновесного состояния возникает упругая сила, стремящаяся вернуть ее в исходное состояние. Под действием этой силы тело начинает двигаться к положению равновесия, но по причине инерционности «проскакивает» его и движется дальше. При этом знак упругой силы меняется, тело постепенно останавливается, а затем, двигаясь в направлении положения равновесия, снова «проскакивает» его и т.д. Этим свойством обладают не только твердые тела, но и системы с кинематическими связями, т.е. механизмы и машины.

Математической моделью динамической системы служит дифференциальное уравнение. Линейным колебательным системам соответствуют линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Уравнение движения массы m (см. рис. П5.1, а) получается из уравнения Ньютона:

$$mq'' + kq' + cq = F(t).$$

Обычно его представляют в виде

$$q'' + 2\beta q' + \omega^2 q = k_1 x(t), \quad (\text{П5.1})$$

где β — коэффициент демпфирования, $\beta = k/2m$; ω — собственная частота при отсутствии демпфирования; q — обобщенная координата (выходная величина); k_1 — передаточный коэффициент; $x(t)$ — некоторая функция времени (входная величина).

При свободных колебаниях и отсутствии вязкого трения уравнение (П5.1) принимает вид

$$q'' + \omega^2 q = 0.$$

Его решением служит функция

$$q = q_0 \cos \omega t + q'_0 / (\omega \sin \omega t),$$

где q_0 и q'_0 — начальные условия при $t = 0$.

Таким образом, движение можно представить в виде суммы двух гармонических колебаний с амплитудами q_0 и q'_0/ω и одинаковой частотой ω . Его можно представить также одним гармоническим движением:

$$q = A \cos(\omega t + \varphi),$$

где $A = \sqrt{q^2 + \frac{(q')^2}{\omega^2}}$; $\varphi = \arctg(q'_0 / (\omega q_0))$.

При свободных колебаниях с демпфированием уравнение (П5.1) имеет вид

$$q'' + 2\beta q' + \omega^2 q = 0.$$

Его решением при малом демпфировании ($\omega_0 \cong \omega$) служит функция

$$q = e^{-\beta t} \left(q_0 \cos \omega_0 t + \frac{q'_0 + q_0 \beta}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right), \quad (\text{П5.2})$$

где $\omega_0 = \sqrt{\omega^2 - \beta^2}$ — собственная частота с учетом демпфирования.

В выражении (П5.2) амплитуда колебаний $e^{-\beta t}$ представляет собой убывающую экспоненциальную функцию, что указывает на затухание свободных колебаний с течением времени. Быстрота затухания зависит от коэффициента демпфирования β . При большом демпфировании движение превращается в быстро затухающий аperiодический процесс (рис. П5.1, б). По периоду колебания T и амплитудам A_1 и A_2 можно вычислить логарифмический декремент затухания $\delta = \ln(A_1/A_2)$, а затем коэффициент демпфирования $\beta = 2\delta T$.

Рассмотрим случай колебаний без демпфирования с гармоническим возбуждением. Тогда уравнение движения можно представить в виде

$$q'' + \omega^2 q = k \sin pt,$$

где p — частота возбуждения, а его решение — функцией

$$q = q_0 \cos \omega t + \frac{q'_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{k}{\omega^2 - p^2} \sin pt. \quad (\text{П5.3})$$

Первые два слагаемых описывают свободные колебания с частотой ω . При наличии хотя бы малого демпфирования они постепенно затухают. Третье слагаемое характеризует установившийся режим вынужденных колебаний, которые происходят по гармоническому закону с частотой, равной частоте возбуждения, и амплитудой

$$A = \frac{k}{\omega^2 - p^2}.$$

Амплитуда A увеличивается по мере приближения частоты возбуждения p к собственной частоте ω . Когда $p = \omega$, наступает резонанс. Однако из-за наличия демпфирующего элемента амплитуда не достигает бесконечно большого значения.

Коэффициентом динамичности k_d называется отношение амплитуды вынужденных колебаний к максимальному перемещению, вызываемому статическим действием силы. Из уравнения (П5.3) следует, что при статическом приложении силы ($q = 0$) $q = k/p^2$. Следовательно,

$$k_d = \frac{A}{q} = \frac{\omega^2}{\omega^2 - p^2} = \frac{1}{1 - p^2/\omega^2}.$$

На рис. П5.2 показано изменение абсолютного значения коэффициента динамичности в зависимости от отношения p/ω . При малых значениях p/ω , т.е. в случае, когда частота возмущающей силы мала по сравнению с частотой свободных колебаний, коэффици-

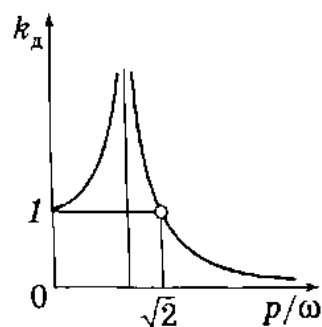


Рис. П5.2. Зависимость коэффициента динамичности от отношения p/ω

ент динамичности близок к единице и перемещения такие же, как при статическом действии силы. Коэффициент динамичности возрастает при приближении к резонансу. В случае перехода через резонанс коэффициент динамичности уменьшается и при соотношении $p/\omega = \sqrt{2}$ вновь становится равным единице. При дальнейшем увеличении частоты p он уменьшается, приближаясь к нулю. Это означает, что если возбуждение происходит с высокой частотой по сравнению с собственной частотой, то колебания малы и тело можно считать неподвижным.

Динамическая модель с поступательно движущейся массой редко применяется в механизмах, так как в них в основном используются звенья, совершающие вращательные движения. Тем не менее, все изложенное может применяться для расчета крутильных колебаний упругого вала с закрепленной на его конце массой, с той лишь разницей, что в этом случае обобщенной координатой является угол поворота, вал обладает жесткостью на кручение, а вместо массы рассматривается момент инерции.

При рассмотрении не отдельных звеньев, а механизмов в целом следует оценивать упругость нескольких звеньев, что значительно усложняет задачу, так как приводит к необходимости рассмотрения многомассовой колебательной системы с несколькими степенями свободы. В этом случае бывает полезно воспользоваться упрощенной моделью, чтобы хотя бы приближенно оценить эффект, вносимый в движение механизма упругостью звеньев.

Рассмотрим, например, зубчатый механизм, составленный из двух пар зубчатых колес и передающий движение от вала двигателя D к валу рабочей машины M (рис. П5.3, *а*). Пусть к колесу 1 приложен движущий момент M_d , а к колесу 3 — момент сил сопротивления M_c . Общее число степеней свободы при трех упругих валах равно 4: угол поворота двигателя и углы закручивания трех упругих валов. Но если моменты инерции зубчатых колес малы по сравнению с моментами инерции двигателя и рабочей машины, то такую систему можно приближенно рассматривать как систему с двумя степенями свободы (рис. П5.3, *б*), в которой инерционные свой-

ства всей системы учитываются приведенными моментами инерции $J_{пр}$ и J_d (причем $J_{пр}$ определяется с учетом масс звеньев 1, 2, 3 и приведенного момента инерции движущихся частей рабочей машины, а J_d — с учетом движущихся масс двигателя).

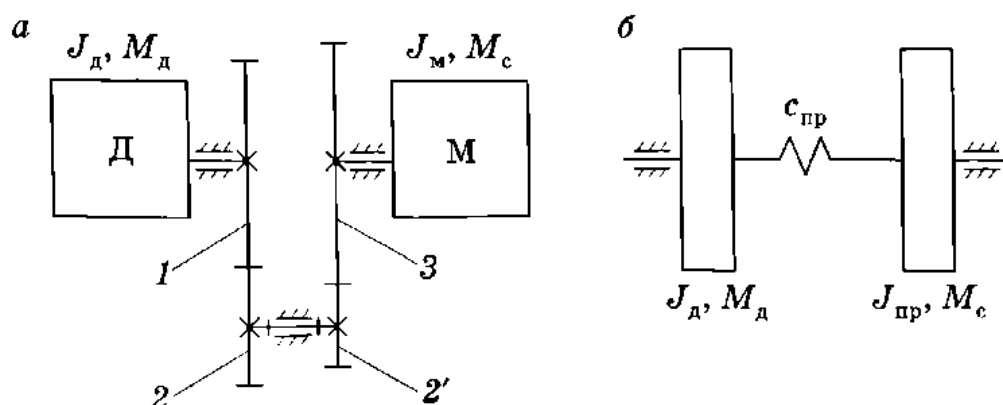


Рис. П5.3. Динамическая модель машины с зубчатой передачей: а — машинный агрегат с зубчатой передачей; б — динамическая модель

Упругие свойства системы трех валов можно учесть как свойство одного упругого звена с приведенным коэффициентом жесткости $c_{пр}$. Как определить такой коэффициент, показано в 3.14. Демпфирующими свойствами системы пренебрегаем.

Для динамической модели, показанной на рис. П5.3, б, при постоянных приведенных моментах инерции J_d и $J_{пр}$ получим два дифференциальных уравнения движения:

$$J_d \ddot{\varphi}_d = M_d - c(\varphi_d - \varphi_{п});$$

$$J_{п} \ddot{\varphi} = M_{п} + c(\varphi_d - \varphi_{п}),$$

где φ_d — угол поворота ротора двигателя; $\varphi_{п}$ — угол поворота правого конца упругого вала динамической модели; c — коэффициент жесткости вала.

При достаточно большой мощности двигателя угловую скорость его ротора можно считать постоянной, тогда второе уравнение системы может быть решено независимо от первого. Кроме того, учитывая, что угол $\varphi_{п}$ мало отличается от угла φ_d ,

удобнее в качестве обобщенной координаты вместо φ_n взять разность $\varphi = \varphi_n - \varphi_d$. Тогда второе уравнение системы примет вид

$$J_n \ddot{\varphi} + c\varphi = M_n.$$

Первое уравнение системы в этом случае служит только для определения M_d , при котором выполняется заданный закон равномерного движения ротора двигателя.

Движение массы с приведенным моментом инерции $J_{пр}$ можно рассматривать как состоящее из основного движения с постоянной угловой скоростью и дополнительного движения колебательного типа. В этом случае говорят, что система имеет одну колебательную степень свободы, так как вторая степень свободы определяет движение всех частей системы с одной и той же угловой скоростью. Рассмотренный способ замены реальной системы условной динамической моделью является приближенным и имеет ограниченное применение, так как не позволяет судить о действительных резонансных частотах, которых будет четыре — в соответствии с числом степеней свободы, и не может служить для отстройки системы от резонансных явлений.

6. Характеристики упругих звеньев

При построении упругой модели какой-либо машины необходимо знать упругие характеристики ее элементов. Как уже отмечалось, наибольшее значение имеют упругие свойства передаточных механизмов, в число которых входят валы, зубчатые колеса, стержни, работающие на сжатие-растяжение, шпонки, шлицевые соединения и т.п.

Рассмотрим вал, работающий на кручение. Представим, что левый его конец закреплен, а к правому приложен крутящий момент M . Под действием этого момента правый конец вала повернется на угол закручивания $\Delta\varphi$. При малых деформациях угол $\Delta\varphi$ пропорционален моменту M . Отношение $c = M/\Delta\varphi$

называется *коэффициентом жесткости* (жесткостью) упругого вала, а $e = \Delta\varphi/M$ — *коэффициентом податливости* (податливостью) вала. Для вала постоянного сечения

$$c = \frac{\pi d^2 G}{32l},$$

где c — жесткость, Н · м/рад; d — диаметр вала; G — модуль сдвига (для стали $G = 8 \cdot 10^{10}$ Па); l — длина вала.

Податливость вала является величиной, обратной жесткости. Если вал ступенчатый, податливости ступеней складываются, а общая жесткость определяется как величина, обратная суммарной податливости. Так, например, для вала, имеющего два участка с коэффициентами жесткости c_1 и c_2 , общий коэффициент жесткости

$$c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}.$$

Жесткость зубчатой передачи определяется следующим образом. Если закрепить ступицу шестерни, а к зубчатому колесу приложить момент M_2 , то вследствие контактной и изгибной деформации зубьев, а также деформации ободов обоих колес зубчатое колесо повернется на некоторый угол $\Delta\varphi_2$. Отношение $c = M_2/\Delta\varphi_2$ называется жесткостью зубчатой передачи, приведенной к зубчатому колесу. Жесткость зубчатой передачи, приведенная к шестерне, в i^2 раз меньше c , так как $M_1 = M_2/i_{12}$, $\Delta\varphi_1 = i_{12}\Delta\varphi_2$, где i_{12} — передаточное отношение от шестерни к колесу.

Для вычисления жесткости цилиндрической передачи можно пользоваться эмпирической формулой

$$c = kd^2b,$$

где k — коэффициент пропорциональности (для стальных колес $k = 3,75 \cdot 10^9$ Па); d — диаметр колеса, к которому приводится жесткость; b — ширина зубчатого венца.

Жесткость зубчатых передач обычно намного выше жесткости валов, на которых они установлены.

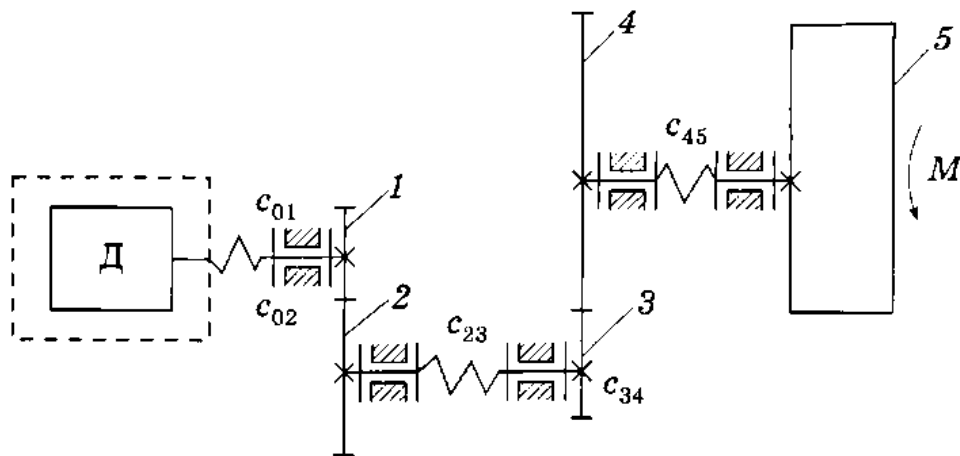


Рис. Пб.1. Схема зубчатого механизма

Приведенным моментом инерции механизма называется условный момент инерции звена приведения, при котором его кинетическая энергия равна кинетической энергии всего механизма. Для зубчатого механизма (рис. Пб.1), у которого звеном приведения является звено 1, приведенный момент инерции определяется по формуле

$$J_{\text{пр}} = \frac{2}{\omega_1^2} \left(\frac{J_1 \omega_1^2}{2} + \frac{J_2 \omega_2^2}{2} + \frac{J_3 \omega_3^2}{2} + \frac{J_4 \omega_4^2}{2} \right) =$$

$$= J_1 + (J_2 + J_3) i_{13}^{-2} + J_4 i_{14}^{-2},$$

где J_j — моменты инерции колес, включая моменты инерции валов; i_{1j} — передаточные отношения от звена 1 к звену j .

Момент инерции зубчатого механизма — величина постоянная.

Для плоской рычажной системы (рис. Пб.2), которая может служить исполнительным органом манипулятора, приведенный момент инерции

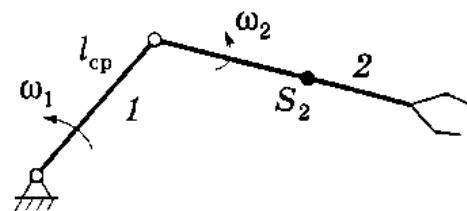


Рис. Пб.2. Рычажный механизм

$$J_{\text{пр}} = \frac{2}{\omega_1^2} \left(\frac{J_1 \omega_1^2}{2} + \frac{J_{2S} \omega_2^2}{2} + \frac{m_2 v_{2S}^2}{2} \right) = J_1 + J_{2S} i_{12}^{-2} + m_2 k_{12}^{-2},$$

где J_{2S} — момент инерции звена 2 относительно центра масс; ω_2 — абсолютная угловая скорость звена 2; v_{2S} — линейная скорость центра масс.

Приведенный момент инерции такого механизма — величина переменная, так как кинетическая энергия зависит от конфигурации системы.

Для зубчатого механизма (см. рис. 3.18 и Пб.1), к выходному валу которого приложен внешний момент M , для звена приведения 1 $M_{\text{пр}} = Mi_{14}^{-1}$, где i_{14} — передаточное отношение. Здесь $M_{\text{пр}}$ — постоянная величина. Для рычажного механизма (см. рис. 3.17 и Пб.2) приведенный момент зависит от конфигурации системы.

Приведенным коэффициентом жесткости $c_{\text{пр}}$ механизма называется жесткость звена приведения, имеющего ту же потенциальную энергию, что и весь механизм. Для зубчатого механизма это условие имеет вид

$$\frac{c_{\text{пр}} \Delta\varphi_{\text{пр}}^2}{2} = \sum_i \frac{c_i \Delta\varphi_i^2}{2}.$$

Пусть вал ротора двигателя D (см. рис. Пб.1) закреплен, а к исполнительному звену приложен момент M . Вследствие податливости упругих элементов вал исполнительного звена повернется. Полный угол его поворота $\Delta\varphi_{\Sigma}$ равен сумме углов поворотов, вызываемых податливостью каждого упругого элемента и приведенных к валу исполнительного звена:

$$\Delta\varphi_{\Sigma} = \Delta\varphi_{01}^{\text{пр}} + \Delta\varphi_{12}^{\text{пр}} + \Delta\varphi_{23}^{\text{пр}} + \Delta\varphi_{34}^{\text{пр}} + \Delta\varphi_{45}^{\text{пр}}. \quad (\text{Пб.1})$$

Под действием внешнего момента M вал 4–5 повернется относительно звена 4 на угол $\Delta\varphi_{45} = Mc_{45}^{-1}$. Податливость зубчатой передачи 3–4 вызовет поворот колеса 4 на угол $\Delta\varphi_{34} = Mc_{34}^{-1}$, где c_{34} — жесткость зубчатой передачи, приведенная к валу колеса 4. Вал 2–3 нагружен моментом $M' = Mi_{34}^{-1}$, где i_{34} — передаточное отношение зубчатой передачи 3–4. Под действием этого момента вал закрутится на угол $\Delta\varphi_{23} = M'c_{23}^{-1}$, что вызовет поворот звена 5 на угол $\Delta\varphi_{23}^{\text{пр}} = \Delta\varphi_{23}i_{34}^{-1} = Mi_{34}^{-2}c_{23}^{-1}$. Рассматривая податливость зубчатой передачи 1–2 и вала 0–1, найдем приведенные углы поворота:

$$\Delta\varphi_{12}^{\text{пр}} = Mi_{34}^{-2}c_{12}^{-1}; \quad \Delta\varphi_{01}^{\text{пр}} = Mi_{14}^{-2}c_{01}^{-1}.$$

Подставив полученные значения в выражение (Пб.1), найдем полный угол поворота звена 5:

$$\Delta\varphi_{\Sigma} = M \left(i_{14}^{-2} c_{01}^{-1} + i_{34}^{-2} c_{12}^{-1} + i_{34}^{-2} c_{23}^{-1} + c_{34}^{-1} + c_{45}^{-1} \right).$$

Жесткость механизма в целом, приведенная к валу исполнительного органа,

$$\begin{aligned} c_{\text{пр}} &= M \Delta\varphi_{\Sigma}^{-1} = \left(i_{14}^{-2} c_{01}^{-1} + i_{34}^{-2} c_{12}^{-1} + i_{34}^{-2} c_{23}^{-1} + c_{34}^{-1} + c_{45}^{-1} \right)^{-1} = \\ &= \left(i_{14}^{-2} e_{01} + i_{34}^{-2} e_{12} + i_{34}^{-2} e_{23} + e_{34} + e_{45} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{Пб.2})$$

Отсюда следует, что податливость первых ступеней зубчатого механизма слабо влияет на общую его податливость. Наибольшее значение имеет податливость элементов, ближайших к последней ступени редуктора и соединительного вала, поэтому при конструировании зубчатых механизмов в первую очередь увеличивают жесткость выходных звеньев редуктора. Это объясняет тот факт, что при построении динамических моделей исполнительные звенья и редукторы считаются абсолютно жесткими, а податливость сосредоточивается в упругих соединительных валах.

В реальных механизмах всегда существуют потери, связанные с внутренним трением, возникающим между микроэлементами материала при его деформировании, а также потери конструкционного демпфирования, вызванные трением на поверхности сопряжения деталей. Возникающие при этом силы трения называются *диссипативными*. Их значения пропорциональны скорости деформации элементов. Эти силы аналогичны силам, возникающим при движении тела в вязкой среде с малой скоростью, при проталкивании движущимся телом жидкости через узкие каналы, как в амортизаторах. Поэтому силы трения, пропорциональные скоростям, принято называть *силами вязкого трения* или *силами демпфирования*. Для их нахождения вводятся коэффициенты вязкого трения, значения которых устанавливаются экспериментально.

Приведенный коэффициент вязкого трения для механизма в целом определяется из условия равенства рассеивания

энергии в отдельных упругих элементах рассеиванию энергии в звене приведения. Зная коэффициенты вязкого трения упругих элементов, приведенный коэффициент можно определить по формуле, аналогичной (Пб.2).

7. Виброзащита машин

При проектировании машин большое значение имеет обеспечение низкого уровня вибраций, возникающих при их работе.

Знакопеременные напряжения, вызванные вибрационными воздействиями, приводят к накоплению усталостных трещин в материале и последующему разрушению деталей. В результате вибраций происходит разбалтывание неподвижных соединений; малые относительные смещения сопряженных поверхностей деталей машин приводят к их поверхностному износу, что вызывает изменение диссипативных свойств объекта и его собственных частот. Если в механизме есть неподвижные соединения с зазорами, вибрационные воздействия могут вызвать соударения сопрягаемых поверхностей, приводящие к их износу и повышенному шуму.

Кроме того, вибрационные воздействия могут приводить к нарушению нормального функционирования механизма, не разрушая его. Например, вибрации металлорежущих станков снижают точность и чистоту обработки.

Вибрации, возникающие при работе машин, оказывают вредное воздействие на людей, находящихся в непосредственной близости. Они приводят к ухудшению зрения, нарушению координации движений, быстрой утомляемости. Поэтому создание эффективных методов и средств виброзащиты является одной из важнейших задач современной техники.

При колебании в упругих системах происходит рассеивание энергии в материале упругих элементов и в узлах сочленения деталей конструкций. Эти потери вызываются силами неупругого сопротивления — диссипативными силами, на преодоление которых непрерывно и необратимо расходуется энергия колебательной системы. Для описания диссипативных

сил используются характеристики, представляющие зависимость диссипативных сил от скорости движения масс колебательной системы или от скорости деформации упругого элемента.

Расчетная динамическая модель простейшей виброзащитной системы представлена на рис. П5.1, а (см. с. 264), а соответствующее уравнение движения описывается уравнением (П5.1). Демпфирующие свойства такой системы характеризуются коэффициентом демпфирования β . Чем он больше, тем быстрее затухают колебания (рис. П5.1, б).

Важнейшей характеристикой колебательной системы с одной степенью свободы является собственная частота колебаний системы ω_0 . При совпадении этой частоты с частотой возбуждающей силы возникает опаснейшее явление — резонанс. Одна из задач при конструировании виброзащитной системы состоит в выборе таких характеристик объекта, чтобы не мог возникнуть резонанс или режимы, близкие к нему.

Проблема в том, что реальные объекты состоят из нескольких масс с упругими соединениями и, следовательно, объект имеет несколько резонансных частот. Поэтому обычно выделяют одну важнейшую первую частоту и производят настройку виброзащитной системы относительно этой частоты. Эта сложная задача, трудно решаемая теоретически и требующая экспериментальной проверки.

Уменьшить интенсивность колебаний можно разными способами.

Если возбуждение колебаний прежде всего связано с движущимися телами (вращение роторов, перемещение звеньев механизмов), то для этой цели производится *уравновешивание деталей механизмов*.

Уменьшение интенсивности колебаний также может быть достигнуто за счет *изменения конструкции объекта*, производимого с целью изменения его собственных частот или увеличения диссипации механической энергии в объекте.

Действие *виброизоляции* сводится к ослаблению связей между источником вибрации и объектом, при этом уменьшаются динамические воздействия, передаваемые объекту.

Виброизолятор (амортизатор) — элемент виброзащитной системы, наиболее существенной частью которого является упругий элемент. Это может быть резиновая прокладка, демпфер сухого трения, нелинейная пружина. В результате внутреннего трения в упругом элементе происходит демпфирование колебаний за счет рассеивания энергии колебаний.

Метод *динамического гашения колебаний* состоит в присоединении к объекту виброзащиты дополнительных устройств с целью изменения его вибрационного состояния. Работа динамических гасителей основана на формировании силовых воздействий, передаваемых на объект.

Различают инерционные динамические гасители колебаний и поглотители колебаний. Инерционные гасители изменяют настройку системы объект — гаситель за счет коррекции упругоинерционных свойств системы. Такие гасители эффективны для подавления моногармонических или узкополосных случайных колебаний. При вибрационных нагрузках более широкого спектра более эффективны поглотители колебаний.

Простейший инерционный динамический гаситель выполняется в виде твердого тела, упруго присоединенного к демпфируемому объекту в точке, колебания которой требуется погасить. При правильно выбранной настройке присоединение гасителя образует систему с двумя степенями свободы, в которой на частоту возбуждения приходится антирезонанс. При этом частота антирезонанса совпадает с частотой резонанса исходной системы (рис. П7.1).

Помимо описанной выше простейшей системы инерционного гасителя применяют различные усовершенствованные системы с увеличенной компенсирующей реакцией гасителя (например, шариковые или роликовые гасители, контактирующие с поверхностями разного профиля, маятниковые гасители, применяемые для гашения крутильных колебаний, инерционные гасители с активными элементами и т.д.).

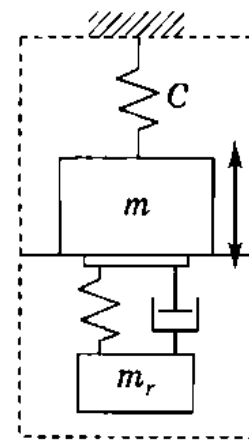


Рис. П7.1. Схема инерционного виброгасителя

Поглотители колебаний с вязким и сухим трением широко используются для гашения как продольных, так и крутильных колебаний. Им часто отдают предпочтение из-за конструктивной простоты и отсутствия упругого элемента, склонного к усталостным поломкам. Конструктивно простейший поглотитель колебаний вязкого типа выполнен в виде маховика, способного скользить по валу с малым трением, который помещен в кожух, связанный с валом. Пространство между маховиком и кожухом заполнено жидкостью с большой вязкостью (рис. П7.2, а). В другой конструкции поглотителя демпфирующая сила возникает из-за перетекания масла через малые отверстия (рис. П7.2, б).

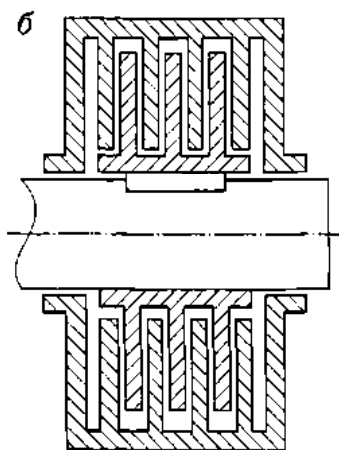
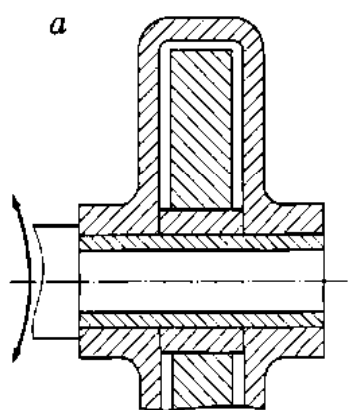


Рис. П7.2. Поглотители колебаний с вязким трением

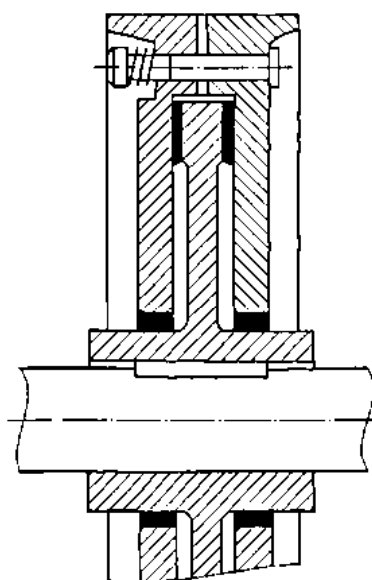


Рис. П7.3. Поглотитель колебаний с сухим трением

Поглотители колебаний с сухим трением получили широкое распространение благодаря простоте конструкции и обслуживания, а также относительно малым габаритам. Простейший поглотитель крутильных колебаний с сухим трением устроен следующим образом. Фрикционный диск, жестко посаженный на вал, вовлекает во вращение маховик. При колебаниях вала происходит относительное проскальзывание маховика и вала, приводящее к рассеиванию энергии вследствие трения на фрикционных поверхностях (рис. П7.3).

8. Синтез механизмов методами оптимизации

Методы оптимизации позволяют решить практически любую задачу синтеза механизмов. Развитие этих методов обусловлено распространением ЭВМ.

Независимые между собой постоянные параметры схемы механизма называются *параметрами синтеза*. К ним относятся, например, длины звеньев, координаты неподвижных точек, траектории, массы, моменты инерции и т.д. Различают входные и выходные параметры синтеза. Входные параметры устанавливаются заданием, а выходные определяются в процессе синтеза.

Пусть, например, требуется спроектировать шарнирный четырехзвенник, у которого шатунная кривая мало отличается от заданной кривой (рис. П8.1). В этом случае заданная кривая является входным параметром синтеза, а величины $a, b, c, d, \xi_M, \eta_M$ — выходными.

При синтезе надо удовлетворить нескольким условиям, например, ограничениям длин звеньев, минимальным габаритам, углу давления, условию существования кривошипа и т.д. Из этих многочисленных условий следует выбрать основное, в рассматриваемом случае таким условием является получение заданной кривой.

Основное условие выражается в математической форме в виде целевой функции. В данном случае она записывается так:

$$\Delta_{\max} = |y_M - y|_{\max},$$

где y_M — ордината шатунной кривой при некотором значении абсциссы x_M ; y — ордината заданной кривой при том же значении x_M .

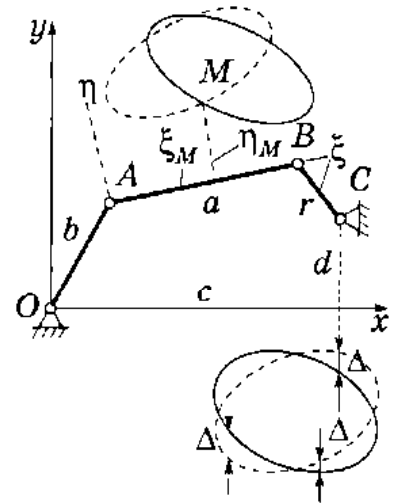


Рис. П8.1. К задаче синтеза рычажных механизмов методами оптимизации

Выразить целевую функцию в явном виде, как правило, нельзя. Однако всегда можно указать алгоритм ее вычисления. В рассматриваемом примере можно воспользоваться известными из кинематического анализа зависимостями для определения координат точки M .

Дополнительные условия также должны быть представлены в математической форме, обычно в виде неравенств, устанавливающих допустимые области существования выходных параметров.

Первое ограничение задачи синтеза — на размеры звеньев r, a, b, c, d . Чтобы не было слишком больших и слишком малых звеньев, выбираются положительные значения их длин $l_1 \leq l_2 \leq l_3 \leq l_4 \leq l_5$ так, чтобы $l_5 \leq l_1 = m$. При таком условии ни одно из звеньев не будет превосходить другое более чем в m раз.

Второе ограничение — механизм должен быть кривошипно-коромысловым. Тогда $l_1 + l_4 \leq l_2 + l_3$ — условие существования кривошипа.

Третье ограничение — угол давления $\theta \leq \theta_{\max}$.

При небольшом числе переменных условие минимума целевой функции можно получить на основании известных условий минимума функции многих переменных. При большом числе переменных эта задача аналитически не решается и ее приходится решать перебором вариантов. Возможность перебора появилась благодаря использованию ЭВМ.

Оптимизация механизма — определение выходных параметров синтеза из условия минимума целевой функции при выполнении принятых ограничений. Эта задача известна в математике как задача нелинейного программирования. Все многочисленные методы ее решения можно объединить в три группы: случайный поиск, направленный поиск, комбинированный поиск.

Случайный поиск (метод Монте-Карло, метод статистических испытаний) производится в следующем порядке:

1. Выбираются выходные параметры как комбинация случайных чисел, проверяются ограничения, вычисляется целевая функция Δ_{\max}^1 , которая вместе с параметрами записывается в память машины.

2. Выбирается другая случайная комбинация выходных параметров, проверяются ограничения, вычисляется целевая функция Δ_{\max}^2 . Если $\Delta_{\max}^2 \leq \Delta_{\max}^1$, она записывается в память машины, а предыдущие значения стираются.

Этот метод прост по сути, но требует большого объема вычислений. С целью уменьшения последнего используется направленный поиск так, чтобы переход от одной комбинации выходных параметров к другой происходил в направлении уменьшения целевой функции.

Направленный поиск в этом случае выполняется в такой последовательности:

1. Выбирается случайная комбинация чисел, проверяются ограничения, вычисляется целевая функция, записывается в память машины.

2. Дается приращение одному из параметров, остальные параметры не изменяются. Вычисляется целевая функция. Если она оказывается больше предыдущей, знак приращения изменяется на противоположный. Таким же образом последовательно изменяются все параметры.

В общем случае целевая функция может иметь несколько минимумов. Наименьший минимум называется глобальным, остальные — локальными. Направленный поиск приводит к отысканию локального минимума. Случайный поиск больше подходит для отыскания глобального минимума, однако он требует большого объема вычислений, поэтому его комбинируют с направленным поиском.

Рассмотренной последовательностью действий можно решать и другие задачи синтеза, например выполнять динамический синтез. Поэтому данный метод оптимизации является наиболее общим методом синтеза механизмов.

9. Динамический анализ кулачковых механизмов

В теории механизмов и машин звенья механизмов обычно считаются абсолютно жесткими. Это, несомненно, идеализирует физическую картину, так как сама природа сил взаимодействия состоит в деформациях этих звеньев. В тихоходных

механизмах эффект упругости звеньев практически не заметен. В быстроходных же механизмах, например в кулачковых механизмах привода клапанов автомобильных двигателей, учет упругости весьма существенно изменяет кинематические и динамические характеристики. Влияние упругости звеньев можно обнаружить только при рассмотрении динамики механизма.

Динамическое исследование начинается с выбора динамической модели. Эта модель всегда выбирается с некоторым упрощением, отражающим только наиболее существенные особенности схемы. Построить точную модель невозможно и нецелесообразно, так как это приводит к резкому увеличению сложности вычислений без существенного повышения точности результатов. Упрощение обычно состоит в следующем:

□ звенья с распределенными массами заменяются звеньями с массами, сосредоточенными в центрах тяжести звеньев;

□ упругие звенья представляются в виде пружин, не имеющих массы;

□ звенья, масса которых незначительна, рассматриваются как абсолютно жесткие.

На рис. П9.1 представлены кинематическая схема и динамическая модель кулачкового механизма. Здесь принята во внимание только упругость толкателя. Кулачок и его приводной вал считаются абсолютно жесткими. Масса деталей, связанных с толкателем, приведена к толкателю и представлена сосредоточенной массой m . Для упрощения считается, что механизм нагружен чисто инерционной нагрузкой, т.е. нет силы полезного сопротивления.

Из представленной динамической модели ясно, что перемещение верхнего конца толкателя y вследствие наличия пружины отличается от перемещения s нижнего конца толкателя, движущегося по закону, определенному профилем кулачка.

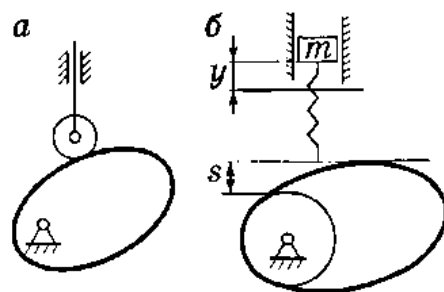


Рис. П9.1. Кулачковый механизм:

a — кинематическая схема; *б* — динамическая модель

Соотношение между перемещениями s и y можно определить с помощью дифференциального уравнения движения массы m . Для составления этого уравнения воспользуемся принципом Даламбера. Масса находится в равновесии под действием двух сил — силы упругости пружины и силы инерции:

$$c(s - y) - my'' = 0,$$

где c — коэффициент жесткости толкателя.

Коэффициент жесткости c представляет собой отношение силы к величине деформации, вызванной этой силой. Он обычно определяется экспериментально.

Уравнение можно переписать в виде

$$y'' + (c/m)y = (c/m)s, \quad (\text{П9.1})$$

отсюда следует:

$$s = y + (m/c)y''. \quad (\text{П9.2})$$

Уравнение (П9.1) есть линейное дифференциальное уравнение с правой частью, условно принимаемой за возмущающую силу. В данном случае силы как таковой нет, но ее роль выполняет перемещение s , обеспечивающее так называемое кинематическое возбуждение. Если зависимость $s(t)$ задана, то, решая дифференциальное уравнение, можно найти закон движения верхнего конца толкателя $y(t)$.

Разность $s(t) - y(t)$ называется *динамической ошибкой механизма*. Она представляет интерес, например, при исследованиях вращающихся валов текстильных машин, на которых закреплены кулачки, управляющие движением исполнительных органов. Изменяя упругоинерционные характеристики механизма, можно добиться того, что динамическая ошибка не будет превышать допустимую величину.

Уравнение (П9.2) не является дифференциальным, так как неизвестная функция $s(t)$ не входит под знак производных. Это уравнение позволяет по заданному закону движения верхнего конца толкателя ($y(t)$ и $y''(t)$) определить $s(t)$, а затем найти необходимый профиль кулачка уже известными методами. Из уравнения (П7.2) видно, что при абсолютно жестком толкателе ($c = \infty$) перемещения s и y совпадают.

Список использованных источников

1. *Артоболевский И.И.* Механизмы в современной технике : справ. пособие. В 7 т. / И.И. Артоболевский. М. : Наука, 1979–1981.

2. *Артоболевский И.И.* Сборник задач по теории механизмов и машин / И.И. Артоболевский, Б.В. Эдельштейн. М. : Наука, 1973. 256.

3. *Борейнштейн Ю.Л.* Механизмы для воспроизведения сложного профиля : справ. пособие / Ю.Л. Борейнштейн. Л. : Машиностроение, 1978. 231 с.

4. *Борисенко Л.А.* Механика манипуляторов / Л.А. Борисенко. Могилев : БРУ, 2006. 211 с.

5. *Борисенко Л.А.* Механика промышленных роботов и манипуляторов с электроприводом: учеб. пособие / Л.А. Борисенко, А.В. Самойленко. Минск : Вышэйш. шк., 1992. 233 с.

6. *Крайнев А.Ф.* Словарь-справочник по механизмам / А.Ф. Крайнев. М. : Машиностроение, 1987. 560 с.

7. *Левитская О.Н.* Курс теории механизмов и машин: учеб. для вузов / О.Н. Левитская, Н.И. Левитский. М. : Высш. шк., 1978. 269 с.

Список дополнительной литературы

Анципорович П.П. Теория механизмов и машин: метод. пособие / П.П. Анципорович, В.В. Кудин, А.М. Авсиевич. Минск : Изд-во Бел. гос. ун-та, 2006. 64 с.

Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин: учеб. для вузов / И.И. Артоболевский. М. : Наука, 1988. 496 с.

Борисенко Л.А. Манипуляторы. Механика поворотов / Л.А. Борисенко. Минск : Тэхналогія, 2001. 120 с.

Заблонский К.И. Теория механизмов и машин: учеб. / К.И. Заблонский, И.М. Белоконов, Б.М. Щекин. Киев : Выща шк., 1989. 375 с.

Крайнев А.Ф. Механика машин / А.Ф. Крайнев. М. : Машиностроение, 2000. 820 с.

Механика машин: учеб. пособие для студентов вузов / под ред. Г.А. Смирнова. М. : Высш. шк., 1996. 511 с.

Попов С.А. Курсовое проектирование по теории механизмов и механике машин: учеб. пособие для студентов вузов / С.А. Попов, Г.А. Тимофеев; под ред. К.В. Фролова. М. : Высш. шк., 1998. 362 с.

Смелягин А.И. Теория механизмов и машин. Курсовое проектирование: учеб. пособие для вузов / А.И. Смелягин. М. : Инфра-М; Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос. техн. ун-та, 2006. 263 с.

Сурин В.М. Прикладная механика: учеб. пособие для студентов вузов / В.М. Сурин. Минск : Новое знание, 2006. 388 с.

Теория механизмов и машин. Терминология: учеб. пособие / И.И. Левитский, Ю.Я. Гуревич, В.Д. Плахтин [и др.]; под ред. К.В. Фролова. М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 80 с.

Теория механизмов и механика машин: учеб. для вузов / К.В. Фролов, С.А. Попов, А.К. Мусатов [и др.]; под ред. К.В. Фролова. М. : Высш. шк., 1998. 496 с.

Филонов И.П. Теория механизмов, машин и манипуляторов: учеб. пособие / И.П. Филонов, П.П. Анципорович, В.К. Акулич. Минск : Дизайн ПРО, 1998. 656 с.