

**ОПД.Ф.02.03 ТЕОРИЯ МАШИН И МЕХАНИЗМОВ**  
Учебное пособие

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Глава 1. Структурный анализ механизмов</b> .....	6
1.1. Основные определения .....	6
1.2. Кинематические цепи .....	14
1.3. Структурные формулы кинематических цепей.....	15
1.4. Принцип образования механизмов и классификация структурных групп.....	16
1.5. Структурный анализ механизмов .....	19
1.6. Замена высших кинематических пар низшими .....	19
1.7. Избыточные связи и подвижности .....	21
1.8. Классификация механизмов.....	25
<b>Глава 2. Кинематический анализ механизмов</b> .....	28
2.1. Графический метод исследования .....	28
2.2. Графоаналитический метод исследования .....	31
2.3. Формальный метод записи векторных уравнений .....	31
2.4. Пример кинематического анализа .....	40
<b>Глава 3. Кулачковые механизмы</b> .....	50
3.1. Классификация кулачковых механизмов.....	50
3.2. Анализ кулачковых механизмов.....	53
3.3. Синтез кулачковых механизмов .....	58
3.4. Законы движения толкателя.....	59
3.5. Угол давления в кулачковых механизмах .....	61
<b>Глава 4. Теория зубчатого зацепления</b> .....	63
4.1. Общие сведения о зубчатых механизмах.....	63
4.2. Передаточное отношение последовательного ряда зубчатых колес .....	64

4.3. Передаточное отношение ступенчатого ряда зубчатых колес с неподвижными осями вращения .....	66
4.4. Условие соосности .....	67
4.5. Зубчато-рычажные механизмы .....	68
4.6. Основная теорема зацепления.....	72
4.7. Эвольвента. Алгоритм ее построения .....	74
4.8. Уравнение эвольвенты в полярных координатах.....	75
4.9. Эвольвентное зацепление .....	76
4.10. Основные параметры нормального эвольвентного зубчатого колеса.....	78
4.11. Межцентровое расстояние нормального эвольвентного зацепления .....	80
4.12. Характеристики эвольвентного зубчатого зацепления ...	81
4.13. Методы изготовления зубчатых колес .....	83
4.14. Основные параметры инструментальной рейки .....	84
4.15. Явление подрезания ножки зуба.....	85
4.16. Определение минимального числа зубьев зубчатого колеса из условия отсутствия подрезания .....	87
4.17. Корригирование зубчатых колес .....	88
4.18. Определение величины относительного сдвига при нарезании зубчатого колеса с числом зубьев меньше $z_{min}$ .....	89
4.19. Толщина зуба по делительной окружности для нормального и корригированного колеса.....	90
4.20. Косозубое зацепление .....	91
<b>Глава 5. Силовое исследование механизма .....</b>	<b>95</b>
5.1. Классификация сил, действующих на звенья механизма..	95
5.2. Определение сил инерции .....	95
5.3. Статическая определимость кинематических цепей .....	97

5.4. Последовательность силового расчета.....	98
5.5. Динамическая модель и расчетная схема группы Ассура II класса внешней поступательной парой.....	99
5.6. Кинестатика ведущего звена .....	102
5.7. Определение требуемой мощности электродвигателя ....	103
5.8. Теорема Жуковского о «жестком рычаге» .....	104
<b>Глава 6. Динамика машин .....</b>	<b>108</b>
6.1. Физическая и математическая модель машины .....	108
6.2. Определение приведенной силы.....	109
6.3. Определение приведенного момента .....	110
6.4. Кинетическая энергия механизма. Приведенная масса и приведенный момент инерции.....	110
6.5. Уравнение движения машины .....	112
6.6. Различные режимы движения машины.....	112
6.7. Средняя угловая скорость и коэффициент неравномерности движения входного звена .....	114
6.8. Диаграмма энергомасс.....	115
6.9. Расчет маховика .....	116
<b>Библиографический список .....</b>	<b>119</b>



# ГЛАВА 1. СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

## 1.1. Основные определения

*Механизм* – система определенным образом соединенных тел (звеньев), предназначенная для преобразования движения одного или нескольких тел (звеньев), в требуемое движение других тел (звеньев).

*Машина* – устройство, выполняющее преобразование энергии, движения и информации, предназначенное для замены или облегчения физического или умственного труда человека.

Основными признаками машины является не только целесообразность в движении ее звеньев, но и выполнении полезной работы (например, часы и токарный станок). Применяемые в настоящее время машины можно разделить на следующие группы:

- энергетические;
- транспортные;
- технологические;
- контрольные и управляющие;
- логические.

Все машины перечисленных групп разделили на два вида: машины-двигатели и машины-орудия (рабочие машины).

*Машинами-двигателями* называются машины, в которых тот или иной вид энергии преобразуется в механическую работу, необходимую для приведения в движение рабочей машины.

*Рабочими машинами* называются машины, с помощью которых производится изменение свойств, состояния, формы и положения обрабатываемого материала или объекта.

Рабочие машины, в которых все рабочие операции выполняются соответствующими механизмами без содействия человека и которые нуждаются только в контроле со стороны человека за их работой, называются *машинами-автоматами*.

*Звеном механизма* называется деталь или несколько неподвижно соединенных между собой деталей, движущихся как одно целое. Звенья, не изменяющие свое положение с течением време-

ни, являются *неподвижными*. Неподвижное звено называется *стойкой*. Понятие стойки равносильно понятию каркаса или рамы механизма. Звенья, изменяющие свое положение в пространстве в ходе работы механизма, называются *подвижными*.

Подвижные звенья могут совершать вращательное, поступательное и сложное движения. В зависимости от вида их движения и назначения они имеют определенные названия:

*кривошип* - вращающееся звено механизма, которое совершает полный оборот вокруг оси, связанной со стойкой;

*шатун* - звено механизма, образующее кинематические пары только с подвижными звеньями;

*коромысло* - звено механизма, которое совершает только колебательные движения при неполном вращении вокруг неподвижной оси, связанной со стойкой;

*ползун* - звено, образующее поступательную пару со стойкой;

*камень* - звено, образующее поступательную пару с кулисой;

*кулиса* - подвижное звено механизма, являющееся направляющей для камня;

*кулачок* – звено, имеющее рабочий профиль переменной кривизны;

*толкатель* – звено, совершающее прямолинейное движение и образующее высшую кинематическую пару с кулачком;

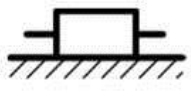

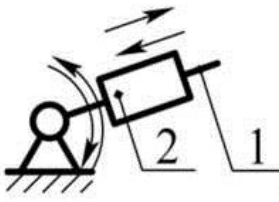
*зубчатое колесо* – звено с замкнутой на нем системой выступов, обеспечивающее взаимодействия с соответствующими выступами другого колеса;

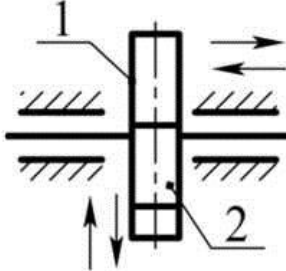

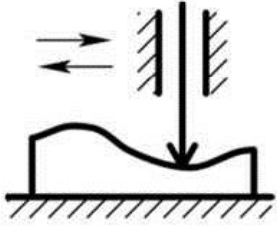

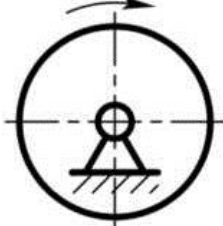
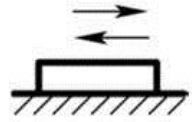
*фрикционное колесо* – звено, которое осуществляет передачу движения за счет сил трения между прижимаемыми к нему телами;

*рейка* – звено, у которого два размера значительно меньше третьего. На рейке могут быть нарезаны зубья, в этом случае она называется *зубчатой рейкой*.

Условные обозначения перечисленных звеньев с характерными особенностями их движения представлены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Название	Условное изображение на схемах	Движение	Особенности
1	2	3	4
Стойка		Отсутствует	
Стойка		Отсутствует	
Кривошип		Вращательное	Полный оборот
Шатун		Сложное	Нет пар, связанных со стойкой
Коромысло		Качательное	Неполный оборот, возвратно-вращательное движение
Ползун		Возвратно-поступательное	Направляющая неподвижна
1. Кулиса 2. Камень		Вращательное, колебательное	Направляющая подвижна
1. Кулиса 2. Камень		Сложное	Направляющая подвижна

1	2	3	4
<p>1. Кулиса 2. Камень</p>		<p>Возвратно- поступательное</p>	<p>Направляющая подвижна</p>
<p>1. Кулачок 2. Толкатель</p>		<p>Вращательное, колебательное</p>	<p>Профиль опре- деляет закон движения ведомо- го звена</p>
<p>1. Кулачок 2. Толкатель</p>		<p>Возвратно- поступательное</p>	<p>Профиль опре- деляет закон движения ведомо- го звена</p>
<p>Зубчатое колесо</p>		<p>Вращательное, колебательное</p>	<p>Зубчатый контур</p>
<p>Фрикционное колесо</p>		<p>Вращательное, колебательное</p>	
<p>Рейка</p>		<p>Возвратно- поступательное</p>	<p>Может иметь зуб- чатый контур</p>

Подвижные звенья разделяют: на ведущие, ведомые и соединительные (промежуточные); входные и выходные; начальные.

*Ведущим* (движущим) называют звено, для которого сумма элементарных работ всех внешних сил, приложенных к нему, является положительной. Соответственно *ведомым* называется звено, для которого сумма элементарных работ всех внешних сил, приложенных к нему, является отрицательной или равна нулю. Все остальные звенья механизма называются *соединительными* или *промежуточными*.

*Входным* называется звено, движение которого преобразуется в заданные движения других звеньев. *Выходным* называется звено, которое совершает требуемое движение, т. е. движение, для получения которого и был создан механизм.

В большинстве случаев входное звено является и ведущим, но могут быть случаи инверсий, когда входное звено становится ведомым, т. е. выполняет тормозящую функцию.

Звено, которому при исследовании механизма приписывается обобщенная координата, называется начальным. *Обобщенная координата* – это переменная любой размерности, однозначно определяющая положение механизма. Если входное звено совершает вращательное движение, то в качестве обобщенной координаты удобно принять угол его поворота.

Обычно механизм имеют один вход и один выход. Однако бывают и механизмы с одним входным звеном и несколькими выходными звеньями. *Дифференциальный механизм*, устройство, позволяющее получать результирующее движение как сумму или разность составляющих движений. В дифференциальном механизме с одной обобщенной координатой составляющие движения кинематически связаны и осуществляются одним приводом, а результирующее получается как разность этих движений. Дифференциальный механизм с одной обобщенной координатой применяют для получения малых точных перемещений или больших сил (например, в приборах, металлорежущих станках и т. п.).

В дифференциальном механизме с двумя и более обобщенными координатами составляющие движения независимы и выполняются каждое своим звеном.

*Кинематической парой* называется подвижное соединение звеньев, допускающее их относительное движение.

*Элементом кинематической пары* называется совокупность точек, линий или поверхностей по которым звенья соприкасаются друг с другом, образуя кинематическую пару.

Кинематические пары различают и классифицируют по трем различным признакам:

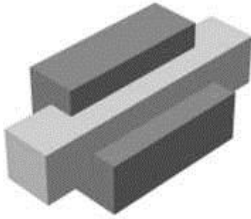

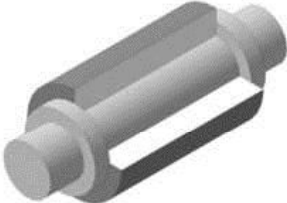

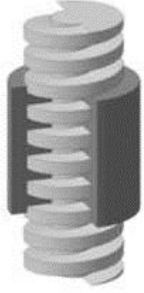

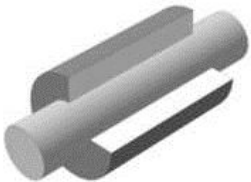



- по характеру контакта звеньев пары делятся на *низшие* и *высшие*. В низших парах звенья соприкасаются друг с другом по поверхности и в месте контакта возникают невысокие удельные давления. Элементом высшей пары является точка или линия, а следовательно, в месте контакта звеньев возникает высокое удельное давление;

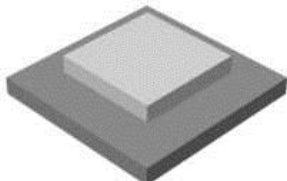

- по способу обеспечения постоянного контакта между звеньями, т. е. их замыкания друг с другом, пары делятся на две группы. Замыкание может быть *силовым* или *геометрическим* (*кинематическим*). *Силовым* называется замыкание, в котором контакт между звеньями обеспечивается действием силы тяжести или силы упругости пружины. При *геометрическом* замыкании контакт между звеньями обеспечивается за счет конструктивных решений;

- по числу связей, налагаемых на относительное движение звеньев. Всякое несвязанное абсолютно твердое тело в пространстве обладает шестью степенями свободы или шестью видами независимых возможных движений: по одному поступательному и вращательному движению вдоль каждой из трех координатных осей прямоугольной системы координат. Вхождение двух звеньев в кинематическую пару налагает на их относительное движение некоторые ограничения или условия связи. Класс кинематической пары определяется числом условий связи ( $S$ ) в паре и всегда находится в пределах от 1 до 5. Число оставшихся подвижностей ( $H$ ) дополняет число связей до шести, т. е.  $H = 6 - S$ . В этой связи пару пятого класса называют одноподвижной, четвертого – двухподвижной и т.д.

Примеры кинематических пар и их условные обозначения приведены в табл. 1.2.

Таблица 1.2

Число степеней свободы	Класс КП	Название	Рисунок	Условное обозначение
1	2	3	4	5
Низшие				
1	5	Поступательная		
1	5	Вращательная		
1	5	Винтовая		
2	4	Цилиндрическая		
3	3	Сферическая		

1	2	3	4	5
2	4	Сферическая с пальцем		
3	3	Плоскостная		
Высшие				
4	2	Цилиндр-плоскость		
5	1	Шар-плоскость		
2	4	Фрикционная передача		
2	4	Кулачек с толкателем		



Звенья механизмов и кинематические пары на схемах изображают упрощенно в виде линий или геометрических фигур. Такое условное изображение механизма называют структурной схемой механизма или структурной моделью механизма. *Структурная схема (модель)* – графическое изображение механизма с применением условных обозначений звеньев и кинематических пар без соблюдения масштаба. Если структурную схему механизма выполнить в масштабе, то получим *кинематическую схему (модель)* механизма.

## 1.2. Кинематические цепи

*Кинематической цепью* называется связанная система звеньев, образующих между собой кинематические пары. Кинематические цепи делятся на плоские и пространственные, простые и сложные, замкнутые и незамкнутые (разомкнутые).

*Плоской* называется кинематическая цепь, в которой траектории всех точек звеньев лежат в плоскостях параллельных какой-либо одной базовой плоскости (рис. 1.1).

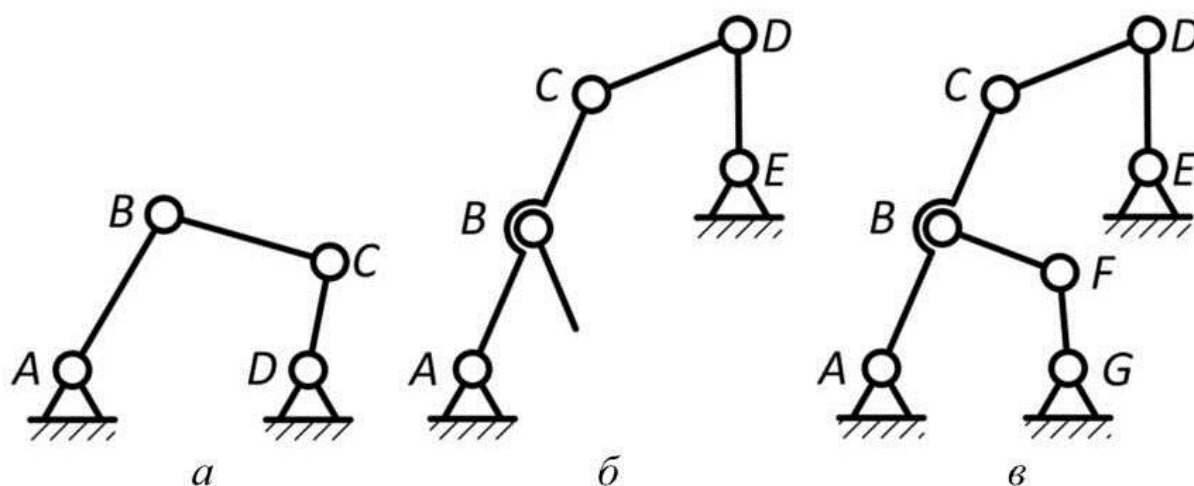


Рис. 1.1

*Пространственной* называется кинематическая цепь, в которой траектории точек звеньев лежат в пересекающихся плоскостях (рис. 1.2).

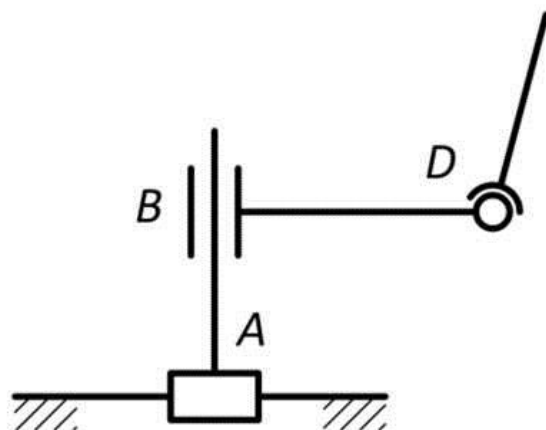


Рис. 1.2

*Простой* называется кинематическая цепь, в которой каждое звено входит не более чем в две кинематические пары (см. рис. 1.1, а).

*Сложной* называется кинематическая цепь, в которой имеются звенья, входящие более чем в две кинематические пары (см. рис. 1.1, б).

*Замкнутой* называется кинематическая цепь, в которой каждое звено входит, по крайней мере, в две кинематические пары. Изображенные на см. рис. 1.1, а, б простые и сложные кинематические цепи являются также примерами замкнутых цепей.

*Незамкнутой (разомкнутой)* называется кинематическая цепь, в которой имеется хотя бы одно звено, входящее только в одну кинематическую пару (см. рис. 1.1, в).

### 1.3. Структурные формулы кинематических цепей

Рассмотрим пространственную кинематическую цепь. Пусть она образована подвижными звеньями, число которых равно  $n$ . Общее число степеней свободы звеньев до тех пор, пока они не входили в кинематические пары равно  $6n$ . Каждая кинематическая пара 5-го класса накладывает 5 ограничений на возможное движение звеньев, а следовательно, уменьшает степень свободы кинематической цепи на 5. Таким образом, все кинематические пары 5-го класса уменьшают степень свободы кинематической цепи на  $5p_5$ , где  $p_5$  – число кинематических пар 5-го класса.

По аналогии все кинематические пары 4-го класса уменьшают степень свободы пространственной кинематической цепи

на  $4p_4$ , где  $p_4$  – число кинематических пар 4-го класса и т. д.

В результате степень свободы пространственной кинематической цепи относительно звена, принятого за неподвижное, определится уравнением:

$$W = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1.$$

Эта формула впервые, в несколько ином виде, была дана П.И. Сомовым и развита А.П. Малышевым и носит название – *формула Сомова - Малышева*.

В плоской кинематической цепи свободное звено имеет три подвижности, две из которых соответствуют поступательному движению вдоль осей прямоугольной системы координат, а третья – вращательному движению в плоскости этих осей.

Общее число степеней свободы  $n$  подвижных звеньев до образования ими плоской кинематической цепи –  $3n$ . Каждая кинематическая пара 5-го класса оставляет одну подвижность из трех возможных в кинематической паре, следовательно, накладывает 2 ограничения на возможное движение звеньев, т. е. уменьшает степень свободы плоской кинематической цепи на 2. Таким образом, все кинематические пары 5-го класса уменьшают степень свободы плоской кинематической цепи на  $2p_5$ , где  $p_5$  – число кинематических пар 5-го класса.

По аналогии все кинематические пары 4-го класса уменьшают степень свободы на  $1p_4$ , где  $p_4$  – число кинематических пар 4-го класса. Так как в плоской кинематической цепи кинематических пар третьего и ниже класса быть не может, получим:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4.$$

Эта формула впервые была получена П.Л. Чебышевым и носит название – *формула Чебышева*.

#### **1.4. Принцип образования механизмов и классификация структурных групп**

Любой механизм может быть образован путем последовательного присоединения к входному звену кинематических цепей, степень подвижности которых равна нулю.

*Группой Ассура* называется замкнутая плоская кинематиче-

ская цепь, включающая кинематические пары только 5-го класса и обладающая нулевой степенью подвижности, которая не распадется на более простые цепи, обладающие также нулевой степенью подвижности. Установим, какое число звеньев и кинематических пар в кинематической цепи может образовывать группу Ассура. Преобразуем формулу Чебышева применительно к группе Ассура, т. е. примем  $W = 0$  и  $p_4 = 0$ . Получим:

$$0 = 3n - 2p_5 - 0,$$

откуда

$$p_5 = \frac{3}{2}n.$$

Так как число звеньев и число кинематических пар пятого класса может быть только целым числом, можно констатировать, что только четное число звеньев цепи может образовывать группу Ассура, а число кинематических пар в ней кратно трем. Приведем в табл. 1.3 сочетания чисел звеньев и кинематических пар, образующих структурные группы Ассура.

Таблица 1.3

n	2	4	6	8	...
$p_5$	3	6	9	12	...

Все получаемые таким образом группы можно разбить по классам и порядкам. Деление групп по классам обусловлено различием методов кинематического и силового анализов, свойственным группам каждого класса.

Первое из этих сочетаний ( $n = 2$ ;  $p_5 = 3$ ) реализуется в представленных на рис. 1.3 двухповодковых группах Ассура различных модификаций: с тремя вращательными парами (1.3, а), с внешней поступательной парой (1.3, б), с внутренней поступательной парой (1.3, в), с двумя внешними поступательными парами (1.3, г), с двумя внешними поступательными парами (1.3, д).

Группа Ассура, имеющая два звена и три пары 5-го класса, называется группой Ассура II класса 2-го порядка. Порядок группы определяется числом внешних кинематических пар, т. е. пар, которыми группа присоединяется к основному механизму (входному звену, стойке или другим группам Ассура).

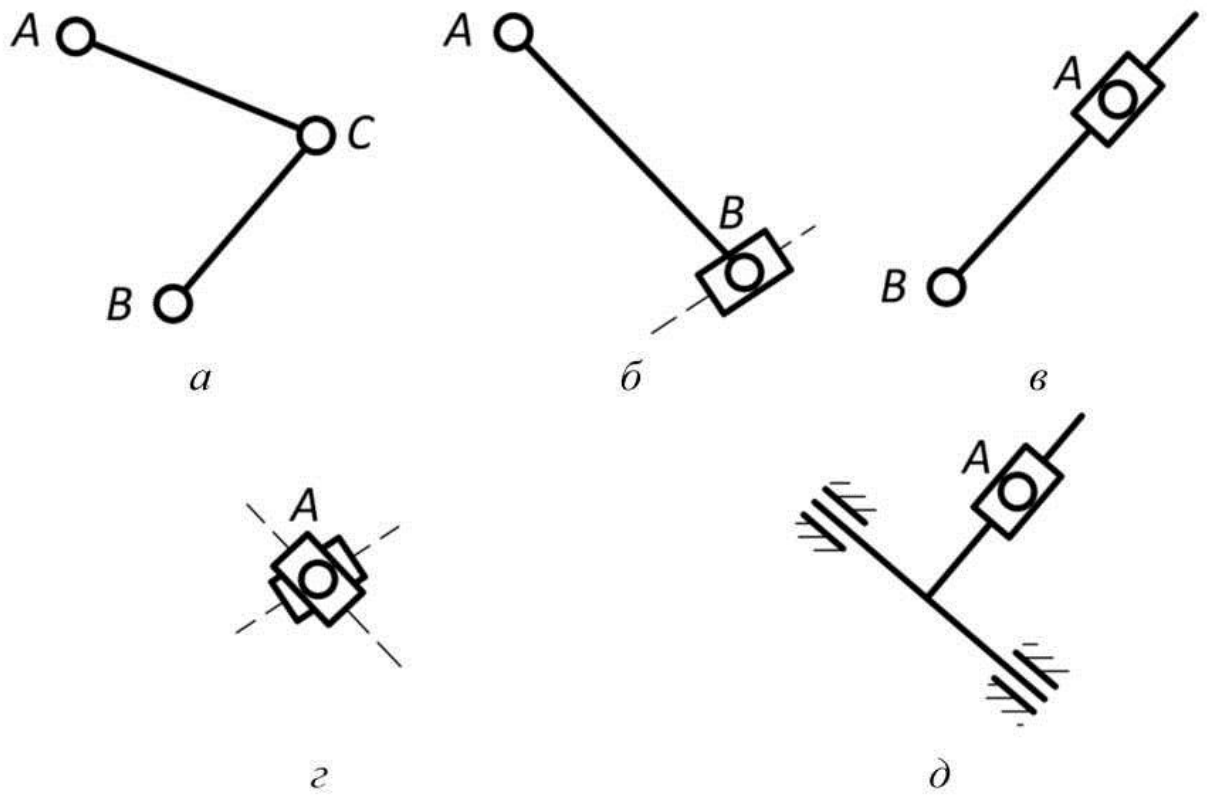


Рис. 1.3

Класс группы Ассура определяется числом кинематических пар, входящих в наиболее сложный замкнутый контур, образованный внутренними кинематическими парами. Двухповодковые структурные группы, не имеющие замкнутого контура, относят ко второму классу.

Рассмотрим второе возможное сочетание чисел звеньев и кинематических, образующих группу Ассура -  $n = 4$ ;  $p_5 = 6$  (рис. 1.4).

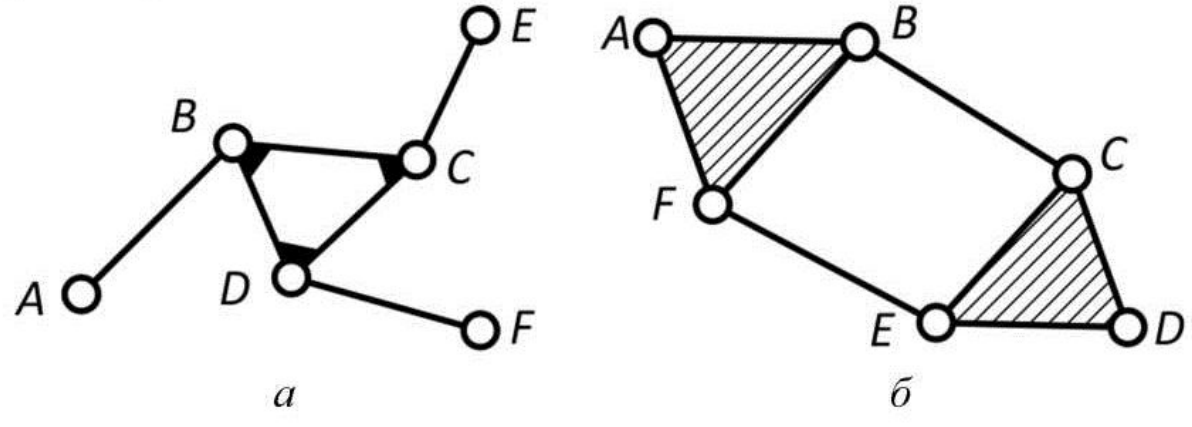


Рис. 1.4

Представленная на см. рис.1.4, *a* группа относится к III классу (внутренний замкнутый контур включает три пары *B*, *C* и *D*) и имеет третий порядок (три внешние пары *A*, *E* и *F*).

Группа, изображенная на рис. 1.4, *б*, относится к IV классу (внутренний замкнутый контур включает четыре пары *B*, *C*, *E* и *F*) и имеет второй порядок (две внешние пары *A* и *D*).

## 1.5. Структурный анализ механизмов

Анализ структурных схем механизмов позволяет определить количество звеньев, число и класс кинематических пар, соединяющих их в кинематические цепи. По структурной схеме механизма определяют наличие избыточных связей или подвижностей. Пользуясь методами структурного анализа, можно преобразовать структурную схему, удалив звенья, изменив класс кинематических пар, вносящих избыточные связи и подвижности, произведя замену высших кинематических пар низшими. Основная задача структурного анализа – определение класса механизма.

## 1.6. Замена высших кинематических пар низшими

Применяется в плоских механизмах для удобства изучения их структуры и кинематики. Основными условиями замены являются сохранение первоначальной степени подвижности и относительных движений всех его звеньев, совершающихся в рассматриваемом положении. Рассмотрим четыре случая такой замены:

1. Пусть задан механизм с высшей парой, элементы звеньев которой представляют собой произвольно заданные кривые (рис.1.5, *a*). Для построения схемы заменяющего механизма проводим нормаль *n-n* в точке *C* касания кривых и отмечаем на ней центры кривизны *D* и *E* звеньев 1 и 2. В точки *D* и *E* помещаем шарниры вращательных кинематических пар, образованных условными звеньями. Вместо исходного механизма получаем мгновенный заменяющий механизм (рис. 1.5, *б*).

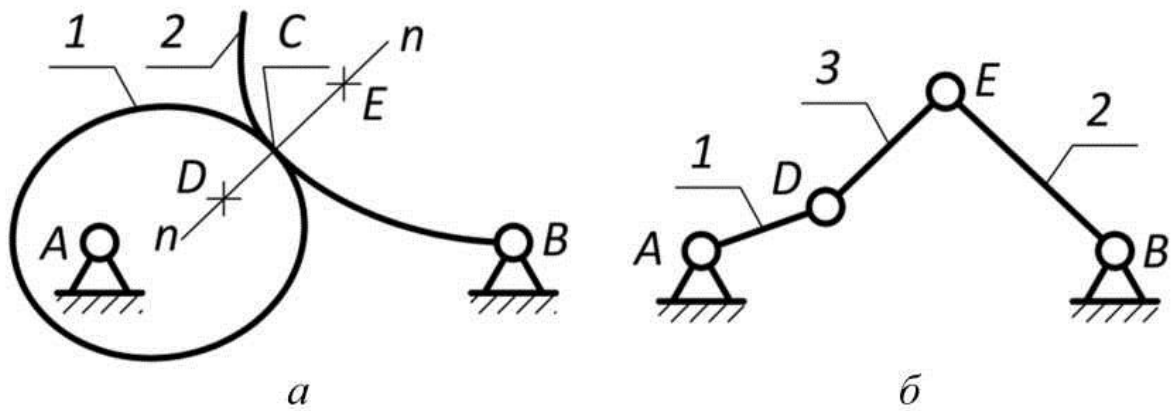


Рис. 1.5

2. Рассмотрим механизм с высшей парой, в которой один из соприкасающихся элементов представляет собой кривую (звено 1), а второй – прямую (звено 2) (рис. 1.6, а). Для построения схемы заменяющего механизма проводим нормаль  $n-n$  в точке  $C$  касания элементов пары. Отмечаем центр кривизны звена 1 – точку  $D$ , в которую помещаем шарнир вращательной пары. В точку  $C$  помещаем поступательную пару. Получаем мгновенный заменяющий механизм (рис. 1.6, б).

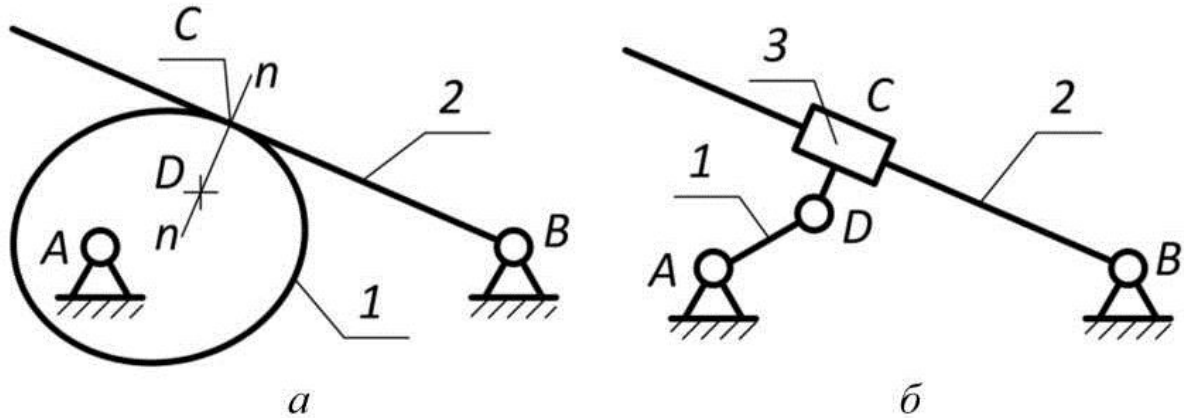


Рис.1.6

3. Рассмотрим случай, когда один из соприкасающихся элементов – кривая (звено 1) а, другой – точка  $C$  (рис. 1.7, а). Проводим нормаль  $n-n$  в точке  $C$  касания элементов пары. Отмечаем центр кривизны звена 1 – точку  $D$ , в которую помещаем шарнир вращательной пары. В точку  $C$  также помещаем шарнир вращательной пары. Получаем мгновенный заменяющий механизм (рис. 1.7, б).

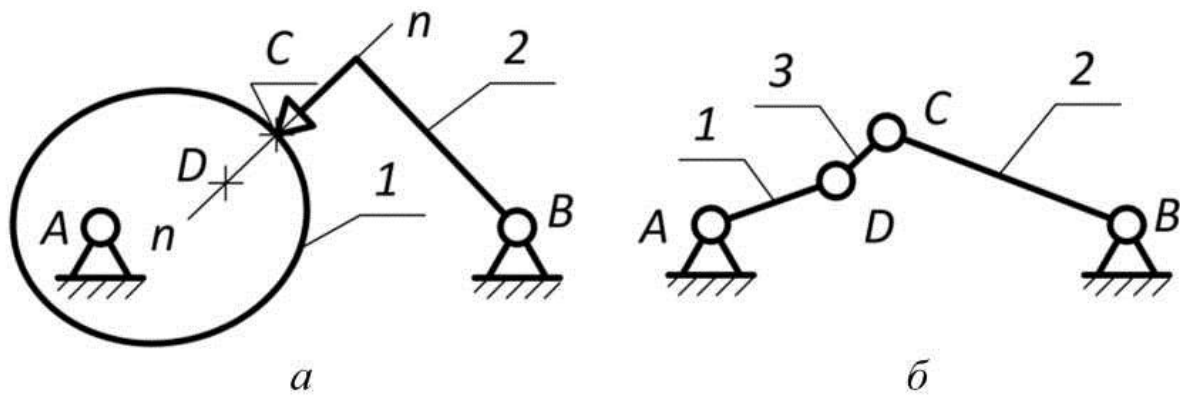


Рис. 1.7

4. Рассмотрим случай, когда одним элементом является прямая, а другим – точка  $C$  (рис. 1.8, *a*). Замена сводится к постановке в точке  $C$  условного звена, входящего в одну поступательную и одну вращательную пары. Получаем мгновенный заменяющий механизм (рис. 1.8, *б*).

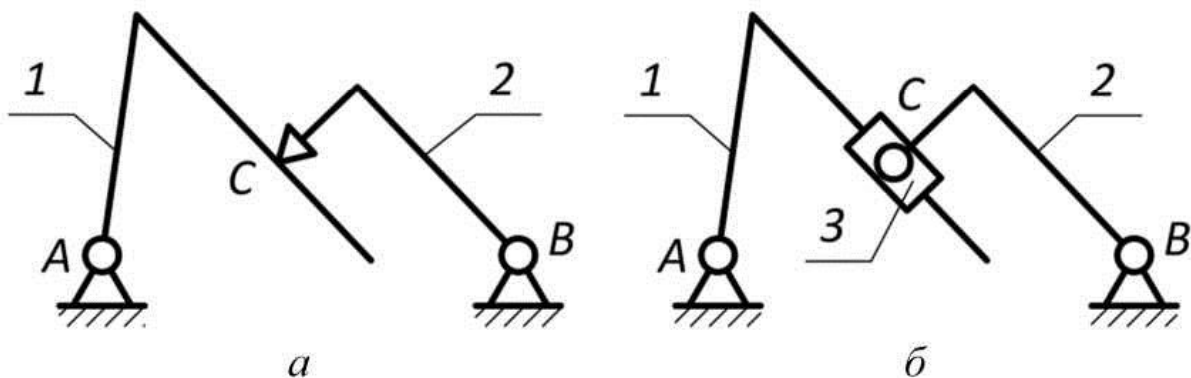


Рис. 1.8

Таким образом, любой плоский механизм с высшими парами может быть заменен механизмом, в который входят только низшие пары.

### 1.7. Избыточные связи и подвижности

Структурный синтез и анализ реального механизма сопровождается постоянной оценкой конструктивных схем соединений звеньев. Конструктивное исполнение элементов кинематических пар, обеспечивающее необходимую подвижность, может быть



различной. В этой связи соединения отличаются работоспособность. Это обусловлено тем, что в реальных механизмах из-за неизбежных неточностей изготовления и монтажа, деформаций звеньев при действии эксплуатационных нагрузок и износа поверхностей элементов кинематических пар в процессе эксплуатации появляются избыточные связи и подвижности.

*Избыточные связи* создают дополнительные ограничения на подвижность звеньев механизмов, вследствие чего конструкция становится статически неопределимой. Их удаление не изменяет кинематику звеньев, а приводит лишь к перераспределению усилий в соединениях, вызывающих дополнительную деформацию звеньев к той, которая возникла от действия эксплуатационных усилий.

Рассмотрим схему плоского четырехзвенного шарнирного механизма с тремя подвижными звеньями (рис. 1.9), соединенными между собой и со стойкой четырьмя вращательными кинематическими парами 5-го класса  $p_5=4$  (0-1; 1-2; 2-3; 3-0).

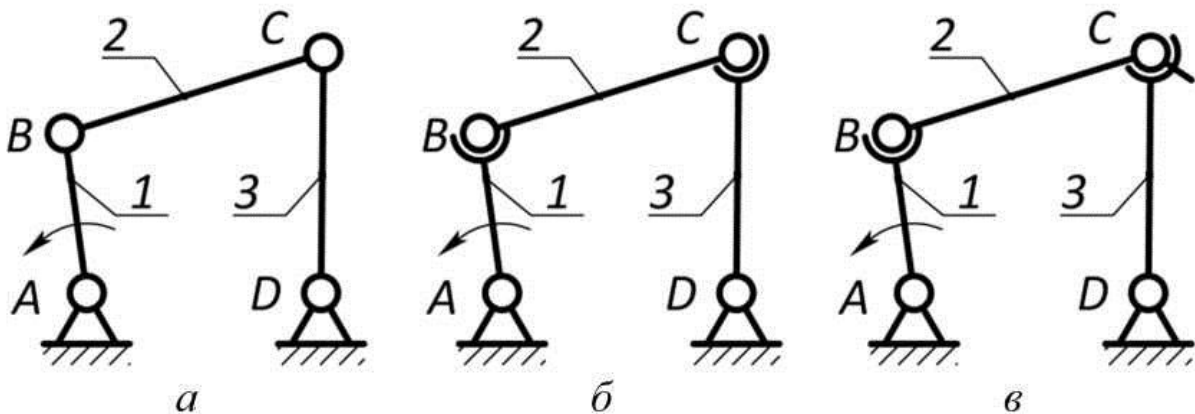


Рис. 1.9

Степень подвижности определим по формуле Чебышева

$$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 0 = 1.$$

Полученная степень подвижности механизма  $W = 1$  соответствует числу входных звеньев. Но если из-за неточностей изготовления и монтажа оси шарниров не окажутся параллельно друг другу, то звенья механизма будут двигаться в параллельных плоскостях только при условии их деформации. Рассчитаем  $W$  по формуле Сомова - Малышева как для пространственного механизма

$$W = 6 \cdot 3 - 5 \cdot 4 - 4 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 0 = -2.$$

Результат указывает на возможность потери подвижности из-за избыточных связей. Для выявления избыточных связей и подвижностей преобразуем формулы Сомова - Малышева и Чебышева.

Для пространственного механизма:

$$q = W - (6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1).$$

Для плоского:

$$q = W - (3n - 2p_5 - p_4),$$

где  $W$ - число начальных звеньев или число обобщенных координат, однозначно определяющих положение всех звеньев механизма. Если  $q > 0$ , то механизм имеет избыточные связи, если  $q < 0$ , то избыточные подвижности.

Для приведенного выше механизма (см. рис. 1.9, а) получим:

$$q = 1 - (6 \cdot 3 - 5 \cdot 4) = 3,$$

что говорит о трех избыточных связях. Исходя из не параллельности осей шарниров как условия пространственного характера кинематики его звеньев, заменим пары 5-го класса  $B$  и  $C$  на пары 3-го класса - сферические шарниры (см. рис. 1.9, б). После чего получим при  $n = 3$ ,  $p_5 = 2$  и  $p_3 = 2$ :

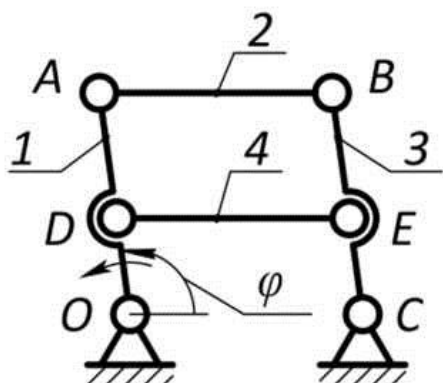
$$q = 1 - (6 \cdot 3 - 5 \cdot 2 - 3 \cdot 2) = -1.$$

Результат говорит о появлении *избыточной подвижности*, что проявляется в возможности свободного вращения звена 2 вокруг своей оси. Если проворачиваемость его нежелательна, то ее можно избежать, применив, вместо пары  $B$  или  $C$  3-го класса кинематическую пару 4-го класса, например сферическую с пальцем (см. рис. 1.9, в).

Таким образом, для удаления избыточной связи понижается класс соответствующей кинематической пары, принятой в плоской схеме. Механизмы, в которых удалено большинство избыточных связей, называются *рациональными*. В некоторых слу-

чаях, наоборот, целесообразно вводить избыточные связи, например, для увеличения жесткости или распределения нагрузки на несколько потоков.

Рассмотрим схему, используемую в механизмах грохотов, в приводе колес электроприводов для повышения жесткости системы и равномерного распределения нагрузки (рис. 1.10).



$$n = 4;$$

$$p_5 = 6 (0-1; 1-2; 2-3; 3-0; 1-4; 3-4);$$

$$q = 1 - (3 \cdot 4 - 2 \cdot 6) = 1.$$

Рис. 1.10

В этом механизме, называемом механизмом параллельных кривошипов с дополнительным шатуном  $DE$ , одно начальное звено, т.к. одна обобщенная координата  $\varphi_1$  однозначно определяет положение выходного звена  $BC$ . Полученное значение  $q=1$  говорит о наличии в механизме одной избыточной связи. Однако при выполнении соотношений для длин звеньев  $OA=BC$ ;  $OC=AB=DE$ ;  $OD=DA=BE=EC$  наличие звена  $DE$  не изменит движения шарнирного четырехзвенника  $OABC$ . Если из схемы удалить это звено, относительное движение остальных звеньев сохранится прежним, поэтому связь  $DE$  называется избыточной.

В кулачковом механизме (рис. 1.11, *a*) избыточная подвижность появляется при введении в схему механизма (рис. 1.11, *б*) дополнительного звена – ролика 2, не влияющего на относительное движение толкателя 3.

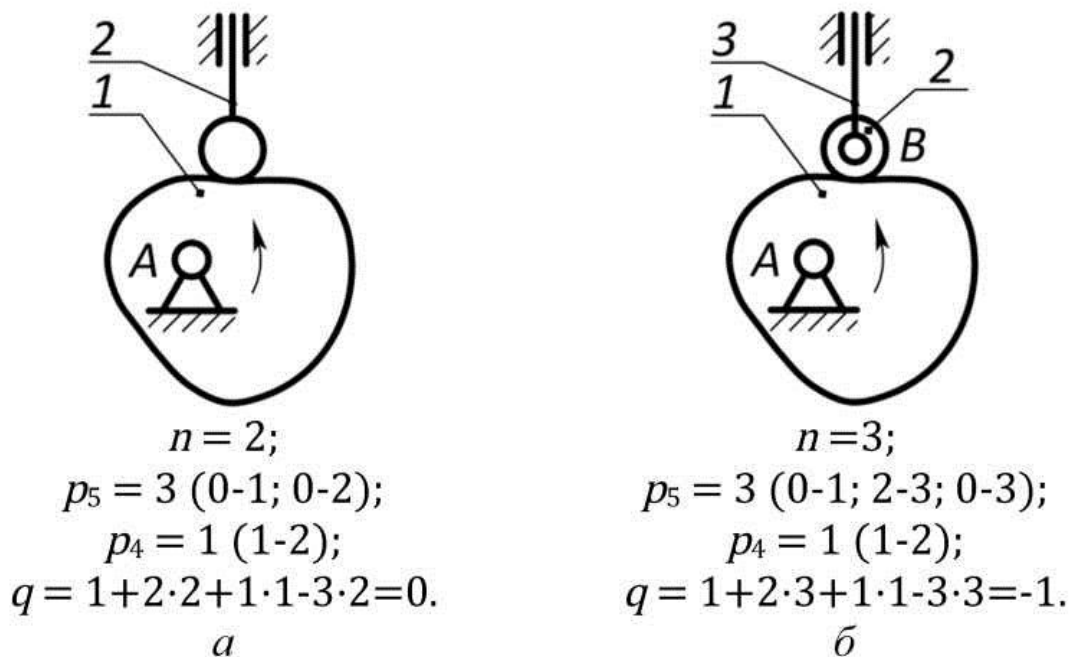


Рис. 1.11

В данных конкретных условиях избыточная подвижность является полезной, т. к. уменьшает трение в высшей кинематической паре между кулачком и толкателем, переводя его из трения скольжения в трение качения.

### 1.8. Классификация механизмов

Класс механизма определяется по наивысшему классу группы Ассур, входящей в его состав. Входное звено, соединенное со стойкой, называют простейшим (элементарным) механизмом I класса (рис. 1.12).



Рис. 1.12

Последовательность определения класса механизма обратная последовательности его образования и заключается в установлении всех групп Ассур, входящих в его состав.

Для определения класса механизма необходимо:

- убедиться, что предлагаемая кинематическая цепь является механизмом (цепь замкнута, имеется стойка, степень подвижности равняется числу входных звеньев);

- начиная с наиболее удаленного от входного звена, пытаемся выделить группу Ассур II класса ( $n=2, p_5=3$ ). В результате отсоединения этой группы оставшаяся кинематическая цепь должна быть замкнутой;

- если группу Ассур II класса выделить не удастся, то отсоединяют группу Ассур более высокого класса;

- после отсоединения первой группы Ассур отсоединяют следующую;

- в результате отсоединения всех групп Ассур в остатке должны оказаться только входные звенья.

Определим класс механизма с одним входным звеном, представленным на рис. 1.13.

По формуле Чебышева установим соответствие между  $W$  и числом входных звеньев.

$$n=7;$$

$$p_5=10 (0-1; 1-2; 2-3; 3-4; 3-0; 4-5; 5-7; 7-0; 5-6; 6-0);$$

$$p_4=0;$$

$$W=3 \cdot 7 - 2 \cdot 10 - 0 = 1.$$

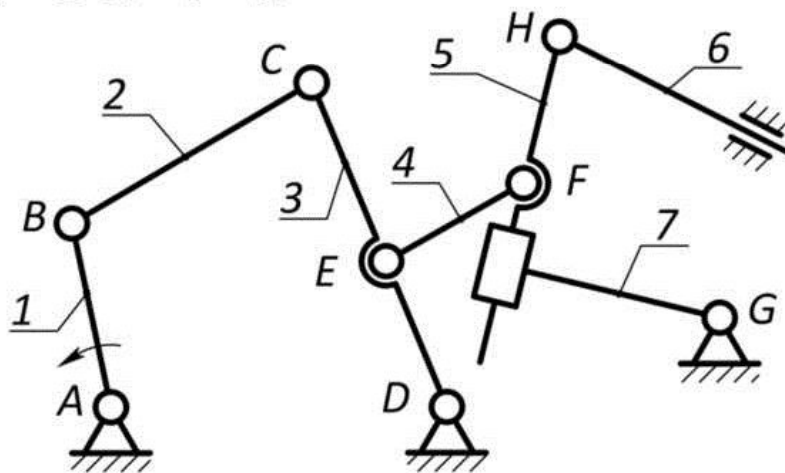


Рис. 1.13

Попытка отсоединить группу Ассур второго класса ( $n=2$ ) не удалась, так как в этом случае цепь размыкается. Выделим структурную группу из четырех звеньев  $n=4$  (4; 5; 6; 7) и шести кинематических пар  $p_5=6$  (3-4; 4-5; 5-6; 6-0; 5-7; 7-0) (рис. 1.14, а).

Это структурная группа третьего класса (внутренний замкнутый контур включает три пары 4-5, 5-6, 5-7) и имеет третий порядок (три внешние пары 3-4, 6-0 и 7-0). Изобразим оставшуюся кинематическую цепь (рис. 1.14, б).

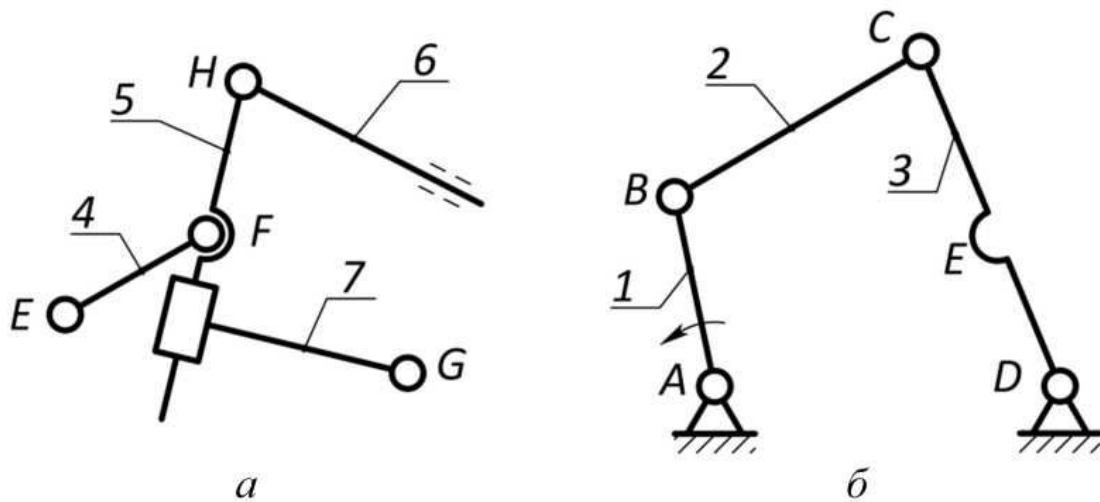


Рис. 1.14

Выделим из нее структурную группу, включающую два подвижных звена (2, 3) и три кинематические пары пятого класса (1-2; 2-3; 3-0) (рис. 1.15, а).

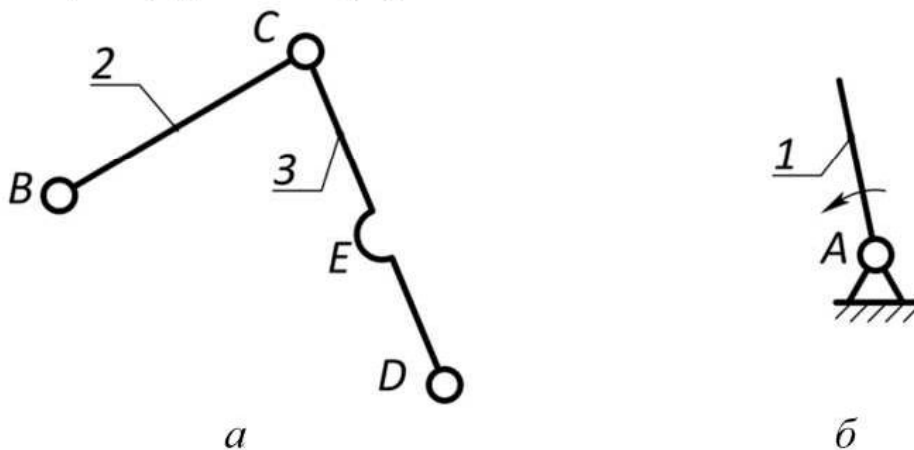


Рис. 1.15

Это группа Ассура II класса 2-го порядка. Оставшаяся кинематическая цепь представляет простейший механизм (рис. 1.15, б), т. е. входное звено, присоединенное к стойке.

В результате исследуемый механизм образован путем последовательного присоединения к входному звену группы Ассура II класса и группы Ассура III класса. Наивысший класс структурной группы входящей в состав механизма третий, следовательно, механизм относится к третьему классу.

Таким образом, схема образования исследуемого механизма записывается следующим образом:

$$I(1)+II(2,3)+III(4,5,6,7)=M(III).$$

## ГЛАВА 2. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

Цели кинематического анализа:

- определение траекторий точек и положений звеньев механизма в различные моменты времени;
- определение линейных скоростей точек и угловых скоростей звеньев механизма;
- определение линейных ускорений точек и угловых ускорений звеньев механизма.

Кинематический анализ проводится тремя методами:

- 1) аналитическим;
- 2) графическим;
- 3) графоаналитическим.

Аналитический метод подробно рассматривался в теоретической механике. Основным его преимуществом является высокая точность получаемых результатов. К числу недостатков следует отнести сложность и громоздкость. Более подробно остановимся на графическом и графоаналитическом методах.

### 2.1. Графический метод исследования

Сущность графического метода заключается в том, что методом засечек строится диаграмма перемещения исследуемой точки, которую затем дважды графически дифференцируют.

Графический метод предусматривает изображение на чертеже различных физических величин с учетом их истинного числового значения. Эти построения осуществляются с учетом масштабного коэффициента (вычислительного масштаба).

*Масштабный коэффициент* – размерная величина, характеризующая отношение истинного значения какой-либо физической величины к длине отрезка, изображающего эту физическую величину на чертеже.

Так, например, масштабный коэффициент длины  $\mu_l$ , м/мм,

$$\mu_l = \frac{l_{AB}}{\overline{AB}},$$

где  $l_{AB}$  – действительная длина отрезка  $AB$ , м;  $\overline{AB}$  – длина отрезка  $AB$  на чертеже, мм.



Масштабный коэффициент скорости  $\mu_V$ ,  $\text{м} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{мм}^{-1}$ ,

$$\mu_V = \frac{V_A}{\overline{pa}}$$

где  $V_A$  – скорость точки, м/с;  $\overline{pa}$  – длина вектора  $\vec{V}_A$  на чертеже, мм.

Проанализируем кривошипно-ползунный механизм.

Методом засечек строим диаграмму  $S = f(\varphi_1)$  – перемещение точки  $B$  как функция обобщенной координаты  $\varphi_1$  (рис. 2.1).

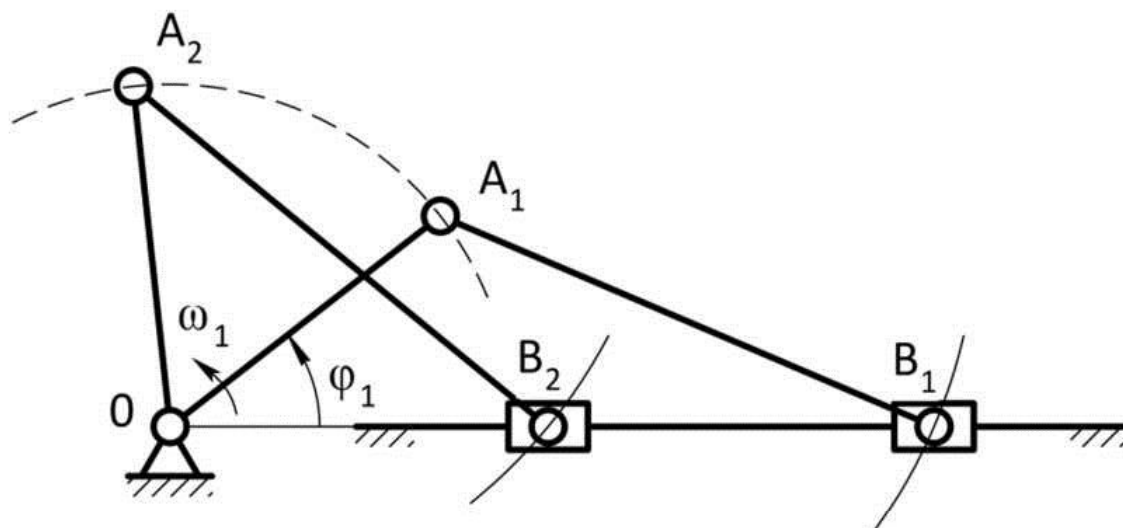


Рис. 2.1

Скорость точки  $B$  представим как:

$$V = \frac{dS}{dt} = \frac{dS}{d\varphi_1} \cdot \frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{dS}{d\varphi_1} \cdot \omega_1 = V_\varphi \cdot \omega_1,$$

где  $\omega_1$  – угловая скорость входного звена, имеющая ед. измерения  $\text{с}^{-1}$ , а  $V_\varphi = \frac{dS}{d\varphi_1}$  – аналог скорости точки  $B$ , имеющий ед. измерения длины. Таким образом, действительная скорость точки  $B$  равна произведению угловой скорости  $\omega_1$  входного звена на аналог скорости  $V_\varphi$  точки  $B$ .

Диаграмму аналога скорости получают путем графического дифференцирования диаграммы перемещения методом хорд (рис. 2.2) в следующей последовательности:

- выбирают интервалы дифференцирования. На них хорда должна сливаться с кривой и точки экстремума должны быть только на границе интервалов;



- под диаграммой перемещения изображают координатные оси диаграммы аналога скорости точки  $B$ ;
- слева от начала координат в произвольном месте выбирают полюс дифференцирования – точка  $P$  (рис. 2.2);
- из полюса  $P$  проводят линию параллельную хорде  $01'$  первого интервала дифференцирования до пересечения ее с осью ординат  $V_\varphi$  - точка  $1''$ . Из точки  $1''$  по длине интервала дифференцирования  $0-1$  проводят линию параллельную оси абсцисс;
- эти построения повторяют для всех последующих интервалов. Высоты полученных прямоугольников - средние аналоги скорости на соответствующих интервалах:  $V_{cp} = \Delta S / \Delta \varphi$ ;
- диаграмму аналога скорости получают, проводя через полученные ступеньки кривую по правилу средней величины;
- масштабный коэффициент построенной диаграммы аналога скорости определяют уравнением:

$$\mu_V = \frac{\mu_S}{PO \cdot \mu_\varphi},$$

где  $\mu_S$  – масштабный коэффициент диаграммы перемещения точки  $B$  по оси ординат, м/мм;  $PO$  – полюсное расстояние, мм;  $\mu_\varphi$  – масштабный коэффициент по оси абсцисс, рад/мм.

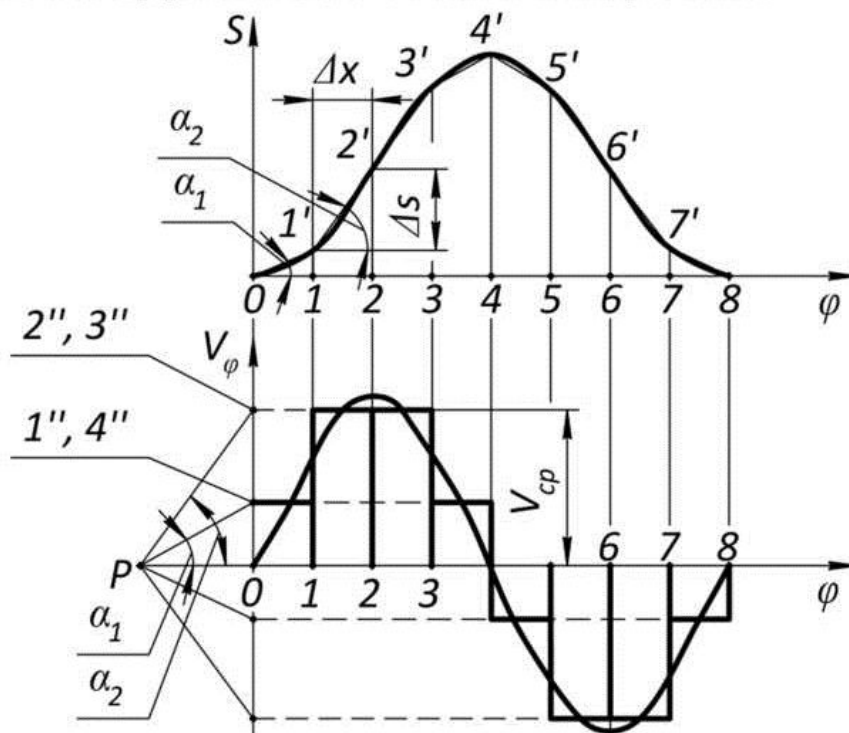


Рис. 2.2

Диаграмму аналога ускорения получают посредством графического дифференцирования диаграммы аналога скорости.

## 2.2. Графоаналитический метод исследования

Сущность метода заключается в том, что для точки, являющейся элементом внутренней кинематической пары каждой группы Ассур, записываются векторные уравнения по определению ее скорости и ускорения. Затем эти векторные уравнения решаются графически - посредством построения планов скоростей или ускорений.

Преимущество метода – скорости и ускорения всех названных точек механизма определяются одновременно и как по величине, так и по направлению.

## 2.3. Формальный метод записи векторных уравнений

Рассмотрим формальный метод записи векторных уравнений, позволяющий получить единый подход составления уравнений для различных структурных групп. Ключевой его задачей является определение трех характерных точек для каждой структурной группы Ассур второго класса и установлении вида движения их относительно друг друга.

Для решения этой задачи:

- разбиваем механизм на группы Ассур, причем буквами на схеме обозначаем *только вращательные кинематические пары* (разберем метод на примере группы Ассур с внутренней кинематической парой табл. 2.1);

- записываем попарно номера звеньев, образующих между собой одну внутреннюю кинематическую пару (4-5), в которой соединяются между собой звенья, входящие в состав данной группы Ассур, и две внешние, в которых соединяются между собой звенья рассматриваемой группы, со звеньями, не принадлежащими данной группе – (3-4; 5-6);

- предварительно обозначаем буквой  $I$  точку, являющуюся характерной для внутренней кинематической пары, а буквами  $J_1$  и  $J_2$  - характерные точки для внешних кинематических пар;

- устанавливаем вид относительного движения в каждой из кинематических пар – вращательный (*вращ.*) или поступательный (*пост.*);

Таблица 2.1

Группа Ассура с внутренней поступательной парой			
Образована звеньями 4 и 5. Звенья 3 и 6 в группу Ассура не входят			
Кинематическая пара	Внеш.	Внутр.	Внеш.
Номера звеньев, образующих КП	3-4	4-5	5-6
Общее обозначение характерных точек КП	$J_1$	$I$	$J_2$
Вид относительного движения в КП	<i>Вращ.</i>	<i>Пост.</i>	<i>Вращ.</i>
Точки элементов КП	$B_3 = B_4$	$B_4 \neq B_5$	$A_5 = A_6$
Характерные точки КП	$B_3 (B_4)$	$B_5$	$A_5 (A_6)$
Вид движения точки $I$ относительно $J$	2		1

- для каждой кинематической пары указываем две точки, принадлежащие разным звеньям с указанием номера звена, на котором лежит каждая из них. Если указанные точки являются элементами вращательной кинематической пары, то назовем их совмещенными, т. е. не изменяющими своего относительного положения, и поставим между ними знак равенства ( $B_3=B_4$ ;  $A_5=A_6$ ; индексы указывают номер звена, которому принадлежит точка). Если же указанные точки являются элементами поступательной кинематической пары то назовем их не совмещенными и поставим между ними знак неравенства ( $B_4 \neq B_5$ );

- устанавливаем характерные точки для каждой из двух внешних кинематических пар, обозначенные нами предварительно как  $J_1$  и  $J_2$ . Если внешняя кинематической пары является вращательной, то для нее в качестве характерной может быть выбрана любая

из двух выделенных выше для нее точек, так как они являются совмещенными ( $J_1 \rightarrow B_3(B_4)$ ,  $J_2 \rightarrow A_5(A_6)$ ). Если же внешняя кинематическая пара является поступательной, то для нее в качестве характерной необходимо выбрать только ту, которая принадлежит звену не входящему в рассматриваемую группу Ассура;

- устанавливаем характерную точку для внутренней кинематической пары, обозначенную выше как  $I$ . Если внутренняя кинематическая пара является вращательной, то для нее также в качестве характерной может быть выбрана любая из двух выделенных для нее точек ввиду их совмещенности. Если же внутренняя кинематическая пара является поступательной, то для нее в качестве характерной выбирается та из двух выделенных точек ( $B_4 \neq B_5$ ), что не могла быть использована в качестве характерной для двух внешних кинематических пар (в нашем случае  $I \rightarrow B_5$ , т.к.  $B_4$  принадлежит внешней кинематической паре);

- определяем вид движения характерной точки внутренней кинематической пары ( $I$ ), относительно условно неподвижных характерных точек внешних кинематических пар ( $J_1$  и  $J_2$ ). Если точка  $I$  по отношению к точке  $J$  двигается по окружности, то такое движение отнесем к первому виду. Если же точка  $I$  по отношению к точке  $J$  двигается поступательно вдоль какой-либо направляющей, то такое движение отнесем ко второму виду.

К определению вида относительного движения можно отнестись формально: если буквы, соответствующие характерным точкам  $I$  и  $J$  разные (в нашем случае  $I \rightarrow B_5$  и  $J_2 \rightarrow A_5(A_6)$ ), а индексы, определяющие принадлежность звену, одинаковые (звено 5), то *вид движения первый*. Если же буквы, соответствующие характерным точкам  $I$  и  $J$  разные одинаковые (в нашем случае  $I \rightarrow B_5$  и  $J_1 \rightarrow B_3(B_4)$ ), а индексы, определяющие принадлежность звену, разные - *вид второй*.

В дальнейшем к процедуре записи векторных уравнений подходим формальным образом.

Если установлено, что вид относительного движения первый, то, как было отмечено выше, точка  $I$  по отношению к точке  $J$  двигается по окружности радиуса  $l_{IJ}$  (рис. 2.3).

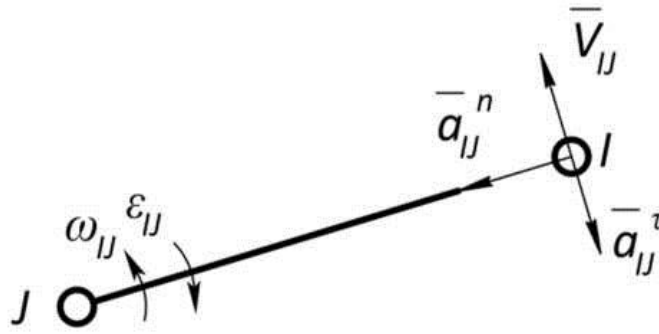


Рис. 2.3

В этом случае ее скорость и ускорение определяются приведенными ниже векторными уравнениями (условимся подчеркивать вектор дважды, если он полностью определен, т. е. известен по направлению и по величине, один раз, если известна только линия, на которой он расположен):

$$\bar{V}_I = \bar{V}_J + \bar{V}_{IJ}, \bar{a}_I = \bar{a}_J + \bar{a}_{IJ}^n + \bar{a}_{IJ}^\tau,$$

изв.
⊥IJ
изв.
∥IJ
⊥IJ

где  $\bar{V}_I$  и  $\bar{a}_I$  – векторы скорости и ускорения характерной точки  $I$  внутренней кинематической пары (они неизвестны ни по величине, ни по направлению);

$\bar{V}_J$  и  $\bar{a}_J$  – известные по величине и направлению векторы скорости и ускорения характерной точки  $J$  внешней кинематической пары;

$\bar{a}_{IJ}^n$  – известная по направлению и величине нормальная составляющая вектора ускорения точки  $I$  по отношению к точке  $J$  в относительном движении. Ее численное значение определяется уравнением  $a_{IJ}^n = V_{IJ}^2 / L_{IJ}$ , а направлена она вдоль отрезка  $IJ$  ( $\parallel IJ$ ) от точки  $I$  к точке  $J$ ;

$\bar{V}_{IJ}$ , и  $\bar{a}_{IJ}^\tau$  – известные только по направлению соответственно скорость и касательная составляющая ускорения точки  $I$  по отношению к точке  $J$  в относительном движении. Векторы  $\bar{V}_{IJ}$  и  $\bar{a}_{IJ}^\tau$  лежат на прямой перпендикулярной отрезку  $IJ$  (в какую сторону заранее неизвестно).

В случае второго вида относительного движения точка  $I$  по отношению к условно неподвижной точке  $J$  перемещается поступательно вдоль направляющей кулисы (рис. 2.4). На рис. 2.4 точка  $I$  принадлежит направляющей, точка  $J$  – ползуну.

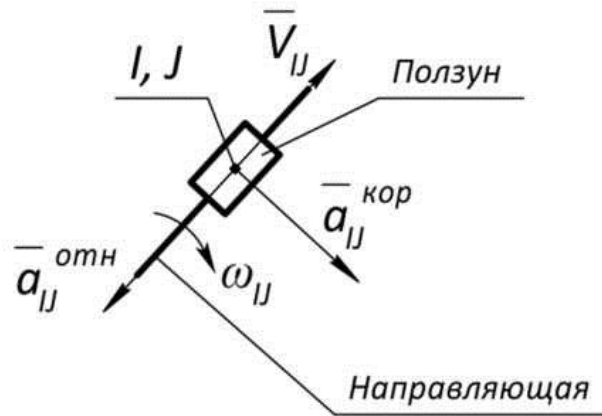


Рис. 2.4

В этом случае ее скорость и ускорение определяются следующими векторными уравнениями:

$$\bar{V}_I = \underbrace{\bar{V}_J}_{\text{изв.}} + \underbrace{\bar{V}_{IJ}}_{\parallel \text{направл.}}, \quad \bar{a}_I = \underbrace{\bar{a}_J}_{\text{изв.}} + \underbrace{\bar{a}_{IJ}^{\text{кор}}}_{\perp \text{направл.}} + \underbrace{\bar{a}_{IJ}^{\text{отн}}}_{\parallel \text{направл.}}.$$

где  $\bar{a}_{IJ}^{\text{кор}}$  – известный по направлению и величине вектор кориолисова ускорения точки  $I$  по отношению к точке  $J$ . Его численное значение определяется уравнением  $a_{IJ}^{\text{кор}} = 2\omega_{\text{напр.}} V_{IJ} \sin \alpha$ , где  $\alpha$  – угол между вектором угловой скорости направляющей (кулисы) и вектором относительной скорости  $V_{IJ}$ . В случае плоского движения  $\alpha=90^\circ$  и, следовательно,  $a_{IJ}^{\text{кор}} = 2\omega_{\text{напр.}} V_{IJ}$ . Направление вектора ускорения Кориолиса определяется по правилу Жуковского посредством поворота вектора  $\bar{V}_{IJ}$  на  $90^\circ$  по направлению угловой скорости направляющей кулисы ( $\omega_{\text{напр.}}$ );

$\bar{a}_{IJ}^{\text{отн}}$  – вектор относительного ускорения точки  $I$  по отношению к точке  $J$ . Известно только его направление - вдоль направляющей кулисы, по которой перемещается камень (в какую именно сторону заранее определить нельзя).



Величина и направление векторов  $\vec{V}_J$  и  $\vec{a}_J$  определяются в каждом конкретном случае по одному из трех подходов.

*Первый подход* используется, когда точка  $J$  принадлежит входному звену (рис. 2.5), вращающемуся с  $\omega_1 = \text{const}$ . В этом случае их численные значения определяются уравнениями  $V_J = \omega_1 \cdot L_{OJ}$ ,  $a_J = \omega_1^2 \cdot L_{OJ}$ , где  $L_{OJ}$  – длина входного звена,  $\omega_1$  – угловая скорость вращения входного звена. Вектор  $\vec{V}_J$  направлен перпендикулярно входному звену ( $\perp OJ$ ), в сторону его вращения, а вектор  $\vec{a}_J$  направлен вдоль входного звена к центру его вращения ( $\parallel OJ$  от точки  $J$  к точке  $O$ ).

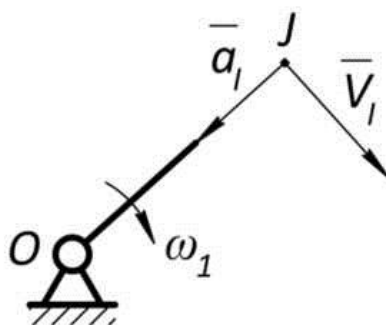


Рис. 2.5

*Второй подход* используется, когда точка  $J$  принадлежит стойке (неподвижному звену). В этом случае ее скорость и ускорение равны нулю.

*Третий подход* используется в том случае, когда точка  $J$  является элементом кинематической пары, соединяющей две группы Ассура между собой. Тогда, ее скорость и ускорение определяются по теореме подобия.

**Теорема.** Одноименные точки, принадлежащие одному звену, образуют на плане скоростей и на плане ускорений фигуры, подобные той, которую они образуют на кинематической схеме механизма.

Таким образом, в каждом из векторных уравнений, определяющих скорость и ускорение точки  $I$ , содержатся три неизвестные величины (формально – недостает трех подчеркиваний). По-

этому каждое из них самостоятельно не разрешимо. Однако для каждой точки  $I$  структурной группы Ассура можно записать по два уравнения, определяющих ее скорость и ускорение, приняв в качестве полюсов точки  $J_1$  и  $J_2$ .

Для скорости:

$$\bar{V}_I = \underline{\underline{\bar{V}_{J1}}} + \underline{\underline{\bar{V}_{IJ1}}}, \quad \bar{V}_I = \underline{\underline{\bar{V}_{J2}}} + \underline{\underline{\bar{V}_{IJ2}}}.$$

В этих уравнениях левые части одинаковые. Приравняв правые части, получим общее векторное уравнение с двумя неизвестными (недостает двух подчеркиваний), которое является разрешимым:

$$\bar{V}_I \rightarrow \underline{\underline{\bar{V}_{J1}}} + \underline{\underline{\bar{V}_{IJ1}}} = \underline{\underline{\bar{V}_{J2}}} + \underline{\underline{\bar{V}_{IJ2}}}.$$

Применительно к рассматриваемой структурной группе (см. табл. 2.1) последнее уравнение имеет вид

$$\bar{V}_{B5} \rightarrow \underline{\underline{\bar{V}_{B4}}} + \underline{\underline{\bar{V}_{B5B4}}} = \underline{\underline{\bar{V}_{A5}}} + \underline{\underline{\bar{V}_{B5A5}}}.$$

В случае, когда характерной точкой оказываются две совмещенные, в нашем случае  $J_1 \rightarrow B_3(B_4)$  и  $J_2 \rightarrow A_5(A_6)$ , для краткости записи в уравнениях будем писать одну из них, например  $J_1 \rightarrow B_4$  и  $J_2 \rightarrow A_5$ , принимая в дальнейшем во внимание, что  $\bar{V}_{B3} = \bar{V}_{B4}$  и  $\bar{V}_{A5} = \bar{V}_{A6}$ .

Процедура графического решения векторного уравнения по определению скорости точки  $I$  называется построением плана скоростей. Из построенного плана определяются неизвестные: численные значения  $\bar{V}_{IJ1}$  и  $\bar{V}_{IJ2}$ , а также величина и направление  $\bar{V}_I$  (для рассматриваемого примера  $\bar{V}_{B5B4}$ ,  $\bar{V}_{B5A5}$  и  $\bar{V}_{B5}$  соответственно).

Варианты характерных точек и виды их относительных движений для различных групп Ассура второго класса приведены в табл. 2.2 - 2.5.



Таблица 2.2

Группа Ассура с внешней поступательной парой

Образована звеньями 3 и 4.  
Звенья 2 и 5 в группу Ассура не входят

Кинематическая пара	Внеш.	Внутр.	Внеш.
Номера звеньев, образующих КП	2-3	3-4	4-5
Общее обозначение характерных точек КП	$J_1$	$I$	$J_2$
Вид относительного движения в КП	<i>Пост.</i>	<i>Вращ.</i>	<i>Вращ.</i>
Точки элементов КП	$B_2 \neq B_3$	$B_3 = B_4$	$A_4 = A_5$
Характерные точки КП	$B_2$	$B_3 (B_4)$	$A_4 (A_5)$
Вид движения точки $I$ относительно $J$	2		1

Таблица 2.3

Группа Ассура с тремя вращательными парами

Образована звеньями 3 и 4.  
Звенья 2 и 5 в группу Ассура не входят

Кинематическая пара	Внеш.	Внутр.	Внеш.
Номера звеньев, образующих КП	2-3	3-4	4-5
Общее обозначение характерных точек КП	$J_1$	$I$	$J_2$
Вид относительного движения в КП	<i>Вращ.</i>	<i>Вращ.</i>	<i>Вращ.</i>
Точки элементов КП	$A_2 = A_3$	$B_3 = B_4$	$C_4 = C_5$
Характерные точки КП	$A_2 (A_3)$	$B_3 (B_4)$	$C_4 (C_5)$
Вид движения точки $I$ относительно $J$	1		1

Таблица 2.4

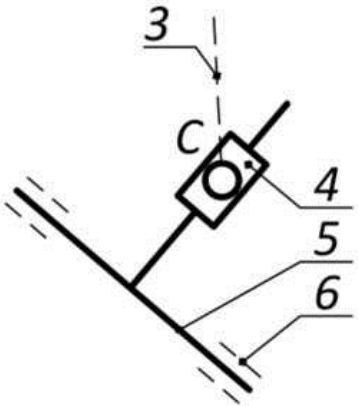
Группа Ассур с внешней и внутренней поступательными парами			
			
Образована звеньями 4 и 5. Звенья 3 и 6 в группу Ассур не входят			
Кинематическая пара	Внеш.	Внутр.	Внеш.
Номера звеньев, образующих КП	3-4	4-5	5-6
Общее обозначение характерных точек КП	$J_1$	$I$	$J_2$
Вид относительного движения в КП	<i>Вращ.</i>	<i>Пост.</i>	<i>Пост.</i>
Точки элементов КП	$C_3 = C_4$	$C_4 \neq C_5$	$C_5 \neq C_6$
Характерные точки КП	$C_3 (C_4)$	$C_5$	$C_6$
Вид движения точки $I$ относительно $J$	2		2

Таблица 2.5

Группа Ассур с двумя внешними поступательными парами			
			
Образована звеньями 2 и 3. Звенья 1 и 4 в группу Ассур не входят			
Кинематическая пара	Внеш.	Внутр.	Внеш.
Номера звеньев, образующих КП	1-2	2-3	3-4
Общее обозначение характерных точек КП	$J_1$	$I$	$J_2$
Вид относительного движения в КП	<i>Пост.</i>	<i>Вращ.</i>	<i>Пост.</i>
Точки элементов КП	$B_1 \neq B_2$	$B_2 = B_3$	$B_3 \neq B_4$
Характерные точки КП	$B_1$	$B_2 (B_3)$	$B_4$
Вид движения точки $I$ относительно $J$	2		2

## 2.4. Пример кинематического анализа

Рассмотрим кинематический анализ механизма на примере четырехзвенного механизма, образованного посредством присоединения к входному звену группы Ассур второго класса с внутренней поступательной парой (рис. 2.6).

Применим рассмотренную выше методику (см. табл. 2.1) для определения характерных точек кинематических пар и видов их относительных движений. Полученные результаты и записанные на их основе векторные уравнения представим в табл. 2.6.

Таблица 2.6

Г	Ж	Вид	Уравнения для точки $C_2$	Объединенные уравнения
$C_2$	$B_1(B_2)$	1	$\vec{V}_{C_2} = \vec{V}_B + \vec{V}_{C_2B}$ $\vec{a}_{C_2} = \vec{a}_B + \vec{a}_{C_2B}^n + \vec{a}_{C_2B}^\tau$	$\frac{\vec{V}_B}{\perp AB} + \frac{\vec{V}_{C_2B}}{\perp CB} = \frac{\vec{V}_{C_3}}{=0} + \frac{\vec{V}_{C_2C_3}}{\parallel CB}$
	$C_3(C_0)$	2	$\vec{V}_{C_2} = \vec{V}_{C_3} + \vec{V}_{C_2C_3}$ $\vec{a}_{C_2} = \vec{a}_{C_3} + \vec{a}_{C_3C_2}^{кор} + \vec{a}_{C_3C_2}^{отн}$	$\frac{\vec{a}_B}{\parallel BA} + \frac{\vec{a}_{C_2B}^n}{\parallel CB} + \frac{\vec{a}_{C_2B}^\tau}{\perp CB} =$ $= \frac{\vec{a}_{C_3}}{=0} + \frac{\vec{a}_{C_3C_2}^{кор}}{\perp CB} + \frac{\vec{a}_{C_3C_2}^{отн}}{\parallel CB}$

Решим графически векторное уравнение для скорости.

Величину и направление вектора скорости  $V_B$ , м/с, определим как для точки, принадлежащей входному звену (первый подход к определению скорости  $V_j$ ):

$$\text{величина } -V_B = \omega_1 \cdot L_{AB};$$

направление – перпендикулярно кривошипу  $AB$  в сторону  $\omega_1$ .

Изобразим вектор скорости на чертеже. Из произвольно выбранного полюса « $p$ » плана скоростей проводим линию, перпендикулярную звену  $AB$  с учетом направления  $\omega_1$ . На проведенном перпендикуляре откладываем произвольный отрезок  $pb$ , мм, изображающий на плане вектор  $V_B$ . Определяем масштабный коэффициент  $\mu_V$ , м·с<sup>-1</sup>·мм<sup>-1</sup>, в котором изображен вектор  $V_B$ :

$$\mu_V = \frac{V_B}{pb}.$$

Дальнейшие построения ведем в этом масштабе.

Переходим ко второму вектору ( $V_{C2B}$ ) левой части уравнения. Известна только линия, вдоль которой он направлен - перпендикуляр  $CB$ . Поэтому из точки « $b$ » плана проводим прямую перпендикулярную  $CB$ .

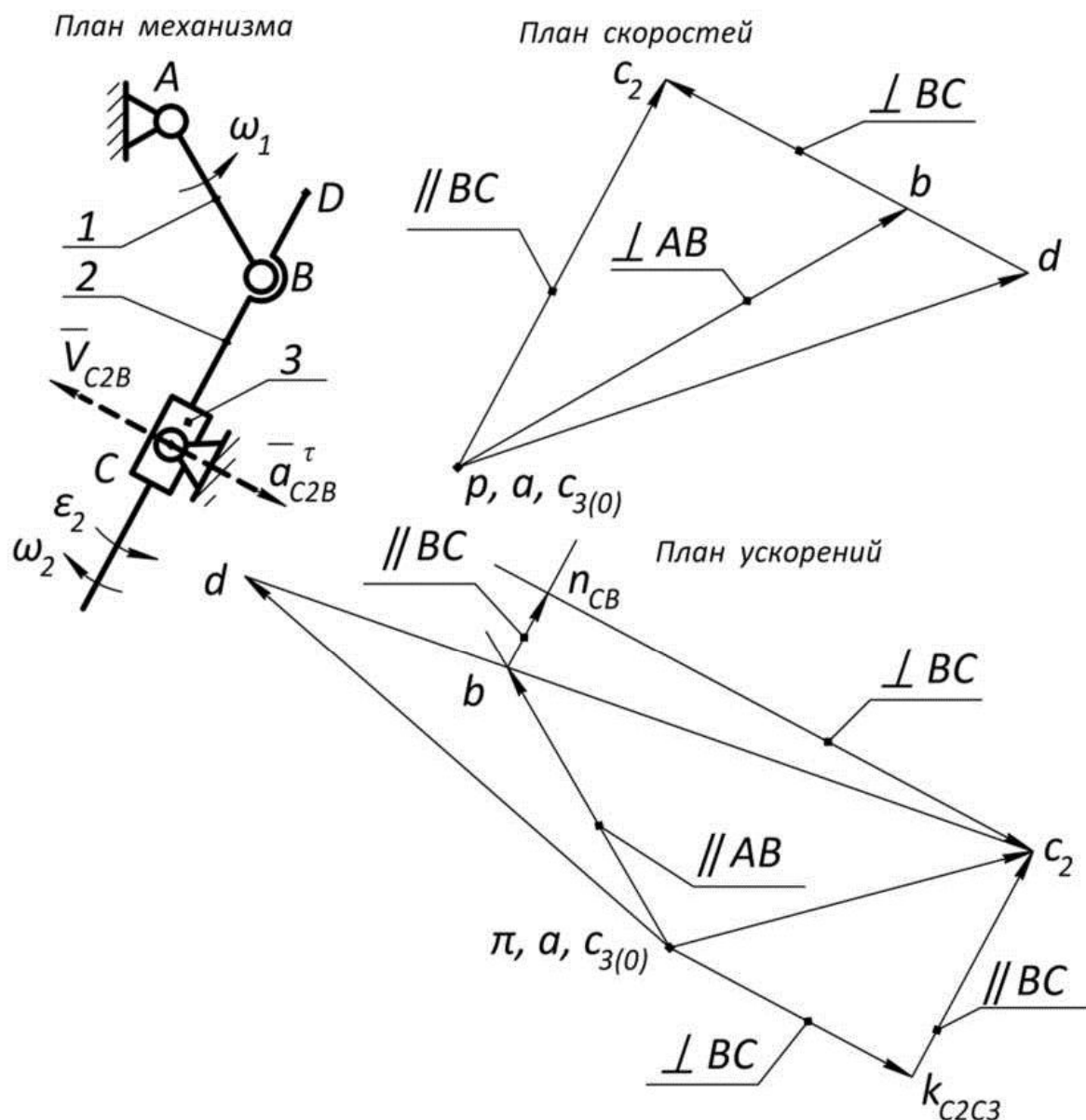


Рис. 2.6

Переходим к графическому изображению правой части векторного уравнения.

Скорость точки  $C_3(C_0)$  равна нулю, так как точка принадлежит неподвижному звену – стойке (второй подход к определению скорости  $V_J$ ). Следовательно, вектор  $V_{C3}$  выродится на плане скоростей в точку « $c_{3(0)}$ », совпадающую с полюсом плана « $p$ ».

Переходим ко второму вектору ( $V_{c_2c_3}$ ) левой части уравнения. Известна только линия, вдоль которой он направлен - параллель  $CB$ . Поэтому из точки « $c_{3(0)}$ » плана проводим прямую параллельную  $CB$ .

Место пересечения прямых, соответствующих направлению векторов  $V_{c_2B}$  и  $V_{c_2c_3}$ , определяет на плане положение точки « $c_2$ ». На этом построение плана скоростей завершено.

Обозначим на кулисе 2 произвольную точку  $D$  и определим ее скорость  $V_{D2}$ . Для нахождения положения точки « $d_2$ » на плане скоростей воспользуемся *теоремой подобия*.

На звене 2 располагаются также точки  $B$  и  $C$ , являющиеся характерными точками кинематических пар, которые уже обозначены на построенном плане скоростей - точки « $b$ » и « $c_2$ ». На звене они лежат на прямой в такой последовательности -  $C$  потом  $B$  и далее  $D$ . Следовательно, на плане скоростей одноименные им точки также должны лежать на одной прямой в той же последовательности - « $c_2$ » потом « $b$ » и далее « $d_2$ ». Длину отрезка  $bd_2$  определим из пропорции, записанной из свойства подобных фигур:

$$\frac{bd_2}{bc_2} = \frac{BD}{BC'}$$

откуда

$$bd_2 = bc_2 \frac{BD}{BC}$$

Отметим, что длина отрезка  $bc_2$  измеряется с плана скоростей, а длины  $BD$  и  $BC$  с плана механизма.

Положение точки « $d_2$ » на плане определится на продолжении прямой, соединяющей точки « $c_2$ » и « $b$ » плана скоростей на рассчитанном расстоянии  $bd_2$  (мм) от точки « $b$ ». Соединив точку « $d_2$ » с полюсом, получим вектор  $V_{D2}$  на плане.

Численные значения неизвестных по величине скоростей (м/с) определим, умножив длины соответствующих им векторов (мм) на масштабный коэффициент  $\mu_V$ :

$$V_{c_2B} = bc_2 \cdot \mu_V; \quad V_{c_2c_3} = c_3c_2 \cdot \mu_V; \quad V_{c_2} = pc_2 \cdot \mu_V; \quad V_{D2} = pd_2 \cdot \mu_V.$$

Угловую скорость кулисы 2 определим через относительную скорость любых двух точек, принадлежащих ей, например:

$$\omega_2 = \frac{V_{C2B}}{L_{CB}},$$

где  $L_{CB}$  – расстояние между выбранными точками ( $L_{CB} = CB \cdot \mu_L$ ;  $CB$ , мм, измеряется с плана механизма, а  $\mu_L$ , м/мм, – масштабный коэффициент плана механизма).

Направление угловой скорости кулисы ( $\omega_2$ ) определяем следующим образом: находим на построенном плане скоростей вектор относительной скорости  $V_{C2B}$ . На плане скоростей ему соответствует отрезок  $bc_2$ . Переносим этот вектор в соответствующую точку  $C$  звена 2, мысленно закрепляя при этом точку  $B$ . Направление вектора скорости  $V_{C2B}$ , с учетом закрепления точки  $B$ , определяет направление вращения звена 2 – по часовой стрелке (см. рис. 2.4).

Решим графически векторное уравнение для ускорений (см. табл. 2.6).

Величину и направление вектора ускорения  $a_B$  определим как для точки, принадлежащей входному звену (первый подход к определению скорости  $a_j$ ):

$$\text{величина } -a_B = \omega_1^2 \cdot L_{AB}, \text{ м}\cdot\text{с}^{-2};$$

направление – вдоль кривошипа  $AB$  к центру его вращения, т. е. от точки  $B$  к точке  $A$ .

Изобразим вектор ускорения на чертеже. Из произвольно выбранного полюса « $\pi$ » плана ускорений проводим линию, параллельную звену  $AB$  в направлении от точки  $B$  к  $A$ . На проведенной линии откладываем произвольный отрезок  $\pi b$ , мм, изображающий на плане вектор  $a_B$ . Определяем масштабный коэффициент  $\mu_a$ ,  $\text{м}\cdot\text{с}^{-2}\cdot\text{мм}^{-1}$ , в котором изображен вектор  $a_B$ :

$$\mu_a = \frac{a_B}{\pi b}.$$

Дальнейшие построения ведем в этом масштабе  $\mu_a$ .

Переходим к изображению второго вектора –  $a_{C2B}^n$ . Рассчитаем его численное значение по формуле,

$$a_{C2B}^n = \frac{V_{C2B}^2}{L_{CB}}.$$

Рассчитаем длину отрезка  $bn_{C2B}$ , мм, изображающего вектор  $a_{C2B}^n$  на плане ускорений в выбранном масштабе  $\mu_a$ :

$$bn_{C2B} = \frac{a_{C2B}^n}{\mu_a}.$$

Строим вектор на плане: из точки « $b$ » проводим прямую параллельную кулисе  $CB$  в направлении от  $C$  к  $B$ , на которой откладываем отрезок рассчитанной длины  $bn_{C2B}$ .

Переходим к третьему вектору -  $a_{C2B}^r$ . Известна только линия, вдоль которой он направлен – перпендикуляр  $CB$ . Поэтому из точки « $n_{C2B}$ » проводим прямую перпендикулярную  $CB$ .

Изобразим графически векторы правой части уравнения.

Ускорение точки  $C_3(C_0)$  равно нулю, так как точка принадлежит неподвижному звену – стойке (второй подход к определению ускорения  $a_j$ ). Следовательно, вектор  $a_{C3}$  вырождается на плане ускорений в точку « $c_{3(0)}$ », совпадающую с полюсом плана « $\pi$ ».

Далее, переходим ко второму вектору правой части решаемого уравнения -  $a_{C2C3}^{кор.}$ . Рассчитаем его численное значение,  $м\cdot с^{-2}$ ,

$$a_{C2C3}^{кор.} = 2\omega_2 V_{C2C3}.$$

Рассчитаем длину отрезка  $c_2k_{C2C3}$ , мм, изображающего вектор  $a_{C2C3}^{кор.}$  на плане ускорений в выбранном масштабе  $\mu_a$ :

$$c_2k_{C2C3} = \frac{a_{C2C3}^{кор.}}{\mu_a}.$$

Направление вектора ускорения кориолиса  $a_{C2C3}^{кор.}$  определяется по правилу Жуковского: вектор относительной скорости  $V_{C2C3}$  (на плане скоростей отрезок  $c_3c_2$ ) поворачиваем на  $90^\circ$  по направлению угловой скорости ( $\omega_2$ ) направляющей кулисы, т. е. в нашем случае по часовой стрелке (см. рис. 2.4). На проведенном в этом направлении из точки « $c_3$ » перпендикуляре к  $CB$  откладываем отрезок  $c_2k_{C2C3}$  рассчитанной длины.

Наконец, переходим к последнему вектору -  $a_{C2C3}^{отн.}$ . Известна только линия, вдоль которой он направлен – параллель кулисе  $CB$ . Поэтому из точки « $k_{C2C3}$ » проводим прямую параллельную  $CB$ .

Место пересечения прямых, соответствующих направлению векторов  $a_{C2B}^r$  и  $a_{C2C3}^{отн.}$ , определяет на плане положение точки

« $c_2$ ». На этом построение плана ускорений завершено.

Рассчитаем ускорение произвольно выбранной точки  $D$  кулисы 2. Для нахождения положения точки « $d_2$ » на плане ускорений также воспользуемся *теоремой подобия*. Рассуждения аналогичны приведенным для плана скоростей.

Положение точки « $d_2$ » на плане определится на продолжении прямой, соединяющей точки « $c_2$ » и « $b$ » плана ускорений на рассчитанном расстоянии  $bd_2$  (мм) от точки « $b$ »:

$$bd_2 = bc_2 \frac{BD}{BC}.$$

Отметим, что длина отрезка  $bc_2$ , мм, измеряется с плана ускорений, а длины  $BD$  и  $BC$ , мм, с плана механизма.

Соединив точку « $d_2$ » с полюсом « $\pi$ », получим вектор  $a_{D2}$  на плане.

Численные значения неизвестных по величине ускорений определим, умножив длины соответствующих им векторов на масштабный коэффициент  $\mu_a$ :

$$a_{C2B}^T = nc_2bc_2 \cdot \mu_a; \quad a_{C2C3}^{OTH} = kc_2c_3c_2 \cdot \mu_a; \quad a_{C2} = pc_2 \cdot \mu_a; \quad a_{D2} = \pi d_2 \cdot \mu_a.$$

Угловое ускорение кулисы 2 ( $\varepsilon_2$ ,  $c^{-2}$ ) определим через касательную составляющую ускорения любых двух точек, принадлежащих ей, например:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{C2B}^T}{L_{CB}}.$$

Направление углового ускорения кулисы определяем следующим образом: находим на построенном плане ускорений вектор касательного ускорения точки  $C$  относительно  $B$  -  $a_{C2B}^T$ . На плане ускорений ему соответствует отрезок  $nc_2bc_2$ . Переносим этот вектор в соответствующую точку  $C$  звена 2, мысленно закрепляя при этом точку  $B$ . Направление вектора ускорения  $a_{C2B}^T$ , с учетом закрепления точки  $B$ , определяет направление углового ускорения звена 2 – против часовой стрелки (см. рис. 2.4).

Разное направление  $\omega_2$  и  $\varepsilon_2$  говорит о том, что кулиса 2 вращается замедленно.

На рис. 2.7-2.10 представлены результаты кинематического анализа для различных групп Ассура присоединенных к вращающемуся с постоянной угловой скоростью кривошипу.



Уравнения для точки I	Объединенные уравнения
$\vec{V}_{C3} = \vec{V}_B + \vec{V}_{C3B}$ $\vec{a}_{C3} = \vec{a}_B + \vec{a}_{C3B}^n + \vec{a}_{C3B}^\tau$	$\frac{\vec{V}_B}{\perp AB} + \frac{\vec{V}_{C3B}}{\perp BC} = \frac{\vec{V}_{C0}}{=0} + \frac{\vec{V}_{C3C0}}{\parallel \tau-\tau}$
$\vec{V}_{C3} = \vec{V}_{C0} + \vec{V}_{C3C0}$ $\vec{a}_{C3} = \vec{a}_D + \vec{a}_{C3C0}^{кор} + \vec{a}_{C3C0}^{отн}$	$\frac{\vec{a}_B}{\parallel AB} + \frac{\vec{a}_{C3B}^n}{\parallel BC} + \frac{\vec{a}_{C3B}^\tau}{\perp BC} = \frac{\vec{a}_D}{=0} + \frac{\vec{a}_{C3C0}^{кор}}{=0} + \frac{\vec{a}_{C3C0}^{отн}}{\parallel \tau-\tau}$
Формулы для расчета параметров	
$\omega_2 = \frac{V_{C3B}}{L_{BC}}, \quad a_{C3B}^n = \frac{V_{C3B}^2}{L_{CB}}, \quad a_{C3C0}^{кор} = 2\omega_0 V_{C3C0} = 0, \quad \varepsilon_2 = \frac{a_{C3B}^\tau}{L_{BC}}$	

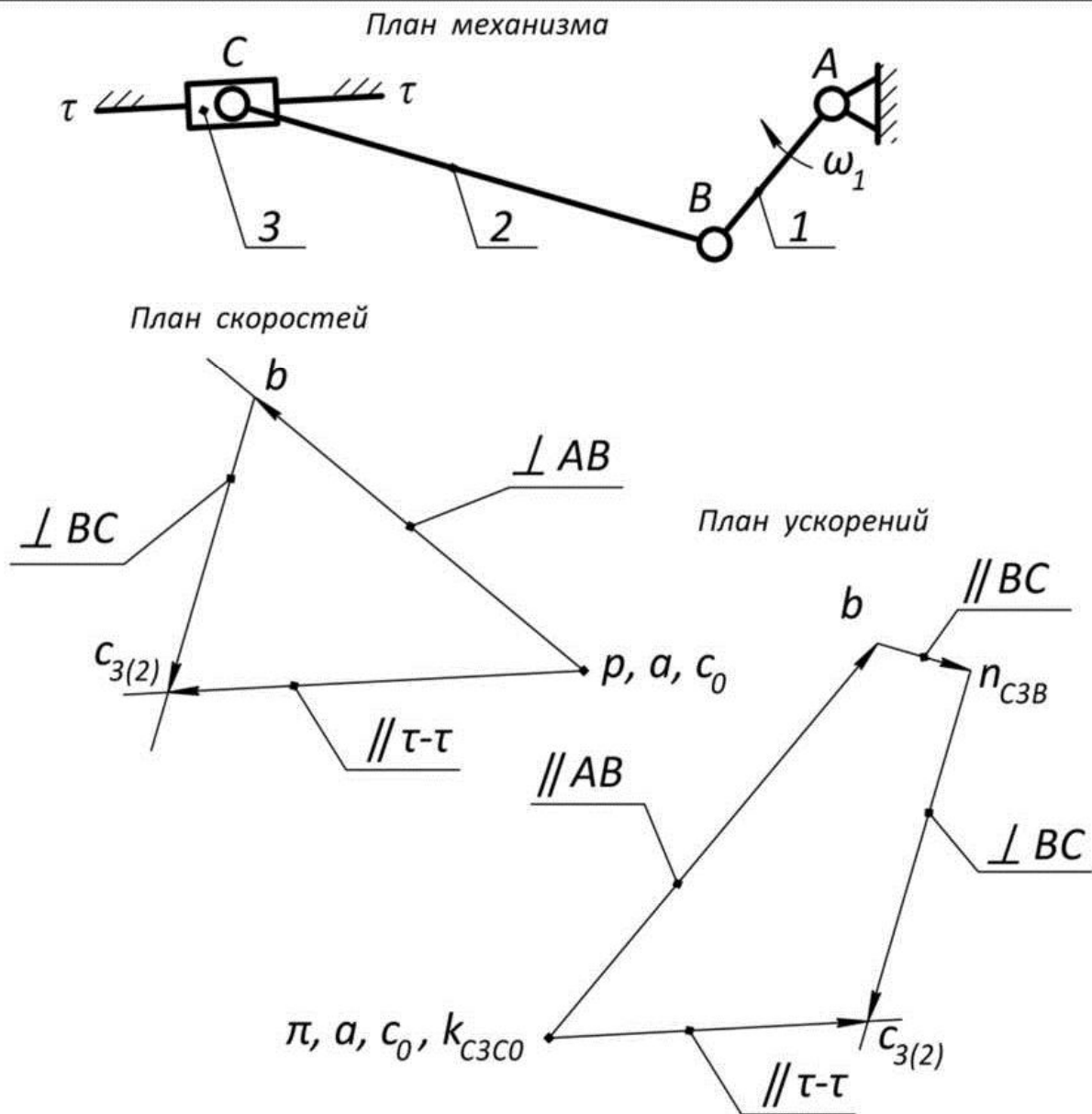


Рис. 2.7

Уравнения для точки I	Объединенные уравнения
$\vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{V}_{CB}$ $\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB}^n + \bar{a}_{CB}^\tau$	$\frac{\vec{V}_B}{\perp AB} + \frac{\vec{V}_{CB}}{\perp BC} = \frac{\vec{V}_D}{=0} + \frac{\vec{V}_{CD}}{\perp CD}$
$\vec{V}_C = \vec{V}_D + \vec{V}_{CD}$ $\bar{a}_C = \bar{a}_D + \bar{a}_{CD}^n + \bar{a}_{CD}^\tau$	$\frac{\bar{a}_B}{\parallel AB} + \frac{\bar{a}_{CB}^n}{\parallel BC} + \frac{\bar{a}_{CB}^\tau}{\perp BC} = \frac{\bar{a}_D}{=0} + \frac{\bar{a}_{CD}^n}{\parallel DC} + \frac{\bar{a}_{CD}^\tau}{\perp DC}$
Формулы для расчета параметров	
$\omega_2 = \frac{V_{CB}}{L_{BC}}, \quad \omega_3 = \frac{V_{CD}}{L_{DC}}, \quad a_{CB}^n = \frac{V_{CB}^2}{L_{CB}}, \quad a_{CD}^n = \frac{V_{CD}^2}{L_{CD}}, \quad \varepsilon_2 = \frac{a_{CB}^\tau}{L_{BC}}, \quad \varepsilon_3 = \frac{a_{CD}^\tau}{L_{DC}}$	

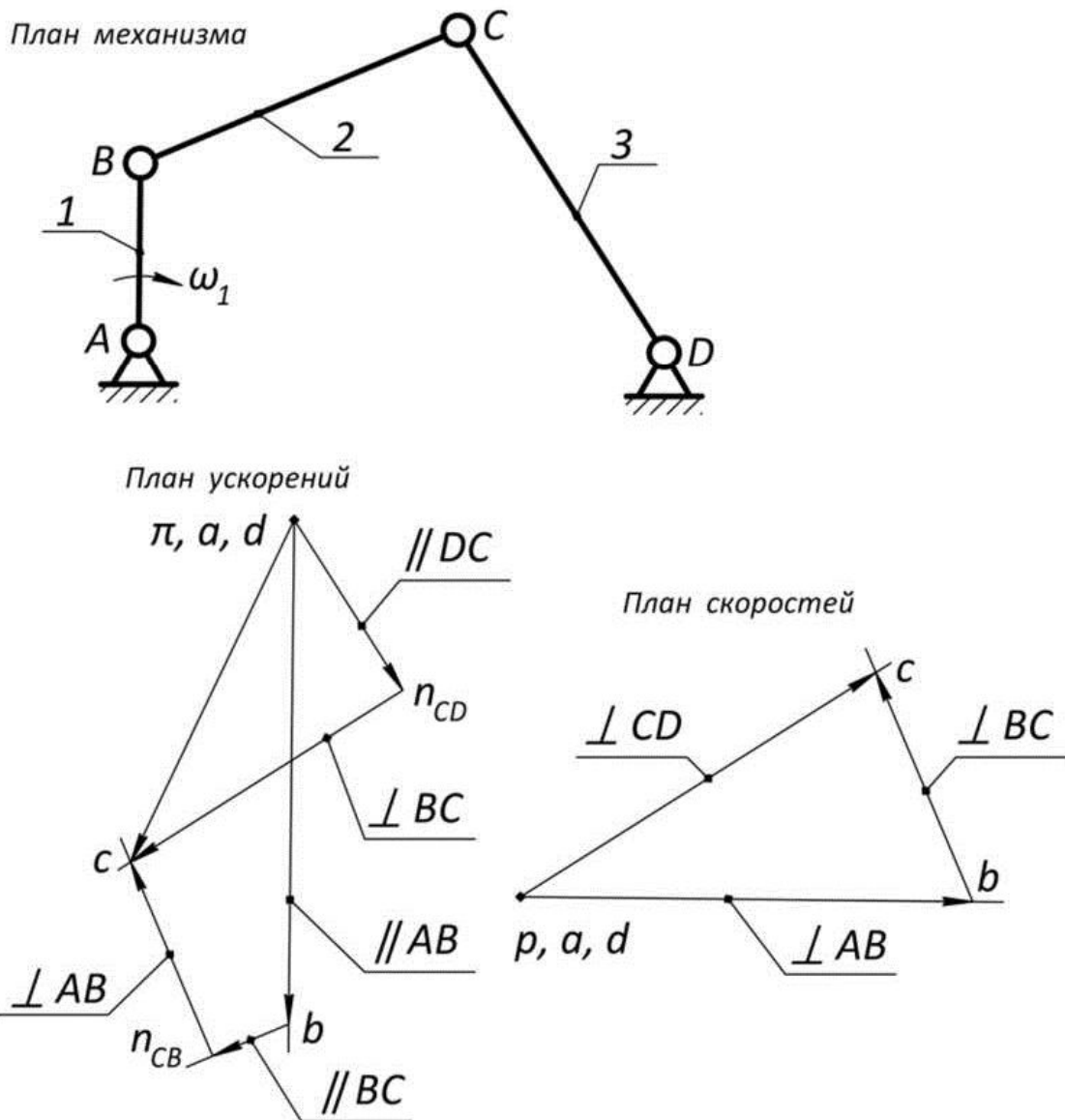


Рис. 2.8

Уравнения для точки I	Объединенные уравнения
$\vec{V}_{B3} = \vec{V}_{B2} + \vec{V}_{B3B2}$ $\bar{a}_{B3} = \bar{a}_{B2} + \bar{a}_{B3B2}^{\text{кор}} + \bar{a}_{B3B2}^{\text{отн}}$	$\frac{\vec{V}_{B2}}{\perp AB} + \frac{\vec{V}_{B3B2}}{\parallel BC} = \frac{\vec{V}_{B0}}{=0} + \frac{\vec{V}_{B3B0}}{\parallel \tau-\tau}$
$\vec{V}_{B3} = \vec{V}_{B0} + \vec{V}_{B3B0}$ $\bar{a}_{B3} = \bar{a}_{B0} + \bar{a}_{B3B0}^{\text{кор}} + \bar{a}_{B3B0}^{\text{отн}}$	$\frac{\bar{a}_{B2}}{\parallel AB} + \frac{\bar{a}_{B3B2}^{\text{кор}}}{=0} + \frac{\bar{a}_{B3B2}^{\text{отн}}}{\parallel BC} = \frac{\bar{a}_{B0}}{=0} + \frac{\bar{a}_{B3B0}^{\text{кор}}}{=0} + \frac{\bar{a}_{B3B0}^{\text{отн}}}{\parallel \tau-\tau}$
Формулы для расчета параметров	
$a_{B3B2}^{\text{кор}} = 2\omega_3 V_{B3B2} = 0, \quad a_{B3B0}^{\text{кор}} = 2\omega_0 V_{B3B0} = 0$	

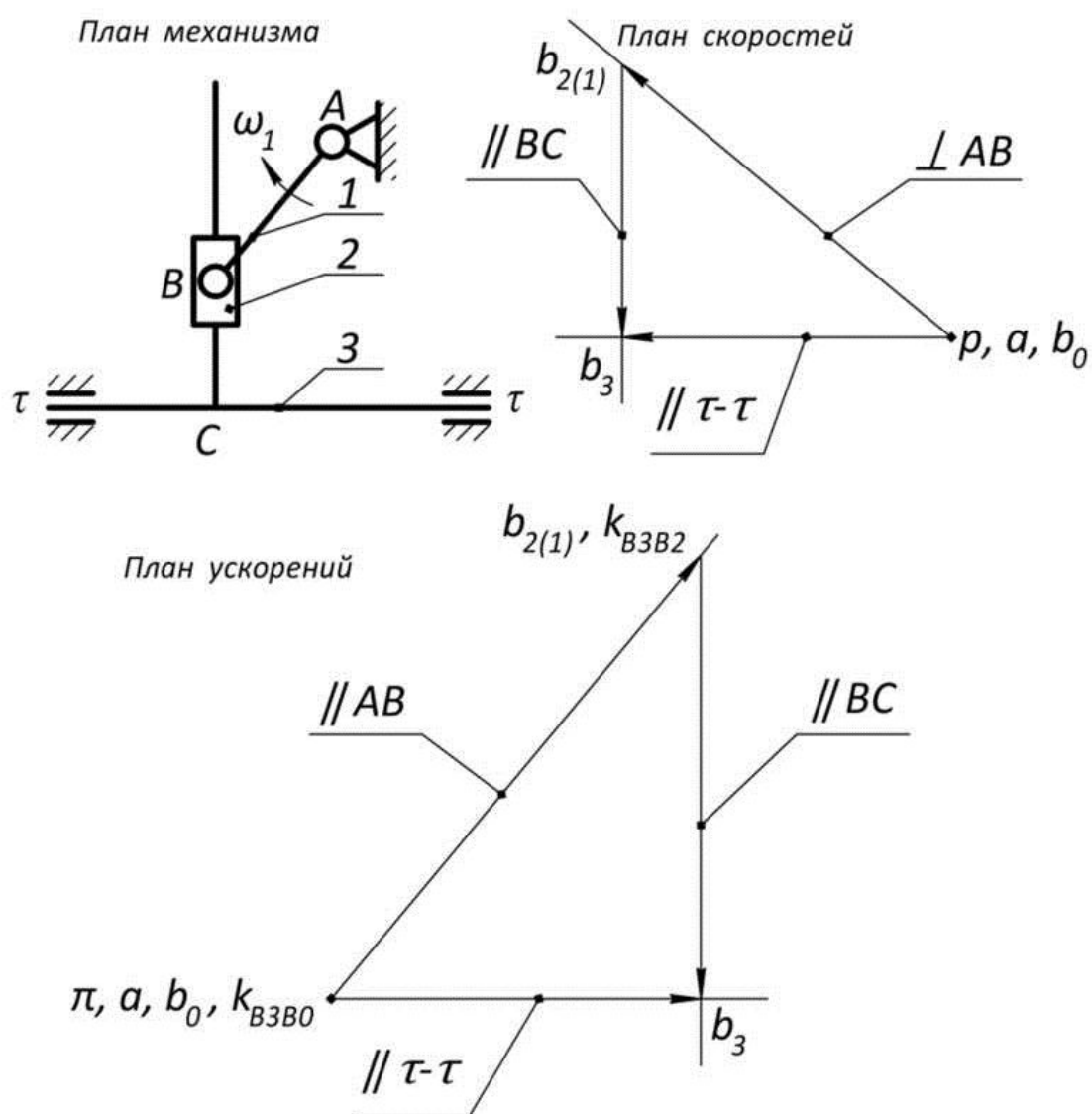


Рис. 2.9

Уравнения для точки I	Объединенные уравнения
$\bar{V}_{B3} = \bar{V}_{B2} + \bar{V}_{B3B2}$ $\bar{a}_{B3} = \bar{a}_{B2} + \bar{a}_{B3B2}^{\text{кор}} + \bar{a}_{B3B2}^{\text{отн}}$	$\frac{\bar{V}_{B2}}{\perp AB} + \frac{\bar{V}_{B3B2}}{\parallel AB} = \frac{\bar{V}_{B0}}{=0} + \frac{\bar{V}_{B3B0}}{\parallel \tau-\tau}$
$\bar{V}_{B3} = \bar{V}_{B0} + \bar{V}_{B3B0}$ $\bar{a}_{B3} = \bar{a}_{B0} + \bar{a}_{B3B0}^{\text{кор}} + \bar{a}_{B3B0}^{\text{отн}}$	$\frac{\bar{a}_{B2}}{\parallel AB} + \frac{\bar{a}_{B3B2}^{\text{кор}}}{\perp AB} + \frac{\bar{a}_{B3B2}^{\text{отн}}}{\parallel AB} = \frac{\bar{a}_{B0}}{=0} + \frac{\bar{a}_{B3B0}^{\text{кор}}}{=0} + \frac{\bar{a}_{B3B0}^{\text{отн}}}{\parallel \tau-\tau}$
Формулы для расчета параметров	
$a_{B3B2}^{\text{кор}} = 2\omega_1 V_{B3B2}, \quad a_{B3B0}^{\text{кор}} = 2\omega_0 V_{B3B0} = 0$	

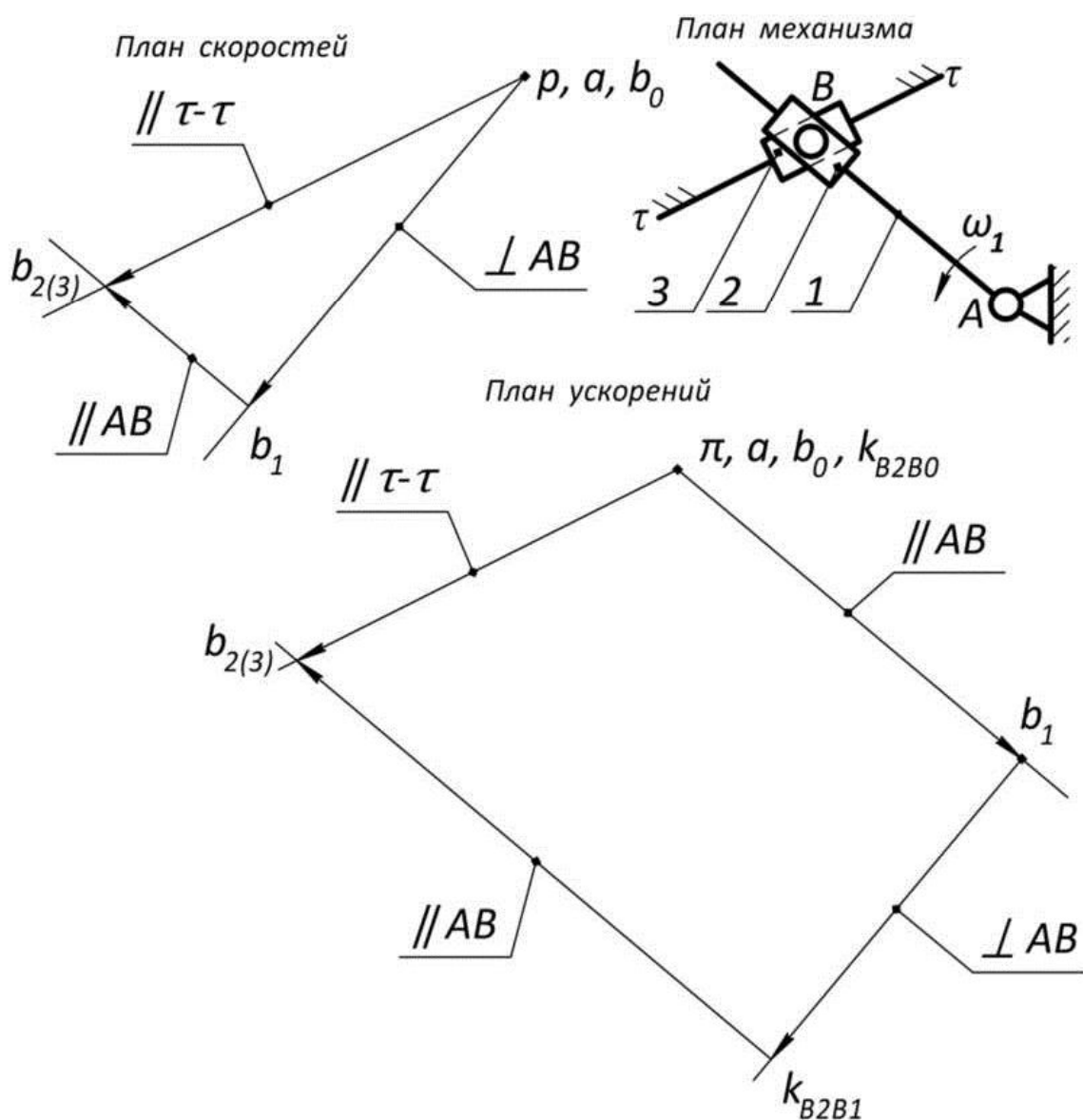


Рис. 2.10

## ГЛАВА 3. КУЛАЧКОВЫЕ МЕХАНИЗМЫ

*Кулачковым* называется механизм, в состав которого входят кулачок 1, толкатель 2 и стойка (рис. 3.1). Кулачок имеет профиль переменной кривизны и образует с толкателем высшую кинематическую пару. Ведущим звеном в кулачковом механизме является кулачок. Двигаясь по заданному закону, кулачок воздействует на толкатель, заставляя его двигаться по требуемому закону, который обеспечивается соответствующим профилем кулачка.

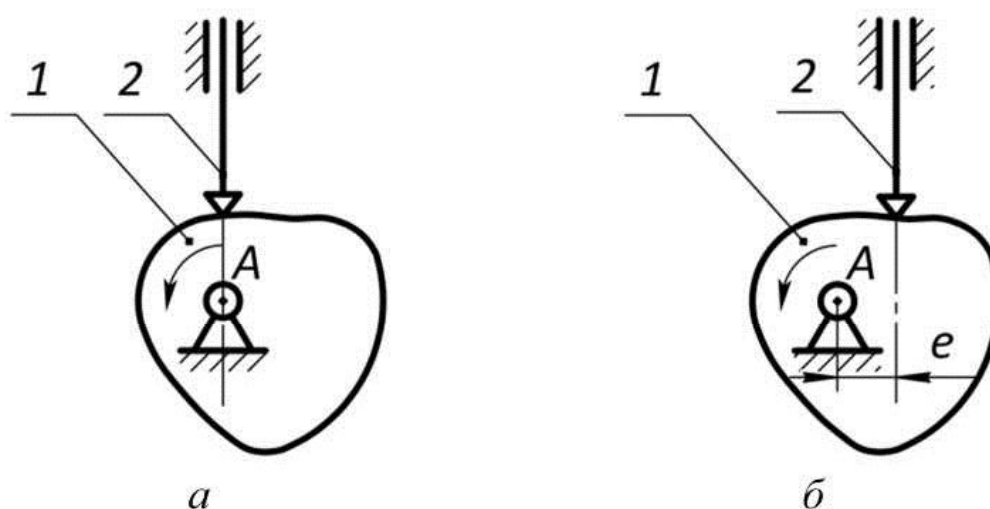


Рис. 3.1

К преимуществам кулачковых механизмов следует отнести простоту конструкции и возможность получения любого закона движения толкателя за счет формы кулачка.

Недостатком является высокое удельное давление в высшей кинематической паре, приводящее к быстрому износу, и сложность получения профиля кулачка.

### 3.1. Классификация кулачковых механизмов

В зависимости от вида движения кулачка и толкателя кулачковый механизм может преобразовывать:

а) вращательное движение кулачка в возвратно-поступательное движение толкателя (см. рис. 3.1);

б) вращательное движение кулачка в возвратно-вращательное движение толкателя (рис. 3.2, а);

в) возвратно-поступательное движение кулачка в возвратно-поступательное движение толкателя (рис. 3.2, б);

г) возвратно-поступательное движение кулачка в возвратно-вращательное движение толкателя (рис. 3.2, в).

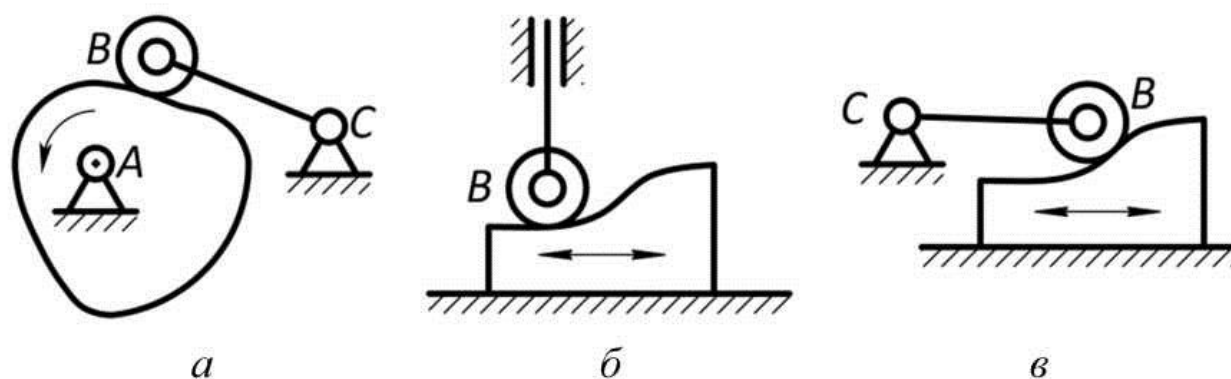


Рис. 3.2

Кулачковые механизмы могут быть *центрными* (рис. 3.1, а), когда линия перемещения толкателя проходит через центр вращения кулачка, и *нецентральными* (рис. 3.1, б). У нецентрального кулачкового механизма центр вращения кулачка расположен на некотором расстоянии от линии движения толкателя. Кратчайшее расстояние от линии движения толкателя до центра вращения кулачка называют эксцентриситетом (см. рис. 3.1, б, обозначен буквой  $e$ ).

Кулачковые механизмы могут различаться видом толкателя:

а) с остrokонечным толкателем (см. рис. 3.1);

б) роликовым толкателем (см. рис. 3.2);

в) коромысловым толкателем (см. рис. 3.2, а и в);

г) грибовидным толкателем (рис. 3.3, а);

д) плоским (тарельчатым) толкателем (рис. 3.3, б).

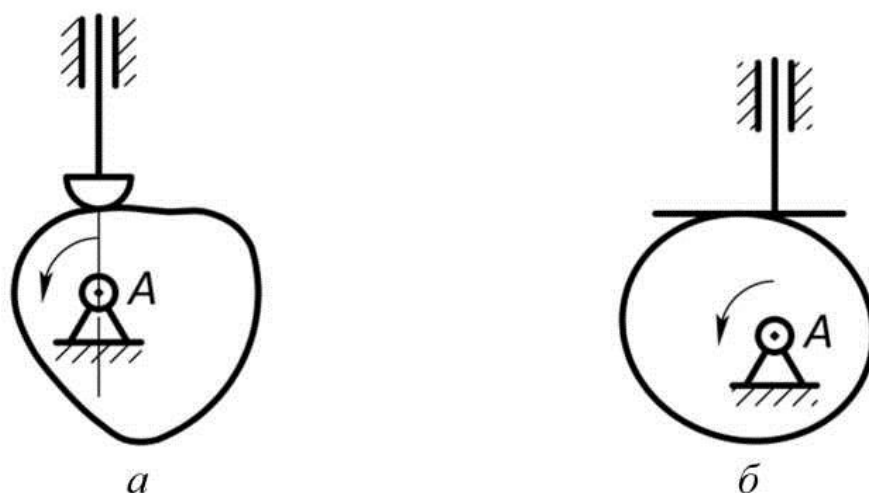


Рис. 3.3

Конструкция кулачкового механизма должна обеспечивать замыкание высшей кинематической пары, то есть касание кулачка и толкателя в любом положении звеньев. Замыкание осуществляется:

- а) силовым способом (рис. 3.4, а);
- б) геометрическим (кинематическим) способом (рис. 3.4, б).

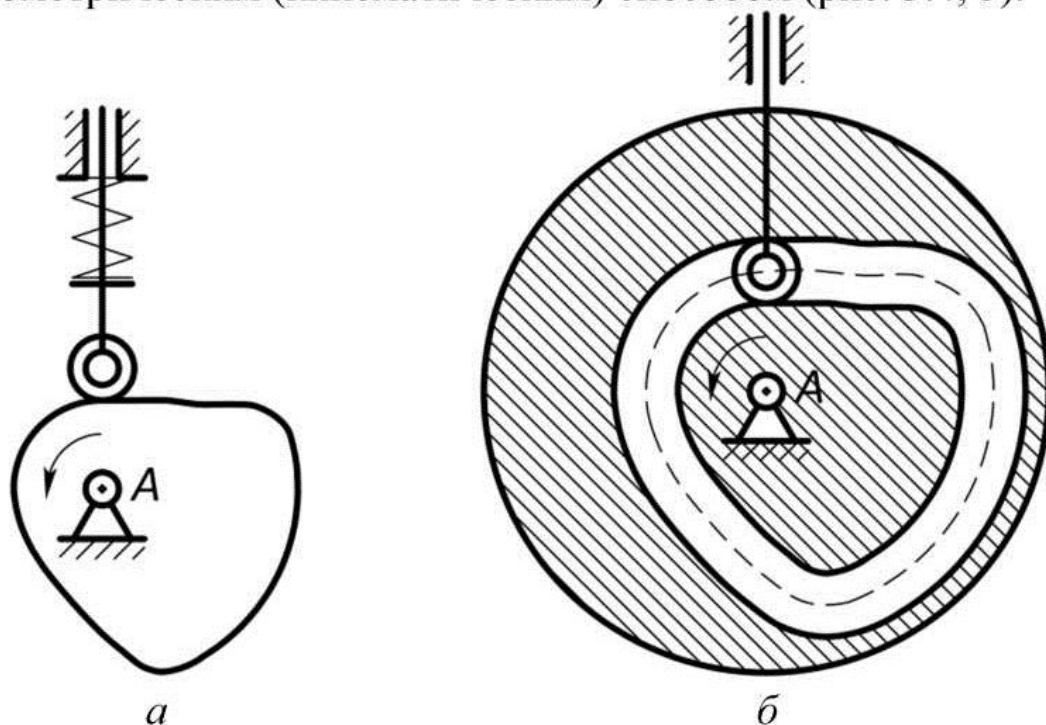


Рис. 3.4

Силовое замыкание осуществляется при помощи пружины (см. рис. 3.4, а). При геометрическом замыкании форма звеньев

не допускает их размыкание. Например, профиль кулачка выполнен в форме паза, в котором располагается ролик толкателя.

### 3.2. Анализ кулачковых механизмов

К задачам анализа кулачковых механизмов можно отнести:

1) Установление типа кулачкового механизма, хода толкателя и минимального радиуса кулачка (рис. 3.5).

*Ход толкателя ( $H$ )* – расстояние между одноименными точками толкателя в его крайних положениях.

*Минимальный радиус кулачка ( $R_{min}$ )* – кратчайшее расстояние от центра вращения кулачка до острия толкателя в его нижнем положении.

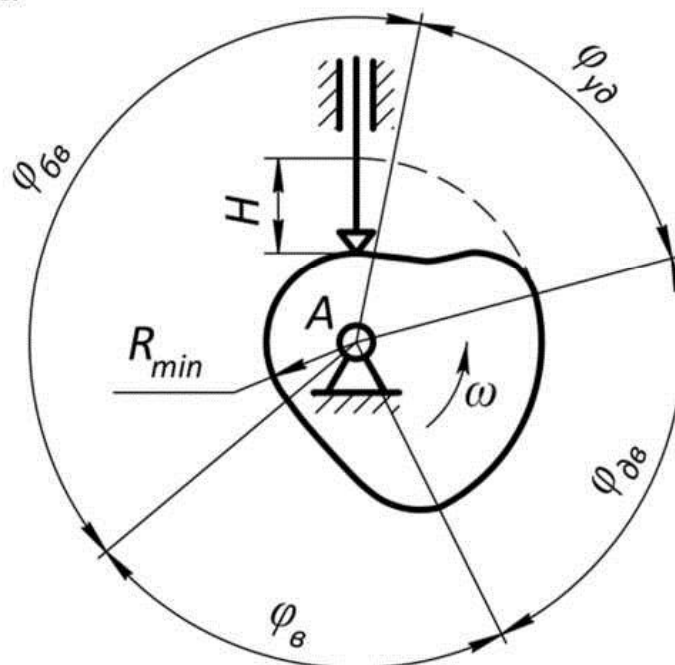


Рис. 3.5

2) Определение фазовых углов движения. В общем случае в кулачковом механизме присутствуют четыре фазовых угла:

- фаза удаления ( $\varphi_{уд}$ ). На ней при вращении кулачка толкатель удаляется от его оси вращения, т. е. от точки  $A$ ;

- фаза дальнего выстоя ( $\varphi_{дв}$ ). На ней при вращении кулачка толкатель неподвижен в наибольшем удалении от точки  $A$ ;

- фаза возвращения ( $\varphi_{в}$ ). На ней при вращении кулачка толкатель приближается к точке  $A$ ;



- фаза ближнего выстоя ( $\varphi_{бв}$ ). На ней при вращении кулачка толкатель неподвижен в наименьшем удалении от точки  $A$ .

На фазах дальнего и ближнего выстоя профиль кулачка выполнен по дугам окружностей, с центром в точке  $A$ . На рис. 3.5 фазы удаления и возвращения показаны в предположении вращения кулачка против часовой стрелки. При изменении направления вращения кулачка фазы дальнего и ближнего выстоя меняются местами.

3) *Основной задачей анализа* является определение закона движения толкателя в виде зависимости  $S = f(\varphi)$ . В общем случае диаграмма перемещения за один оборот кулачка имеет вид:

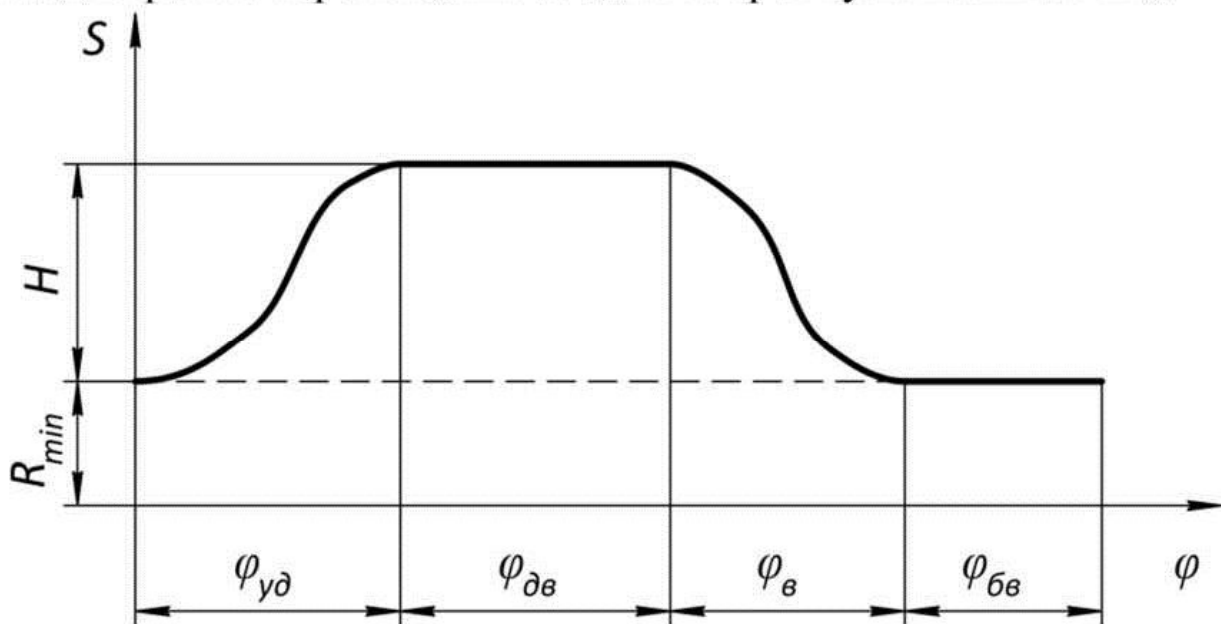


Рис. 3.6

На диаграмме по оси ординат отложены расстояния, измеренные от центра вращения кулачка до центра ролика. При наличии реального механизма диаграмма строится экспериментальным способом.

Диаграмму можно построить также и при наличии кинематической схемы механизма *методом обращения движения (методом инверсий)*. Он заключается в том, что кулачок остается неподвижным, а толкатель вместе со стойкой поворачивается относительно центра вращения кулачка в направлении, противоположном вращению кулачка.

Сформулируем задачу: дана кинематическая схема кулачкового механизма, выполненная в масштабном коэффициенте  $\mu_L$ . *Определить* положение и перемещение толкателя при повороте кулачка на заданный угол  $\varphi_1$  от его исходного положения в направлении вращения кулачка ( $\omega$ ).

Рассмотрим алгоритм ее решения для различных типов кулачкового механизма.

*Центральный кулачковый механизм с острым толкателем (рис. 3.7, а).*

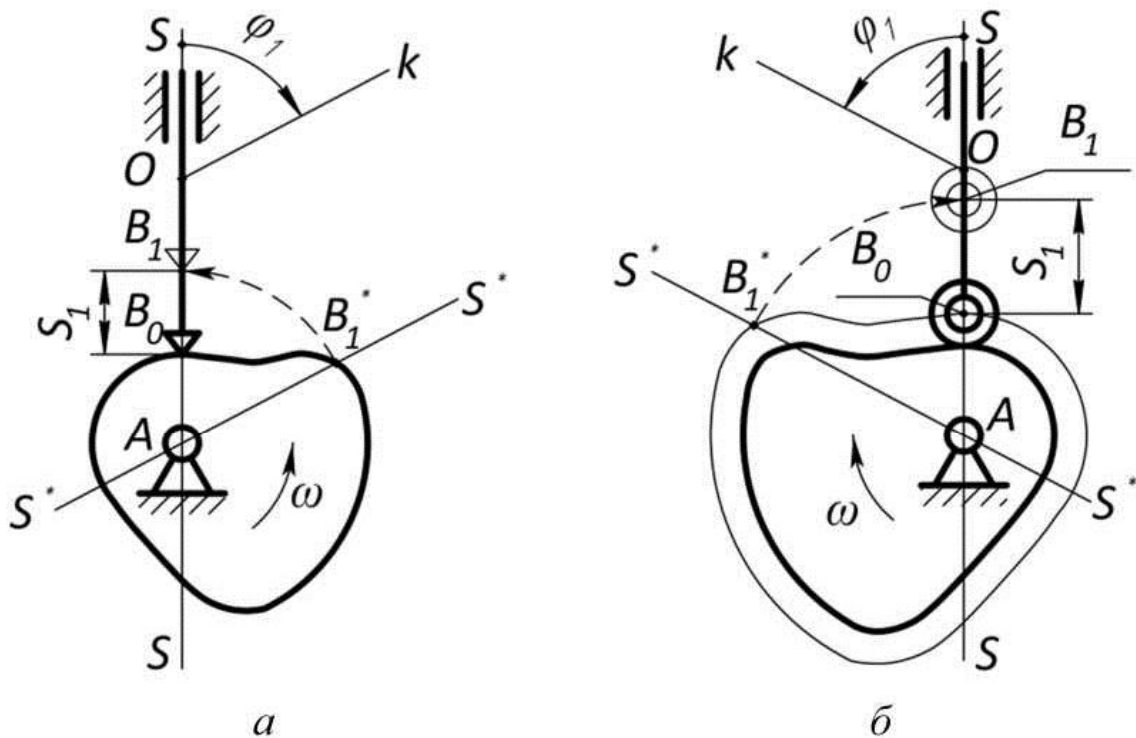


Рис. 3.7

- проводим линию движения толкателя - прямую  $S-S$ . На ней в произвольном месте выбираем точку  $O$ ;

- из точки  $O$  в направлении противоположном вращению кулачка ( $\omega$ ) проводим луч  $Ok$  под заданным углом  $\varphi_1$ ;

- проводим линию движения толкателя в обратном движении – прямую  $S^*-S^*$ . Она параллельна лучу  $Ok$  и для центрального кулачкового механизма проходит через центр  $A$  вращения кулачка;

- пересечение прямой  $S^*-S^*$  с рабочим профилем кулачка определяет положение острия толкателя в обратном движении - точка  $B_1^*$ ;

- дугой окружности радиуса  $AB_1^*$  возвращаем острис толкателя на линию его движения – точка  $B_1$ .

Таким образом, получаем искомое положение толкателя. Его истинное перемещение определяем выражением:  $S_B = |B_0B_1| \cdot \mu_L$ .

*Центральный кулачковый механизм  
с роликовым толкателем (рис. 3.7, б).*

Алгоритм решения сформулированной выше задачи для этого типа кулачкового механизма практически совпадает с предыдущим. Единственным отличием состоит в том, что геометрические построения ведутся относительно *центрального (теоретического)* профиля кулачка, отличающегося от рабочего на величину радиуса ролика. Центральной профиль кулачка необходимо построить перед проведением анализа.

*Нецентральный кулачковый механизм  
с роликовым толкателем (рис. 3.8, а).*

Для этого типа кулачкового механизма характерно наличие эксцентриситета ( $e$ ).

В этой связи линия движения толкателя в обратном движении, прямая  $S^* - S^*$ , проводится параллельно лучу  $Ok$  не через точку  $A$ , а касательно к окружности, проведенной радиусом равным эксцентриситету ( $e$ ). Остальные построения аналогичны рассмотренным ранее.

*Центральный кулачковый механизм  
с плоским (тарельчатым) толкателем (рис. 3.8, б).*

Рассмотрим механизм, в котором тарелка соединена со штоком толкателя в точке  $B_0$  жестко под углом  $90$  градусов.

Алгоритм решения задачи аналогичен алгоритму для центрального кулачкового механизма до проведения линии движения толкателя в обратном движении (прямой  $S^* - S^*$ ) включительно.

Далее изображается тарелка в обратном движении, т. е. проводится перпендикуляр к прямой  $S^* - S^*$ , являющийся одновременно касательной к рабочему профилю кулачка.

Пересечение перпендикуляра с прямой  $S^* - S^*$  определяет положение места жесткого крепления толкателя к тарелке в обратном движении – точка  $B_1^*$ . И наконец, дугой окружности радиуса  $AB_1^*$  возвращаем точку  $B_1^*$  на линию движения толкателя – точка  $B_1$ . Таким образом, получаем искомое положение тарелки

толкателя. Его истинное перемещение определяем выражением:  
 $S_B = |B_0B_1| \cdot \mu_L$ .

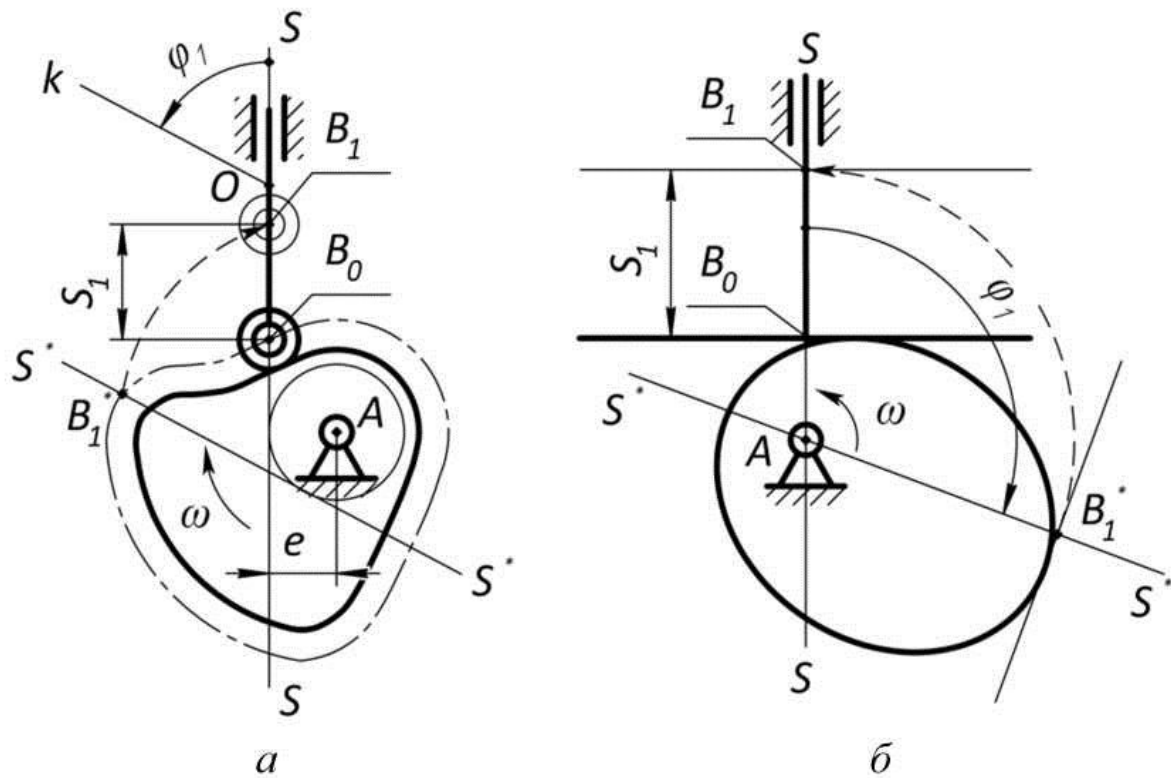


Рис. 3.8

*Кулачковый механизм с роликовым коромысловым толкателем (рис. 3.9).*

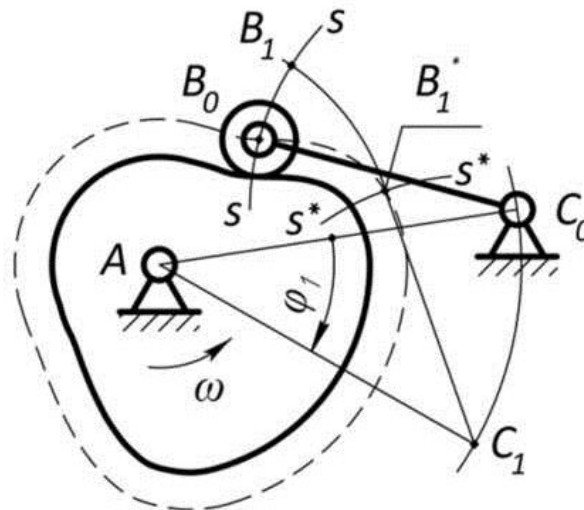


Рис. 3.9

Алгоритм анализа несколько отличается от рассмотренного ранее. Главное отличие заключается в том, что траекторией дви-

жения центра ролика является не прямая, а дуга окружности радиусом длины коромысла ( $C_0B_0$ ).

Для решения сформулированной выше задачи необходимо:

- провести линию ( $S-S$ ) движения центра ролика – дугу окружности радиусом  $C_0B_0$ , проведенную из точки  $C_0$ ;

- повернуть на заданный угол  $\varphi_1$  отрезок межцентрового расстояния  $AC_0$  в направлении противоположном вращению кулачка. Получим точку  $C_1$  – положение центра вращения коромысла в обращенном движении;

- провести из точки  $C_1$  радиусом длины коромысла ( $B_0C_0$ ) дугу окружности (дуга  $S^*-S^*$ ), представляющую собой линию движения центра ролика в обращенном движении. Пересечение дуги  $S^*-S^*$  с центровым профилем кулачка определяет положение точки  $B_1^*$  – центр вращения ролика в обращенном движении;

- дугой окружности радиуса  $AB_1^*$  вернуть центр ролика на дугу  $S-S$  – точка  $B_1$ .

Таким образом, получаем искомое положение центра ролика и толкателя. Перемещение центра ролика  $S_B$  определим как произведение длины дуги  $B_0B_1$  на масштабный коэффициент кинематической схемы  $\mu_L$ . Угол  $B_0C_0B_1$  определяет угловое перемещение коромысла при повороте кулачка на угол  $\varphi_1$ .

### 3.3. Синтез кулачковых механизмов

Основной задачей синтеза или, как говорят, основным условием синтеза является обеспечение заданного закона движения толкателя. Его выбор обусловлен решаемыми технологическими задачами и динамическими условиями эксплуатации механизма.

К числу дополнительных условий синтеза относятся соблюдение максимально допустимого угла давления в механизме, обеспечение выпуклости профиля кулачка (только для механизмов с плоским толкателем), обеспечение заданного хода толкателя, эксцентриситета и других геометрических размеров.

Проектирование включает в себя несколько этапов:

Первый – выбор структурной схемы механизма, закона движения толкателя, хода толкателя и фазовых углов.

Второй - определение основных геометрических размеров кулачка: минимального радиуса кулачка и эксцентриситета для кулачковых механизмов с поступательно движущимся толкателем; минимального радиуса кулачка и расстояния от центра вращения кулачка до центра вращения коромысла для кулачковых механизмов с коромысловым толкателем. Для кулачковых механизмов с плоским толкателем они выбираются из условия обеспечения выпуклости профиля кулачка, а для всех остальных из условия не превышения максимально допустимого угла давления.

И наконец, третьей заключительной стадией проектирования является построение теоретического и практического профилей кулачка.

### 3.4. Законы движения толкателя

Законом движения толкателя задаются в виде функции изменения аналога ускорения толкателя, представляющей собой вторую производную координаты перемещения толкателя от угла поворота кулачка. Название закона определяется формой кривой  $d^2S/d\varphi^2 - \varphi$ .

Различают три группы законов движения: с жесткими ударами, с мягкими ударами и без ударов,

*Закон равномерного движения толкателя.* При таком законе имеет место мгновенное возрастание ускорения на бесконечно большую величину (рис. 3.10). Такое явление называется *жестким ударом*. Силы инерции в начале и конце фаз удаления и возвращения достигают больших значений.

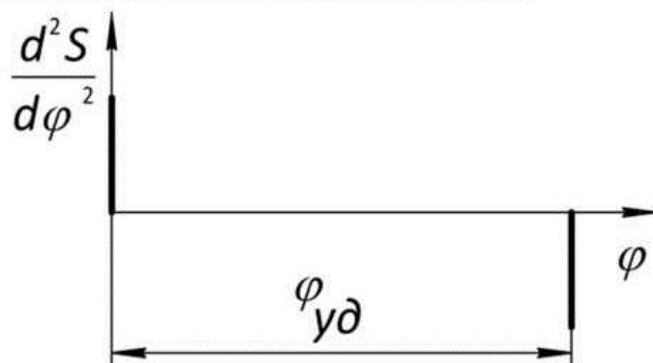


Рис. 3.10

*Закон равноускоренного движения толкателя* (рис. 3.11). Ему характерно скачкообразное изменение ускорения на конечную величину. Такое явление называется *мягким ударом*. Законы с жестким и мягким ударами можно рекомендовать только для малых угловых скоростей вращения кулачка и небольших массах толкателя.

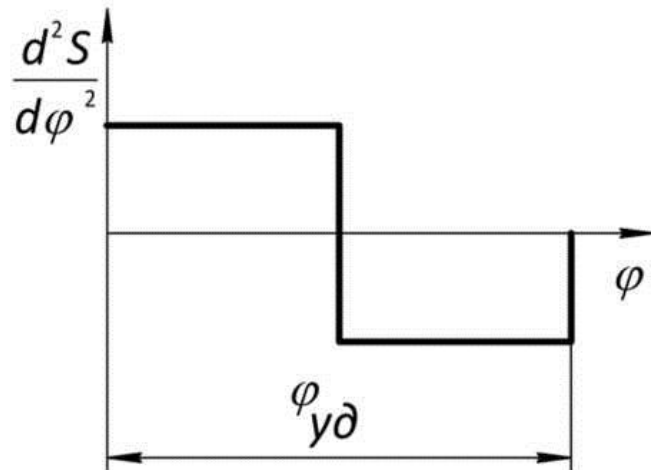


Рис. 3.11

*Трапецидальный закон движения толкателя* (рис. 3.12). При таком законе движения толкателя отсутствует явление удара, так как скачков в функции  $d^2S/d\varphi^2 - \varphi$  не наблюдается.

Кроме рассмотренных существуют косинусоидальный (с мягким ударом в начале и конце фаз), синусоидальный, треугольный и др. законы движения.

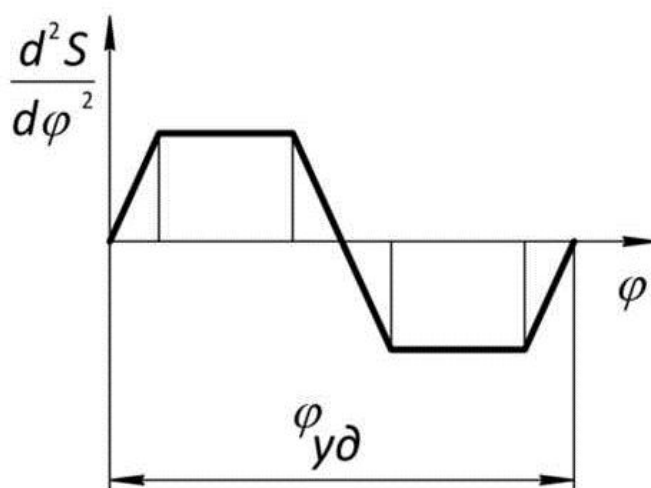


Рис. 3.12



После выбора закона изменения аналога ускорения строится диаграмма  $d^2S/d\varphi^2-\varphi$  на фазах удаления и возвращения. Для получения двух других характеристик движения - аналогов скорости ( $dS/d\varphi-\varphi$ ) и перемещения ( $S-\varphi$ ) построенную диаграмму последовательно дважды интегрируют.

### 3.5. Угол давления в кулачковых механизмах

*Угол давления* – угол, заключенный между вектором скорости толкателя и вектором силы, под действием которой перемещается толкатель (рис. 3.13).

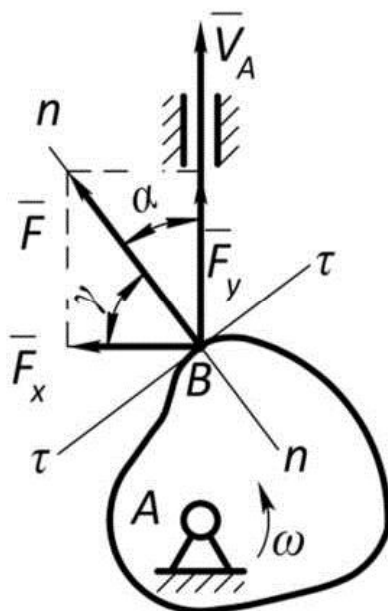


Рис. 3.13

Если пренебречь трением в высшей кинематической паре, то сила  $\bar{F}$ , действующая на толкатель со стороны кулачка, будет направлена по нормали  $n-n$ . Угол  $\alpha$  является углом давления, а угол  $\gamma = 90 - \alpha$  называется углом передачи. Чем меньше  $\alpha$ , тем более благоприятные условия для движения толкателя.

Несовпадение направления движущей силы  $\bar{F}$  с направлением движения толкателя на фазе его удаления вызывает перекося толкателя в направляющих стойки, за счет составляющей силы  $\bar{F}_x$ . Чем больше угол давления, тем сильнее прижат толкатель к



направляющим, тем больше трение в них и износ. При большом значении угла  $\alpha$  сила трения может увеличиться настолько, что толкатель заклинит в направляющих и останется неподвижным, сколь бы большой не была бы движущая сила, т. е. механизм становится неработоспособным. Угол давления, при котором происходит заклинивание, называется *углом заклинивания*.

Кулачковые механизмы (за исключением механизмов с плоским толкателем) проектируются из условия не превышения максимально допустимого угла давления, т. е. угла заклинивания. Соблюдение его является одним из дополнительных условий синтеза. Для кулачковых механизмов с роликовым или острым толкателем, движущимся поступательно  $\alpha_{\max} \leq 35^\circ$ . Для кулачковых механизмов с роликовым коромысловым толкателем  $\alpha_{\max} \leq 45^\circ$ .

Для кулачковых механизмов с плоским толкателем угол давления не изменяется в процессе работы механизма (рис. 3.14).

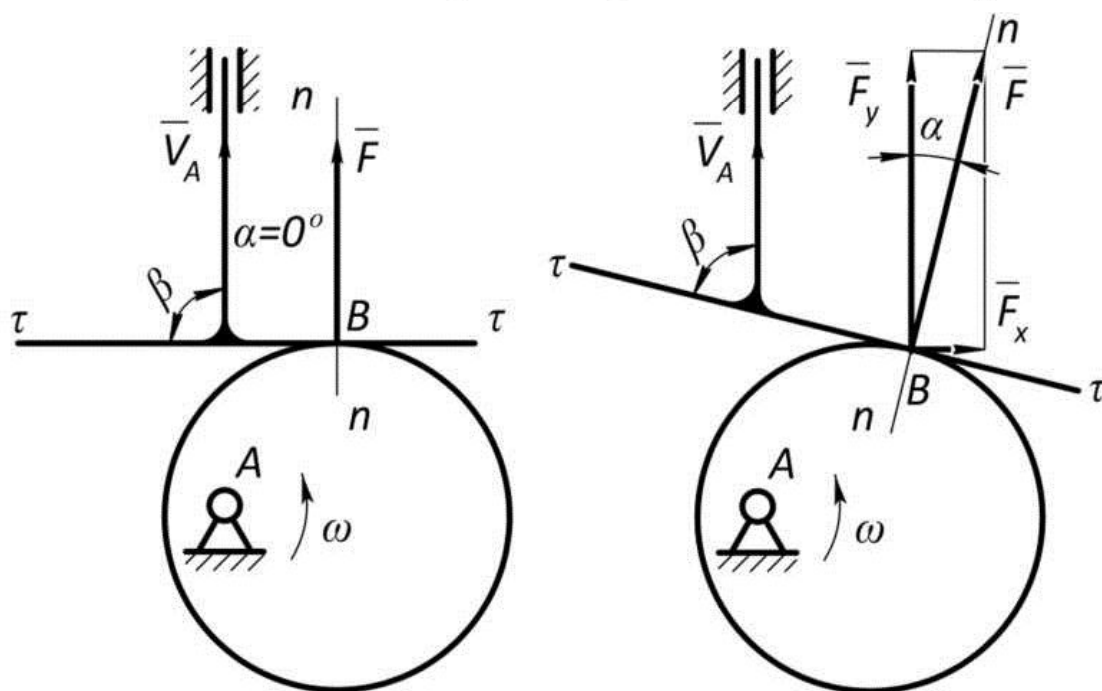


Рис. 3.14

Угол давления связан с углом  $\beta$ , под которым тарелка жестко крепится к штоку толкателя. Очевидно, что  $\alpha = 90 - \beta$ . Механизмы этим типом толкателя проектируется из условия обеспечения выпуклости профиля кулачка.

## ГЛАВА 4. ТЕОРИЯ ЗУБЧАТОГО ЗАЦЕПЛЕНИЯ

### 4.1. Общие сведения о зубчатых механизмах

Простейшим зубчатым механизмом называется трехзвенный механизм, в состав которого входят два зубчатых колеса и высшая кинематическая пара 4-го класса, образованная последовательно меняющимися зубьями колес (рис. 4.1).

Главное достоинство зубчатого механизма – постоянство передаточного отношения.

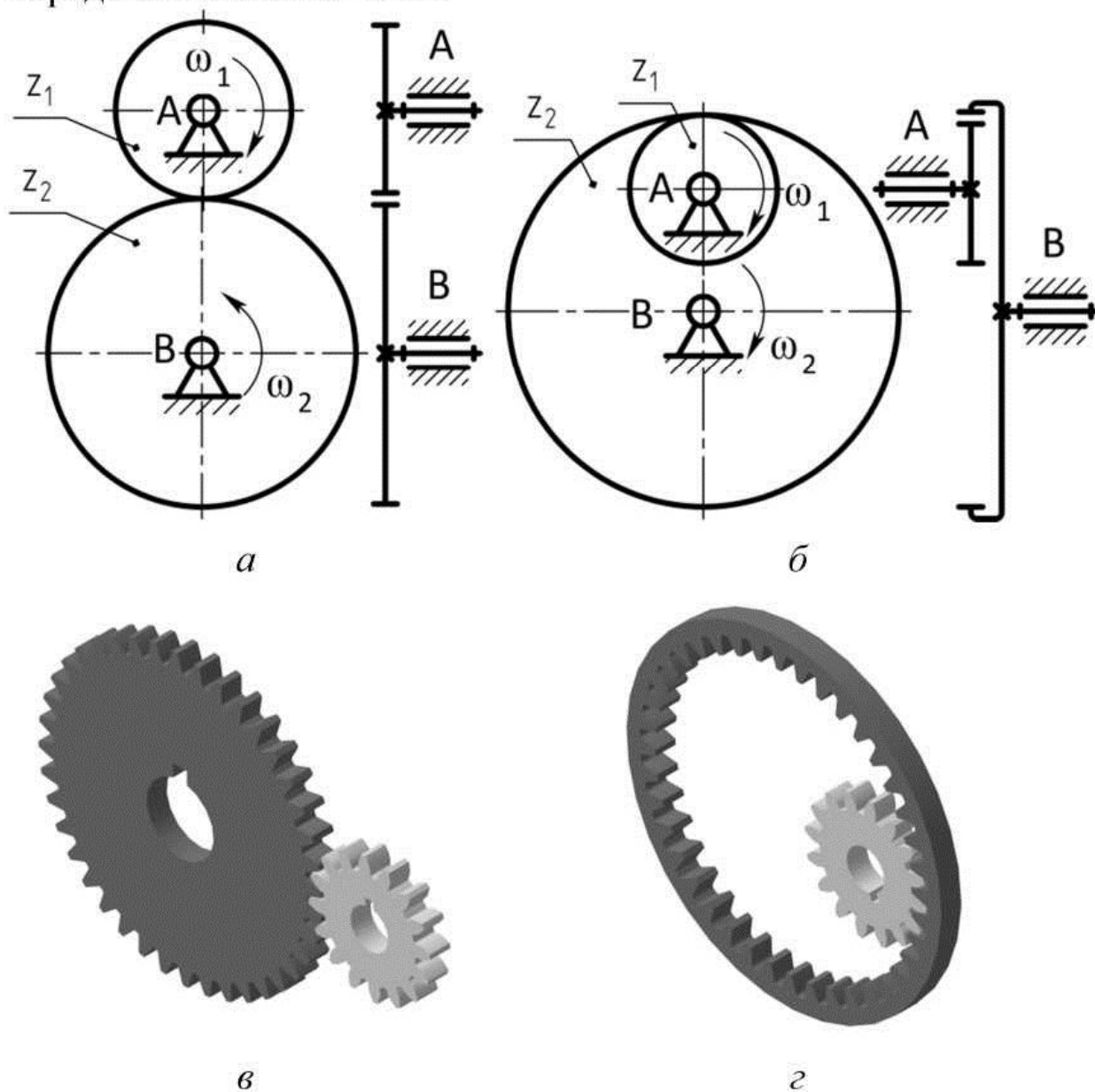


Рис. 4.1

*Передаточное отношение* - отношение угловой скорости ведущего звена к угловой скорости ведомого звена. Применительно к зубчатой передаче передаточное отношение определяется выражением:

$$|u_{AB}| = |u_{12}| = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1},$$

где  $z_1$  и  $z_2$  – число зубьев соответствующих зубчатых колес.

Если ведущее и ведомое колеса вращаются в одном направлении, то передаточное отношение берется со знаком плюс, если в разных – со знаком минус.

При внешнем зацеплении зубчатые колеса (см. рис. 4.1, а) вращаются в разные стороны, следовательно,  $u_{12} < 0$ , а при внутреннем зацеплении (см. рис. 4.1, б) – в одну и ту же сторону, значит,  $u_{12} > 0$ . Отметим, что  $u_{12} = 1/u_{21}$ .

На рис. 4.1, в и 4.1, г показаны аксонометрические проекции зубчатых колес, находящихся во внешнем и внутреннем зацеплении соответственно.

Зубчатые механизмы, понижающие угловую скорость ведомого звена относительно ведущего, называются *редукторами* ( $|u| > 1$ ), а повышающие – *мультипликаторами* ( $|u| < 1$ ).

Для одной пары зубчатых колес рекомендуется принимать  $|u|$  не более 10...12. Для получения больших значений  $u$  используют механизмы из нескольких зубчатых колес, где кроме ведущего и ведомого имеются еще промежуточные колеса, т. е. многоступенчатые передачи. Такие сложные зубчатые механизмы получили название *многоступенчатых зубчатых передач* или *редукторами скоростей*. Многоступенчатые передачи, у которых оси вращения колес неподвижны, носят название *рядового соединения*.

## 4.2. Передаточное отношение последовательного ряда зубчатых колес

Рассмотрим рядовое соединение (рис. 4.2), в котором колесо 1 входит в зацепление с колесом 2, колесо 2 с колесом 3 и т. д.. Такой вид передачи называется *последовательным соединением зубчатых колес*.

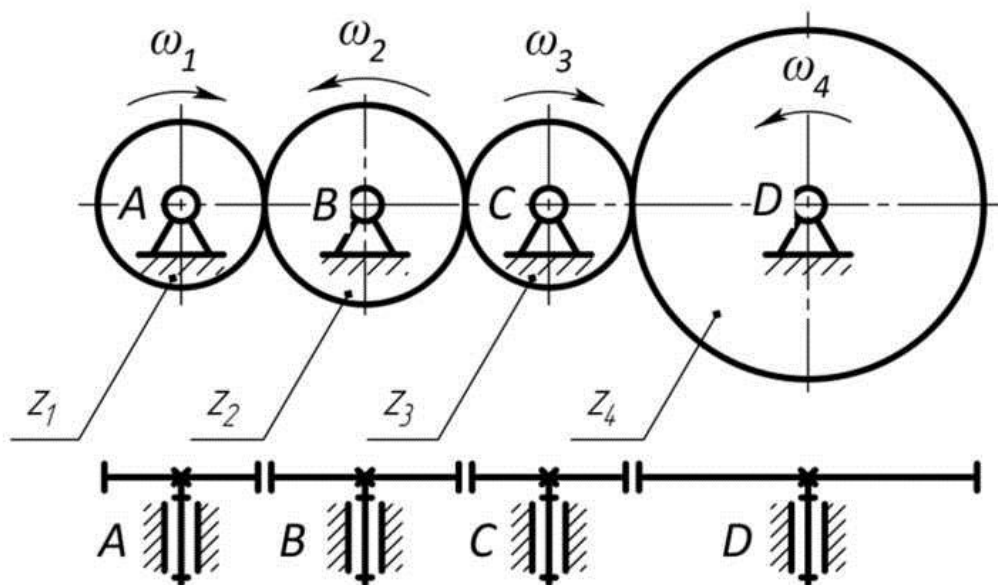


Рис. 4.2

Определим передаточное отношение соединения:

$$u_{AD} = u_{14} = u_{12} \cdot u_{23} \cdot u_{34},$$

где  $u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ ,  $u_{23} = \frac{\omega_2}{\omega_3}$ ,  $u_{34} = \frac{\omega_3}{\omega_4}$ .

В результате получим:

$$u_{AD} = u_{14} = \frac{\omega_1}{\omega_4}.$$

Через число зубьев колес:

$$u_{14} = u_{12} \cdot u_{23} \cdot u_{34} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \left(-\frac{z_3}{z_2}\right) \left(-\frac{z_4}{z_3}\right) = -\frac{z_4}{z_1}.$$

Таким образом, передаточное отношение последовательно-го ряда зубчатых колес определяется отношением числа зубьев выходного (ведомого) колеса к числу зубьев входного (ведущего) колеса

$$u_{1n} = (-1)^m \frac{z_n}{z_1},$$

где  $m$  - число внешних зацеплений в ряде колес.

Промежуточные колеса 2 и 3 (см. рис.4.2) не влияют на модуль передаточного отношения, что дало повод назвать их *паразитными*. Они используются для получения надлежащего направ-

ления вращения ведомого вала или для обеспечения больших межцентровых расстояний при малом размере зубчатых колес.

### 4.3. Передаточное отношение ступенчатого ряда зубчатых колес с неподвижными осями вращения

Рассмотрим ступенчатый ряд зубчатых колес с неподвижными осями (рис. 4.3). В таком виде передачи на одном валу может располагаться более одного зубчатого колеса.

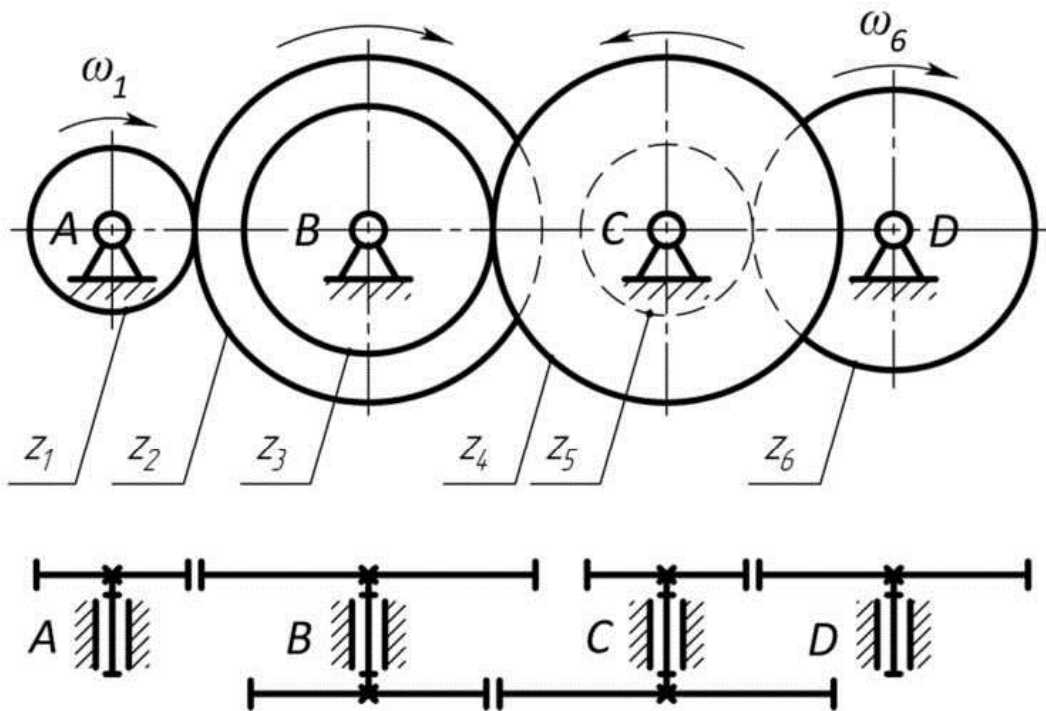


Рис. 4.3

Определим передаточное отношение от входного вала к выходному:

$$u_{16} = u_{AD} = u_{AB} \cdot u_{BC} \cdot u_{CD} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \left(-\frac{z_4}{z_3}\right) \left(-\frac{z_6}{z_5}\right) =$$

$$= -\frac{z_2 \cdot z_4 \cdot z_6}{z_1 \cdot z_3 \cdot z_5}.$$

Для случая  $n$  колес, получим

$$u_{1n} = (-1)^m \frac{z_2 \cdot z_4 \cdots z_n}{z_1 \cdot z_3 \cdots z_{n-1}},$$

где  $m$  – число внешних зацеплений. Таким образом, передаточное отношение ступенчатого ряда зубчатых колес определяется дробью, в числителе которой произведение чисел зубьев ведомых колес, а в знаменателе – ведущих.

#### 4.4. Условие соосности

При проектировании зубчатых механизмов часто решается задача обеспечения условия соосности входного и выходного валов или соосности каких-либо промежуточных валов. Выполнение этого условия предполагает, что валы находятся на одном уровне. Для различных кинематических схем механизмов это условие записывается по-разному. Так, если зубчатые колеса нулевые, т. е. нормальные, то для схемы, показанной на рис. 4.4 условие соосности валов  $A$  и  $C$ , а также  $B$  и  $D$  имеет вид

$$r_1 + r_2 = r_3 + r_4 = r_6 - r_5,$$

где  $r$  – радиусы делительных (см. ниже) окружностей соответствующих колес.

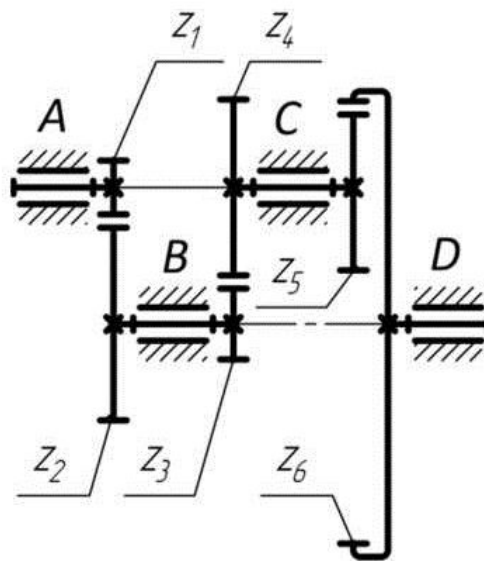


Рис. 4.4

Учитывая то, что радиусы делительных окружностей прямо пропорциональны числу зубьев, условие соосности можно представить в виде:

$$z_1 + z_2 = z_3 + z_4 = z_6 - z_5.$$

Полученное соотношение можно использовать для определения недостающего числа зубьев колес.

#### 4.5. Зубчато-рычажные механизмы

*Зубчато-рычажными* называются механизмы, в которых есть зубчатые колеса, оси вращения которых перемещаются в пространстве. К ним относятся: дифференциальные, планетарные и замкнутые дифференциальные механизмы.

*Дифференциальным* называется зубчатый механизм, степень подвижности которого больше единицы ( $W > 1$ ). Структурная схема дифференциального механизма показана на рис. 4.5. Его звенья имеют следующие названия: звено 1 – центральное колесо; 2 – сателлит; 3 – водило.

Зубчатое колесо, ось вращения которого неподвижна, называется *центральным (солнечным)*. (Если в состав механизма входит неподвижное зубчатое колесо, его называют *опорным*).

*Сателлит* – зубчатое колесо, ось вращения которого перемещается в пространстве.

*Водило* – звено, перемещающее ось вращения сателлита.

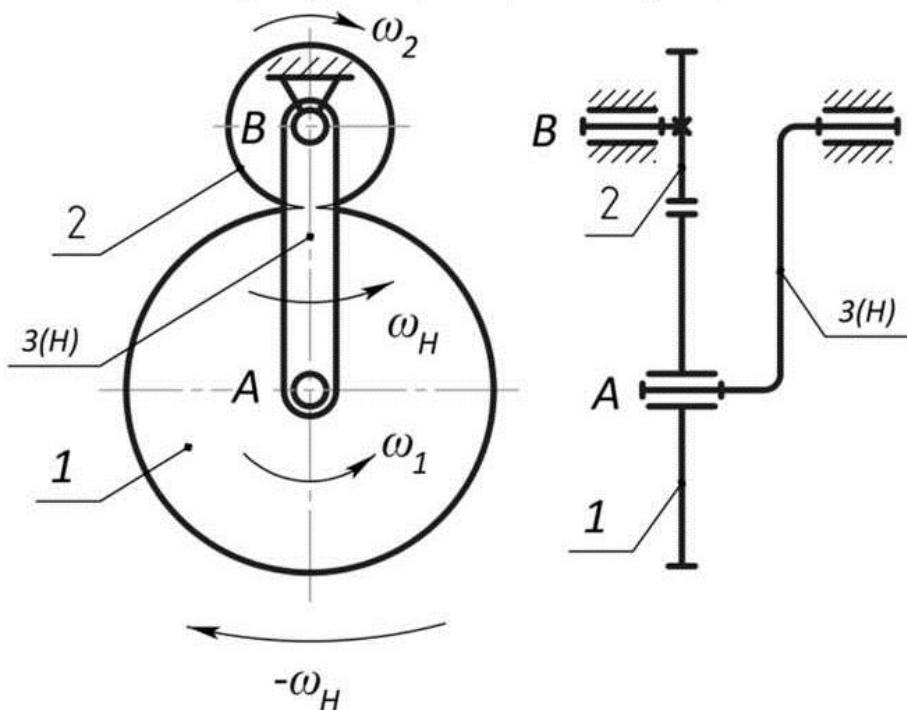


Рис. 4.5

Рассчитаем степень подвижности представленного дифференциального механизма:

$$n = 3; p_5 = (1-3; 3-0; 2-0) = 3;$$

$$p_4 = (1 - 2) = 1;$$

$$W = 3n - 2 p_5 - p_4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 1 = 2.$$

Для дифференциального механизма понятие «передаточное отношение» не вводится, но угловые скорости звеньев связаны между собой строго определенным соотношением. Для его определения придадим всему механизму обращенное движение вокруг оси  $B$  с угловой скоростью равной по величине угловой скорости водила, но противоположной ей по направлению ( $-\omega_H$ ). В обращенном движении водило становится неподвижным. Такой механизм называется преобразованным. Для него:

$$u_{12}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_2 - \omega_H},$$

где  $u_{12}^H$  - передаточное отношение от колеса 1 колесу 2 при остановленном водиле 3 (для рассматриваемой схемы  $u_{12}^H = -\frac{z_2}{z_1}$ ).

Это уравнение называется *формулой Виллиса*.

*Планетарный механизм* – это дифференциальный механизм с остановленным центральным колесом (рис 4.6). Рассчитаем его степень свободы, оставив прежнюю нумерацию звеньев, учтя при этом, что опорным, т. е. стойкой, стало колесо 2. Тогда, для рассматриваемой схемы плоского механизма:

$$n = 2(1, 3); p_5 = (0-3, 1-3) = 2; p_4 = (1-2(0)) = 1;$$

$$W = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 = 1.$$

Передаточное отношение получим из формулы Виллиса с учетом, того что в ней  $\omega_2$  стала равной нулю. В результате:

$$u_{12}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{-\omega_H} = 1 - \frac{\omega_1}{\omega_H} = 1 - u_{1H};$$

$$u_{1H} = 1 - u_{12}^H = 1 + \frac{z_2}{z_1}.$$



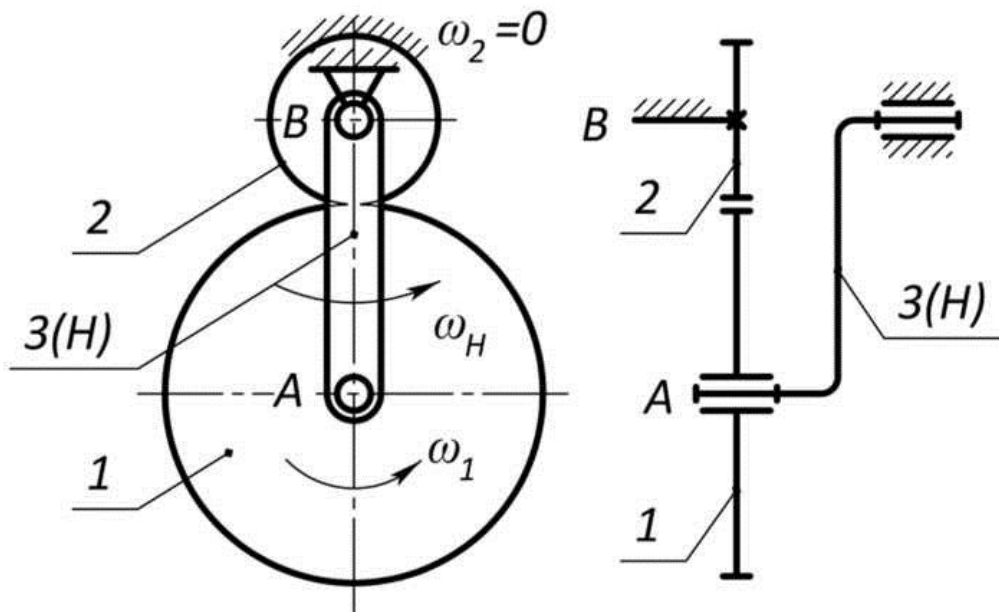


Рис. 4.6

Алгоритм расчета передаточного отношения зубчато-рычажных механизмов можно представить следующим образом:

- через условие соосности валов определить недостающие числа зубьев колес;
- определить в механизме звено, являющееся сателлитом или представляющее блок сателлитов;
- для звеньев, находящихся в зацеплении с сателлитом, записать формулу Виллиса;
- учесть равенство нулю угловых скоростей неподвижных звеньев, если такие имеются (опорные колеса);
- через заданное число зубьев колес определить передаточное отношение обращенного механизма, т. е. при остановленном (неподвижном) водиле;
- почленным делением в правой части формулы Виллиса получить искомое передаточное отношение;
- решить полученное уравнение относительно искомого передаточного отношения.

Рассмотрим пример.

Дана схема планетарного механизма (рис. 4.7), в котором число зубьев колес 1 и 3 равно  $z_1=80$ ,  $z_3=20$ . Валы  $H$  и  $A$  соосны.

Из условия соосности определить число зубьев колеса 2.

Считая водило  $H$  входным звеном, определить передаточ-

ное отношение представленного механизма, т. е.  $u_{H3} = u_{H1}$ .

Найдем  $z_2$ , записав условие соосности:

$$z_1 = z_3 + 2z_2,$$

отсюда

$$z_2 = 0,5(z_1 - z_3) = 0,5(80 - 20) = 30.$$

В представленном механизме сателлитом является колесо 2, входящее в зацепление с колесами 1 и 3. Запишем формулу Виллиса:

$$u_{13}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H}.$$

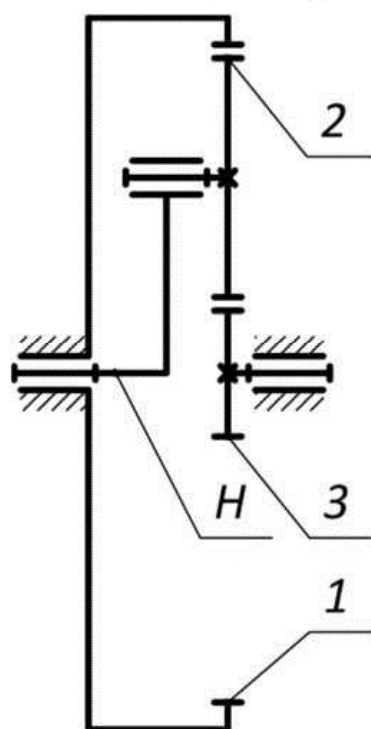


Рис. 4.7

Поскольку колесо 1 опорное, то  $\omega_1=0$ . В результате

$$u_{13}^H = \frac{-\omega_H}{\omega_3 - \omega_H}.$$

Рассчитаем  $u_{13}^H$ , т. е. передаточное отношение от колеса 1 колесу 3 при остановленном водиле:

$$u_{13}^H = -\frac{z_3}{z_1} = -\frac{20}{80} = -\frac{1}{4}.$$

В результате получим:

$$-\frac{1}{4} = \frac{-\omega_H}{\omega_3 - \omega_H}.$$

Так как необходимо получить значение  $u_{H3} = \frac{\omega_H}{\omega_3}$ , почленным делением правой части уравнения выделим в нем искомую величину:

$$\frac{1}{4} = \frac{\frac{\omega_H}{\omega_3}}{\frac{\omega_3 - \omega_H}{\omega_3}} = \frac{u_{H3}}{1 - u_{H3}}.$$

Решив последнее уравнение относительно  $u_{H3}$  получим

$$u_{H3} = \frac{1}{5}.$$

#### 4.6. Основная теорема зацепления

**Теорема.** Общая нормаль (рис. 4.8), проведенная через точку высшей кинематической пары, делит межцентровое расстояние соприкасающихся звеньев на отрезки обратно пропорциональные угловым скоростям.

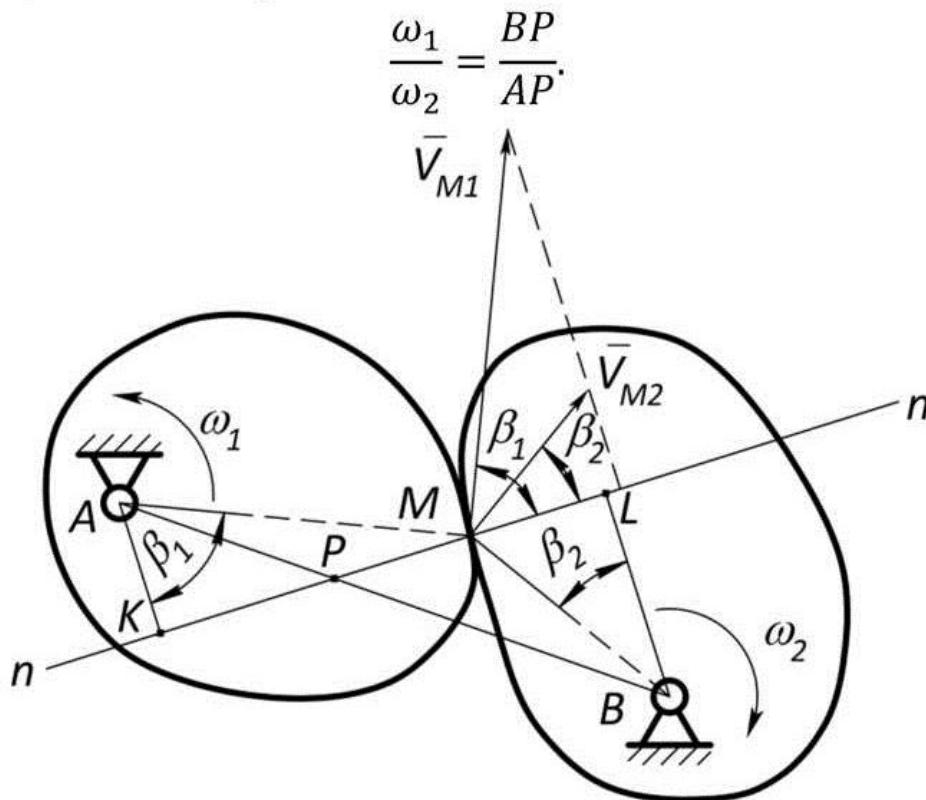


Рис. 4.8

Изобразим векторы скоростей точек соприкосновения двух звеньев, соответственно 1-го и 2-го кулачков –  $V_{M1}$  и  $V_{M2}$ . Они направлены перпендикулярно  $AM$  и  $BM$  соответственно и равны:

$$V_{M1} = \omega_1 \cdot AM, \quad V_{M2} = \omega_2 \cdot BM.$$

Условием безотрывности вращения является равенство проекций векторов  $V_{M1}$  и  $V_{M2}$  на нормаль  $n-n$ :

$$V_{M1}^n = V_{M2}^n,$$

или

$$\omega_1 \cdot AM \cdot \cos(\beta_1) = \omega_2 \cdot BM \cdot \cos(\beta_2), \quad (4.1)$$

где  $\beta_1, \beta_2$  – углы, образованные векторами  $V_{M1}, V_{M2}$  с нормалью  $n-n$ .

Из центров вращения  $A$  и  $B$  восстановим перпендикуляры на нормаль  $n-n$ . Получим:

$$\angle KAM = \beta_1, \quad \angle LBM = \beta_2,$$

как углы между взаимно перпендикулярными сторонами.

Далее

$$AM \cdot \cos(\beta_1) = AK, \quad BM \cdot \cos(\beta_2) = BL. \quad (4.2)$$

Подставив (4.2) в (4.1), получим  $\omega_1 \cdot AK = \omega_2 \cdot BL$  или

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{BL}{AK}. \quad (4.3)$$

Треугольники  $APK$  и  $BPL$  подобны, как треугольники с равными углами. Из подобия следует

$$\frac{BL}{AK} = \frac{BP}{AP}. \quad (4.4)$$

Объединяя (4.3) и (4.4), получим

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{BP}{AP}.$$

Следствие из основной теоремы зацепления позволяет ответить на вопрос: «Какими должны быть профили зубьев для обеспечения постоянства передаточного отношения?»

**Следствие из теоремы.** Чтобы передаточное отношение зубчатых колес было постоянным, необходимо чтобы общая нормаль пересекла межцентровое расстояние в одной и той же точке независимо от положения звеньев.

Любые профили, отвечающие этому условию, могут быть использованы для выполнения профиля зубьев.

Наиболее широкое распространение в технике получили зубчатые колеса, профили зубьев которых выполнены по эвольвенте к окружности.

#### 4.7. Эвольвента. Алгоритм ее построения

*Эвольвента окружности* – кривая, которую описывает точка, лежащая на прямой при перекатывании этой прямой по окружности без скольжения.

Окружность, по которой перекачивается прямая, называется *основной окружностью* ( $r_0$  – радиус основной окружности).

Представим алгоритм построения эвольвенты окружности радиуса  $OA_0 = r_0$ , т. е. смоделируем перекатывание горизонтальной прямой по окружности без скольжения и построим траекторию точки  $A_0$  (рис 4.9).

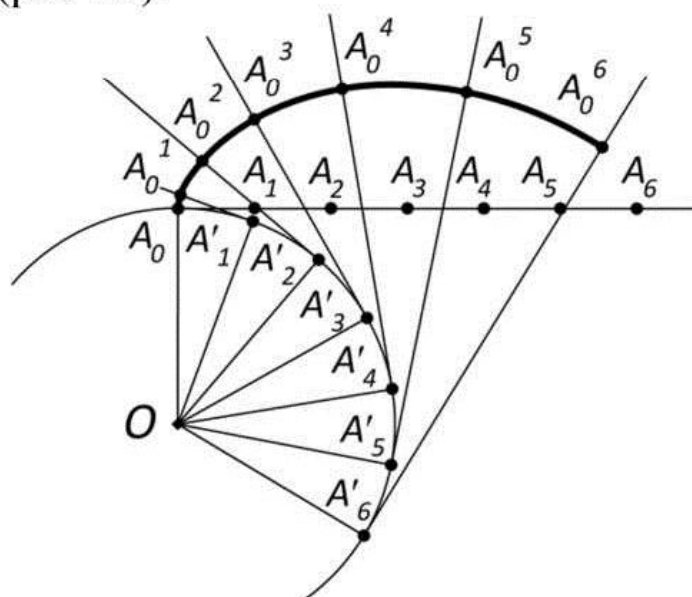


Рис 4.9

1. От точки  $A_0$  на исходном положении прямой отложим отрезки малой длины:  $A_0A_1$ ;  $A_1A_2$ ; ...;  $A_5A_6$ .

2. На окружности отложим дуги  $A_0A'_1$ ,  $A'_1A'_2$ , ...,  $A'_5A'_6$ , равные длине отрезков  $A_0A_1$ ,  $A_1A_2$ , ...,  $A_5A_6$ .

3. Через точки  $A'_1$ ,  $A'_2$ , ...,  $A'_6$ , проводим касательные к основной окружности.

4. Из точки  $A'_1$  на проведенной касательной откладываем отрезок длиной  $A_1A_0$  - получаем точку  $A_0^1$ . Далее, аналогичным образом из точки  $A'_2$  откладываем отрезок длиной  $A_2A_0$  - получаем точку  $A_0^2$ . И так до точки  $A_0^6$ .

5. Соединяя точки  $A_0^1, A_0^2, \dots$  плавной кривой, получим эвольвенту.

*Свойства эвольвенты:*

- любая прямая, пересекающая эвольвенту и касающаяся основной окружности, нормальна к эвольвенте;
- эвольвента начинается на основной окружности и никогда ее не пересекает;
- эвольвента – гладкая кривая без точек перегиба;
- основная окружность является геометрическим местом точек, центров кривизны эвольвенты;
- при увеличении радиуса основной окружности до бесконечности эвольвента вырождается в прямую линию.

#### 4.8. Уравнение эвольвенты в полярных координатах

Получим уравнение эвольвенты в полярных координатах. На рис. 4.10 введем следующие обозначения:

$r$  – текущее значение радиус-вектора, соединяющего центр основной окружности с произвольной точкой  $K$  эвольвенты;

$\theta$  - угол отклонения радиус-вектора  $r$  от его начального положения  $r_0$ ;

$\alpha$  - угол, заключенный между радиус-вектором  $r$  и перпендикуляром, проведенным к нормали эвольвенты, проходящей через точку  $K$ .

По определению эвольвенты дуга  $AB$  равна длине отрезка  $KB$ . Выразим  $AB$  и  $KB$  через введенные выше параметры.

С одной стороны  $AB = r_0(\theta + \alpha)$ . С другой, из  $\triangle BKO$ :

$$BK = OB \cdot \operatorname{tg}(\alpha) = r_0 \cdot \operatorname{tg}(\alpha),$$

тогда, приравняв правые части уравнений, получим:

$$r_0(\theta + \alpha) = r_0 \cdot \operatorname{tg}(\alpha), \text{ или } \theta + \alpha = \operatorname{tg}(\alpha),$$

откуда  $\theta = \operatorname{tg}(\alpha) - \alpha$ .

Функцию  $(\text{tg}(\alpha) - \alpha)$  называют инволютой угла  $\alpha$ . Таким образом  $-\theta = \text{inv}(\alpha)$ .

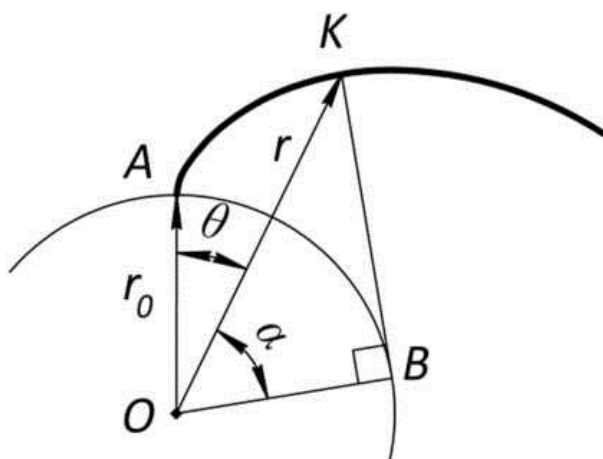


Рис. 4.10

Окончательно уравнение эвольвенты запишется в виде

$$r = \frac{r_0}{\cos(\alpha)}, \theta = \text{inv}(\alpha).$$

#### 4.9. Эвольвентное зацепление

Пусть вращение от одного звена другому передается посредством криволинейных поверхностей, имеющих форму эвольвенты (рис. 4.11).

В данном положении местом контакта криволинейных эвольвентных профилей  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$  является точка  $A$ . Через нее проведем общую нормаль к соприкасающимся поверхностям. По первому свойству эвольвенты общая нормаль одновременно является касательной к основным окружностям  $r_{01}$ ,  $r_{02}$ , т. е. совпадает с прямой  $MN$ .

Предположим, что звенья  $1$  и  $2$  повернулись на некоторые углы и эвольвентные профили соприкасаются друг с другом в какой-то другой точке, отличной от  $A$ .

Если через эту точку провести новую общую нормаль, то по свойству эвольвенты, она также будет являться общей касательной к основным окружностям  $r_{01}$ ,  $r_{02}$ , т. е. совпадать с ранее проведенной прямой  $MN$ .

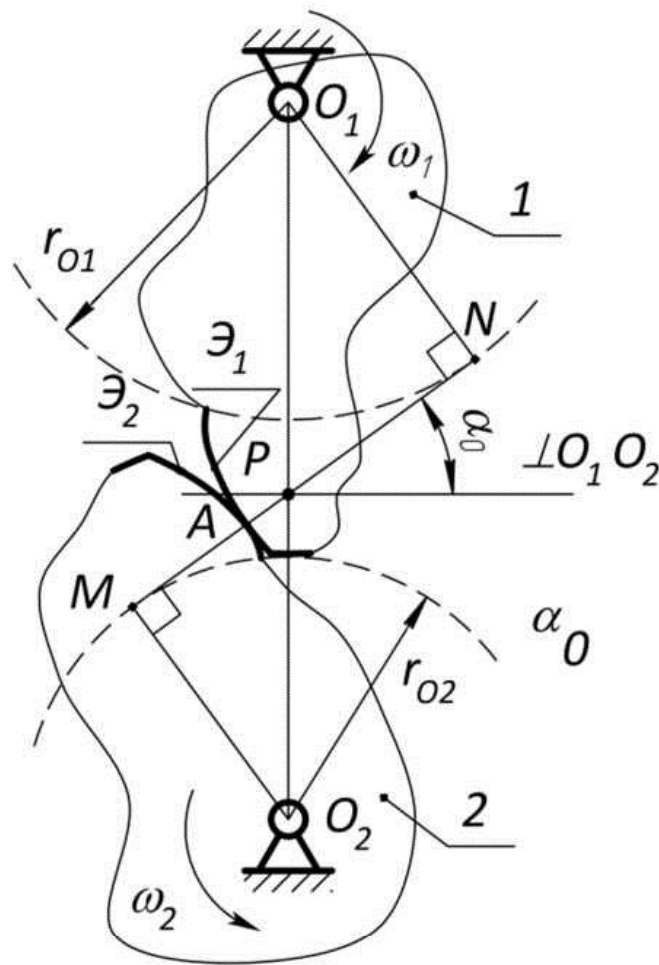


Рис. 4.11

**Вывод:** в какой бы точке ни происходил контакт между двумя эвольвентными профилями, общая нормаль занимает одно и то же положение и, следовательно, пересекает межцентровое расстояние  $O_1O_2$  в одной и той же точке  $P$ . Значит,

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2P}{O_1P} = \text{const.}$$

Таким образом, главное достоинство зубчатого зацепления - постоянство передаточного отношения, обеспечивается за счет того, что боковые поверхности зубьев выполнены по эвольвенте.

Общая нормаль  $MN$ , на которой располагаются точки соприкосновения зубьев, называется *теоретической линией зацепления*.

Точка  $P$ , пересечения теоретической линии зацепления с межцентровым расстоянием, называется *полусом зацепления*.

Угол между теоретической линией зацепления и перпенди-



куляром к межцентровому расстоянию  $O_1O_2$  называется *углом зацепления* (углом сборки)  $\alpha_{сб}$ .

Для нормальных (нулевых) зубчатых колес  $\alpha_{сб} = \alpha_0 = 20^\circ$ .

#### 4.10. Основные параметры нормального эвольвентного зубчатого колеса

Основные параметры колеса покажем на рис. 4.12.

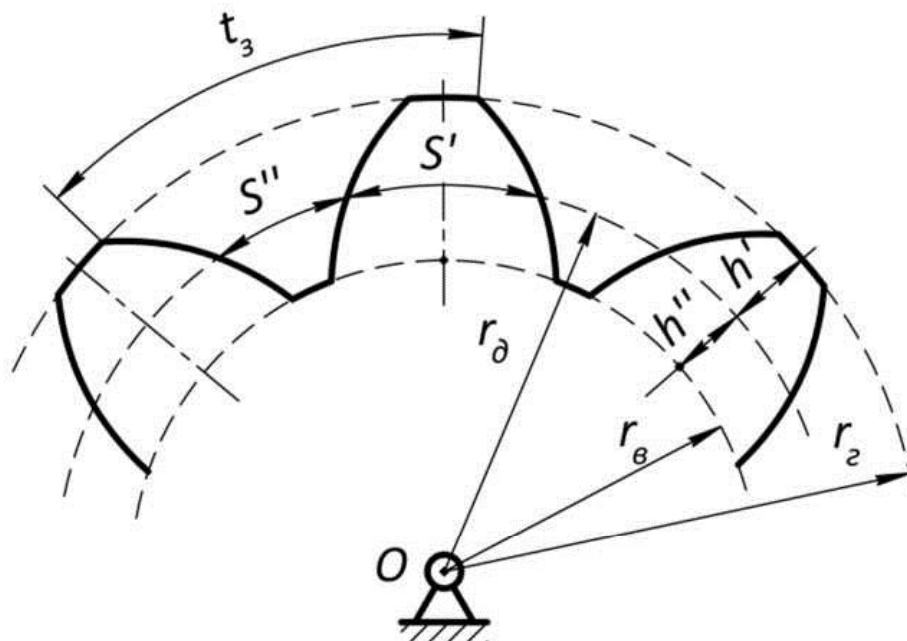


Рис. 4.12

*Шаг зацепления* – длина дуги, измеренная между одноименными точками двух соседних зубьев по какой-либо окружности. Он складывается из толщины зуба ( $S'$ ) и ширины впадины ( $S''$ ):  $t_3 = S' + S''$ . Соотношения между длинами  $S'$  и  $S''$  по разным окружностям меняется.

Свяжем длину произвольной окружности, с одной стороны, с ее диаметром  $D^*$ , а с другой – с числом зубьев колеса:

$$L = \pi \cdot D^* \text{ и } L = z \cdot t_3,$$

где  $z$  – число зубьев колеса,  $t_3$  – шаг по окружности диаметра  $D^*$ . В результате:

$$\pi \cdot D^* = z \cdot t_3 \text{ и } t_3 = \pi \cdot D^* / z.$$

Отсюда видно, что шаг зацепления является несоизмеримым числом, так как в правую часть уравнения входит трансцендентное число  $\pi$ . Это вносит затруднения в подбор размеров ко-

лес при их проектировании и практическое их измерение. Поэтому, для определения основных размеров зубчатых колес в качестве основной единицы принят некоторый параметр, называемый *модулем зацепления*. Модуль зацепления ( $m_3$ ) измеряется в миллиметрах и равен отношению шага к числу  $\pi$  ( $m_3 = t_3/\pi$ ). Тогда:

$$D^* = \frac{t_3 \cdot z}{\pi} = m_3 \cdot z.$$

В зацепление могут входить колеса, имеющие одинаковый модуль. Величина модуля стандартизована. Установлены два ряда модулей, до которых должны округляться модули, получаемые из расчета. Первый, предпочтительный ряд (мм): 0,05; 0,06; 0,08; 0,1; 0,12; 0,15; 0,2; 0,25; 0,3; 0,4; 0,5; 0,8; 1,0; 1,25; 1,5; 2,0; 2,5; 3; 4; 5; 8; 10; 12; 15; 20; 25; 32; 40; 50; 60; 80; 100. Во втором ряду предусмотрены модули, промежуточные между модулями первого ряда, например: 3,5; 4,5; 5,5; 7; 9 и др.

Окружность, по которой модуль получается *стандартным*, называется *делительной*. Модуль характеризует, сколько мм диаметра делительной окружности приходится на один зуб:

$$m = \frac{D_d}{z}.$$

Делительной окружностью зуб по высоте делится на головку ( $h'$ ) и ножку ( $h''$ ). Величина высоты головки зуба определяется уравнением:

$$h' = mf,$$

где  $f$  - коэффициент высоты зуба. Он принимает два числовых значения:  $f = 1$  для нормального зуба и  $f = 0,8$  - для укороченного.

Величина ножки зуба равна

$$h'' = mf + c,$$

где  $c$  - радиальный зазор ( $c = 0,25m$ ).

Очевидно, что высота зуба:

$$h = h' + h'' = 2mf + 0,25m = m(2f + 0,25).$$

При  $f = 1$  высота зуба равна  $h = 2,25m$ .

*Начальными* называются окружности двух зубчатых колес, которые перекатываются друг по другу без скольжения. Для нормальных колес начальная и делительная окружности совпадают.

Радиус основной окружности определяется уравнением:

$$r_0 = r_d \cdot \cos(\alpha_0),$$

где  $r_d$  – радиус делительной окружности.

Определим геометрические размеры окружностей головок ( $r_r$ ) или вершин зуба и его впадин ( $r_b$ ):

$$r_r = r_d + h' = \frac{mz}{2} + mf,$$

$$r_b = r_d - h'' = \frac{mz}{2} - (mf + c).$$

#### 4.11. Межцентровое расстояние нормального эвольвентного зацепления

Межцентровое расстояние складывается из радиусов начальных окружностей. Как было отмечено выше, у нормальных (нулевых) колес начальные и делительные окружности совпадают. Тогда, из рис. 4.13 очевидно, что межцентровое расстояние  $a_{w0}$ :

$$a_{w0} = O_1P + O_2P = \frac{mz_1}{2} + \frac{mz_2}{2} = \frac{m(z_1 + z_2)}{2}.$$

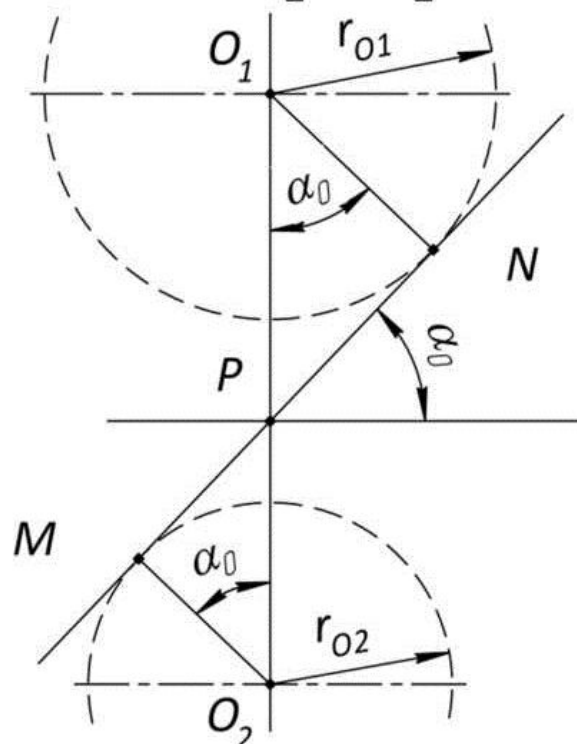


Рис. 4.13

Выразим  $a_{w0}$  через радиусы основных окружностей:

$$O_1P = r_{01} / \cos(\alpha_0); \quad PO_2 = r_{02} / \cos(\alpha_0),$$

тогда

$$a_{w0} = O_1P + O_2P = \frac{r_{01} + r_{02}}{\cos(\alpha_0)}.$$

#### 4.12. Характеристики эвольвентного зубчатого зацепления

Пусть вращение от колеса 1 передается колесу 2. Изобразим колеса в тот момент, когда рассматриваемая пара зубьев еще не вступила в зацепление (рис. 4.14).

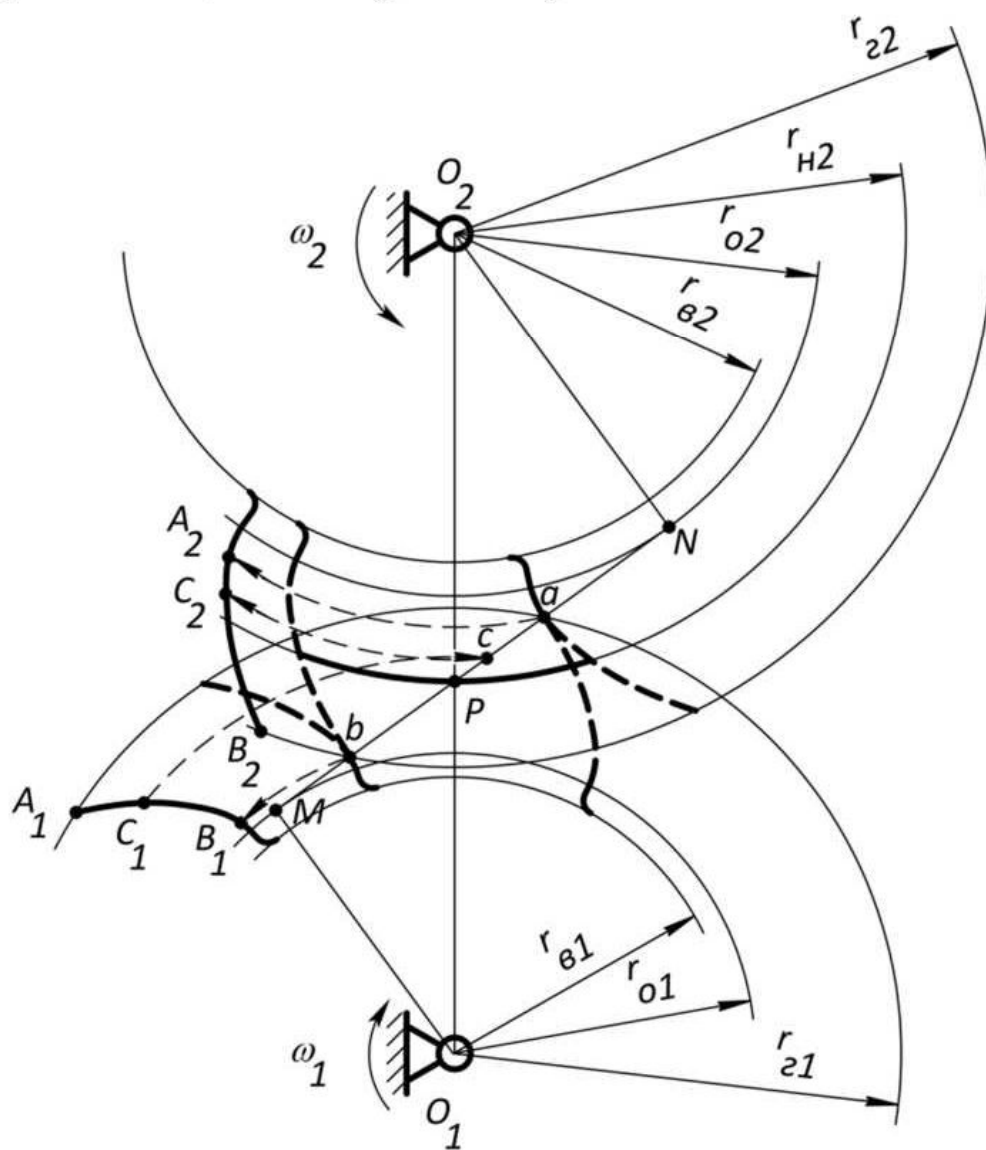


Рис. 4.14

Первой в зацепление с какой-то точкой первого колеса вступит точка  $B_2$  второго колеса. Контакт произойдет в тот момент, когда точка  $B_2$  окажется на теоретической линии зацепления  $MN$ . Эту точку обозначим  $b$ . Последней из зацепления с какой-то точкой второго колеса выйдет точка  $A_1$  первого колеса. Это произойдет в тот момент, когда точка  $A_1$  окажется на прямой  $MN$  в точке  $a$ . Отрезок  $ba$  – место контакта соприкасающихся профилей – *практическая линия зацепления*.

*Практическая линия зацепления (активная часть линии зацепления)* – отрезок, лежащий внутри теоретической линии, являющийся геометрическим местом точек соприкосновения сопряженных профилей зубьев различных зубчатых колес.

Отрезок  $ab$  отсекается на теоретической линии зацепления окружностями головок зубьев двух зубчатых колес.

*Сопряженные точки* – точки, лежащие на боковых поверхностях зубьев различных колес, которые соприкасаются друг с другом.

Определим точку  $C_2$ , лежащую на втором колесе, сопряженную с некоторой точкой  $C_1$  первого колеса.

Для этого необходимо:

- провести окружность радиусом  $O_1C_1$  до пересечения с теоретической линией зацепления - точка  $c$ .

- из точки  $O_2$  провести окружность радиусом  $O_2c$  до пересечения с сопряженным эвольвентным профилем - точка  $C_2$ .

Точки  $C_1$  и  $C_2$  – сопряженные точки.

*Рабочими* называются эвольвентные участки боковых поверхностей зуба, участвующие в зацеплении.

Для нахождения рабочего участка зуба первого колеса надо найти на нем точку, сопряженную с точкой  $B_2$  второго колеса. Для этого проведем окружность радиуса  $O_1b$  до пересечения с соответствующей эвольвентой. Участок от  $A_1$  до  $B_1$  – рабочий участок профиля зуба.

*Дугой зацепления* называется дуга, измеренная по начальной окружности с момента вхождения одной пары зубьев до момента ее выхода из зацепления.

Так как начальные окружности катятся друг по другу без скольжения, то длины дуг зацепления колес равны.

*Коэффициент перекрытия ( $\varepsilon$ )* определяется отношением длины дуги зацепления к шагу.

Для обеспечения плавности передачи необходимо, чтобы дуга зацепления превышала величину шага. Для прямозубых колес коэффициент перекрытия лежит в диапазоне  $1,1 < \varepsilon < 2$ .

По величине  $\varepsilon$  можно судить о качестве зацепления. Если например,  $\varepsilon = 1,3$ , то 30 % времени в зацеплении находятся две пары зубьев и 70 % времени - одна пара. Очевидно, что при больших значениях  $\varepsilon$  передаваемое усилие равномернее распределяется на зубья колес, делая зацепление более надежным.

### 4.13. Методы изготовления зубчатых колес

Зубчатые колеса изготавливают на специальных зубонарезных станках в основном двумя методами - копирования и обкатки.

Метод копирования (рис. 4.15, *а*) характеризуется нарезанием колес специальными дисковыми или пальцевыми модульными фрезами. Профиль таких фрез имеет очертание впадины между зубьями. В результате вращения вокруг собственной оси и перемещения вдоль оси заготовки фреза прорезает в заготовке одну впадину. Затем заготовка поворачивается на один угловой шаг и прорезается новая впадина и т. д. Этот метод является малопродуктивным, не точным и требует набора модульных фрез, в котором для данного модуля каждому возможному числу зубьев нарезаемых колес соответствует своя фреза. В этой связи метод копирования применяют в основном при ремонтных работах и одиночном изготовлении колес.

Более распространенным и универсальным методом нарезания зубчатых колес является метод обката. Заключается он в том, что режущему инструменту и заготовке сообщают такое же относительное движение (движение обката), какое имели бы два зубчатых колеса или колесо и рейка с такими же числами зубьев, находящиеся в зацеплении. Кроме того, режущий инструмент совершает поступательное движение вдоль оси заготовки (рабочее движение). Инструмент может быть выполнен в виде зубчатого колеса (рис. 4.15, *б*), в этом случае он называется долбяком,

в виде рейки (рис. 4.15, в) или в виде червячной фрезы, профиль которой в осевом сечении аналогичен профилю инструментальной рейки.

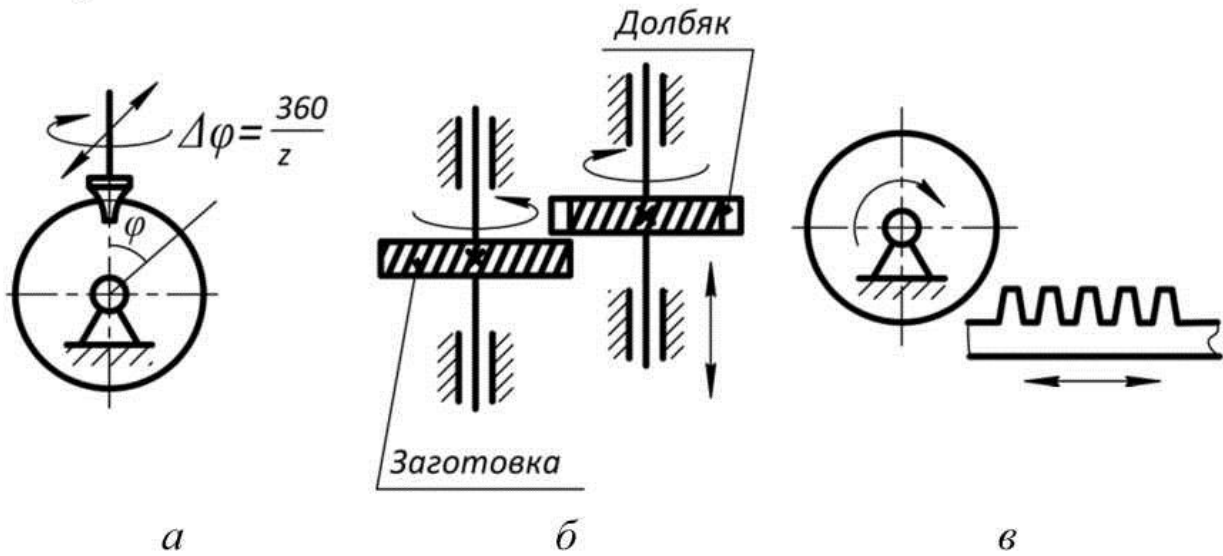


Рис. 4.15

Методом обката одним и тем же инструментом можно нарезать колеса данного модуля с разным числом зубьев. Зацепление режущего инструмента с обрабатываемым зубчатым колесом называют *станочным*.

#### 4.14. Основные параметры инструментальной рейки

Исходный контур инструментальной рейки (рис. 4.16) представляет собой равнобокую трапецию, высота которой делится пополам делительной или модульной прямой. Шаг по любой прямой инструментальной рейки одинаков и равен  $t = \pi m$ . По модульной прямой толщина зуба ( $S'$ ) инструментальной рейки равняется ширине впадины ( $S''$ ) и равна половине шага:

$$S' = S'' = \frac{\pi m}{2}.$$

При нарезании нормального (нулевого) колеса модульная прямая перекачивается без скольжения по делительной окружности нарезаемого зубчатого колеса.

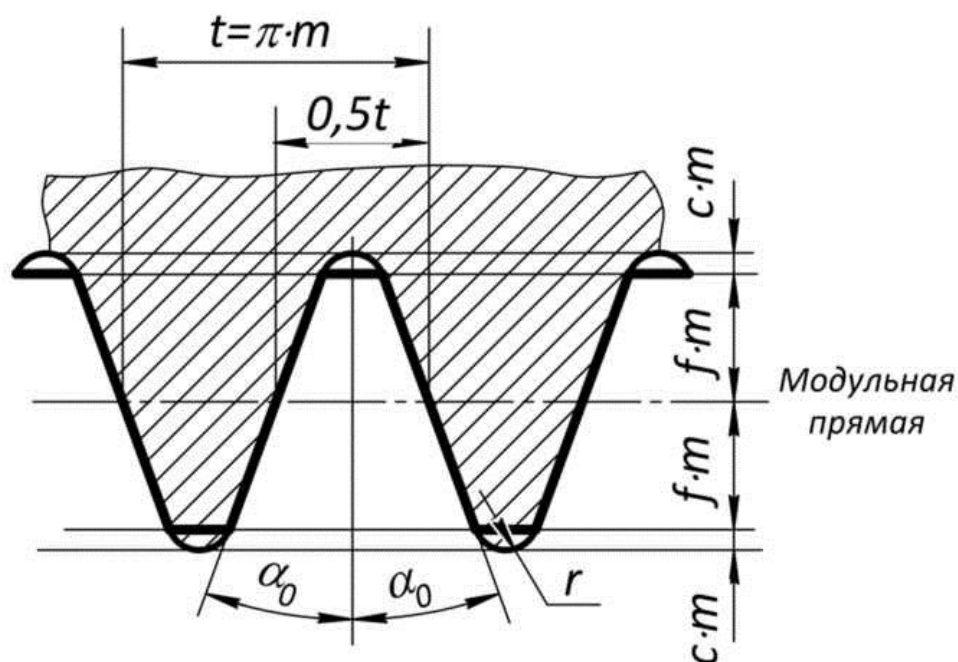


Рис. 4.16

Исходный контур инструментальной рейки, выделенный утолщенной линией, отличается от контура основной рейки. Отличие состоит в том, что в нем высота головки зуба увеличена на величину  $c=0,25m$ . Это необходимо для образования большей глубины впадины, обеспечивающей радиальный зазор  $c$  в зацеплении сопряженных колес.

Стандартизованными параметрами инструментальной рейки являются угол профиля (угол зацепления)  $\alpha_0$ , коэффициент высоты зуба  $f$ , коэффициент радиального зазора  $c$  и радиус  $r$  переходной кривой у корня зуба. Так при  $m > 1$  стандартными являются  $\alpha_0 = 20^\circ$ ,  $f = 1$ ,  $c = 0,25m$ ,  $r = 0,2m$ .

#### 4.15. Явление подрезания ножки зуба

Для обеспечения плавности передачи вращательного движения необходимо, чтобы зубья колес соприкасались друг с другом своими выпуклыми поверхностями. При нарезании колес с малым числом зубьев методом обката инструментальной рейкой может оказаться, что головки зубьев инструмента врежутся в ножки зубьев колеса. В результате часть поверхности у основания зуба обрабатываемого колеса окажется срезанной (рис. 4.17).



Такое явление получило название *подрезания* зуба. Подрезание зуба крайне нежелательно, так как ослабляет его ножку в сечении, где возникают наибольшие напряжения изгиба.

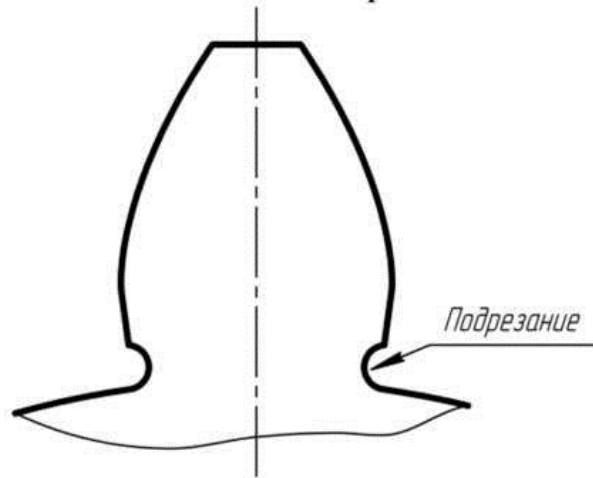


Рис. 4.17

Покажем картину нарезания зубчатого колеса (рис. 4.18). Если отрезок  $ab$  практической линии зацепления, отсекаемый окружностями головок зубьев, лежит внутри отрезка  $MN$  - теоретической линии зацепления, то ножка зуба при нарезании зубчатого колеса *не будет подрезанной*.

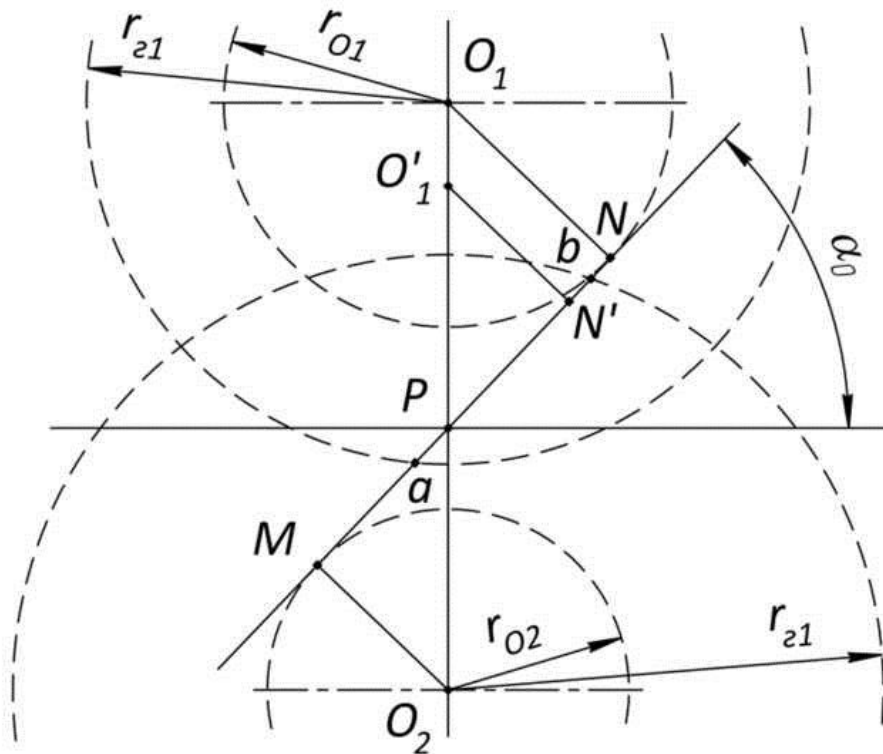


Рис. 4.18

Вероятность подрезания возрастает с уменьшением размера нарезаемого колеса. При уменьшении радиуса основной окружности нарезаемого колеса с  $O_1N$  до  $O_1'N'$  практическая линия зацепления  $ab$  выходит за пределы теоретической линии  $MN'$ . В этом случае вершины зубьев колеса режущего инструмента внедряются в основание зубьев колеса заготовки, что обуславливает подрезание их ножки.

#### 4.16. Определение минимального числа зубьев зубчатого колеса из условия отсутствия подрезания

Изобразим картину нарезания зубчатого колеса инструментальной рейкой, соответствующую граничному условию отсутствия подрезания (рис. 4.19). Граничное условие характеризуется тем, что начало практической линии зацепления (точка  $a$ ) и теоретической (точка  $M$ ) совпадают. Из рисунка видно, что при данном взаимном расположении рейки и заготовки высота головки зуба рейки  $h'$  равна отрезку  $PC$ .

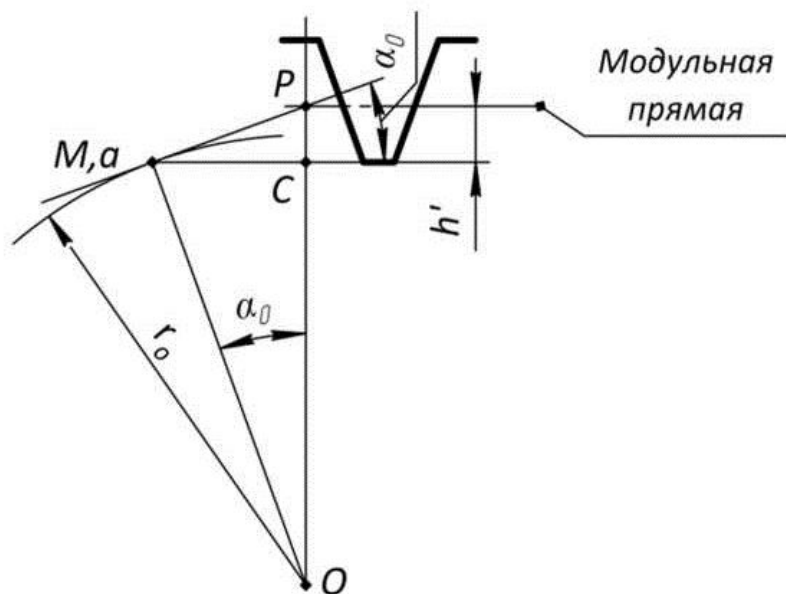


Рис 4.19

Свяжем длину отрезка  $PC$  с делительным радиусом  $PO$ . Из прямоугольного треугольника  $POM$ :

$$PM = OP \cdot \sin(\alpha_0).$$

Из прямоугольного треугольника  $PMC$ :

$$PC = PM \cdot \sin(\alpha_0).$$

В результате:  $PC = OP \cdot \sin^2 \alpha_0$ .

С учетом того, что

$$OP = r_\lambda = \frac{mz}{2} \text{ и } PC = h' = mf,$$

получим

$$mf = \frac{mz}{2} \sin^2(\alpha_0),$$

откуда

$$z = \frac{2f}{\sin^2(\alpha_0)} = \frac{2f}{\sin^2(20)} \approx 17f.$$

Таким образом, при  $f = 1$  минимальное число зубьев ( $z_{\min}$ ) на нулевом колесе, при котором отсутствует подрезание ножки, равно 17. Для укороченного зуба ( $f = 0,8$ ) –  $z_{\min} = 14$ .

#### 4.17. Корригирование зубчатых колес

Для устранения подрезания ножки зуба при нарезании колеса с числом зубьев менее  $z_{\min}$ , необходимо изменить взаимное расположение заготовки и режущего инструмента.

При нарезании колеса с помощью инструментальной рейки их относительное расположение может быть различным. Так, если модульная прямая рейки обкатывается по делительной окружности заготовки, то получится зубчатое колесо, у которого толщина зуба по делительной окружности равна ширине впадины. Такие колеса называют нарезанными без смещения (нулевыми или нормальными).

Если же по делительной окружности обкатывается любая другая прямая, то колесо называют нарезанным со смещением (*корригированным*). При этом, если модульная прямая смещена относительно делительной окружности от центра, то смещение называют *положительным*, если к центру, то – *отрицательным*.

Для устранения подрезания необходимо инструментальную рейку отодвинуть от центра заготовки, т. е. осуществить положительное корригирование.

Корригирование характеризуется величиной абсолютного и относительного сдвига

$$x = \xi m,$$

где  $x$  – абсолютный сдвиг инструментальной рейки, мм;  $\xi$  – коэффициент ее относительного сдвига. При положительной коррекции  $x$  и  $\xi > 0$ , при отрицательной коррекции  $x$  и  $\xi < 0$ .

Помимо устранения подрезания ножки зуба корригирование применяют также для изменения межцентрового расстояния в зубчатом зацеплении и упрочнения ножки зуба.

#### 4.18. Определение величины относительного сдвига при нарезании зубчатого колеса с числом зубьев меньше $z_{\min}$

Изобразим картину нарезания зубчатого колеса инструментальной рейкой, соответствующую подрезанию ножки зуба (рис. 4.20). Подрезание характеризуется тем, что начало практической линии зацепления (точка  $a$ ) выходит за пределы теоретической (левее точки  $M$ ).

Для устранения подрезания инструментальную рейку надо удалить от точки  $O$  на расстояние  $x$ . В этом случае начало практической линии зацепления (точка  $a'$ ) совпадает началом теоретической линии (точка  $M$ ).

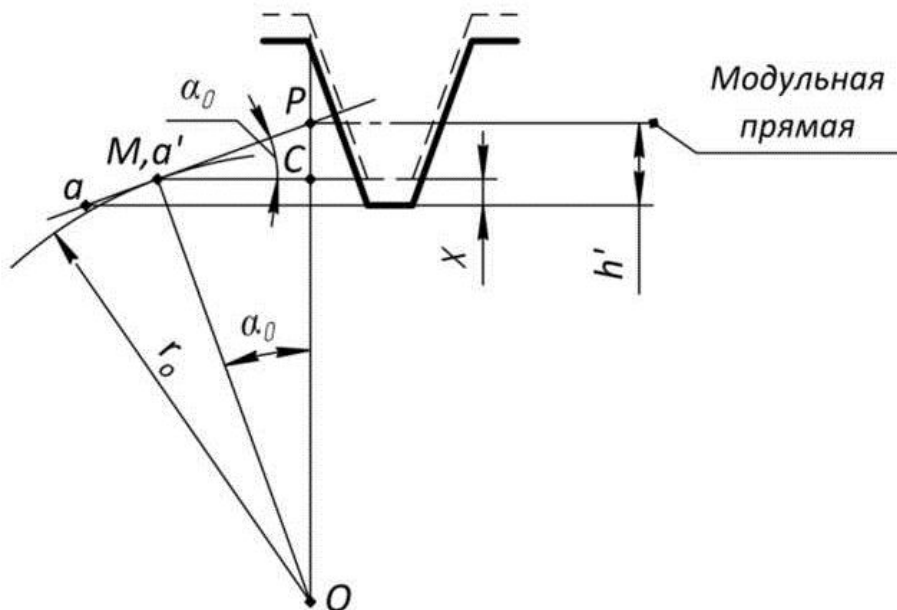


Рис. 4.20

Свяжем величину абсолютного сдвига с числом зубьев нарезаемого колеса. Из рисунка видно, что

$$x = h' - PC.$$

С учетом ранее полученных зависимостей:

$$\xi m = mf - \frac{mz}{2} \sin^2(\alpha_0).$$

Таким образом, при  $f=1$  величина относительного сдвига инструментальной рейки при нарезании зубчатого колеса с числом зубьев менее 17 определяется выражением:

$$\xi = f - \frac{z}{2} \sin^2(\alpha_0) \approx f - \frac{z}{17} = \frac{17f - z}{17}.$$

#### 4.19. Толщина зуба по делительной окружности для нормального и корригированного колеса

Очевидно, что при нарезании зубчатого колеса методом обката инструментальной рейкой толщина зуба по какой либо окружности колеса равна ширине впадины на прямой инструментальной рейке, касающейся этой окружности.

При нарезании нулевого колеса по делительной окружности перекачивается модульная прямая инструментальной рейки. Как было отмечено выше, по ней толщина зуба и ширина впадины одинаковы, следовательно, толщина зуба по делительной окружности нормального (нулевого) колеса равна половине шага инструментальной рейки, т. е.

$$S_d = \frac{t}{2} = \frac{\pi m}{2}.$$

У корригированного колеса по делительной окружности перекатывается прямая, смещенная относительно модульной на величину абсолютного сдвига  $x$ . В этой связи, задача определения толщины зуба по делительной окружности корригированного колеса сводится к задаче определения ширины впадины инструментальной рейки по этой прямой.

Предположим, что корригирование положительное, т. е.

делительной окружности касается прямая рейки расположенная ниже модульной на  $x$  мм (рис. 4.21). Определим по ней ширину впадины.

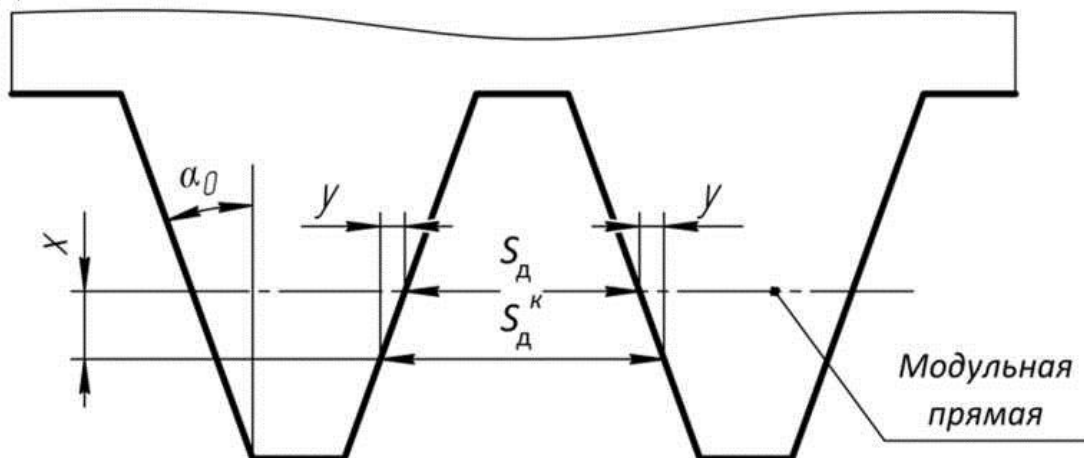


Рис. 4.21

Очевидно, что ширина  $S_d^k$  складывается из ширины  $S_d$  и двух отрезков длиной  $y$ . Из рисунка видно, что

$$y = x \cdot \operatorname{tg}(\alpha_0).$$

Тогда, толщина зуба по делительной окружности нарезаемого колеса:

$$S_d^k = S_d + 2y = S_d + 2x \cdot \operatorname{tg}(\alpha_0) = \frac{\pi m}{2} + 2x \cdot \operatorname{tg}(\alpha_0).$$

$$S_d^k = \frac{\pi m}{2} + 2\xi \cdot m \cdot \operatorname{tg}(\alpha_0) = m \left( \frac{\pi}{2} + 2\xi \cdot \operatorname{tg}(\alpha_0) \right).$$

Полученное выражение справедливо и для отрицательного корригирования, т. к. в нем  $\xi$  подставляется с учетом знака.

#### 4.20. Косозубое зацепление

Цилиндрические колеса, у которых зубья расположены по винтовым линиям на делительном диаметре, называют косозубыми (рис. 4.22, а). При работе такой передачи зубья входят в зацепление не сразу по всей своей длине (толщине колеса), как в прямозубой, а постепенно (рис. 4.22, б). В этой связи передаваемая нагрузка распределяется на несколько зубьев. В результате по сравнению с прямозубой повышается нагрузочная способ-

ность, увеличивается плавность работы передачи и уменьшается шум. Поэтому косозубые передачи имеют преимущественное распространение.

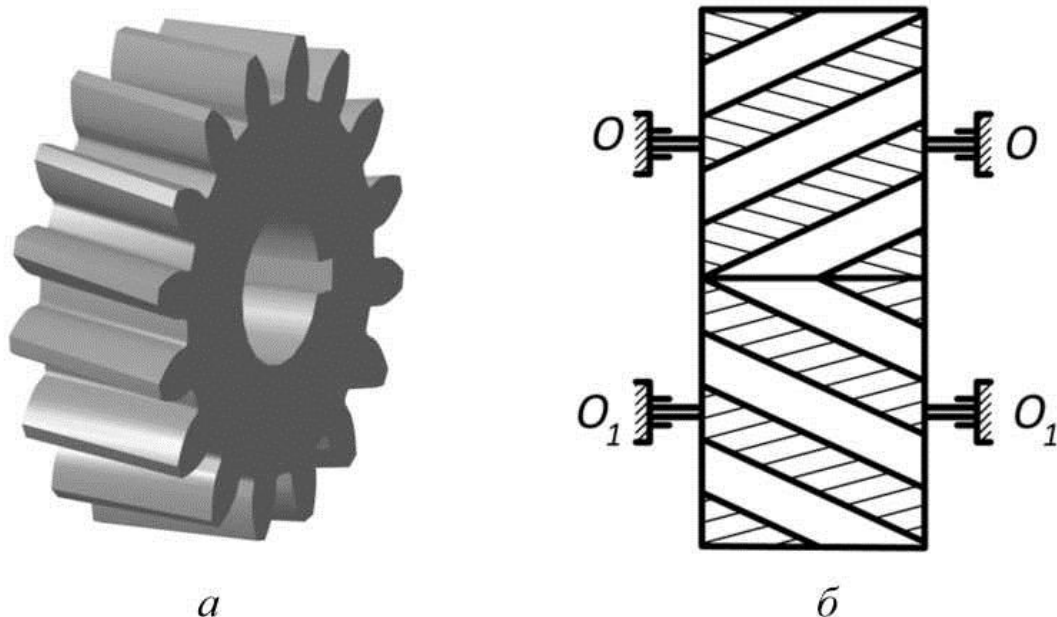


Рис. 4.22

Нарезаются колеса с косыми зубьями теми же методами что и колеса с прямыми зубьями. Отличие заключается лишь в том, что заготовка поворачивается относительно режущего инструмента на угол  $\beta$ , который может колебаться в пределах от  $8^\circ$  до  $35^\circ$ . Это приводит к тому, что зубья нарезаются не вдоль образующей, а под некоторым углом  $\beta$  к ней. Угол  $\beta$  называется углом скручивания или углом наклона.

Покажем схематично развертку обода косозубого колеса (рис. 4.23). В колесах с косыми зубьями различают *торцевой* или *окружной* шаг и *нормальный* шаг. *Торцевой* шаг ( $t$ ) получается при пересечении колеса плоскостью, перпендикулярной оси  $0-0$  вращения колеса в торцевом сечении, а нормальный ( $t_n$ ) – плоскостью, нормальной к винтовой линии. Связь между этими шагами, как следует из рисунка, имеет следующий вид:

$$t = \frac{t_n}{\cos(\beta)}$$

Соответственно, кроме торцевого модуля  $m$  имеется также нормальный модуль  $m_n$ , величина которого  $m_n = t_n/\pi$ . Нор-



мальный модуль выбирается по ГОСТу и соответствует модулю инструмента, которым нарезается колесо.

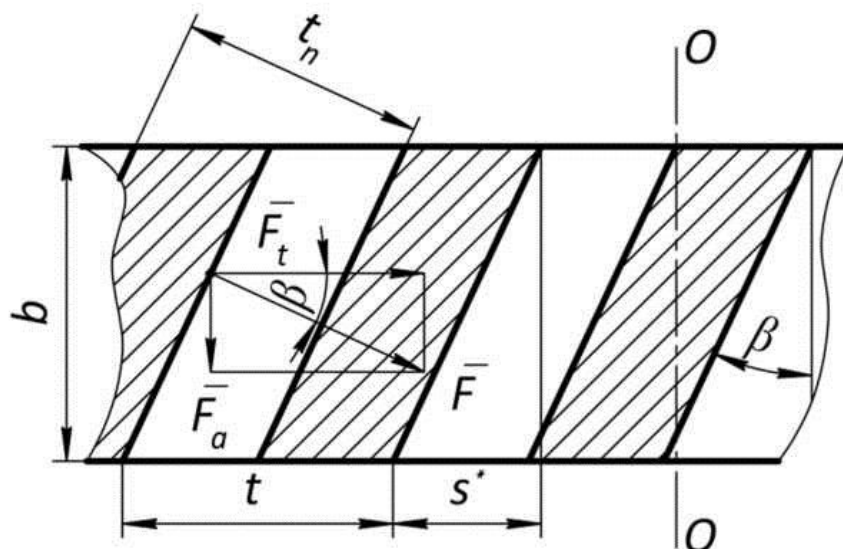


Рис. 4.23

Делительный диаметр косозубого колеса определяется по торцевому шагу:

$$D_d = mz = \frac{m_n z}{\cos(\beta)}$$

Длина дуги в косозубом зацеплении, по отношению дуге прямозубого зацепления, увеличивается на величину  $s^* = b \operatorname{tg}(\beta)$ ,  $b$  – длина зуба или толщина колеса (см. рис. 4.23). Коэффициент перекрытия увеличивается соответственно на

$$\varepsilon^* = \frac{s^*}{t} = \frac{b}{t} \operatorname{tg}(\beta)$$

Тогда, полный коэффициент перекрытия:

$$\varepsilon_{\Pi} = \varepsilon + \varepsilon^* = \varepsilon + \frac{b}{t} \operatorname{tg}(\beta)$$

где  $\varepsilon$  – коэффициент перекрытия для такого же зацепления, но с прямыми зубьями. На практике  $\varepsilon_{\Pi}$  доходит до 10 и выше, чем обеспечивается высокая плавность передачи.

Но наряду с указанными достоинствами косозубые колеса имеют серьезный недостаток. В результате винтового расположения зубьев возникает осевая составляющая  $\bar{F}_a$  силы  $\bar{F}$  (см. рис. 4.23). Она стремится сдвинуть колесо с валом вдоль оси вала и



связана с окружной составляющей  $\bar{F}_t$  соотношением:

$$F_a = F_t \operatorname{tg}(\beta).$$

В результате наличия осевой составляющей ( $\bar{F}_a$ ) приходится применять в конструкциях опорных узлов упорно-радиальные подшипники, которые воспринимали бы эти силы.

Для устранения указанного недостатка применяются колеса с шевронными зубьями, представляющими собой как бы два косозубых колеса с симметричным расположением зубьев. У этих колес осевые усилия взаимно уравниваются, и, следовательно, отпадает необходимость в установке опорных подшипников.

Для удобства шевронное колесо, как показано на рис. 4.24, изготавливают с промежуточным желобком посередине.

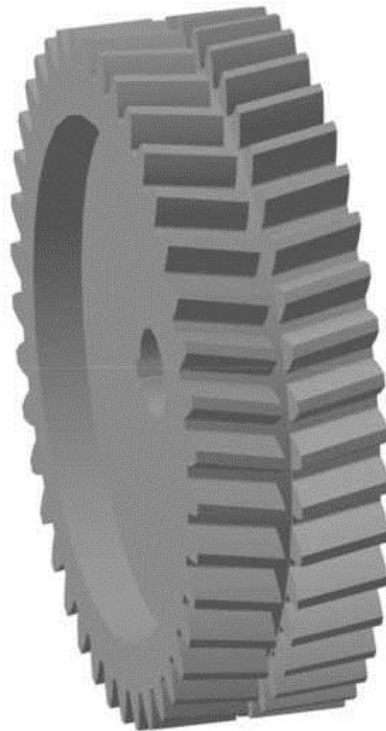


Рис. 4.24

В целом, косозубые колёса применяются в механизмах, требующих передачи большого крутящего момента на высоких скоростях, либо имеющих жёсткие ограничения по шумности.

## ГЛАВА 5. СИЛОВОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЗМА

Цель силового расчета – определение реакций, возникающих в кинематических парах и реакции со стороны отброшенного привода. Результаты силового расчета являются исходными данными при дальнейших расчетах звеньев на изгиб, кручение, сжатие и т. д.

Силовой расчет проводится на основании принципа Д’Аламбера: если к механизму, находящемуся в движении под действием внешних сил, приложить силы инерции, то его можно условно рассматривать, как находящийся в состоянии равновесия под действием системы внешних сил и сил инерции.

### 5.1. Классификация сил, действующих на звенья механизма

Систему сил, действующих на звенья механизма, можно представить в виде совокупности:

- движущих силы (их работа положительна);
- сил сопротивления (трение в кинематических парах, сила полезного сопротивления, для преодоления которой и разрабатывается механизм);
- сил инерции, являющихся следствием неравномерного движения звеньев.

### 5.2. Определение сил инерции

В общем случае действие сил инерции можно свести к главному вектору сил инерции  $\bar{F}^и = -m\bar{a}_s$ , приложенному к центру масс ( $s$ ) звена, и главному моменту сил инерции  $M^и = -\varepsilon J_s$ , где  $m$  – масса звена,  $a_s$  – ускорение его центра масс,  $\varepsilon$  – угловое ускорение звена,  $J_s$  – момент инерции звена относительно его центра масс (рис. 5.1, в). Знаки минус показывают, что вектор  $\bar{F}^и$  направлен противоположно вектору ускорения центра масс  $\bar{a}_s$ , а направление момента  $M^и$  противоположно направлению углового ускорения звена  $\varepsilon$ .

1. *Поступательное движение звена* (рис. 5.1, а).

Векторы ускорений всех точек тела равны как по модулю,

так и по направлению, т. е. для каждой точки тела  $\vec{F}_i^и = -m_i \vec{a}_i$ . В этом случае главный вектор сил инерции будет равен

$$\vec{F}^и = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^и = - \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i = -m \vec{a}_S,$$

где  $m_i, \vec{a}_i$  – масса и ускорение точки тела;  $m, \vec{a}_S$  – масса тела и ускорение его центра масс.

Так как при поступательном движении тела угловое ускорение отсутствует ( $\varepsilon = 0$ ), то главный момент сил инерции всегда равен нулю ( $M^и = 0$ ).

Возможен частный случай: при равномерном поступательном движении ( $a_s=0$ ) главный вектор будет равен нулю ( $\vec{F}^и=0$ ).

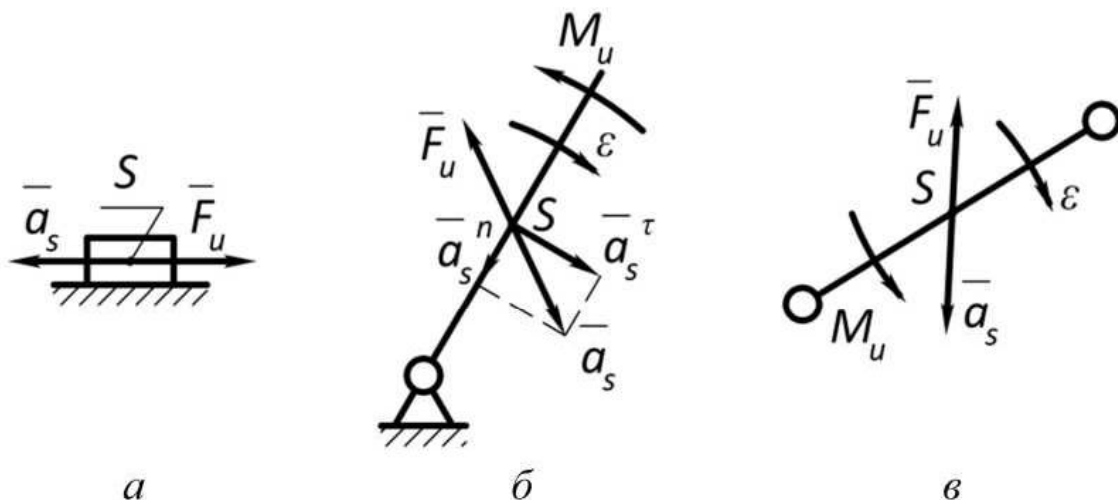


Рис. 5.1

2. *Вращательное движение* (рис. 5.1, б). Любая точка звена с элементарной массой  $m_i$ , расположенная на расстоянии  $r_i$  от оси вращения, имеет две составляющие ускорения ( $\vec{a}_i = \vec{a}_i^n + \vec{a}_i^\tau$ ), и, соответственно, две составляющие силы инерции ( $\vec{a}_i^\tau = r_i \varepsilon$ ,  $\vec{a}_i^n = -r_i \omega^2$ ,  $\omega$  – угловая скорость вращения звена). Действие всех сил инерции можно свести к главному вектору и главному моменту:

$$\vec{F}^и = -m \vec{a}_S, \quad M^и = -\varepsilon J_S.$$

Момент инерции звена  $J_S$  – относительно его центра масс задается или рассчитывается. Так, например, для однородного стержня длиной  $l$  его значение равно  $J_S = 1/12 m l^2$ .

Частные случаи:

$\bar{F}^n=0$  - ось вращения звена проходит через его центр масс;

$M^n=0$  - звено равномерно вращается, т. е.  $\omega=\text{const}$ .

3. *Плоскопараллельное движение* (рис. 5.1, в). Силы инерции так же сводят к главному вектору сил инерции и главному моменту сил инерции. Методика их расчета та же, что и для вращательного движения.

Частные случаи:

$\bar{F}^n=0$  – центр масс звена движется равномерно и прямолинейно;

$M^n=0$  – звено равномерно вращается, т. е.  $\omega=\text{const}$ .

### 5.3. Статическая определимость кинематических цепей

Пусть кинематическая цепь, находящаяся в равновесии, включает в себя  $n$  подвижных звеньев, соединенных между собой кинематическими парами 5-го класса. Общее количество кинематических пар 5-го класса в цепи равно  $p_5$ . Известно, что для каждого звена можно записать три уравнения равновесия

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \quad \sum M(\bar{F}_k) = 0.$$

Таким образом, для всей кинематической цепи общее число составленных уравнений равновесия -  $3n$ .

При разрушении каждой вращательной кинематической пары действие отброшенного звена заменяется двумя неизвестными по величине взаимно перпендикулярными составляющими реакции связи (рис. 5.2, а), точки приложения и линии действия которых определены ( $\vec{R}_{21} = \vec{R}_{21}^n + \vec{R}_{21}^\tau$ ).

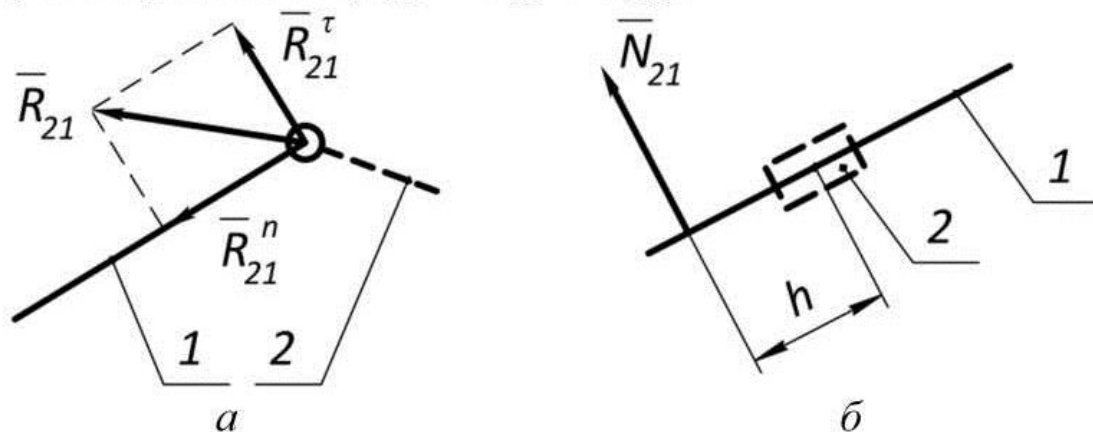


Рис. 5.2

При разрушении поступательной кинематической пары действие отброшенного камня или ползуна заменяется одной неизвестной по величине реакцией  $\vec{N}_{21}$ , направленной перпендикулярно линии кулисы и смещенной относительно точки  $A$  на неизвестное расстояние  $h$  (рис. 5.2, б).

Таким образом, при разрушении любой кинематической пары 5-го класса получаем два неизвестных параметра: для вращательной кинематической пары – две неизвестные по величине силы, а для поступательной кинематической пары – силу и момент или силу и плечо. В результате разрушения всех кинематических пар 5-го класса количество неизвестных будет  $2p_5$ .

Кинематическая цепь считается статически определимой, если в ней число неизвестных реакций соответствует числу записанных для нее уравнений равновесия, т. е. удовлетворять условию  $3n=2p_5$ .

Этому условию удовлетворяют кинематические цепи, являющиеся группами Ассура. Вывод: группы Ассура – статически определимые кинематические цепи.

#### 5.4. Последовательность силового расчета

Силовой расчет механизма проводится по следующей схеме:

- изображается кинематическая схема механизма в исследуемом положении;
- строятся планы скоростей и ускорений;
- обозначаются на чертеже центры масс звеньев;
- рассчитывается вес каждого звена (весом камней и ползунков пренебрегают);
- рассчитываются главные векторы сил инерции. Ускорения центров масс звеньев определяются по теореме подобия из построенных планов ускорений;
- рассчитываются главные моменты сил инерции звеньев;
- задаются силой полезного сопротивления;
- обозначаются на кинематической схеме механизма все найденные силы с учетом точек их приложения и линий действия и моменты;

- реакция от отброшенного привода учитывается в виде уравновешивающей силы ( $P_{уп}$ ), приложенной к ведущему звену;
- начиная с группы Ассура, включающей выходное (ведомое) звено, проводится кинестатический расчет, при этом отброшенные связи заменяются реакциями;
- после расчета одной группы Ассура производится переход к следующей. Действие предыдущей группы Ассура учитывается в виде известной силы;
- после расчета всех групп Ассура проводят кинестатику ведущего звена.

### 5.5. Динамическая модель и расчетная схема группы Ассура II класса внешней поступательной парой

Изобразим динамическую модель группы Ассура (рис. 5.3), т. е. кинематическую цепь с действующими на неё внешними силами и реакциями отброшенных связей. Введем следующие обозначения:  $G_2$  – вес второго звена;  $F_2^u, M_2^u$  – главный вектор и главный момент сил инерции второго звена;  $P_{nc}$  – сила полезного сопротивления;  $a$  – расстояние от точки приложения силы  $P_{nc}$  до направляющей движения камня  $B$ ;  $N_{03}, h_N$  – реакция на звено 3 со стороны направляющей и неизвестное расстояние от точки ее приложения до точки  $B$ ;  $R_{12}^n, R_{12}^t$  – нормальная и касательная составляющие реакции в точке  $A$  со стороны звена 1.

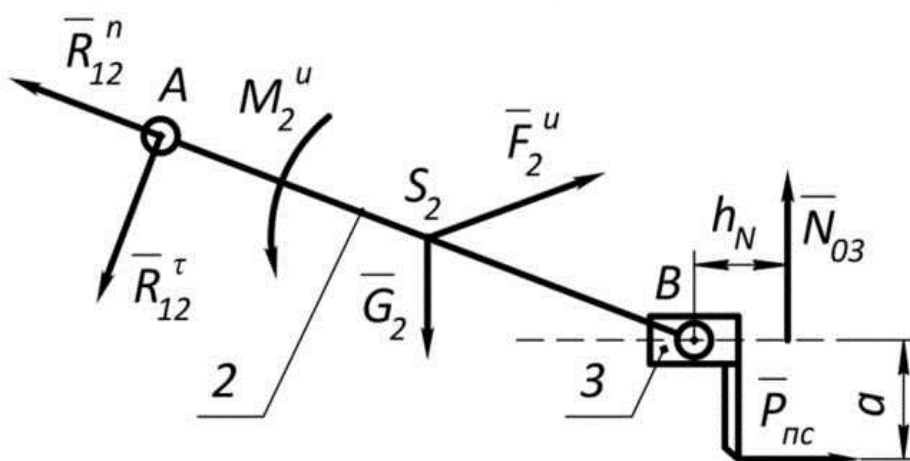


Рис. 5.3

Изобразим также динамические модели звеньев 2 и 3 (рис. 5.4), где  $R_{23}^n$ ,  $R_{23}^\tau$  и  $R_{32}^n$ ,  $R_{32}^\tau$  – взаимно уравнивающие друг друга составляющие реакции во внутренней кинематической паре рассматриваемой группы Ассра.

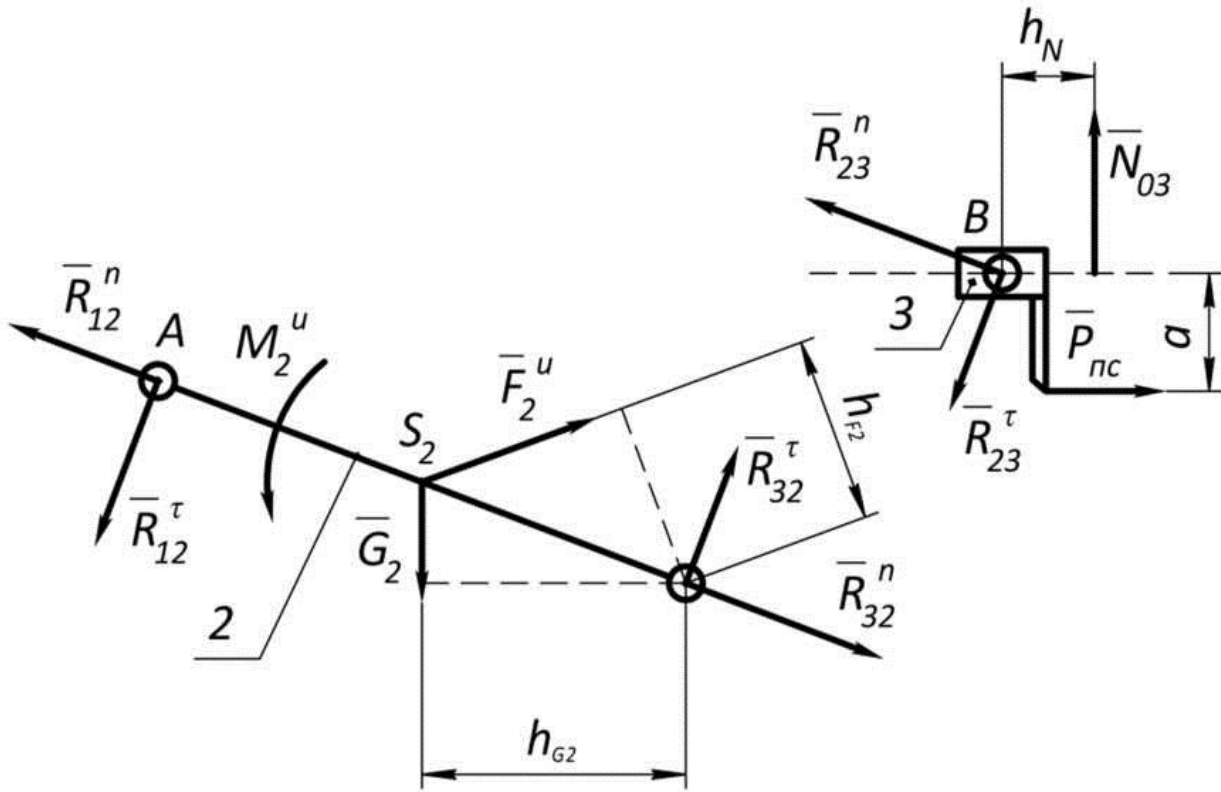


Рис. 5.4

Группа Ассра можно рассчитать в следующей последовательности:

1) Записать уравнение моментов всех сил, действующих на звено 2 относительно точки  $B$ :

$$\sum m_B(\bar{F}_i) = G_2 h_{G2} + R_{12}^\tau l_{AB} - F_2^u h_{F2} + M_2^u = 0,$$

где  $l_{AB}$ ,  $h_{G2}$ ,  $h_{F2}$  – размеры с плана механизма с учетом масштабного коэффициента  $\mu_L$ , например,  $l_{AB} = AB \cdot \mu_L$ .

Откуда получим

$$R_{12}^\tau = \frac{(-G_2 h_{G2} + F_2^u h_{F2} - M_2^u)}{l_{AB}}.$$

2) Записать уравнение равновесия в векторной форме для всей группы Ассра:

$$\sum \bar{F}_i = \underline{\underline{\bar{R}_{12}^{\tau}}} + \underline{\underline{\bar{G}_2}} + \underline{\underline{\bar{F}_2^u}} + \underline{\underline{\bar{P}_{пс}}} + \underline{\underline{\bar{R}_{12}^n}} + \underline{\underline{\bar{N}_{03}}} = 0.$$

Решить это уравнение графически, построив план сил.

Приняв масштабный коэффициент  $[\mu_F] = \left[ \frac{H}{\text{мм}} \right]$ , рассчитать длины векторов (мм) известных по величине сил, разделив численное значение сил ( $H$ ) на величину  $\mu_F$ . План сил целесообразно строить так, чтобы в силовом многоугольнике сначала были отложены все силы, приложенные к одному звену, а затем к другому. Решение уравнения представлено на рис. 5.5.

Из построенного плана получим численные значения неизвестных реакций:

$$R_{12}^n = [\bar{R}_{12}^n] \cdot \mu_F, \quad N_{03} = [\bar{N}_{03}] \cdot \mu_F \quad \text{и} \quad R_{12} = [\bar{R}_{12}] \cdot \mu_F.$$

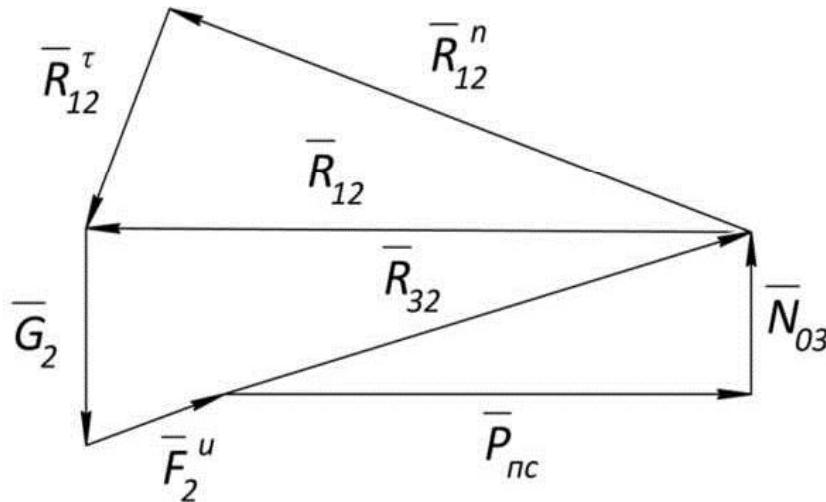


Рис. 5.5

3) Записать уравнение равновесия в векторной форме для звена 2:

$$\sum \bar{F}_i = \underline{\underline{\bar{R}_{12}^n}} + \underline{\underline{\bar{R}_{12}^{\tau}}} + \underline{\underline{\bar{G}_2}} + \underline{\underline{\bar{F}_2^u}} + \underline{\underline{\bar{R}_{32}}} = 0.$$

При его графическом решении можно воспользоваться выше построенным планом сил.

Из него найдем величину  $R_{32} = [\bar{R}_{32}] \cdot \mu_F$  и направление неизвестной реакции.



4) Записать уравнение моментов всех сил, действующих на звено 3 относительно точки  $B$ :

$$\sum m_B(\bar{F}_i) = N_{03}h_N + P_{\text{ПС}} \cdot a = 0.$$

В результате получим последнюю неизвестную:

$$h_N = -\frac{P_{\text{ПС}} \cdot a}{N_{03}}.$$

### 5.6. Кинетостатика ведущего звена

Ведущее звено под действием внешних сил и сил инерции не находится в состоянии равновесия, так как его степень подвижности  $W=1$ . Для его уравнивания необходимо учесть реакцию со стороны привода. Данная реакция учитывается в виде уравнивающей силы ( $P_{\text{уп}}$ ), если ведущее звено соединяется с приводом при помощи редуктора, или уравнивающего момента ( $M_{\text{уп}}=P_{\text{уп}} \cdot l_{OA}$ ), в случае соединения ведущего звена с приводом посредством муфты. Динамическая модель ведущего звена показана на рис. 5.6,  $a$ .

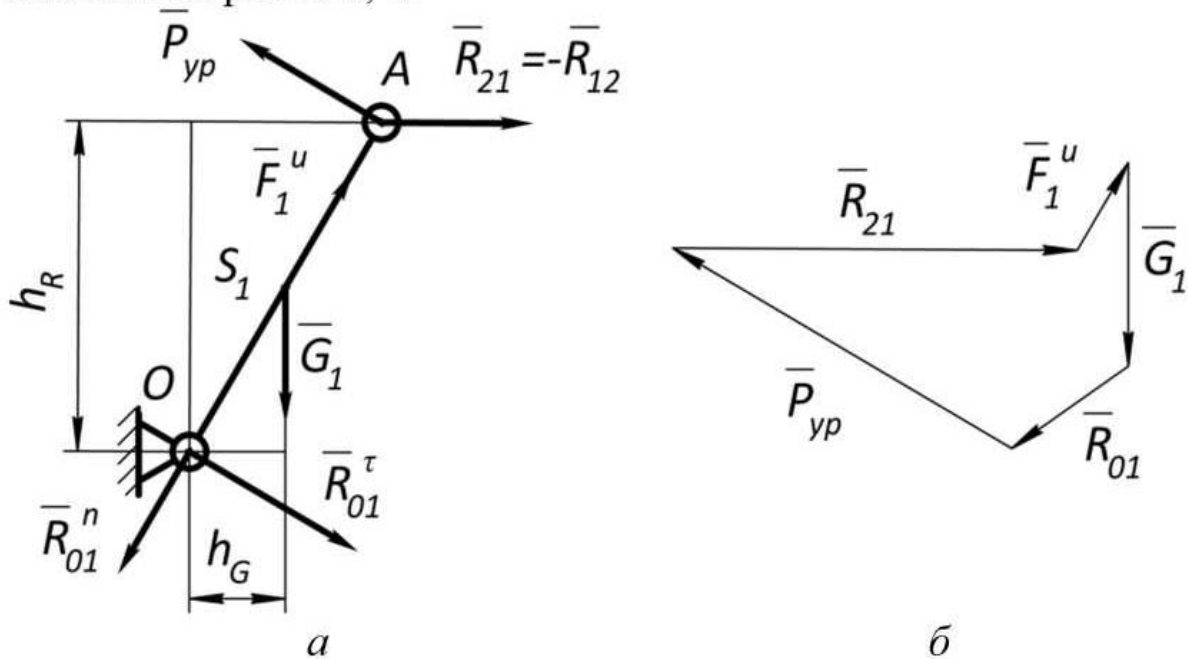


Рис. 5.6

Расчет ведущего звена проводится в следующей последовательности:

- записывается уравнение моментов сил относительно точки  $O$ . Из него находят величины  $P_{ур}$  или  $M_{ур}$ , где  $M_{ур} = P_{ур} \cdot l_{OA}$ ;
- записывается уравнение равновесия в векторной форме. В результате его графического решения находят реакцию  $R_{01}$  как по величине, так и по направлению.

Для схемы, показанной см. рис. 5.6, а, эти уравнения имеют вид

$$\sum m_O(\bar{F}_i) = P_{ур} l_{OA} - G_1 h_G - R_{21} h_R = 0,$$

$$\sum \bar{F}_i = \underline{\underline{\bar{R}_{21}}} + \underline{\underline{\bar{F}_1^и}} + \underline{\underline{\bar{G}_1}} + \underline{\underline{\bar{P}_{ур}}} + \underline{\underline{\bar{R}_{01}}} = 0.$$

Построенный план сил показан на рис. 5.6, б.

### 5.7. Определение требуемой мощности электродвигателя

Для решения этой задачи необходимо определить численные значения уравновешивающего момента  $M_{ур}$  для 10-12 равноотстоящих положений механизма. В результате строится зависимость  $M_{ур}(\varphi)$  (рис. 5.7).

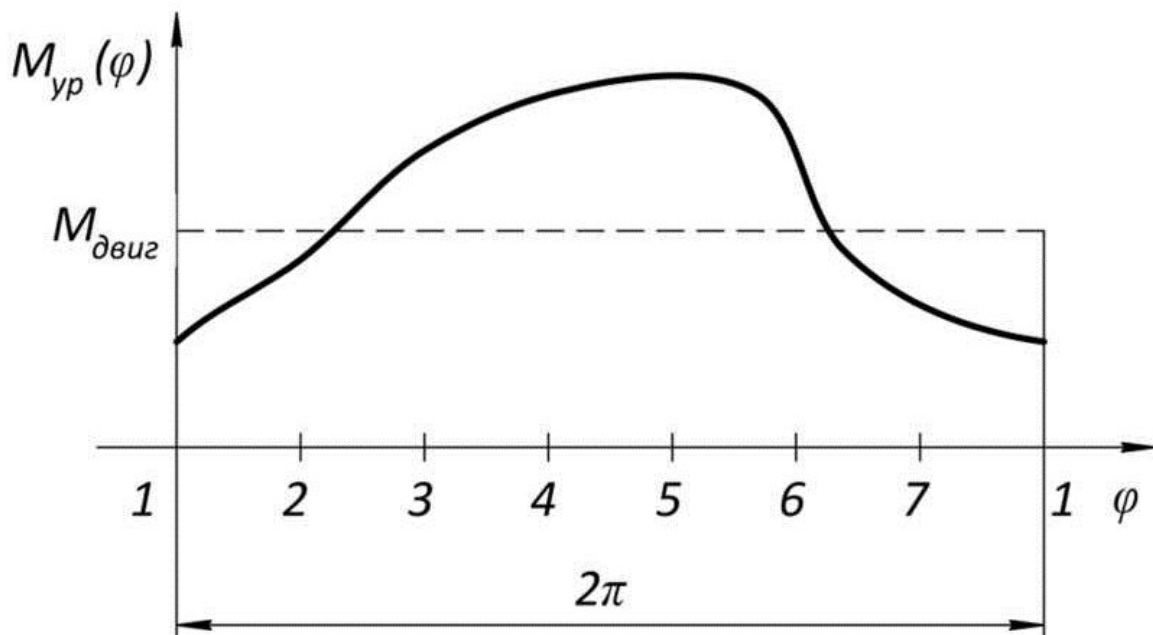


Рис. 5.7

Значение момента двигателя  $M_{\text{двиг}}$  выбирают по среднему значению функции  $M_{\text{ур}}(\varphi)$ . При этом должно выполняться соотношение:

$$A(M_{\text{двиг}}) = A(M_{\text{ур}}) = \int_0^{2\pi} M_{\text{ур}} d\varphi,$$

где  $A(M_{\text{двиг}})$  и  $A(M_{\text{ур}})$  – соответственно работы моментов  $M_{\text{двиг}}$  и  $M_{\text{ур}}$ .

Требуемую мощность электродвигателя определяют из уравнения:

$$N_{\text{двиг}} = M_{\text{двиг}} \cdot \omega_1.$$

### 5.8. Теорема Жуковского о «жестком рычаге»

Теорема Жуковского выведена на основании совместного применения принципа Д'Аламбера и принципа возможных перемещений. Она позволяет определить реакцию со стороны отброшенного электродвигателя без проведения кинестатического расчета механизма.

Теорема. Если механизм под действием внешних сил и сил инерции находится в равновесии, то в равновесии будет находиться и его план скоростей, рассматриваемый как жесткий рычаг, шарнирно закрепленный в полюсе и повернутый на  $90^\circ$ , к которому в одноименных точках приложены все силы, действующие на звенья механизма.

Пусть точка  $A$  движется со скоростью  $\bar{V}_A$  под действием приложенной к ней силы  $\bar{F}$  (рис. 5.8,  $a$ ).

Рассчитаем элементарную работу силы  $\bar{F}$  на перемещении  $dS_A$

$$dA(\bar{F}) = F \cdot dS_A \cdot \cos(\alpha). \quad (5.1)$$

Мгновенная мощность силы  $\bar{F}$ :

$$N(\bar{F}) = F \cdot V_A \cdot \cos(\alpha). \quad (5.2)$$

Определим момент силы  $F$  относительно повернутого на  $90^\circ$  плана скоростей (рис. 5.8, б).

$$m_p(\bar{F}) = F \cdot h = F \cdot pa \cdot \cos(\alpha), \quad (5.3)$$

где  $\alpha = \alpha'$  по свойству углов, лежащих между взаимно перпендикулярными сторонами.

Сравнивая (5.1), (5.2) и (5.3), отметим пропорциональность левых частей уравнений, ввиду пропорциональности их правых частей, т. е.  $dA(\bar{F}) \sim N(\bar{F}) \sim m_p(\bar{F})$ .

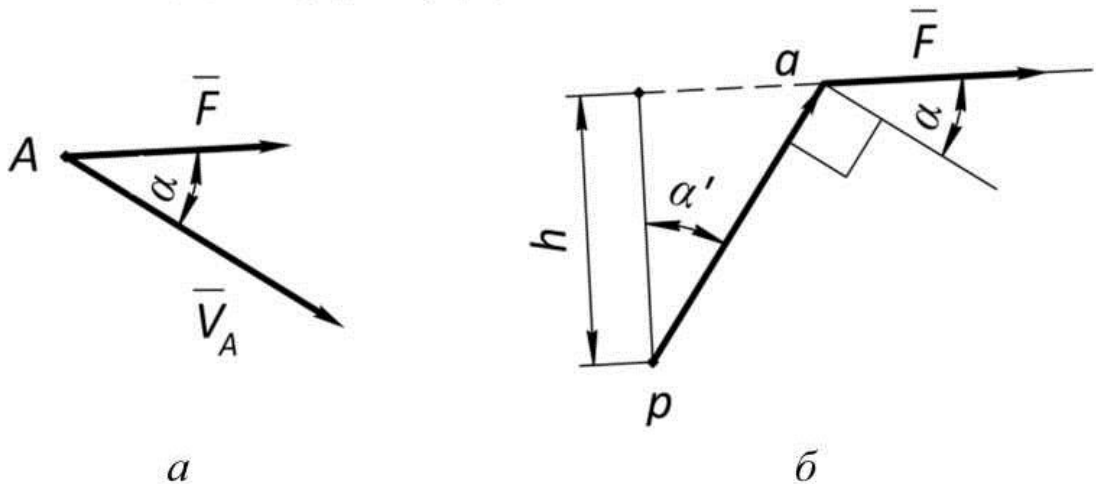


Рис. 5.8

На основании принципа возможных перемещений, примененного совместно с принципом Д'Аламбера, получим:

$$\sum_{i=1}^n dA(\bar{F}_i) = 0,$$

тогда по свойству пропорциональности

$$\sum_{i=1}^n m_p(\bar{F}_i) = 0.$$

Следовательно, повернутый на  $90^\circ$  план скоростей по отношению к своему полюсу не вращается, т. е. находится в равновесии.

Отметим свойства «рычага Жуковского»:

- план скоростей строится в любом масштабном коэффициенте;

- план скоростей можно не поворачивать, а повернуть все силы в одну сторону на  $90^\circ$ ;

- моменты от сил инерции раскладываются на пары сил.

Рассмотрим пример определения уравнивающей силы для механизма, показанного на рис. 5.9, а, с помощью «рычага Жуковского».

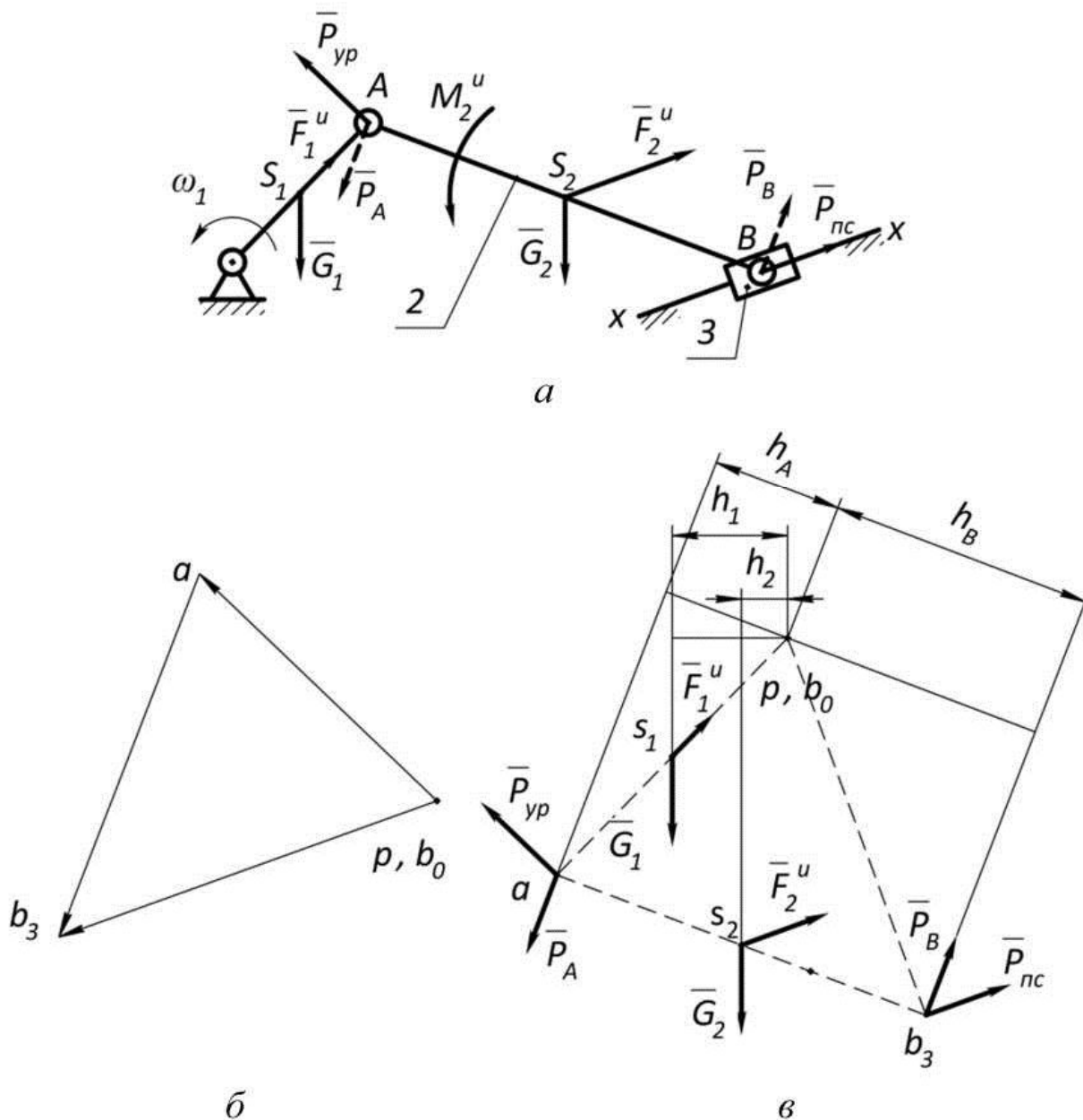


Рис. 5.9

Показываем на плане механизма все внешние силы и силы инерции.

Момент сил инерции  $M_2^H$  раскладываем на пару сил, приложенных в точках  $A$  и  $B$ , причем  $P_A = P_B = M_2^H / l_{AB}$ , с сохранением направления  $M_2^H$ . Строим план скоростей механизма (рис. 5.9, б), в соответствии с векторными уравнениями, представленными в таблице.

Таблица

I	J	Тип	Уравнения для точки $B_2$	Объединенные уравнения
$B_2$	$A$	1	$\vec{V}_{B_2} = \vec{V}_A + \vec{V}_{B_2A}$	$\frac{\vec{V}_A}{\perp OA} + \frac{\vec{V}_{B_2A}}{\perp BA} = \frac{\vec{V}_{B_2}}{=0} + \frac{\vec{V}_{B_2B_0}}{\parallel xx}$
	$B_0$	2	$\vec{V}_{B_2} = \vec{V}_{B_0} + \vec{V}_{B_2B_0}$	

Поворачиваем план скоростей на  $90^\circ$  против часовой стрелки относительно полюса. Прикладываем к одноименным точкам плана все силы, действующие на звенья механизма (рис. 5.9, в).

Записываем сумму моментов всех сил относительно полюса:

$$-G_1 \cdot h_1 - P_{ур} \cdot pa - P_A \cdot h_A - G_2 \cdot h_3 + P_{ПС} \cdot pb_3 + P_B \cdot h_B = 0,$$

где  $h_1, h_A, h_3, h_B$  – соответственно плечи сил  $G_1, P_A, G_2, P_{ПС}, P_B$ .

Из полученного уравнения находим  $P_{ур}$ :

$$P_{ур} = \frac{(-G_1 \cdot h_1 - P_A \cdot h_A - G_2 \cdot h_3 + P_{ПС} \cdot pb_3 + P_B \cdot h_B)}{pa}.$$

## ГЛАВА 6. ДИНАМИКА МАШИН

### 6.1. Физическая и математическая модель машины

До сих пор мы исследовали движение механизмов без учета сил, действующих на его звенья, считая  $\omega_1$  постоянной.

Из диаграммы выбора требуемой мощности электродвигателя видно, что почти в любой момент времени уравнивающий момент не равен моменту двигателя ( $M_{\text{двиг}} \neq M_{\text{ур}}$ ), т. е. усилие со стороны привода не соответствует реакции, которую необходимо приложить к входному звену для его уравнивания. Это несоответствие обуславливает колебания угловой скорости входного звена.

Известно, что закон движения входного звена определяет закон движения всех его звеньев. В этой связи математическую модель механизма или машины можно свести к математической модели движения одного входного звена. Для этого нужно все силы, действующие на все звенья механизма, привести к нему, наделив его приведенной массой.

Физическая модель механизма может быть сведена к двум схемам приведения (рис. 6.1).

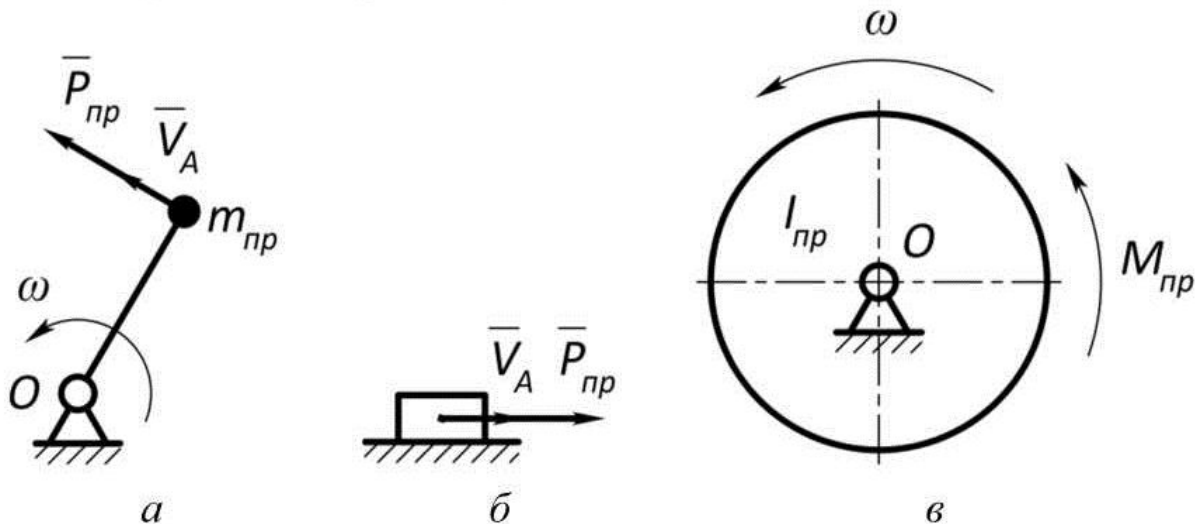


Рис. 6.1

Для первой схемы (см. рис. 6.1, *a* и *б*) задача моделирования сводится к определению закона изменения приведенной силы ( $P_{\text{пр}}$ ) и приведенной массы ( $m_{\text{пр}}$ ).

Для второй схемы (см. рис. 6.1, в) необходимо получить закономерности изменения приведенного момента ( $M_{пр}$ ) и приведенного момента инерции ( $I_{пр}$ ). Эти величины зависят не только от сил и моментов сил, приложенных к звеньям механизма, но и являются функциями положения механизма.

## 6.2. Определение приведенной силы

Определим элементарную работу всех сил и моментов, действующих на звенья механизма:

$$\sum_{i=1}^n dA(\bar{F}_i) = \sum_{i=1}^n (F_i dS_i \cos(\alpha_i) + M_i d\varphi_i),$$

где  $F_i$  – сила, приложенная к  $i$ -той точке звена механизма;  $S_i$  – перемещение точки приложения силы;  $\alpha_i$  – угол между вектором силы и вектором скорости точки приложения силы.

Заменим работу всех сил и моментов работой одной приведенной силы, приложенной к точке  $A$  (см. рис. 6.1, а и б), тогда

$$P_{пр} dS_A \cos(0) = \sum_{i=1}^n (F_i dS_i \cos(\alpha_i) + M_i d\varphi_i).$$

Обе части уравнения разделим на  $dt$ . В результате:

$$P_{пр} V_A = \sum_{i=1}^n (F_i V_i \cos(\alpha_i) + M_i \omega_i),$$

отсюда

$$P_{пр} = \sum_{i=1}^n \left( F_i \frac{V_i}{V_A} \cos(\alpha_i) + M_i \frac{\omega_i}{V_A} \right).$$

*Приведенной силой* называется условная сила, приложенная к точке приведения, лежащей на ведущем звене, элементарная работа или мощность которой равна сумме элементарных ра-



бот или мощностей сил и моментов сил, действующих на звенья механизма.

### 6.3. Определение приведенного момента

Аналогично заменим элементарную работу всех сил и моментов работой одного приведенного момента, приложенного к входному звену (см. рис. 6.1, в).

$$M_{\text{пр}} d\varphi_1 = \sum_{i=1}^n (F_i dS_i \cos(\alpha_i) + M_i d\varphi_i),$$

$$M_{\text{пр}} \omega_1 = \sum_{i=1}^n (F_i V_i \cos(\alpha_i) + M_i \omega_i),$$

$$M_{\text{пр}} = \sum_{i=1}^n \left( F_i \frac{V_i}{\omega_1} \cos(\alpha_i) + M_i \frac{\omega_i}{\omega_1} \right).$$

*Приведенным моментом* называется условный момент, приложенный к ведущему звену, элементарная работа или мощность которого равна сумме элементарных работ или мощностей сил и моментов сил, действующих на звенья механизма.

### 6.4. Кинетическая энергия механизма. Приведенная масса и приведенный момент инерции

Кинетическая энергия звена, совершающего плоское движение, складывается из двух составляющих – поступательной и вращательной:

$$T_{\text{зв}} = \frac{m_{\text{зв}} V_{\text{зв}}^2}{2} + \frac{I_S \omega_{\text{зв}}^2}{2}.$$

Тогда кинетическая энергия механизма включающего  $n$  подвижных звеньев определится уравнением:

$$T = \sum_{i=1}^n T_{\text{зв}} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{m_i V_{Si}^2}{2} + \frac{I_{Si} \omega_i^2}{2} \right),$$

где  $V_{Si}$  – линейная скорость центра масс звена,  $m_i$  – масса звена;  $I_{Si}$  – момент инерции звена относительно его центра масс;  $\omega_i$  – угловая скорость звена.

Умножив правую часть уравнения на  $\frac{V_A^2}{V_A^2}$  и проведя преобразования, получим:

$$T = \frac{V_A^2}{2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{m_i V_{Si}^2}{V_A^2} + \frac{I_{Si} \omega_i^2}{V_A^2} \right),$$

где  $V_A$  – скорость точки приведения.

Заметим, что слагаемые в скобках имеют размерность массы. Тогда, кинетическая энергия механизма:

$$T = \frac{m_{\text{пр}} V_A^2}{2},$$

где приведенная масса

$$m_{\text{пр}} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{m_i V_{Si}^2}{V_A^2} + \frac{I_{Si} \omega_i^2}{V_A^2} \right).$$

*Приведенной массой* называется условная масса, сосредоточенная в точке приведения входного звена, кинетическая энергия которой равна сумме кинетических энергий звеньев механизма.

Для случая вращательного движения входного звена.

$$V_A = \omega_1 l_{OA},$$

$$T = \frac{m_{\text{пр}} \omega_1^2 l_{OA}^2}{2} = \frac{\omega_1^2 I_{\text{пр}}}{2},$$

где

$$I_{\text{пр}} = m_{\text{пр}} l_{OA}^2.$$

Под *приведенным моментом инерции* входного звена понимают его условный момент инерции, обладая которым оно имеет кинетическую энергию, равную сумме кинетических энергий всех звеньев механизма.

## 6.5. Уравнение движения машины

После приведения всех сил, моментов сил, масс и моментов инерции звеньев к входному звену задача исследования движения механизма свелась к задаче исследования движения входного звена. По теореме об изменении кинетической энергии получим:

$$\frac{I_{\text{пр}1} \omega_1^2}{2} - \frac{I_{\text{пр}0} \omega_0^2}{2} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M_{\text{пр}} d\varphi.$$

В то же время

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M_{\text{пр}} d\varphi = A_{\text{дв}} - A_{\text{сопр}},$$

где  $\omega_1$  и  $\omega_0$  – угловые скорости входного звена в начальном и конечном положениях;  $M_{\text{пр}}$  – приведенный момент сил;  $A_{\text{дв}}$  – работа движущих сил;  $A_{\text{сопр}}$  – работа сил сопротивления.

В итоге получим основное уравнение движения машины:

$$\Delta T = A_{\text{дв}} - A_{\text{сопр}} \quad \text{или} \quad \frac{I_{\text{пр}1} \omega_1^2}{2} - \frac{I_{\text{пр}0} \omega_0^2}{2} = A_{\text{дв}} - A_{\text{сопр}}.$$

## 6.6. Различные режимы движения машины

Определим угловую скорость входного звена в произвольный момент времени из основного уравнения движения машины:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2(A_{\text{дв}} - A_{\text{сопр}}) + I_{\text{пр}0} \omega_0^2}{I_{\text{пр}1}}}.$$

Так как  $A_{\text{дв}} - A_{\text{сопр}} \neq \text{const}$ , то  $\omega_1$  является переменной величиной.

В работе машины различают три периода (рис. 6.2).

Первый период - разбега или пуска ( $t_1$ ). В нем  $\omega$  изменяется от 0 до номинального значения

$$\frac{I_{\text{пр}1} \omega_1^2}{2} = A_{\text{дв}} - A_{\text{сопр}}.$$

В течение всего периода на любом временном интервале работа движущих сил превышает работу сил сопротивления  $A_{дв} > A_{сопр}$ .

Второй период – период установившегося движения ( $t_2$ ). Здесь возможны два режима:

- равномерно-установившийся, когда  $\omega = \text{const}$  и для любого интервала времени работа движущих сил равна работе сил сопротивления ( $A_{дв} = A_{сопр}$ );

- неравномерно-установившийся. В этом режиме угловая скорость изменяется, однако можно выделить временной интервал  $t_{ц}$  по истечении которого динамические характеристики машины повторяются. Значение  $t_{ц}$  соответствует времени одного оборота входного звена. В этом режиме для произвольного интервала времени работа движущих сил не равна работе сил сопротивления, однако за весь временной интервал  $t_{ц}$  работа движущих сил и работа сил сопротивления равны ( $A_{дв} = A_{сопр}$ ).

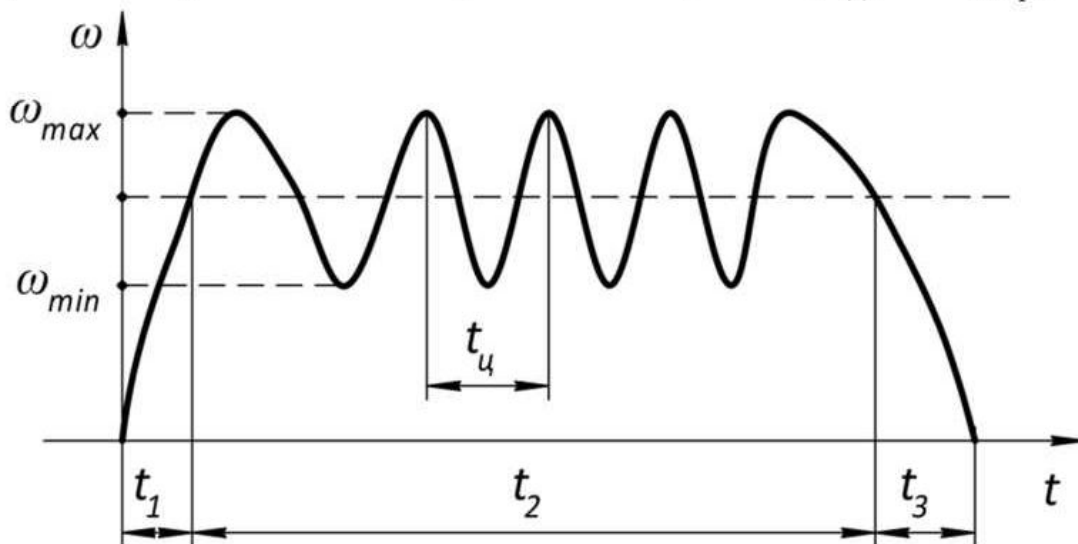


Рис. 6.2

Третий период - выбега или останова ( $t_3$ ). Для него работа движущих сил равна нулю ( $A_{дв} = 0$ ) и скорость в конце периода также равна нулю ( $\omega_1 = 0$ ). Следовательно, уравнение движения имеет вид

$$-\frac{I_{пр0}\omega_0^2}{2} = -A_{сопр}.$$

## 6.7. Средняя угловая скорость и коэффициент неравномерности движения входного звена

Средняя угловая скорость  $\omega_{\text{ср}}$  и коэффициент неравномерности  $\delta$  движения входного звена - основные характеристики машинного агрегата. Они определяются уравнениями:

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{\omega_{\text{max}} + \omega_{\text{min}}}{2}, \quad \delta = \frac{\omega_{\text{max}} - \omega_{\text{min}}}{\omega_{\text{ср}}}.$$

Коэффициент неравномерности движения  $\delta$  характеризует плавность работы машины. Малые значения  $\delta$  соответствуют меньшим колебаниям угловой скорости, а следовательно и меньшим динамическим нагрузкам на фундамент.

Проектируя определенный класс машин, необходимо обеспечивать для этого класса машин колебание  $\omega$  в заданных пределах, которые выработаны многолетней инженерной практикой. Для некоторых видов машин значения  $\delta$  приведены в таблице.

Таблица

Виды машин	Коэффициент $\delta$
1. Машины ударного действия (дробилки, пожницы)	0,1...0,033
2. Насосы, компрессоры	0,02...0,04
3. Текстильные машины	0,04...0,01
4. Генераторы, электродвигатели	0,01...0,0033
5. Турбины летательных аппаратов	~0,001

Через заданные значения  $\omega_{\text{ср}}$  и  $\delta$  легко получить значения  $\omega_{\text{max}}$  и  $\omega_{\text{min}}$

$$\omega_{\text{max}} = \omega_{\text{ср}} \left( 1 + \frac{\delta}{2} \right), \quad \omega_{\text{min}} = \omega_{\text{ср}} \left( 1 - \frac{\delta}{2} \right).$$

Отличие  $\omega_{\text{max}}$  от  $\omega_{\text{min}}$  не превышает, как правило, 2 %.

## 6.8. Диаграмма энергомасс

Диаграмма энергомасс – основная характеристика машинного агрегата. Она представляет собой зависимость кинетической энергии механизма как функцию приведенного момента инерции –  $T = T(I_{пр})$  (рис. 6.3). Для одного оборота ведущего звена диаграмма имеет замкнутую форму.

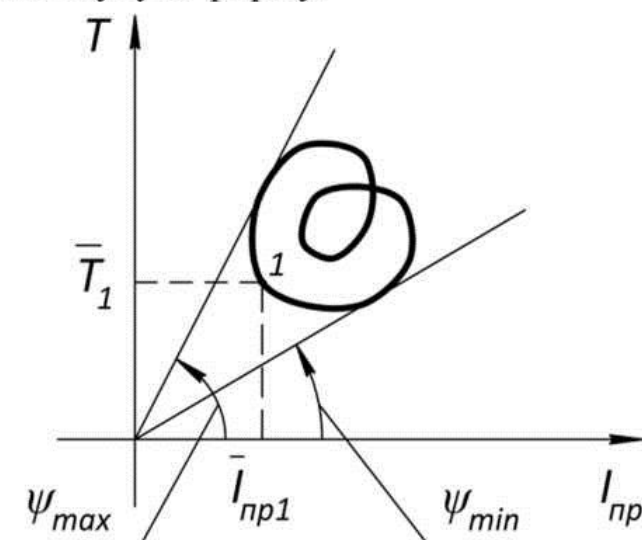


Рис. 6.3

Из этой диаграммы можно получить значение угловой скорости в любом интересующем положении машины:

$$T_1 = \frac{I_{пр} \omega_1^2}{2}, \quad \omega_1^2 = \frac{2T_1}{J_{пр1}} = \frac{2\bar{T}_1 \mu_T}{\bar{J}_{пр1} \mu_J} = 2 \frac{\mu_T}{\mu_J} \operatorname{tg}(\psi),$$

где  $\bar{T}_1$  и  $\bar{J}_{пр1}$  – длины отрезков с диаграммы,  $\mu_T$  и  $\mu_J$  – соответствующие значения масштабных коэффициентов.

Диаграмма позволяет получить  $\omega_{max}$  и  $\omega_{min}$  входного звена, которые определяются через максимальный и минимальный углы, образуемые касательными к диаграмме, проведенными из начала координат.

$$\omega_{max} = \sqrt{2 \frac{\mu_T}{\mu_J} \operatorname{tg}(\psi_{max})}, \quad \omega_{min} = \sqrt{2 \frac{\mu_T}{\mu_J} \operatorname{tg}(\psi_{min})}.$$

## 6.9. Расчет маховика

При проектировании машин решается задача обеспечения заданного значения коэффициента неравномерности движения входного звена при заданной средней скорости его вращения.

Обеспечение требуемого значения коэффициента  $\delta$  осуществляется за счет подбора момента инерции маховика, в виде которого выполняется входное звено имеющее форму колеса и обладающее большим моментом инерции.

Последовательность расчета момента инерции маховика:

1) По теореме Жуковского «о жестком рычаге» определяется приведенная сила  $P_{пр}$  или приведенный момент  $M_{пр}$ . Силы, приложенные к ведущему звену, не учитываются. По рассчитанным значениям строится диаграмма выбора требуемой мощности электродвигателя (рис. 6.4, а).

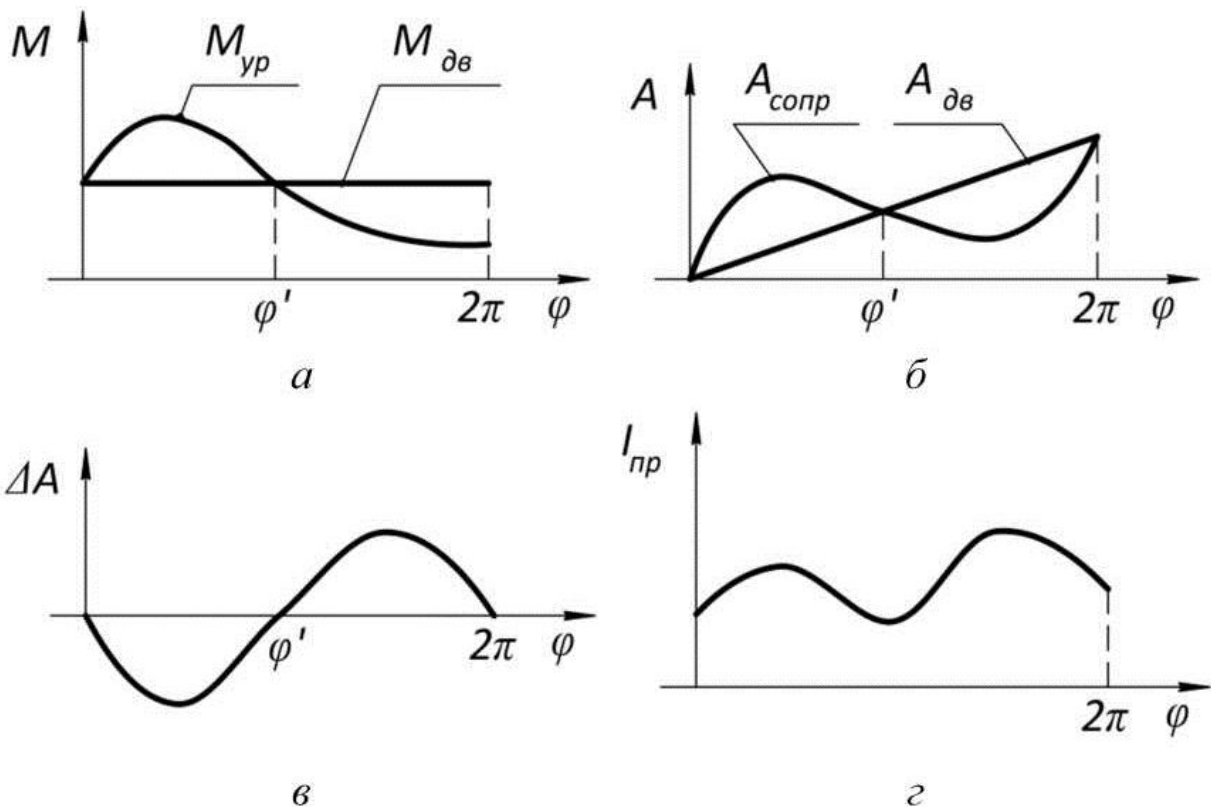


Рис. 6.4

2) Посредством интегрирования определяется работа движущих сил и сил сопротивления (рис. 6.4, б).

$$A = \int_0^{2\pi} M d\varphi, \text{ за } \Delta\varphi = 2\pi \text{ рад, } A_{\text{дв}} = A_{\text{сопр}}.$$

3) Строится диаграмма избыточных работ (рис. 6.4, в).

$$\Delta A = A_{\text{дв}} - A_{\text{сопр}}.$$

4) Строится диаграмма изменения приведенного момента инерции (рис. 6.4, з).

$$I_{\text{пр}} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{m_i V_{Si}^2}{V_A^2} + \frac{I_{Si} \omega_i^2}{V_A^2} \right), \quad I_{\text{пр}} = m_{\text{пр}} l_{OA}^2.$$

5. Методом исключения параметра  $\varphi$  строится неполная диаграмма энергомасс (рис. 6.5). Диаграмма называется неполной, потому что в ней не учтены характеристики входного звена, т. е. маховика.

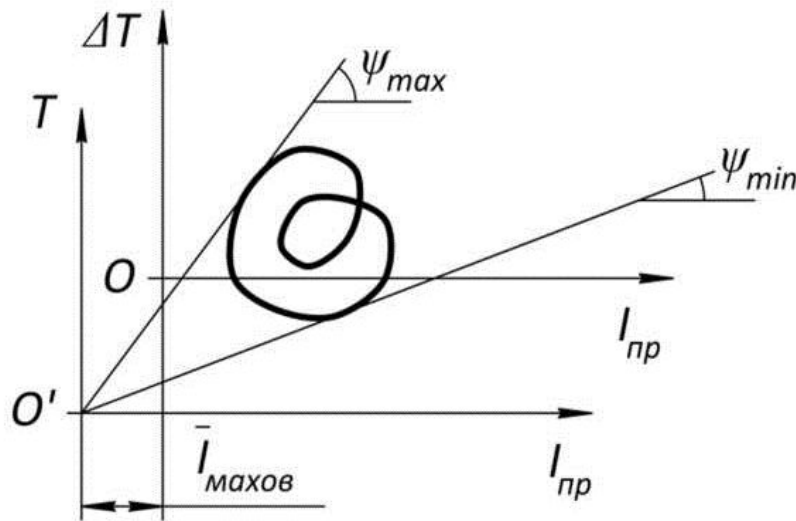


Рис. 6.5

6. По требуемым значениям  $\delta$  и  $\omega_{\text{ср}}$  рассчитываются  $\omega_{\text{max}}$  и  $\omega_{\text{min}}$ , а затем, соответственно,  $\psi_{\text{max}}$  и  $\psi_{\text{min}}$ :

$$\psi_{\text{min}} = \text{arctg} \left( \frac{\mu_J}{2 \mu_T} \omega_{\text{min}}^2 \right), \quad \psi_{\text{max}} = \text{arctg} \left( \frac{\mu_J}{2 \mu_T} \omega_{\text{max}}^2 \right).$$



7. По рассчитанным значениям  $\psi_{\max}$  и  $\psi_{\min}$  проводятся касательные к неполной диаграмме энергомасс.

8. Точка пересечения касательных определяет начало координат полной диаграммы энергомасс (точка  $O'$ ). В результате определяем требуемый момент инерции маховика

$$I_{\text{махов}} = \bar{I}_{\text{махов}} \mu_I.$$

9. Рассчитываются конструктивные размеры маховика. Целесообразно маховик выполнить таким образом, чтобы его масса была сосредоточена по ободу колеса. В этом случае момент инерции определится выражением

$$I_{\text{махов}} = mR^2.$$

Задаваясь из конструктивных соображений габаритами ( $R$ ) маховика, его необходимую массу обеспечивают за счет толщины венца колеса.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

### Основной

*Артоболевский, И. И.* Теория механизмов и машин [Текст] : учебник / И. И. Артоболевский. -М. : ИД Альянс, 2011.- 640 с.

*Козловский, М. З.* Теория механизмов и машин [Текст] : учеб. пособие / М. З. Козловский, А. Н. Евграфов. – М. : Академия, 2007. – 560 с.

*Попов, С. А.* Курсовое проектирование по теории механизмов и механике машин [Текст] : учеб. пособие / С. А. Попов, Г. А. Тимофеева. – М. : Высш. шк., 2008. – 456 с.

*Смелягин, А. И.* Теория механизмов и машин [Текст] : учеб. пособие / А. И. Смелягин. – М. : Инфа-М, 2008. – 263 с.

Теория механизмов и механика машин [Текст] : учебник / под. ред. К. В. Фролова. – М. : Высш. шк., 2009. – 496 с.

### Дополнительный

*Евтеев, Ю. И.* Теория механизмов и машин: руководство по выполнению курсового проекта [Текст]: учеб. пособие / Ю. И. Евтеев, Ю. В. Чернухин, А. В. Некрасов; Воронеж. гос. технол. акад. – Воронеж, 2002. – 64 с.

*Левитская, О. Н.* Курс теории механизмов и машин [Текст] : учебник / О. Н. Левитская, Н. И. Левитский. -М. : Высш. шк., 1985.-279 с.