

## **ОПД.Ф.02.03 ТЕОРИЯ МАШИН И МЕХАНИЗМОВ**

### **Учебное пособие**

Настоящее издание является частью электронного учебно-методического комплекса по дисциплине «Теория механизмов и машин», включающего учебную программу, лабораторный практикум, практикум, методические указания по самостоятельной работе, контрольно-измерительные материалы «Теория механизмов и машин. Банк тестовых заданий», наглядное пособие «Теория механизмов и машин. Презентационные материалы».

В учебном пособии представлены основные теоретические положения разделов дисциплины и рассмотрены примеры решения практических задач с использованием общих методов теории механизмов и машин для основных видов типовых механизмов.

Предназначено для студентов направления подготовки бакалавров 190100.62 «Наземные транспортно-технологические комплексы», 190200.62 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов» укрупненной группы 190000 «Транспортная техника и технологии».

## Оглавление

<b>ВВЕДЕНИЕ .....</b>	<b>6</b>
<b>1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ .....</b>	<b>7</b>
1.1. ПОНЯТИЕ ТЕХНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ МАШИНЫ И ИХ ВИДЫ .....	7
1.2. ПРИВОДЫ И МАШИННЫЕ АГРЕГАТЫ .....	9
1.3. МЕХАНИЗМЫ И ИХ ВИДЫ .....	12
1.4. ТИПОВЫЕ МЕХАНИЗМЫ .....	15
1.5. ЗВЕНЬЯ МЕХАНИЗМОВ .....	17
1.6. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ПАРЫ .....	19
1.7. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ЦЕПИ .....	24
1.8. СТРУКТУРА МЕХАНИЗМОВ И ЕЕ ДЕФЕКТЫ .....	25
1.9. МЕХАНИЗМЫ С НИЗШИМИ КИНЕМАТИЧЕСКИМИ ПАРАМИ .....	26
<b>2. РЫЧАЖНЫЕ МЕХАНИЗМЫ .....</b>	<b>28</b>
2.1. КЛАССИФИКАЦИЯ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ .....	28
2.2. СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ .....	30
Подвижность механизмов .....	31
Состав структуры рычажных механизмов .....	32
Маневренность пространственных рычажных механизмов .....	35
2.3. СИНТЕЗ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ .....	37
2.4. КАЧЕСТВЕННЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ .....	40
<b>3. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ .....</b>	<b>44</b>
3.1. ПЛАН ПОЛОЖЕНИЙ МЕХАНИЗМА .....	44
3.2. МЕТОД КИНЕМАТИЧЕСКИХ ДИАГРАММ .....	46
3.3. МЕТОД КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПЛАНОВ .....	49
Принципы образования векторных уравнений .....	50
План скоростей .....	55
План ускорений .....	56
Теорема подобия .....	57
<b>4. ДИНАМИКА ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ .....</b>	<b>59</b>
4.1. ДИНАМИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ .....	59
4.2. КЛАССИФИКАЦИЯ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ .....	61
Внешние силовые факторы .....	62
Внутренние силовые факторы .....	63
Теоретические силовые факторы .....	64
Теоретические силовые факторы для частных случаев движения .....	65



4.3. ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ИХ ПАРАМЕТРЫ .....	67
4.4. СИЛОВОЙ АНАЛИЗ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ.....	70
Методы силового анализа .....	70
Определение числа неизвестных при силовом анализе.....	71
Кинестатический анализ структурных групп второго класса .....	72
Кинестатический анализ первичного механизма .....	83
Теорема И. Е. Жуковского.....	85
4.5. ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ .....	88
Режимы движения технической системы.....	88
Метод Виттенбауэра.....	92
4.6. ВИБРОЗАЩИТА МЕХАНИЗМОВ И МАШИН .....	96
<b>5. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ВЫСШЕЙ ПАРЫ .....</b>	<b>102</b>
5.1. ТЕОРЕМА О ВЫСШЕЙ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ПАРЕ .....	102
5.2. ПОЛЮС И ЦЕНТРОИДЫ.....	103
5.3. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА СОПРЯЖЕНИЯ (ЗАЦЕПЛЕНИЯ) .....	104
5.4. МЕХАНИЗМЫ С ВЫСШИМИ КИНЕМАТИЧЕСКИМИ ПАРАМИ .....	106
<b>6. ЗУБЧАТЫЕ МЕХАНИЗМЫ.....</b>	<b>111</b>
6.1. ПРОСТЫЕ ЗУБЧАТЫЕ МЕХАНИЗМЫ.....	111
6.2. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ МЕХАНИЗМЫ С ВЫСШЕЙ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ПАРОЙ .....	112
6.3. ПЛОСКИЕ ЗУБЧАТЫЕ МЕХАНИЗМЫ.....	114
6.4. ЭВОЛЬВЕНТА ОКРУЖНОСТИ И ЕЕ СВОЙСТВА .....	119
6.5. ЭВОЛЬВЕНТНОЕ ЗАЦЕПЛЕНИЕ И ЕГО СВОЙСТВА .....	121
6.6. ЭВОЛЬВЕНТНЫЕ ЗУБЧАТЫЕ КОЛЕСА И ИХ ПАРАМЕТРЫ.....	123
6.7. МЕТОДЫ ПОЛУЧЕНИЯ ФОРМООБРАЗУЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРОФИЛЕЙ ЗУБЬЕВ.....	126
6.8. ИСХОДНЫЙ КОНТУР И ИСХОДНЫЙ ПРОИЗВОДЯЩИЙ КОНТУР.....	127
6.9. ВИДЫ ЗУБЧАТЫХ КОЛЕС .....	129
6.10. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ЗУБЧАТЫХ КОЛЕС.....	130
6.11. БЛОКИРУЮЩИЙ КОНТУР .....	133
6.12. КАЧЕСТВЕННЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ ЗУБЧАТЫХ МЕХАНИЗМОВ ....	134
<b>7. СЛОЖНЫЕ ЗУБЧАТЫЕ МЕХАНИЗМЫ.....</b>	<b>138</b>
7.1. ОДНОРЯДНЫЕ ЗУБЧАТЫЕ МЕХАНИЗМЫ.....	138
7.2. МНОГОРЯДНЫЕ ЗУБЧАТЫЕ МЕХАНИЗМЫ .....	143
7.3. МНОГОПОТОЧНЫЕ ЗУБЧАТЫЕ МЕХАНИЗМЫ.....	147
7.4. ЭПИЦИКЛИЧЕСКИЕ ЗУБЧАТЫЕ МЕХАНИЗМЫ.....	149
7.5. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛАНЕТАРНЫХ ЗУБЧАТЫХ МЕХАНИЗМОВ .....	151



7.6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ЗУБЧАТЫЕ МЕХАНИЗМЫ .....	154
7.7. ЗАМКНУТЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ЗУБЧАТЫЕ МЕХАНИЗМЫ.....	158
7.8. КОРОБКИ ПЕРЕДАЧ .....	159
7.9. ВОЛНОВЫЕ МЕХАНИЗМЫ.....	161
<b>8. СИНТЕЗ ЗУБЧАТЫХ МЕХАНИЗМОВ .....</b>	<b>164</b>
8.1. СИНТЕЗ ЗУБЧАТЫХ МЕХАНИЗМОВ С НЕПОДВИЖНЫМИ ОСЯМИ КОЛЕС .....	165
8.2. УСЛОВИЯ СИНТЕЗА ПЛАНЕТАРНЫХ МЕХАНИЗМОВ.....	167
8.3. СИНТЕЗ ОДНОРЯДНЫХ ПЛАНЕТАРНЫХ МЕХАНИЗМОВ .....	170
8.4. МЕТОД СОМНОЖИТЕЛЕЙ.....	171
8.5. ОПТИМИЗАЦИЯ ПРИ СИНТЕЗЕ ЗУБЧАТЫХ МЕХАНИЗМОВ.....	173
<b>9. КУЛАЧКОВЫЕ МЕХАНИЗМЫ.....</b>	<b>175</b>
9.1. КЛАССИФИКАЦИЯ КУЛАЧКОВЫХ МЕХАНИЗМОВ .....	176
9.2. СПОСОБЫ ЗАМЫКАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ВЫСШЕЙ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ПАРЫ.....	179
9.3. ОСНОВНЫЕ ПАРАМЕТРЫ КУЛАЧКОВОГО МЕХАНИЗМА.....	181
9.4. СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ ПЛОСКИХ КУЛАЧКОВЫХ МЕХАНИЗМОВ.....	183
9.5. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКИХ КУЛАЧКОВЫХ МЕХАНИЗМОВ.....	184
9.6. СИНТЕЗ ПЛОСКИХ КУЛАЧКОВЫХ МЕХАНИЗМОВ .....	185
9.7. ЗАКОНЫ ДВИЖЕНИЯ ВЫХОДНОГО ЗВЕНА .....	186
9.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАДИУСА ИСХОДНОГО КОНТУРА КУЛАЧКА.....	189
9.9. ВЫБОР РАДИУСА РОЛИКА.....	191
9.10. СИНТЕЗ ПРОФИЛЕЙ ПЛОСКИХ КУЛАЧКОВ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ .....	193
<b>БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....</b>	<b>198</b>



## ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Теория механизмов и машин» (ТММ) является составной частью комплексной общеинженерной подготовки студентов машиностроительных специальностей вузов.

Основными задачами дисциплины «Теория механизмов и машин» является: освоение методов и алгоритмов анализа и синтеза механизмов и машин, а также технических систем, разработанных на их основе.

Дисциплина ТММ базируется на знаниях, полученных студентами при изучении таких дисциплин, как «Физика», «Математика», «Начертательная геометрия и инженерная графика», «Теоретическая механика» и «Информатика». Знания и навыки, приобретенные студентами при изучении дисциплины «Теория машин и механизмов», служат базой для изучения специальных дисциплины и дисциплин специализации.

Дисциплина «Теория машин и механизмов» включает следующие разделы:

*статика* – раздел, изучающий методы и алгоритмы анализа и синтеза структуры механизмов и машин;

*кинематика* – раздел, изучающий методы и алгоритмы анализа закономерностей изменения кинематических параметров механизмов и машин в функции времени;

*динамика* – раздел, изучающий методы и алгоритмы анализа динамических процессов, протекающих в механизмах и машинах под действием приложенных к ним силовых факторов в функции времени.

При изучении дисциплины «Теория механизмов и машин» довольно часто студенты испытывают затруднения, связанные с поиском методического материала, освещающего тот или иной ее раздел. Существующие учебники по дисциплине «Теория механизмов и машин», разработанные сотрудниками ведущих вузов Российской Федерации, не всегда позволяют разрешить возникшие затруднения. Неоднозначность трактовок основных понятий и терминов, приводимых разными авторами, еще более усугубляет данную проблему.

В настоящем пособии главное внимание уделено изложению основных положений дисциплины «Теория механизмов и машин», разработанных на базе обобщения существующего объема литературных источников с учетом накопленного опыта сотрудниками кафедры «Теория и конструирование механических систем», исходя из специфики преподавания дисциплины «Теория механизмов и машин»

Данное пособие призвано наряду с фундаментальными учебниками оказать помощь студентам всех форм обучения машиностроительных специальностей вузов при освоении и самостоятельной проработке теоретического материала дисциплины «Теория механизмов и машин».

# 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

*Теория механизмов и машин* (ТММ) – это дисциплина, изучающая общие методы проектирования и исследования механизмов и машин. Данная дисциплина является составной частью общеинженерной дисциплины «Механика», закладывающей основы понятия об инженерном проектировании.

*Инженерное проектирование* – это процесс, в котором научная и техническая информация используется для создания новых или модернизации уже существующих механизмов и машин, приносящих обществу определенную пользу. *Проектирование* – это процесс составления описания, необходимого для создания еще несуществующего объекта путем преобразования первичного описания, оптимизации заданных характеристик объекта, устранения некорректности первичного описания и последовательного представления описаний на различных языках.

Специфика дисциплины «Теория машин и механизмов» заключается в том, что вместо общепринятых понятий, таких, как *исследование* и *проектирование*, соответственно, используются термины *анализ* и *синтез*. При этом под *анализом* подразумевается исследование или изучение, а под *синтезом* – проектирование или создание механизмов и машин.

*Цель ТММ* – анализ и синтез типовых механизмов и машин, а также систем, созданных на их основе.

*Задача ТММ* – разработка общих методов синтеза и анализа структуры, кинематики и динамики типовых механизмов и машин, а также систем, созданных на их основе.

В дисциплине «Теория механизмов и машин» любые механизмы или машины рассматриваются как технические системы.

## 1.1. ПОНЯТИЕ ТЕХНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ МАШИНЫ И ИХ ВИДЫ

*Техническая система* – это ограниченная область реальной действительности, осуществляющая взаимодействие с окружающей средой. При этом под *окружающей средой* понимается совокупность внешних объектов, осуществляющих взаимодействие с технической системой.

Каждая техническая система предназначена для выполнения определенных функций и имеет собственную структуру. В большинстве случаев структура технической системы состоит из деталей, узлов, звеньев и типовых механизмов.

*Деталь* – это элемент структуры технической системы, не имеющий внутренних связей.

*Узел* – это совокупность нескольких деталей, конструктивно или функционально связанных между собой.



Изучение технических систем осуществляется с помощью заменяющих образов или моделей.

*Модель* – это устройство (или образ) какого-либо объекта или явления, адекватно отражающее его свойства. Модели механизмов или машин используются в качестве их заместителей или заменителей в научных или иных целях.

В зависимости от целей и задач выполняемого вида анализа или синтеза модели механизмов и машин подразделяются:

по форме представления – на физические и математические;  
по методу анализа – на графические, численные (или аналитические), графоаналитические, энергетические, кинетостатические, динамические и экспериментальные.

Модель любого механизма или машины составляется по критериям подобия, формулируемым в зависимости от принятых допущений, основными из которых являются следующие:

1. Все звенья механизмов и машин являются абсолютно твердыми и жесткими, т. е. не подвержены деформациям никакого рода.
2. Контактующие поверхности звеньев являются абсолютно гладкими.
3. Все механизмы предназначены только для преобразования движения и силовых факторов.

Принятые допущения дают возможность существенно упростить анализ и синтез механизмов и машин на начальном этапе. Так из первого допущения следует, что звенья не изменяют своих размеров. Второе допущение позволяет выполнять анализ и синтез без учета сил трения и свойств материалов, из которых изготовлены эти звенья. Согласно третьему допущению анализ и синтез механизмов и машин можно проводить без учета реальных условий их эксплуатации. В зависимости от требуемой точности получаемых результатов количество критериев или допущений может изменяться.

Наиболее распространенным видом моделей технических систем является схемный образ, или схема. Для одного и того же механизма или машины различают функциональную, структурную, геометрическую, кинематическую и динамическую схемы.

Исходя из вышесказанного, можно заключить, что основными понятиями дисциплины «Теория машин и механизмов» являются машина и механизм.

*Машина* – это техническая система, выполняющая механическое движение для преобразования энергии, материалов и информации. Все машины предназначены для облегчения физического и умственного труда человека, т. е. для повышения его качеств и производительности.

Все существующие машины можно разделить на четыре вида.

1. *Энергетические машины* – это машины, преобразующие энергию одного вида в энергию другого вида.

К энергетическим машинам относятся двигатели и генераторы.

*Двигатели* – это энергетические машины, преобразующие любой вид энергии в механическую энергию (например, электродвигатели преобразуют электрическую энергию, двигатели внутреннего сгорания преобразуют энергию расширения газов при сгорании в цилиндре).

*Генераторы* – это энергетические машины, преобразующие механическую энергию в энергию другого вида (например, электрогенератор преобразует механическую энергию паровой или гидравлической турбины в электрическую энергию).

2. *Рабочие машины* – это машины, использующие механическую энергию для совершения работы по перемещению и преобразованию объектов или материалов.

К рабочим машинам относятся транспортные и технологические машины.

*Транспортные машины* – это рабочие машины, использующие механическую энергию для изменения положения объектов или материалов.

*Технологические машины* – это рабочие машины, использующие механическую энергию для преобразования формы, свойств, размеров и состояния объектов или материалов.

3. *Информационные машины* – это машины, предназначенные для обработки и преобразования информации.

К информационным машинам относятся математические и контрольно-управляющие машины.

*Математические машины* – это информационные машины, преобразующие входную информацию в математическую модель исследуемого объекта.

*Контрольно-управляющие машины* – это информационные машины, преобразующие входную информацию (программу) в сигналы управления машинами других видов.

4. *Кибернетические машины* – это машины, управляющие машинами других видов, которые способны изменять программу своих действий в зависимости от состояния окружающей среды.

К ним относятся машины, обладающие элементами искусственного интеллекта.

## 1.2. ПРИВОДЫ И МАШИННЫЕ АГРЕГАТЫ

С целью выполнения функционального назначения машины разных видов взаимодействуют друг с другом. Совокупность нескольких машин образует привод.



*Привод* – это система взаимосвязанных устройств, предназначенная для приведения в движение одного или нескольких звеньев, входящих в состав механизма или машины (рис. 1.1).

Функциональная схема привода включает следующие элементы (рис. 1.1):

- энергетическую машину;
- рабочую машину;
- передаточный или преобразующий механизм.

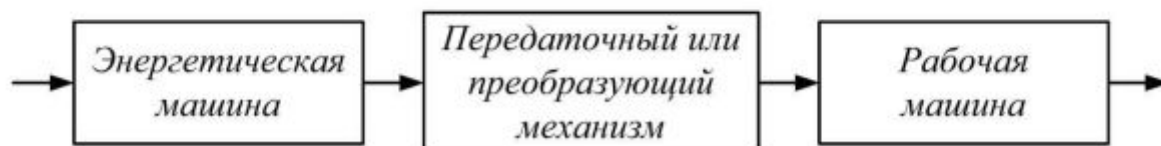


Рис. 1.1. Функциональная схема привода

Передаточный или преобразующий механизм предназначен для согласования механических характеристик энергетической машины с механическими характеристиками рабочей машины.

Все приводы можно разделить на три основных вида:

- гидропривод, или гидравлический;
- пневмопривод, или пневматический;
- электропривод, или электрический.

Охарактеризуем каждый вид привода в отдельности.

*Гидропривод* – это вид привода машин, в котором для преобразования движения используется механическая энергия жидкости.

Гидропривод включает в свой состав следующие элементы:

гидронасос – это устройство для преобразования механической энергии твердого тела в механическую энергию жидкости;

гидродвигатель – это механическое устройство, предназначенное для преобразования механической энергии жидкости в механическую энергию твердого тела;

обслуживающую и управляющую аппаратуру.

*Пневмопривод* – это вид привода машин, в котором для преобразования движения используется механическая энергия газа.

Пневмопривод включает в свой состав следующие элементы:

пневмонасос – это устройство для преобразования механической энергии твердого тела в механическую энергию газа;

пневмодвигатель – это механическое устройство, предназначенное для преобразования механической энергии газа в механическую энергию твердого тела;

обслуживающую и управляющую аппаратуру.

С целью уменьшения количества составляющих элементов в гидро- и пневмоприводах применяют комбинированные устройства, т. е. устройства, выполняющие последовательно и функции гидро- или пневмонасоса, и функции гидро- или пневмодвигателя соответственно.

*Электропривод* – это вид привода машин, в котором для преобразования движения используется электрическая энергия.

Электропривод включает в свой состав следующие элементы:

электродвигатель – это механическое устройство, предназначенное для преобразования электрической энергии в механическую энергию твердого тела;

обслуживающую и управляющую аппаратуру.

Доступность электропитания в учреждениях и организациях мирового сообщества, а также сравнительная простота в основном и обусловили наибольшее распространение электропривода.

Для реализации функций контроля и управления работой как отдельных составляющих элементов, так и всего привода в целом в состав функциональной схемы дополнительно вводят контрольно-управляющую или кибернетическую машину. Полученная система называется машинным агрегатом ([рис. 1.2](#)) или машиной-автоматом ([рис. 1.3](#)).

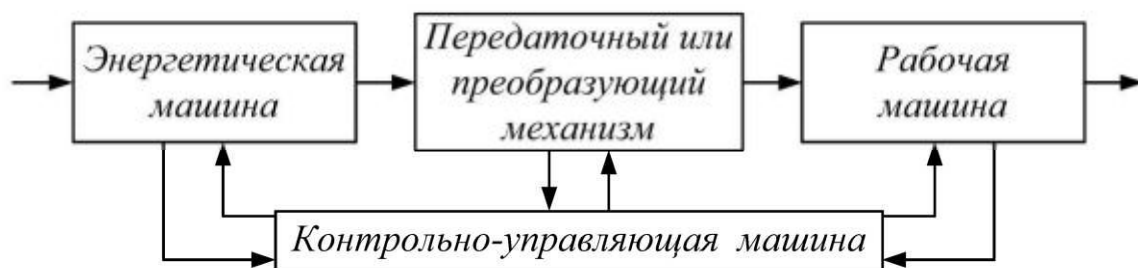


Рис. 1.2. Функциональная схема машинного агрегата

*Машинный агрегат* – это техническая система, состоящая из нескольких соединенных последовательно или параллельно машин и предназначенная для выполнения каких-либо требуемых функций.

Машинный агрегат является более сложной технической системой по сравнению с приводом, т. к. наличие контрольно-управляющей машины позволяет управлять ходом работы всей системы.



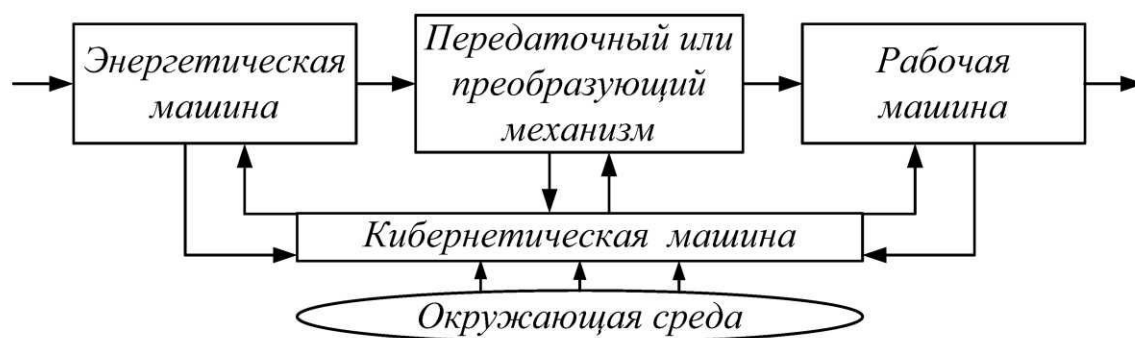


Рис. 1.3. Функциональная схема машины-автомата

Включение в функциональную схему кибернетической машины создает возможность управления работой этой системы в зависимости от состояния окружающей среды без непосредственного участия человека, образуя *машину-автомат*.

### 1.3. МЕХАНИЗМЫ И ИХ ВИДЫ

Все машины состоят из механизмов, которые призваны обеспечивать выполнение требуемых функций. В зависимости от сложности схемы машины могут содержать несколько механизмов одновременно.

*Механизм* – это техническая система, состоящая из подвижных звеньев, стойки и кинематических пар, образующих кинематические цепи.

Все механизмы предназначены для передачи и преобразования перемещений входных звеньев и приложенных к ним силовых факторов в требуемые перемещения и силовые факторы выходных звеньев. Любые механизмы должны удовлетворять требованиям, заданным в техническом задании на их проектирование, соответствие которым определяет качество механизмов. В общем случае качество структуры механизма определяется: простотой конструкции, технологичностью звеньев, экономичностью, надежностью, долговечностью, габаритами и массой.

Оценка работоспособности механизма осуществляется по эксплуатационным факторам, к которым относятся прочность, жесткость, износостойкость, виброустойчивость и теплостойкость.

Все многообразие механизмов можно классифицировать по разным признакам.

В соответствии с областью применения и функциональным назначением выделяют:

- механизмы летательных аппаратов;
- механизмы станков;
- механизмы кузнечных машин и прессов;
- механизмы двигателей внутреннего сгорания;
- механизмы промышленных роботов (манипуляторы);
- механизмы компрессоров;

механизмы насосов.

По виду передаточной функции механизмы подразделяются на две группы.

*Механизмы с постоянной передаточной функцией* – это механизмы, передаточное отношение которых за цикл работы не изменяется ([рис. 1.4](#)).

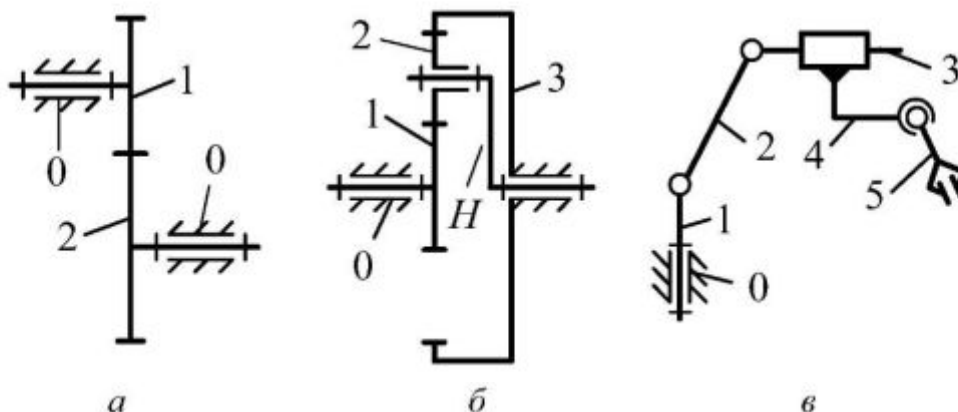


Рис. 1.4. Схемы механизмов с постоянной передаточной функцией

*Механизмы с переменной передаточной функцией* – это механизмы, передаточное отношение которых за цикл работы может изменяться в заданном диапазоне (см. [рис. 7.9](#)).

По виду структуры механизмы могут быть:

*с постоянной структурой* – это механизмы, структура которых за цикл работы не изменяется ([рис. 1.4, а, б](#));

*с переменной структурой* – это механизмы, структура которых за цикл работы может изменяться ([рис. 1.4, в](#)).

По движению и расположению звеньев в пространстве механизмы подразделяются на плоские, пространственные и сферические.

*Плоские механизмы* – это механизмы, звенья которых совершают движения в параллельных плоскостях ([рис. 1.4, а, б](#)).

*Пространственные механизмы* – это механизмы, звенья которых совершают движения в перпендикулярных плоскостях ([рис. 1.4, в](#)).

*Сферические механизмы* – это механизмы, в которых одно или несколько звеньев совершают движения в нескольких плоскостях одновременно.

В действительности все механизмы являются пространственными, однако, следуя рассматриваемому признаку, некоторые из них являются пространственными пространственными, другие – пространственными плоскими, а третьи – пространственными сферическими. При этом первое слово «пространственные» из названия механизма в дальнейшем исключается.

По виду преобразования движения механизмы подразделяются:

на преобразующие вращательное движение входного звена во вращательное движение выходного звена ([рис. 1.4, а, б](#));



преобразующие вращательное движение входного звена в поступательное движение выходного ([рис. 1.5, а](#), при ведущем звене 2);

преобразующие поступательное движение входного звена во вращательное движение выходного звена ([рис. 1.5, а](#), при ведущем звене 1);

преобразующие поступательное движение входного звена в поступательное движение выходного звена ([рис. 1.5, б](#)).

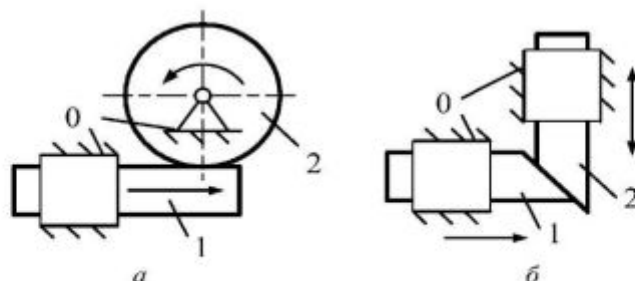


Рис. 1.5. Схемы механизмов с поступательно движущимся ведущим звеном

В соответствии с числом подвижностей механизмы подразделяются на две группы:

механизмы с подвижностью больше единицы ([рис. 1.4, в](#));

механизмы с подвижностью, равной единице ([рис. 1.4, а, б](#)).

По виду кинематических пар выделяются:

*механизмы с высшими кинематическими парами* – это механизмы, структура которых содержит хотя бы одну высшую кинематическую пару ([рис. 1.4, рис.1.5](#));

*механизмы с низшими кинематическими парами* – это механизмы, структура которых содержит только низшие кинематические пары ([рис. 1.6](#)).

Частным случаем механизмов с низшими кинематическими парами являются шарнирные механизмы.

*Шарнирный механизм* – это механизм звенья, которого образуют между собой только вращательные кинематические пары ([рис. 1.6, б](#)).

По способу передачи и преобразования потока механической энергии подразделяются:

механизмы фрикционные ([рис. 1.5, б, рис.5.4, рис.5.5](#));

механизмы с зацеплением ([рис. 1.4, а, б, рис.6.1, рис.6.4, рис. 6.5., рис.6.6](#));

волновые механизмы ([рис. 7.10, рис.7.11](#));

механизмы с гибкой связью ([рис. 5.6, рис.5.7](#));

импульсные механизмы.

В зависимости от конструктивного исполнения звеньев выделяют механизмы рычажные ([рис. 1.6](#)); кулачковые ([рис. 1.4, а](#)); зубчатые ([рис. 1.4, б, рис.6.1, рис.6.4–6.6](#)); эпициклические ([рис. 1.4, б, рис.7.4, рис.7.7](#)); винтовые ([рис. 1.13](#)); ременные ([рис. 5.6, а–в](#)); цепные ([рис. 5.6, з](#)) и комбинированные.

По степени моделирования механизмы подразделяются на действительные, типовые ([рис. 1.6](#)), идеальные и заменяющие.

## 1.4. ТИПОВЫЕ МЕХАНИЗМЫ

Все механизмы машин и приводов выполняют определенное служебное назначение и являются действительными механизмами. Однако, следуя принятым допущениям, изучение структуры механизмов можно выполнять без учета специфики их дальнейшей эксплуатации, что позволяет разбить механизмы на типовые группы по принципу сходности структуры и воспользоваться уже разработанными для них методами и алгоритмами анализа и синтеза. Полученные таким образом механизмы называются типовыми (см. рис. 1.4, а, б, рис.1.6).

*Типовой механизм* – это простой механизм, имеющий при различном функциональном назначении широкое применение в машинах разных видов (см. рис. 1.4, а, б, г, рис.1.6).

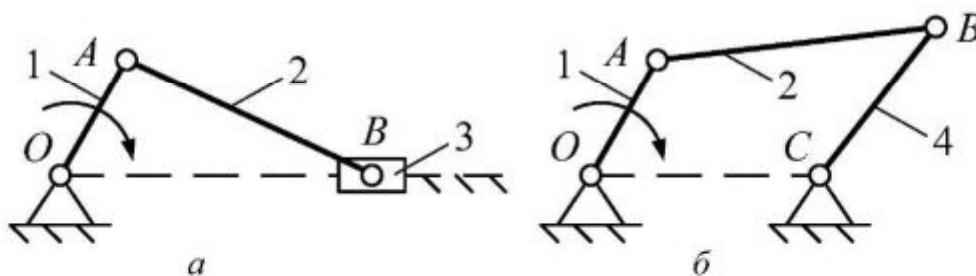


Рис. 1.6. Структурные схемы типовых механизмов

В качестве примера типового механизма рассмотрим кривошипно-ползунный механизм (рис. 1.6, а). Этот механизм широко применяется в машинах различных видов, имеющих разное функциональное назначение, например: двигатели внутреннего сгорания, поршневые компрессоры и насосы, станки, ковочные машины и др. В каждом варианте функционального назначения при проектировании необходимо учитывать специфические требования, предъявляемые к механизму. Однако математические зависимости, описывающие структуру, кинематику и динамику кривошипно-ползунного механизма при всех различных вариантах его применения будут практически одинаковыми. Следовательно, зная алгоритмы проведения структурного, кинематического и динамического анализов типового механизма, можно исследовать его структуру, кинематику и динамику без учета особенностей функционального назначения.

Отличие дисциплины «Теория механизмов и машин» от других учебных дисциплин, изучающих методы и алгоритмы проектирования и исследования механизмов и машин, заключается в том, что в ТММ основное внимание уделяется изучению методов синтеза и анализа, общих для механизмов определенного вида, независимо от их конкретного функционального назначения. Специальные дисциплины изучают механизмы только конкретного назначения, уделяя основное внимание специфическим требованиям. При этом широко используются и общие методы синтеза и анализа, которые изучаются в дисциплине «Теория механизмов и машин».



Эффективность любого типового механизма оценивается рядом параметров, основными из которых являются передаточная функция и коэффициент полезного действия (КПД). Рассмотрим сущность данных терминов на примере функциональной схемы механизма (рис. 1.7).



Рис. 1.7. Функциональная схема механизма

Отношение скорости движения входного звена к скорости движения выходного звена называется *передаточным отношением*:

$$i = \frac{\omega_{\text{вх}}}{\omega_{\text{вых}}} = \frac{V_{\text{вх}}}{V_{\text{вых}}}.$$

Если анализ механизма выполняется в течение некоторого промежутка времени, то вместо передаточного отношения принято рассматривать *передаточную функцию*, т. е.

$$i = f(t).$$

Каждая техническая система преобразует входной поток механической энергии в соответствующий выходной поток. При этом входной и выходной потоки механической энергии принято оценивать через работу (рис. 1.7). Отношение работы  $A_{\text{вых}}$ , развиваемой на выходном звене, к работе  $A_{\text{вх}}$  на входном звене называется *коэффициентом полезного действия*. При этом КПД механизма всегда меньше единицы, т. к. процесс преобразования движения сопровождается потерей механической энергии:

$$\eta = \frac{A_{\text{вых}}}{A_{\text{вх}}} - \xi < 1,$$

где  $\xi$  – коэффициент потерь.

Все типовые механизмы не имеют потерь, т. е. КПД этих механизмов равен единице, что возможно, только если данный механизм является идеальным.

*Идеальный механизм* – это механизм, образованный только абсолютно жесткими звеньями, в котором входной поток механической энергии преобразуется в выходной поток без потерь.

Следуя принятым допущениям, звенья механизмов являются абсолютно жесткими, что позволяет выполнять их анализ и синтез без учета любых видов деформаций этих звеньев и сил трения.

## 1.5. ЗВЕНЬЯ МЕХАНИЗМОВ

Согласно определению ([см. § 1.3](#)) механизмы состоят из нескольких элементов, основными из которых являются звенья.

*Звено (контур)* – это тело или система жестко связанных тел, входящих в состав механизма.

Звенья (*контуры*) любого механизма можно классифицировать по нескольким признакам.

По структурному состоянию выделяют:

*твердое звено* – это звено, упругая деформация которого не вносит существенных изменений в работу механизма;

*упругое звено* – это звено, упругая деформация которого вносит существенные изменения в работу механизма (пружины, мембраны и др.);

*гибкое звено* – это звено, обладающее способностью изменения формы рабочих поверхностей для обеспечения функционирования механизма (ремни, цепи, канаты и др.);

*жидкое звено* – это звено, обладающее жидкой структурой (вода, масло и др.);

*газообразное звено* – это звено, обладающее газообразной структурой (газ, воздух).

По конструктивному исполнению звенья бывают простые и сложные ([рис. 1.8](#)).

*Простое звено* (одно- или двухвершинное) – это звено, входящее в состав двух и более кинематических пар, через геометрические центры которых возможно провести одну прямую ([рис. 1.8, а–е](#)).

*Сложное, или составное, звено* (трех- и более вершинное) – это звено, входящее в состав трех и более кинематических пар, через геометрические центры которых невозможно провести одну прямую ([рис. 1.8, ж–и](#)).

Простые звенья на схемах механизмов изображают в виде линий или кривых, а сложные, или составные, звенья обозначаются в виде замкнутых и незамкнутых геометрических фигур. Замкнутые геометрические фигуры, изображающие сложные, или составные, звенья, заштриховываются ([рис. 1.8, ж](#)).



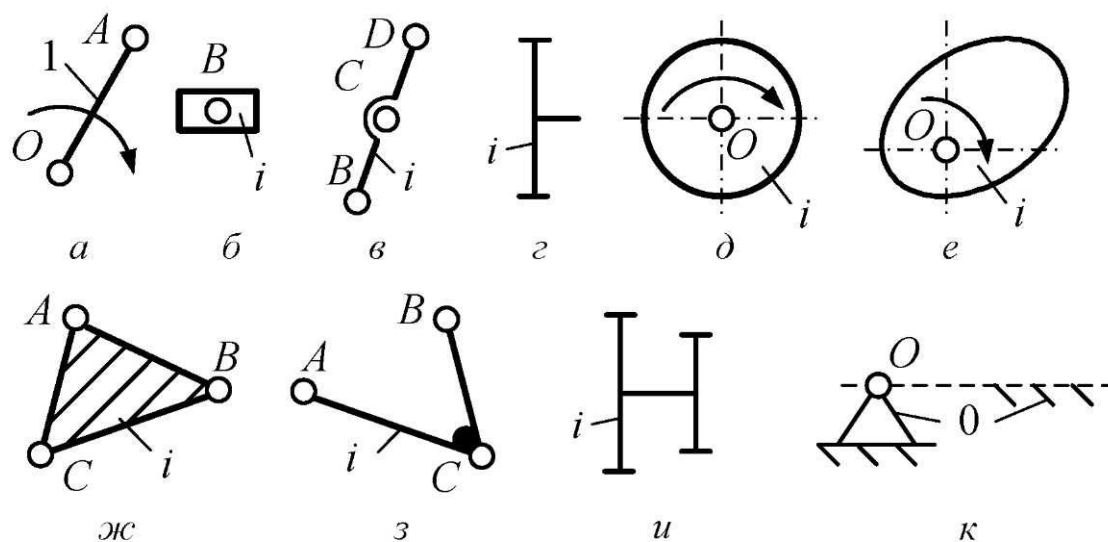


Рис. 1.8. Условные обозначения звеньев механизмов

Сложные, или составные, звенья (рис. 1.8, ж–и) образованы неподвижным соединением нескольких простых звеньев, которые не могут совершать движения относительно друг друга, однако могут перемещаться совместно как единое целое, т. е. одно звено. В большинстве случаев сложные, или составные, звенья вводятся в состав механизма с целью увеличения жесткости или для реализации сложной структуры механизма.

Разделение звеньев механизмов на сложные, или составные, и простые несовершенно, т. к. не оказывает влияния на анализ и синтез механизмов. Более актуально разделение звеньев механизмов по числу конечных элементов (вершин) звена, которыми оно присоединяется к другим звеньям механизма и входит в состав кинематических пар.

По служебному назначению звенья бывают задающими и ведомыми.

*Начальное, или задающее, звено* – это звено, координата которого принята за обобщенную координату (рис. 1.8, а, д, е).

*Ведомое звено* – это звено, не являющееся начальным (задающим) или ведущим звеном (рис. 1.8, б–г, ж–и).

Согласно ГОСТ 2.703-68 ведущее звено в схемах механизмов обозначается единицей и выделяется стрелочкой, которая указывает на вид и направление совершаемого движения (рис. 1.8, а, д, е), а звенья (рис. 1.8, б–г, ж–и), не отмеченные стрелочками, являются ведомыми звеньями, которые обозначаются произвольно. При этом под *обобщенными координатами* понимаются независимые друг от друга параметры механизма, однозначно определяющие возможные положения его звеньев в пространстве или на плоскости в рассматриваемый момент времени.

По кинематическому состоянию выделяются:

*подвижное звено* – это звено механизма, имеющее возможность совершать какое-либо движение (рис. 1.8, а–и);

*стойка* – это звено механизма, условно принятое при его анализе и синтезе за неподвижное звено (рис. 1.8, к).

В схемах механизмов все неподвижные элементы относятся к стойке, которая обозначается 0. За стойку принимают то звено, относительно которого производится изучение законов движения всех звеньев механизма. Например, при анализе металлорежущих станков, технологических линий за стойку принимают станину с фундаментом; при анализе их составляющих, редукторов, компрессоров, насосов – корпус; при анализе автомобилей, поездов, самолетов – колеса или шасси и т. д. Стойка в составе механизма всегда одна, однако в составе схемы она может быть представлена несколькими элементами: шарнирно-неподвижными опорами и направляющими ползунов (рис. 1.8, к), т. е. присоединений к стойке может быть сколько угодно. В качестве стойки может выступать любое звено механизма, которое в составе схемы помечается штриховкой под углом 45°.

По преобразованию движения и силовых факторов звено может быть входным, выходным и промежуточным.

*Входное, или ведущее, звено* – это звено механизма, которому сообщается заданное движение и соответствующие силовые факторы (силы и моменты пар сил).

*Выходное звено* – это звено механизма, на котором получают требуемое движение и требуемые силовые факторы.

*Промежуточное звено* – это звено механизма, расположенное между входным и выходным звеньями и предназначенное для передачи движения и преобразования силовых факторов.

## 1.6. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ПАРЫ

В процессе движения механизма звенья взаимодействуют друг с другом, образуя подвижные и неподвижные соединения. Подвижные соединения звеньев называются кинематическими парами (КП).

*Кинематическая пара* – это подвижное соединение двух соприкасающихся звеньев, допускающее относительные движения.

В зависимости от конструктивного исполнения, служебного назначения и видов движения звеньев все кинематические пары классифицируются по следующим признакам:

- 1) по относительному движению звеньев:
  - вращательные;
  - поступательные;
  - винтовые;
  - плоскостные;
  - сферические;
- 2) по виду контакта звеньев:



*низшие* – это кинематические пары, в которых контакт звеньев, их образующих, осуществляется по плоскости или по поверхности;

*высшие* – это кинематические пары, в которых контакт звеньев, их образующих, осуществляется по линии или в точке;

3) по способу обеспечения контакта звеньев, образующих кинематические пары:

*силовые* – это кинематические пары, в которых постоянство контакта звеньев обеспечивается за счет действия сил тяжести или силы упругости пружины;

*геометрические* – это кинематические пары, в которых постоянство контакта звеньев реализуется за счет конструкции рабочих поверхностей звеньев;

4) по числу условий связи, накладываемых на относительное движение звеньев, образующих кинематическую пару (число условий связи определяет класс кинематической пары);

5) по числу подвижностей в относительном движении звеньев (число подвижностей определяет подвижность кинематической пары).

Рассмотрим более подробно два последних признака классификации кинематических пар.

Известно, что человечество в силу специфики своего организма воспринимает окружающий мир только в трехмерном пространстве. Следовательно, в общем случае свободное абсолютно твердое тело (звено), находясь в трехмерном пространстве, может максимально совершить шесть движений: три вращательных – вокруг осей  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ; три поступательных движения – вдоль этих же осей ([рис. 1.9](#)). Однако движения звеньев в пространстве или на плоскости ограничиваются конструктивными особенностями кинематической пары, образованной этими звеньями. Конструктивные ограничения, наложенные на перемещения звеньев кинематической пары, называются условиями связей или связями.

*Связи* – это ограничения, наложенные на движения звеньев механизма, делающие их несвободными и предназначенные для передачи энергии или информации между этими звеньями.

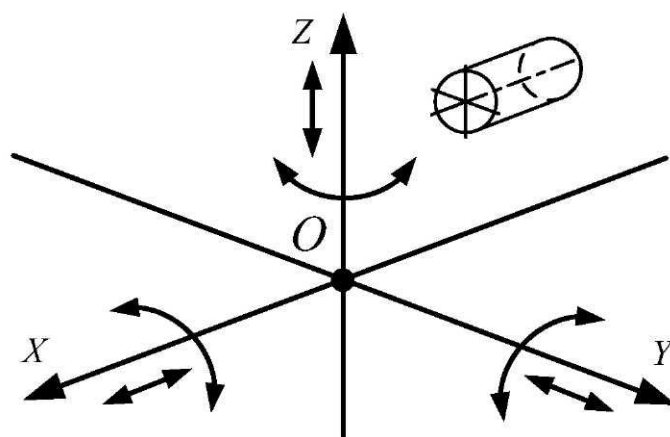


Рис. 1.9. Схема движений свободного тела в трехмерном пространстве

Число связей определяет класс кинематической пары, а число разрешенных движений соответствует ее подвижности.

Для образования кинематической пары необходимо наличие как минимум одной связи, ибо в случае равенства числа связей нулю звенья не взаимодействуют, т. е. не соприкасаются, следовательно, кинематическая пара не существует. В этом случае имеются два тела, совершающих определенные движения в пространстве или на плоскости независимо друг от друга. Число связей может быть только целым числом и должно быть меньше шести, т. к. в случае равенства числа связей шести звенья теряют способность совершать даже простейшие относительные движения (вращательные или поступательные) и кинематическая пара перестает существовать, поскольку соединение, образованное этими звеньями, является неподвижным. Следовательно, максимально возможное число подвижностей кинематической пары равно пяти, а минимальное – единице. При этом число подвижностей любой кинематической пары определяется по выражению

$$H = 6 - S$$

где  $S$ ,  $H$  – число связей и число подвижностей кинематической пары соответственно.

Исходя из вышесказанного, классификация кинематических пар по двум последним признакам представлена в [табл. 1.1](#).



Таблица 1.1

Класс	Число связей	Подвижность	Пространственная схема	Вид контакта	Условное обозначение
Кинематическая пара «Шар – плоскость»					
1	1	5		Точка, высшая	
Кинематическая пара «Цилиндр – плоскость»					
2	2	4		Линия, высшая	
Кинематическая пара «Сферическая»					
3	3	3		Поверхность, низшая	
Кинематическая пара «Плоскостная»					
3	3	3		Плоскость, низшая	

Класс	Число связей	Подвижность	Пространственная схема	Вид контакта	Условное обозначение
4	Кинематическая пара «Сферическая с пальцем»				
	4	2		Поверхность, низшая	
	Кинематическая пара «Цилиндрическая»				
4	2		Поверхность, низшая		
5	Кинематическая пара «Поступательная»				
	5	1		Поверхность, низшая	
	Кинематическая пара «Вращательная»				
5	1		Поверхность, низшая		



Класс	Число связей	Подвижность	Пространственная схема	Вид контакта	Условное обозначение
Кинематическая пара «Винтовая»					
5	5	1		Поверхность, низшая	

Стрелочки у координатных осей  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  на пространственных схемах показывают возможные вращательные и линейные относительные перемещения звеньев. Если стрелочка перечеркнута, то данное движение в кинематической паре запрещено, т. е. на него наложена связь. При этом несмотря на то, что у координатной оси  $X$ , на пространственной схеме «винтовой» кинематической пары не перечеркнуты две стрелочки, звенья этой пары могут совершать по отношению друг к другу только по одному простейшему движению, а именно: звено  $j$  – вращательное движение вокруг оси  $X$ , звено  $i$  – поступательное движение вдоль этой же оси.

## 1.7. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

Все механизмы состоят из совокупности звеньев, образующих кинематические пары, которые составляют кинематические цепи.

*Кинематическая цепь* – это система звеньев, образующих между собой кинематические пары (рис. 1.10, рис.1.11).

Кинематические цепи подразделяются:

1) по конструктивному исполнению:

*простая* – это кинематическая цепь, каждое звено которой входит в состав не более двух кинематических пар, т. е. содержит только одно- или двухвершинные звенья (рис. 1.10);

*сложная* – это кинематическая цепь, имеющая звенья, входящие в состав трех и более кинематических пар, т. е. содержит хотя бы одно звено с тремя или более вершинами (рис. 1.11);

2) по взаимодействию звеньев:

*незамкнутая, или разомкнутая* – это кинематическая цепь, в которой хотя бы одно звено имеет свободный элемент, не взаимодействующий с другими звеньями и не образующий с ними кинематических пар (рис. 1.10, а, рис.1.11, а);

*замкнутая* – это кинематическая цепь, каждое звено которой входит в состав как минимум двух кинематических пар (рис. 1.10, б, рис.1.11, б).

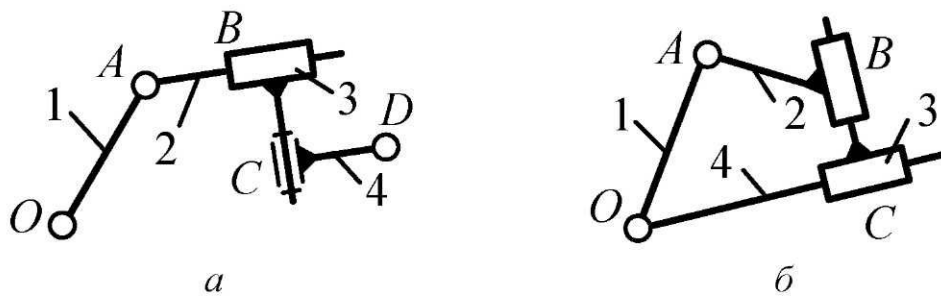


Рис. 1.10. Простые кинематические цепи

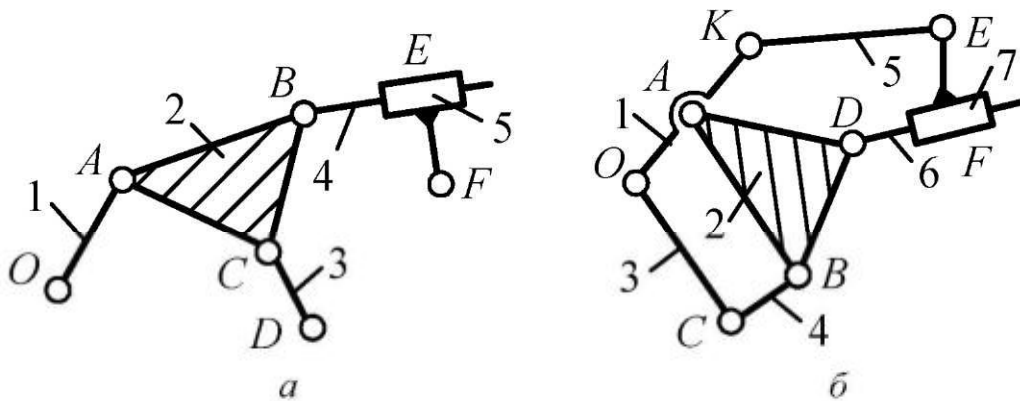


Рис. 1.11. Сложные кинематические цепи

Соединения кинематических цепей со стойкой образуют механизмы. Взаимодействие кинематических цепей между собой приводит к образованию кинематических соединений.

*Кинематическое соединение* – это кинематическая пара, образованная звеньями нескольких кинематических цепей.

В зависимости от сложности структуры в механизме может присутствовать несколько кинематических соединений.

## 1.8. СТРУКТУРА МЕХАНИЗМОВ И ЕЕ ДЕФЕКТЫ

Изучение механизмов начинается с анализа их структуры. Структура механизма в общем случае определяется функционально связанной совокупностью звеньев и отношений между ними. Под отношениями, соответственно, подразумеваются подвижные и неподвижные соединения.

*Структура механизма* – это совокупность звеньев, образующих подвижные и неподвижные соединения.

Структура механизма на разных стадиях его моделирования описывается различными средствами, с разным уровнем абстрагирования: на функциональном уровне – с помощью функциональной схемы, на уровне звеньев и структурных групп – структурной схемой и т. д.

*Структурная схема* – это графическое изображение механизма, выполненное без соблюдения масштабов с использованием условных обозначений, рекомендованных ГОСТ.



Структурная схема механизма содержит информацию о числе звеньев и виде движений, ими совершаемых, о числе подвижности и классе кинематических пар, о числе и виде кинематических цепей. Все типовые механизмы обладают рациональной структурой, однако большинство действительных механизмов содержит дефекты структуры ([рис. 1.12](#)).

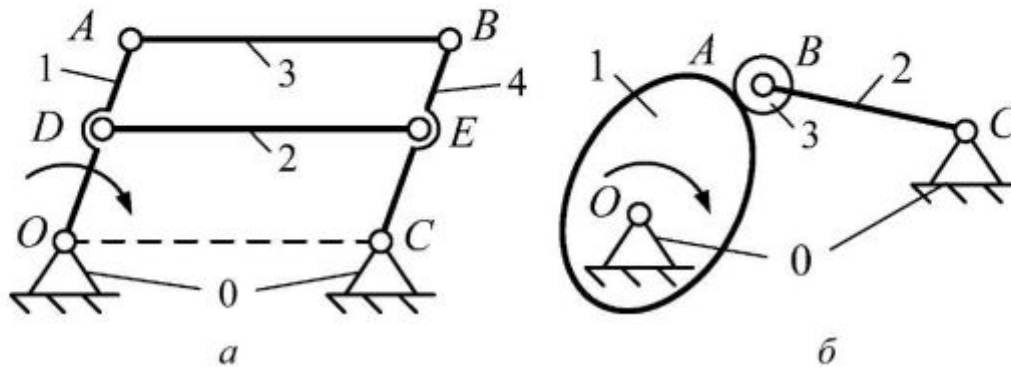


Рис. 1.12. Схемы механизмов с дефектами структуры

*Рациональная структура* – это структура механизма, не содержащая дефектов.

К дефектам структуры механизмов относятся избыточные связи и местные подвижности.

*Избыточные, или пассивные, связи* – это такие связи в механизме, которые повторяют связи, уже имеющиеся по данной координате, и поэтому не изменяют реальной подвижности механизма ([рис. 1.12, а](#)).

*Местные подвижности* – это подвижности механизма, которые не оказывают влияния на его передаточную функцию, а введены в состав механизма с целями иного характера.

## 1.9. МЕХАНИЗМЫ С НИЗШИМИ КИНЕМАТИЧЕСКИМИ ПАРАМИ

Исходя из определения, представленного в [§ 1.6](#), следует, что для получения механизма с низшими кинематическими парами необходимо, чтобы его звенья образовывали бы между собой только низшие кинематические пары.

Все многообразие механизмов с низшими кинематическими парами можно свести к следующим группам:

клиновые механизмы ([рис. 1.13, а](#));

винтовые механизмы ([рис. 1.13, б](#));

рычажные механизмы ([см. рис. 1.6, рис.2.1](#)).

*Клиновой механизм* – это механизм, структура которого содержит только низшие поступательные кинематические пары ([рис. 1.13, а](#)).

Клиновые механизмы предназначены для передачи движения и силовых факторов между звеньями с пересекающимися осями вращения. Все

клиновые механизмы относятся к разновидности механизмов, преобразующих поступательное движение звена 1 в поступательное движение звена 2.



Рис. 1.13. Структурные схемы клинового и винтового механизмов

*Винтовой механизм* – это механизм, структура которого содержит только низшие кинематические пары, хотя бы одна из которых является винтовой (рис. 1.13, б).

Винтовые механизмы предназначены для передачи движения и силовых факторов между соосными звеньями. Все винтовые механизмы относятся к разновидности механизмов, преобразующих вращательное движение в поступательное.

Схема типового винтового механизма содержит стойку и два подвижных звена (рис. 1.13, б). Подвижными звеньями типовых винтовых механизмов являются винт 1 и гайка 2.

*Винт* – это звено винтового механизма, выполненное в виде цилиндра, имеющего внешнюю рабочую поверхность в виде винтовой линии.

*Гайка* – это звено винтового механизма, выполненное в виде втулки, имеющей внутреннюю рабочую поверхность в виде винтовой линии.

В винтовых механизмах преобразование движения и силовых факторов осуществляется путем непосредственного касания рабочей поверхности винта с рабочей поверхностью гайки. Вследствие разности скоростей движения контактирующих поверхностей звеньев в зоне их контакта имеет место трение-скольжение, что приводит к интенсивному износу этих поверхностей, а также к росту потерь, уменьшению КПД и ресурса работы механизма. Для замены в винтовой паре трения-скольжения на трение-качение в схему винтового механизма вводят дополнительное звено, которое называется шарик. С целью повышения эффективности шариков в схеме обычно несколько, а полученный механизм является *шарико-винтовым*.

Рычажные механизмы будут рассмотрены в следующей главе.



## 2. РЫЧАЖНЫЕ МЕХАНИЗМЫ

*Рычажный механизм* – это механизм, образованный звеньями, выполненными в виде стержневых конструкций-рычагов.

Рычажные механизмы широко распространены в машинах практически всех видов.

### 2.1. КЛАССИФИКАЦИЯ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Все многообразие рычажных механизмов классифицируется по виду кинематической цепи и структуре.

По виду кинематической цепи выделяют две группы.

*Механизмы с замкнутой кинематической цепью* – это рычажные механизмы, которые содержат в своей структуре только замкнутые кинематические цепи (см. рис. 1.6, рис.2.1).

*Механизмы с незамкнутой кинематической цепью* – это рычажные механизмы, которые содержат в своей структуре только незамкнутые кинематические цепи (см. рис. 1.4, в, рис.2.7).

В большинстве случаев рычажные механизмы, обладающие замкнутой кинематической цепью, являются плоскими механизмами, а рычажные механизмы с незамкнутой кинематической цепью – пространственными.

По структуре рычажные механизмы могут быть элементарными, простыми и сложными.

*Элементарные механизмы* – это механизмы, структуру которых нельзя расчленивать на части, способные самостоятельно преобразовывать движение (рис. 2.3).

*Простые механизмы* – это рычажные механизмы, структура которых состоит из одного элементарного механизма и одной структурной группы (рис. 1.6, рис.2.1).

*Сложные механизмы* – это рычажные механизмы, структура которых состоит из одного или нескольких элементарных механизмов и двух или более структурных групп.

Сложные рычажные механизмы подразделяются:

на *однотипные* – это сложные рычажные механизмы, структура которых содержит одинаковые элементарные механизмы и подобные структурные группы звеньев;

*многотипные* – это сложные рычажные механизмы, структура которых содержит разные элементарные механизмы и разные структурные группы звеньев;

*комбинированные* – это сложные рычажные механизмы, структура которых образована в результате объединения однотипных и многотипных механизмов.

Все простые рычажные механизмы являются плоскими механизмами, которые, в свою очередь, подразделяются на основные типовые схемы:

шарнирный механизм (см. рис. 1.6, а);

кривошипно-ползунный механизм (см. рис. 1.6, а);  
 кулисный механизм (рис. 2.1, а);  
 тангенсный механизм (рис. 2.1, б);  
 синусный механизм (рис. 2.1, в).

Подвижные звенья плоских рычажных механизмов могут совершать как простейшие виды движений (вращательные и поступательные), так и сложные движения.

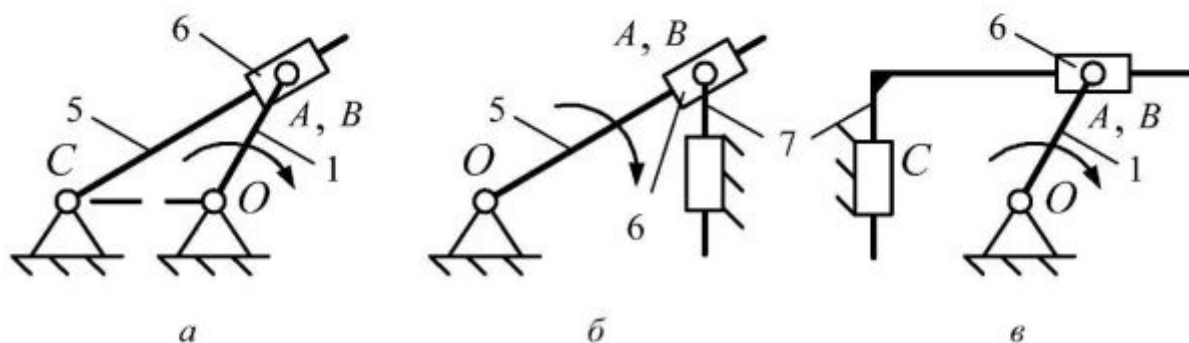


Рис. 2.1. Структурные схемы типовых плоских рычажных механизмов

К звеньям, совершающим вращательные движения, относятся кривошип, коромысло, кулиса и качающийся ползун.

*Кривошип* – это звено рычажного механизма, входящее в состав только вращательных кинематических пар и обладающее возможностью поворота вокруг оси вращения на угол более  $360^\circ$  (см. рис. 1.6, рис.2.1, звено 1).

*Коромысло* – это звено рычажного механизма, входящее в состав только вращательных кинематических пар и обладающее возможностью поворота вокруг оси вращения на угол менее  $360^\circ$  (см. рис. 1.6, звено 4).

*Кулиса* – это звено рычажного механизма, входящее в состав вращательных и поступательных кинематических пар и обладающее возможностью поворота вокруг оси вращения на угол менее  $360^\circ$  (рис. 2.1, звено 5).

*Качающийся ползун* – это звено рычажного механизма, образующее поступательную кинематическую пару со штоком и вращательную кинематическую пару со стойкой.

Все представленные звенья взаимодействуют со стойкой. При этом кривошип в большинстве случаев является начальным, задаваемым или ведущим звеном.

К звеньям, совершающим поступательные движения, относятся ползун, камень и шток.

*Ползун* – это звено, образующее поступательную кинематическую пару со стойкой (см. рис. 1.6, звено 3).

*Камень* – это звено, образующее поступательную кинематическую пару с кулисой (рис. 2.1, звено 6).

*Шток* – это звено, образующее поступательную кинематическую пару с качающимся или неподвижным ползуном (рис. 2.1, звено 7).

Звеньями, совершающими сложные движения, являются шатуны.



*Шатуны* – это звено рычажного механизма, образующее кинематические пары только с подвижными звеньями, не имеющими связей со стойкой (см. рис. 1.6, звено 2).

## 2.2. СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

При исследовании структуры любого рычажного механизма различают два направления: структурный анализ и структурный синтез.

*Структурный анализ* – это процесс исследования структуры механизма, т. е. определение числа звеньев и видов движения, ими совершаемых, числа и вида кинематических пар, структурных групп и кинематических цепей, числа подвижностей и наличия дефектов.

Структурный анализ механизмов проводится с целью выявления дефектов их структуры, которые при необходимости устраняются.

В качестве примера исключения (устранения) дефектов структуры рассмотрим плоский рычажный механизм обладающей нерациональной структурой (см. рис. 1.12, *a*). Данный механизм сохраняет работоспособность только при условии, что длины звеньев находятся в следующих соотношениях:  $l_{OA} = l_{BC}$ ,  $l_{AB} = l_{DE} = l_{OC}$  и  $l_{OD} = l_{EC}$ . Следовательно, точки механизма образуют фигуру  $OABC$ , всегда представляющую собой параллелограмм. Тогда, не изменяя совершаемых движений звеньев механизма, можно удалить шатун 2, т. к. данное звено, образуя со звеньями 1 и 4 кинематические пары с центрами шарниров в точках  $D$  и  $E$ , налагает на эти звенья условия связи, не оказывающие влияния на характер их движения. При этом условия связи, наложенные шатуном 2 на звенья 1 и 4, являются пассивными, или избыточными. В свою очередь, подвижности кинематических пар с центрами шарниров в точках  $D$  и  $E$  представляют собой пример местных подвижностей, т. к. при их отсутствии подвижность остальных звеньев механизма не изменится. Аналогичная ситуация будет иметь место и при исключении из структуры механизма вместо шатуна 2 шатуна 3.

Для исключения дефектов структуры необходимо точно знать о наличии в схеме механизма избыточных, или пассивных, связей и их количество. Для расчета числа избыточных, или пассивных, связей используется следующая зависимость:

$$q = W_o + W_m + W,$$

где  $W_o$ ,  $W_m$ ,  $W$  – заданная, местная и расчетная подвижность.

Избыточные, или пассивные, связи имеются только в замкнутых кинематических цепях с несколькими контурами. В механизмах различают два вида контуров: зависимые и независимые. Контур является *независимым*, если он отличается от других контуров хотя бы на одно звено. *Зависимые контуры* дублируют друг друга, а звенья, их образующие, создают избыточные, или пассивные, связи. Так структура механизма, представленного на рис. 1.12, содержит несколько контуров –  $OABC$  и  $ODEC$ . Контуры являются зависимыми, т. к. они образованы одинаковым количеством

и видами звеньев. При этом ранее мы выяснили, что структура данного механизма имеет дефекты, т. е. содержит избыточные, или пассивные, связи и местные подвижности, что подтверждает наличие зависимых контуров. Следовательно, для определения количества зависимых контуров необходимо знать общее число контуров механизма. Определение числа контуров проводится по выражению

$$K = p - n,$$

где  $p$  – число кинематических пар в структуре механизма;  $n$  – число подвижных звеньев механизма,

$$n = k - 1,$$

здесь  $k$  – общее число звеньев механизма, включая стойку.

После исключения дефектов структуры определяется количество структурных групп, число и вид кинематических пар, число основных подвижностей, а затем, начиная с выходного звена, из состава механизма выделяются группы звеньев, совместно обладающих подвижностью, равной нулю. При этом необходимо следить, чтобы звенья, остающиеся в механизме, не теряли связи с ведущим звеном.

В общем случае структурный анализ рычажных механизмов сводится к решению следующих задач:

*для пространственных механизмов:*

- 1) определение подвижности механизма;
- 2) определение маневренности механизма.

*для плоских механизмов:*

- 1) определение подвижности механизма;
- 2) анализ состава структуры механизма.

Рассмотрев представленные задачи структурного анализа, можно отметить сходство первой задачи для обоих видов рычажных механизмов. При этом вторые задачи, несмотря на некоторые различия формулировок, преследуют одну цель – выявление наличия дефектов структуры.

### **Подвижность механизмов**

*Подвижность механизма* – это число независимых обобщенных координат, однозначно определяющих положения звеньев механизма на плоскости или в пространстве в рассматриваемый момент времени.

Структурные формулы для определения подвижности пространственных механизмов были получены П. И. Сомовым, а для плоских механизмов – П. Л. Чебышевым. В основу обоих структурных формул положены одинаковые принципы их построения, следовательно, в обобщенном виде структурные формулы можно представить как



$$W = H \cdot n + \sum_{i=1}^n (H - i) p_i,$$

где  $H$  – число степеней подвижности (для пространственных механизмов  $H = 6$ , для плоских механизмов  $H = 3$ );  $p_i$  – число кинематических пар  $i$ -й подвижности;

$i$  – число подвижностей кинематической пары.

Структурные формулы имеют по две формы записи:

1) в классах кинематических пар:

для плоских механизмов формула П. Л. Чебышева:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4,$$

для пространственных механизмов формула П. И. Сомова:

$$W = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1,$$

где  $p_5, p_4, p_3, p_2, p_1$  – число кинематических пар, соответственно, пятого, четвертого, третьего, второго и первого класса;

2) в степенях подвижностей кинематических пар:

для плоских механизмов формула П. Л. Чебышева:

$$W = 3n - 2p_1 - p_2,$$

для пространственных механизмов формула П. И. Сомова:

$$W = 6n - 5p_1 - 4p_2 - 3p_3 - 2p_4 - p_5,$$

здесь  $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$  – число кинематических пар, имеющих одну, две, три, четыре и пять подвижностей соответственно.

### **Состав структуры рычажных механизмов**

Для решения задач анализа и синтеза рычажных механизмов профессором Л. В. Ассуром была предложена оригинальная структурная классификация, согласно которой механизмы, не имеющие избыточных связей и местных подвижностей, состоят из первичных (элементарных) механизмов и структурных групп звеньев ([рис. 2.2](#)).

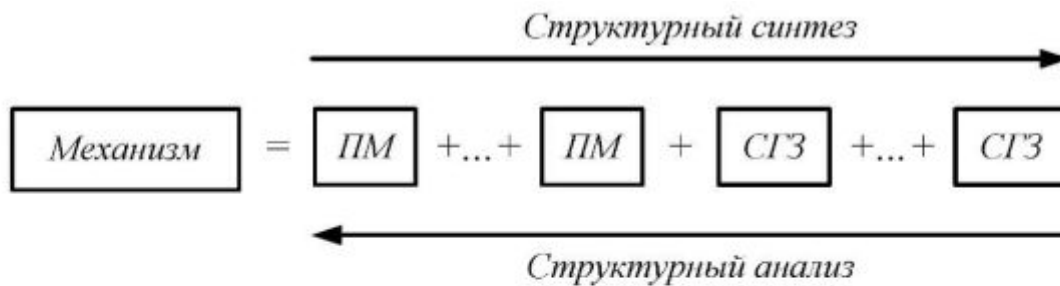


Рис. 2.2. Состав структуры механизма по Ассуру

Первичный механизм (ПМ) – это элементарный механизм, состоящий из подвижного и неподвижного звеньев, которые образуют кинематическую пару с одной или несколькими подвижностями (рис. 2.3).

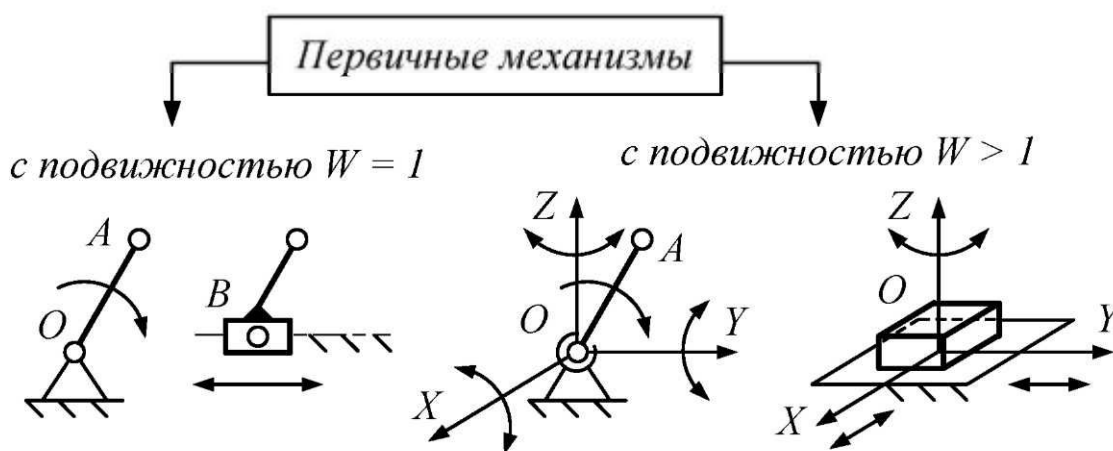


Рис. 2.3. Первичные механизмы

Согласно определению все первичные (элементарные) механизмы образованы совокупностью одного подвижного звена со стойкой и являются механизмами первого класса. При этом класс соответствует количеству подвижных звеньев.

Структурная группа звеньев (СГЗ) – это кинематическая цепь, образованная подвижными звеньями механизма, подвижность которой в пространстве и на плоскости равна нулю в любой момент времени, и не распадающаяся на более простые цепи, обладающие подобными свойствами (рис. 2.4., рис.2.5., рис.2.6).

Изначально структурная классификация Л. В. Ассура охватывала только плоские рычажные механизмы с вращательными кинематическими парами. В дальнейшем профессор И. И. Артоболевский усовершенствовал данную классификацию, распространив ее на плоские рычажные механизмы и с поступательными кинематическими парами, что положило основу для создания теории структурных групп, согласно которой структурной группой является кинематическая цепь с низшими кинематическими парами, удовлетворяющая условию

$$W_{с.г} = 3 \cdot n_{с.г} - 2 \cdot p_1 - p_2 = 0,$$



где  $W_{с.г}$ ,  $n_{с.г}$  – подвижность и число подвижных звеньев структурной группы;  $p_1, p_2$  – число кинематических пар соответствующей подвижности.

Особенностью структурных групп является их статическая неопределимость. Если структурную группу свободными элементами звеньев присоединить к стойке, то образуется статически неопределимая ферма. Используя данное свойство структурных групп, удобно проводить структурный, кинематический и силовой анализ механизмов. Во всех структурных группах конечные звенья входят в состав только одной кинематической пары и имеют свободный элемент звена. Подобные звенья называются поводки.

*Поводок* – это конечное звено структурной группы, одним элементом входящее в состав одной кинематической пары и имеющее второй свободный элемент звена.

Структурные группы могут быть образованы только четным количеством подвижных звеньев (см. рис. 2.4–2.6). Степень сложности структурной группы характеризуется ее классом. Класс структурной группы определяется количеством звеньев и кинематических пар с учетом числа вершин наиболее сложного звена. Сложность структурных групп определяет класс механизма. Соответственно, класс механизма определяется классом наиболее сложной структурной группы, входящей в его состав. В пределах класса структурные группы подразделяются на порядки. Порядок структурной группы соответствует числу поводков.

В структуре рычажных механизмов наиболее часто встречаются структурные группы, состоящие из двух звеньев (2 и 3) и трех кинематических пар пятого класса (рис. 2.4). Данные структурные группы содержат два подвижных звена, имеющих по две вершины, что соответствует второму классу. Структурные группы второго класса имеют не менее двух поводков, что свидетельствует о присутствии внутри класса нескольких порядков. В настоящее время наибольшее распространение получили структурные группы второго класса второго порядка, характерной особенностью которых является наличие пяти видов (рис. 2.4).

Вид структурной группы определяется ее структурной формулой, которая составляется в зависимости от вида и класса кинематических пар. Структурная группа второго класса второго порядка (рис. 2.4, а) образована двумя звеньями, двумя поводками и содержит три вращательных пары пятого класса, имеет структурную формулу ВВВ, что соответствует первому виду. Второй вид группы второго класса второго порядка (рис. 2.4, б) получается путем замены одной из крайних вращательных кинематических пар поступательной парой пятого класса. Структурная формула полученной группы будет иметь вид ВВП или ПВВ.

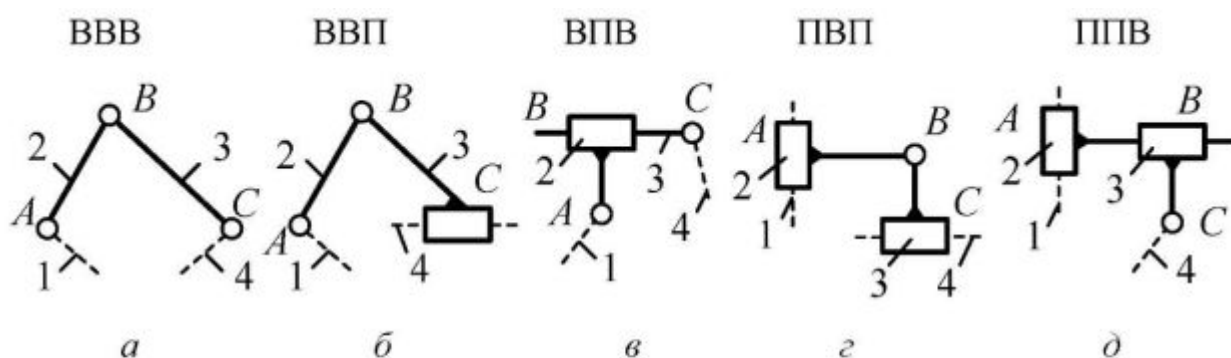


Рис. 2.4. Структурные группы второго класса второго порядка

Третий вид структурной группы второго класса второго порядка (рис. 2.4, в) имеет структурную формулу BPP и образуется вследствие замены средней вращательной кинематической пары поступательной парой пятого класса. Четвертый вид групп второго класса второго порядка (рис. 2.4, г) получается заменой обеих крайних вращательных кинематических пар пятого класса поступательными парами, что соответствует структурной формуле PVP. Замена одной из крайних и средней вращательных кинематических пар поступательными парами позволяет получить пятый вид группы второго класса второго порядка (рис. 2.4, д), имеющей структурную формулу PBP или BPP.

Механизмы, содержащие только структурные группы второго класса, являются механизмами второго класса.

Теоретически существуют структурные группы и больших классов, однако в силу их малой распространенности в учебном курсе ограничимся структурными группами второго класса.

### Маневренность пространственных рычажных механизмов

Наиболее распространенными представителями пространственных рычажных механизмов являются манипуляторы (рис. 2.5, а).

*Манипулятор* – это пространственный рычажный механизм, осуществляющий действия, аналогичные действиям руки человека.

Манипуляторы предназначены для изменения положения объектов.

Звенья манипуляторов промышленных роботов образуют только разомкнутые кинематические цепи, содержащие кинематические пары разных классов, что позволяет подобным механизмам иметь подвижность больше единицы. Однако для манипуляторов характерно наличие возможности изменения структуры механизма в процессе его работы. В соответствии со служебным назначением возможны два варианта.



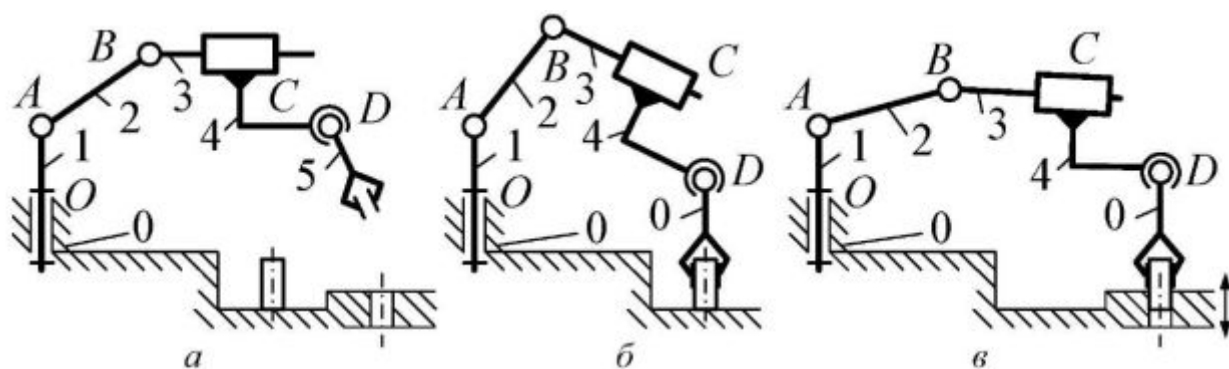


Рис. 2.5. Схема механизма манипулятора промышленного робота

*Первый вариант:* требуется изменить положение неподвижного предмета (рис. 2.5, а). В начальный момент времени предмет, положение которого требуется изменить, лежит на неподвижной плоскости и находится в состоянии покоя. Соответственно, предмет и плоскость накладывают друг на друга определенные связи. При этом если взаимосвязь плоскости и предмета не изменяет его кинематического состояния, то их можно рассматривать как одно неподвижное звено, являющееся стойкой. В момент времени, соответствующий захвату выходным звеном рассматриваемого предмета, данное звено также становится неподвижным и его необходимо рассматривать как элемент стойки (рис. 2.5, б). Соответственно, число подвижных звеньев в структуре механизма уменьшается на единицу, а разомкнутая кинематическая цепь, которой до этого момента обладал механизм, становится замкнутой, что приводит к уменьшению его подвижности. В следующий момент времени возникнет необходимость отрыва предмета от неподвижной плоскости с целью его дальнейшего перемещения. Однако для выполнения подобного действия манипулятор, обладающий в данный момент времени замкнутой кинематической цепью, должен иметь подвижностью, как минимум равную единице. Как только предмет будет отделен от неподвижной плоскости, он утратит ранее существовавшие взаимосвязи с этой плоскостью, и в дальнейшем его необходимо рассматривать вместе с выходным звеном как одно подвижное звено. В момент времени восстановления подвижности выходным звеном кинематическая цепь манипулятора опять становится разомкнутой, что приводит к прежней подвижности механизма и способности перемещать предмет по заданному закону.

*Второй вариант:* требуется установить деталь в отверстие определенной формы, выполненное в неподвижной поверхности. В момент времени, соответствующий установке выходным звеном детали в отверстие, выходное звено остается подвижным, а кинематическая цепь манипулятора замыкается (рис. 2.5, в). При этом число подвижных звеньев сохраняется, а подвижность механизма изменяется пропорционально подвижности новой кинематической пары, образованной деталью и неподвижной поверхностью, в которую она устанавливается. В момент прекращения связи выходного звена с деталью

кинематическая цепь становится разомкнутой, а механизм восстанавливает свои свойства.

Из рассмотренных ситуаций следует, что обеспечение работоспособности манипулятора возможно только при выполнении следующего условия:

$$m \geq 1.$$

где  $m$  – маневренность манипулятора.

*Маневренность* – это подвижность манипулятора при неподвижном выходном звене.

Маневренность пространственных механизмов определяется по выражению, полученному на основе формулы Сомова:

$$m = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1$$

где все коэффициенты идентичны представленным в [§ 2.3.](#)

## 2.3. СИНТЕЗ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Синтез механизмов выполняется в два этапа. Первый этап называется структурным синтезом, а второй – метрическим синтезом. Общими критериями, которыми руководствуются на каждом этапе, являются: минимизация габаритно-массовых характеристик и себестоимости механизма, а также обеспечение технологичности звеньев и выполнение условий работоспособности. Однако каждый этап преследует разные цели.

Охарактеризуем каждый из этапов в отдельности.

*Структурный синтез* – это процесс проектирования новой или модернизации (усовершенствования) уже существующей структуры механизма, обладающей требуемыми свойствами: заданное число подвижностей, отсутствие местных подвижностей и избыточных связей, минимум звеньев, использование кинематических пар определенного вида.

На этапе структурного синтеза осуществляется формирование структурной схемы механизма, которая определяет число звеньев, количество, вид и подвижность кинематических пар, а также число избыточных связей и местных подвижностей. Введение в структурную схему механизма каждой избыточной связи и местной подвижности должно быть доказательно обосновано. Основными условиями при выборе структурной схемы являются заданные параметры: требуемое число подвижностей, отсутствие местных подвижностей и избыточных связей, минимизация количества звеньев, использование кинематических пар определенного вида или класса. В то же время определяющими условиями являются: заданный закон движения и расположение осей входного и выходного звеньев. Если оси входного и выходного звеньев механизма параллельны, то выбирается плоская структурная схема. При пересекающихся или скрещивающихся осях входного и выходного звеньев ис-



пользуется пространственная схема. В большинстве случаев задача структурного синтеза сводится к выбору структурной схемы механизма из набора типовых схем.

Структурный синтез плоских рычажных механизмов выполняется в соответствии со структурной классификацией Л. В. Ассура (см. рис. 2.3). В качестве примера рассмотрим структурный синтез кривошипно-ползунного механизма (рис. 2.6).

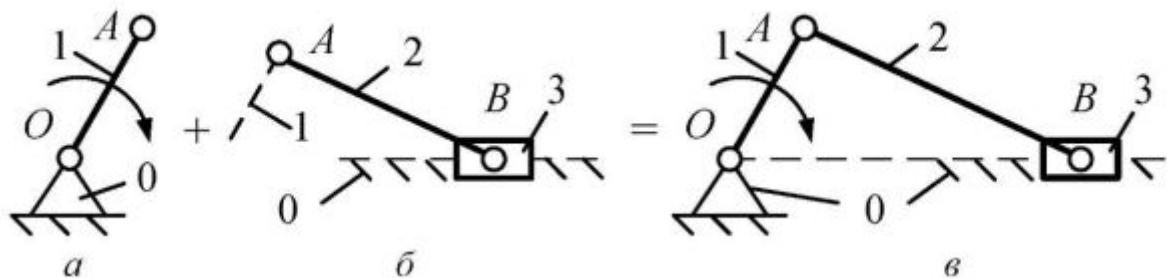


Рис. 2.6. Схема структурного синтеза кривошипно-ползунного механизма

Результат первой задачи структурного анализа показывает, что подвижность механизма равна единице, следовательно, в качестве первичного механизма выбираем группу звеньев соответствующей подвижности, звенья которой образуют вращательную кинематическую пару пятого класса (рис. 2.6, а). К выбранному первичному механизму присоединяем структурную группу звеньев 2-го класса 2-го порядка 2-го вида (рис. 2.6, б). Полученный таким образом механизм будет обладать рациональной структурой, т. е. его структурная схема не будет содержать дефектов структуры (рис. 2.6, в).

Более сложные структурные схемы можно получить последовательным присоединением требуемого числа структурных групп соответствующего класса, вида и порядка. При этом необходимо следить, чтобы структура механизма оставалась рациональной при выполнении всех остальных заданных условий.

Результатом выполнения этапа структурного синтеза является структурная схема механизма, удовлетворяющая принятым критериям.

*Метрический синтез* – это процесс определения основных геометрических размеров звеньев механизма и конфигураций профилей рабочих поверхностей, которые наилучшим образом удовлетворяют заданным условиям и обеспечивают оптимальное сочетание качественных показателей.

Задачами метрического синтеза являются:

- 1) синтез кинематической схемы механизма по заданным положениям входного или выходного звена;
- 2) синтез кинематической схемы механизма по заданным геометрическим параметрам;
- 3) синтез кинематической схемы механизма по заданному закону движения выходного звена;

4) синтез кинематической схемы механизма по заданным кинематическим параметрам: средней скорости выходного звена, коэффициенту неравномерности средней скорости;

5) синтез кинематической схемы механизма по заданной величине угла давления или угла передачи.

Решением задач метрического синтеза является кинематическая схема механизма, удовлетворяющая критериям обоих этапов синтеза.

*Кинематическая схема* – это графическое изображение механизма, выполненное в определенном масштабном коэффициенте с использованием условных обозначений, рекомендованных ГОСТ.

Кинематическая схема содержит информацию о числе звеньев и виде движений, ими совершаемых, о числе подвижности и классе кинематических пар, о числе и виде кинематических цепей и о размерах звеньев.

При решении задач метрического синтеза рычажных механизмов руководствуются следующими критериями:

1) условие проворачиваемости звеньев – спроектированный механизм должен обеспечивать для входного или выходного звеньев возможность поворота на угол более  $360^\circ$ ;

2) конструктивные ограничения на габариты механизма – спроектированный механизм должен обладать габаритными размерами, укладывающимися в заданные диапазоны;

3) точность обеспечения заданного закона движения или заданных положений звеньев механизма – спроектированный механизм должен обеспечивать выполнение заданного закона движения или заданных положений звеньев с требуемой точностью;

4) ограничение по условиям передачи силовых факторов – текущее значение угла давления спроектированного механизма не должно превышать допустимой величины;

5) другие условия и требования, учитывающие специфику функционирования и эксплуатации механизма.

К методам синтеза механизмов относятся синтез методами анализа и методы прямого синтеза (аналитический, графический и графоаналитический).

Метрический синтез механизмов графоаналитическими методами осуществляется в определенном масштабном коэффициенте.

*Масштабный коэффициент* – это отношение какой-либо действительной величины  $l$ , взятой в метрах, к длине отрезка  $|l|$ , измеряемого в миллиметрах и изображающего эту величину в составе кинематической схемы.

*Масштаб длин* – это отношение длины отрезка  $|l|$ , изображающего какую-либо величину в миллиметрах, к действительной величине  $l$  в метрах.

Масштаб является стандартизированной величиной, значения которой жестко регламентированы положениями ГОСТ. Из положений дисциплины «Инженерная графика» известно, что действительный масштаб имеет соот-



ношение  $1 \times 1$ , при этом существуют ряды масштабов увеличения и масштабов уменьшения. Масштабный коэффициент является обратной величиной масштабу и не является стандартизованной величиной. Значения масштабного коэффициента принимаются произвольно в зависимости от заданных условий и целей решения требуемых задач.

Рекомендуется синтез кинематических схем механизмов выполнять в масштабном коэффициенте кривошипа, м/мм:

$$\mu_l = \frac{l_{OA}}{|OA|},$$

где  $l_{OA}$  – действительная длина кривошипа;  $|OA|$  – произвольный отрезок.

## 2.4. КАЧЕСТВЕННЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Ограничения и условия метрического синтеза формируют значения качественных показателей, с помощью которых выполняется оценка качества рычажных механизмов.

Качественными показателями рычажных механизмов являются:

коэффициент полезного действия  $\eta$ ;

ход механизма  $H$ ;

коэффициент неравномерности средней скорости  $k$ ;

угол давления  $\vartheta$ ;

угол передачи  $\mu$ .

*Коэффициент полезного действия*  $\eta$  – это безразмерная величина, характеризующая количество полезно используемой механизмом суммарной энергии. Как отмечалось в § 1.4, коэффициент полезного действия механизма всегда меньше единицы, т. к. процесс преобразования движения сопровождается потерями механической энергии, вызванными наличием трения в кинематических парах. Чем ближе значение КПД к единице, тем меньше потери, следовательно, выше качество рычажного механизма.

Рабочую зону плоских рычажных механизмов принято оценивать по диапазону перемещений выходного звена, называемому ходом механизма.

*Ход механизма* – это расстояние между начальным и конечным положениями выходного звена.

Для кривошипно-ползунного (рис. 2.7, а), синусного (рис. 2.7, з) и тангенсного (рис. 2.7, д) механизмов ход вычисляется согласно определению данного параметра, а для шарнирного (рис. 2.7, б) и кулисного (рис. 2.7, в) механизмов значение данного параметра может быть найдено по выражению

$$H = \psi \cdot l,$$

где  $l$ ,  $\psi$  – длина и угол, рад, размаха выходного звена.

Угол размаха коромысла или кулисы  $\psi$  – это угол между начальным и конечным положениями коромысла или кулисы (рис. 2.7, б, в).

Большинство плоских рычажных механизмов имеет периодичный характер работы, т. е. по истечении определенного промежутка времени все процессы, протекающие в механизме, повторяются. При этом цикл работы любого механизма делится на фазы рабочего и холостого хода. На фазе рабочего хода осуществляется выполнение служебного назначения механизма, а фаза холостого хода предназначена для завершения цикла движения и снятия остаточных напряжений с рабочих поверхностей звеньев. Соотношение времени, затрачиваемого на выполнение рабочего и холостого ходов, принято оценивать с помощью коэффициента неравномерности средней скорости.

Коэффициент неравномерности средней скорости – это коэффициент, характеризующий отношение времени холостого хода  $T_{xx}$  к времени рабочего хода  $T_{р.х}$ :

$$k = \frac{T_{xx}}{T_{р.х}} = \frac{\pi - \theta}{\pi + \theta},$$

где  $\theta$  – угол между положениями шатуна в крайних положениях механизма.

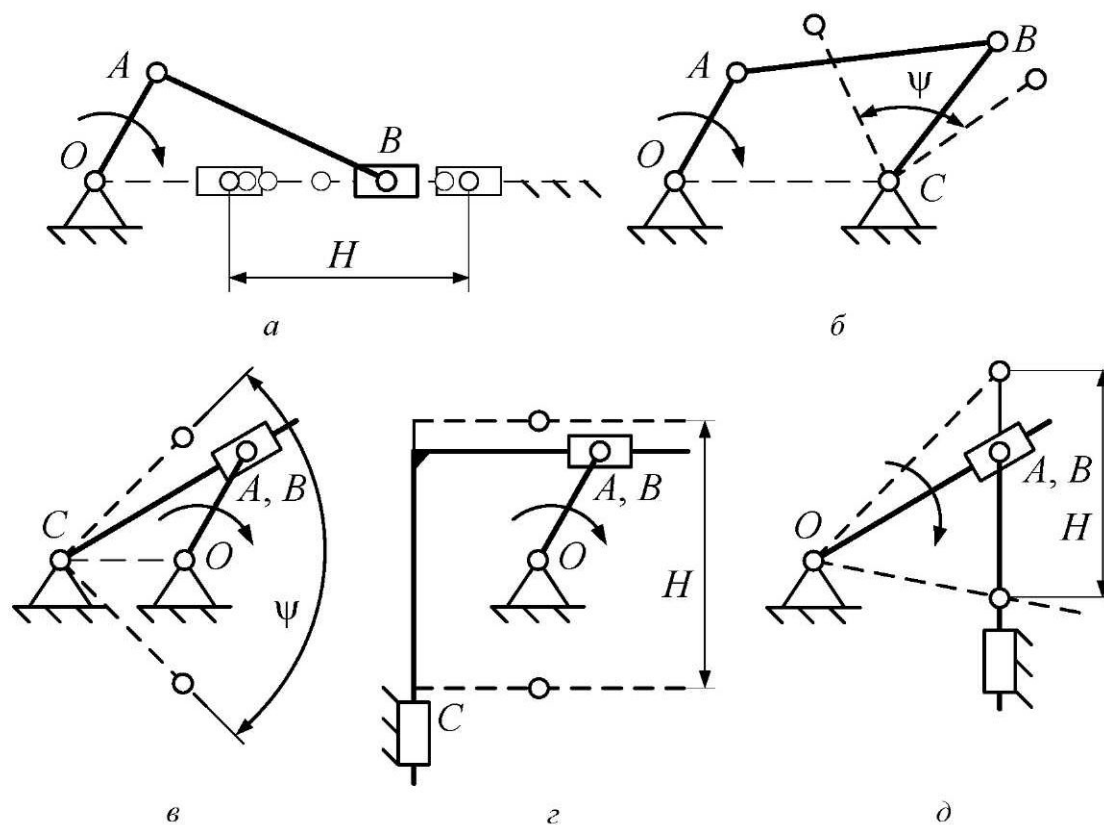


Рис. 2.7. Схемы определения хода рычажных типовых механизмов



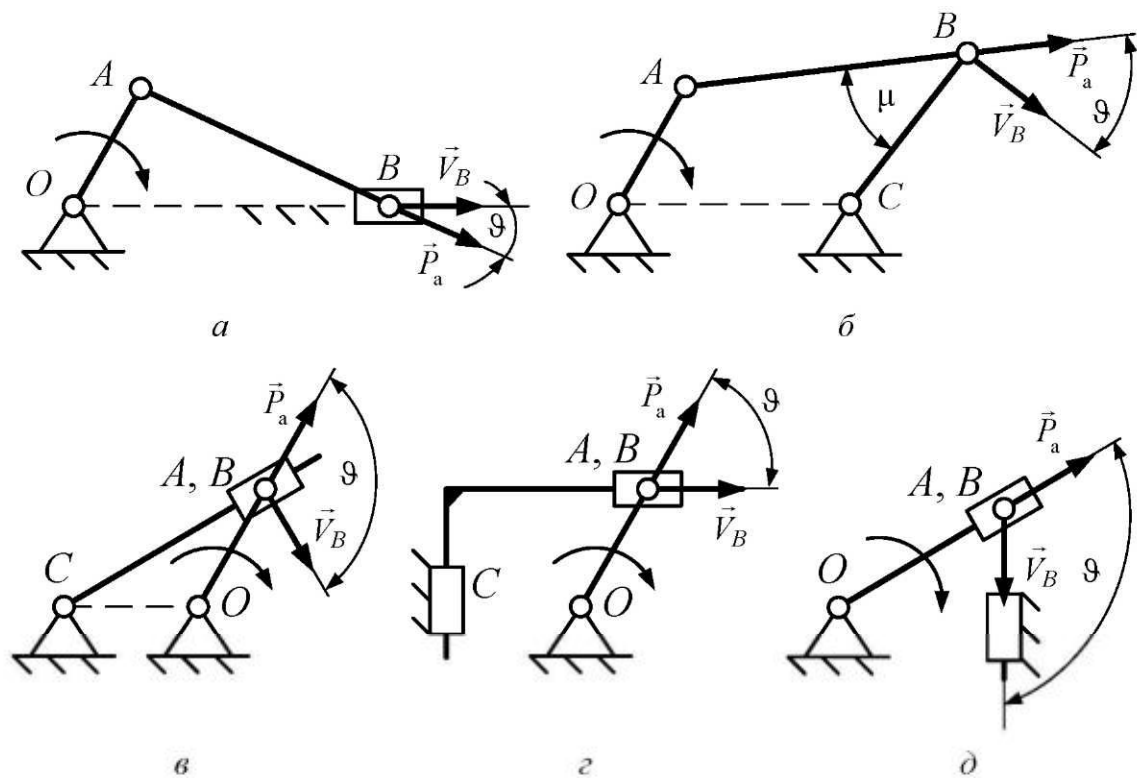


Рис. 2.8. Схемы определения углов давления типовых рычажных механизмов

Для оценки качества передачи силовых факторов между звеньями плоских рычажных механизмов используется угол давления  $\vartheta$ .

Угол давления – это острый угол между вектором активной силы  $\vec{P}_a$ , действующей со стороны предшествующего звена, и вектором скорости точки ее приложения (рис. 2.8).

Значение угла давления формирует условия передачи сил между звеньями, определяя величину движущей силы механизма  $Q$ :

$$Q = P_a \cdot \cos(\vartheta).$$

Из анализа выражения следует, что уменьшение значения угла давления приводит к росту значения движущей силы, а увеличение угла давления, соответственно, снижает эту силу. В процессе работы рычажных механизмов угол давления всегда  $\vartheta \leq 90^\circ$ . При величине угла давления  $\vartheta > 90^\circ$  в механизмах может возникнуть заклинивание, или самоторможение.

Самоторможение, или заклинивание – это состояние механизма, сопровождаемое значениями углов давления, делающими невозможным движения звеньев при сколь угодно большом значении движущей силы.

Для исключения подобных ситуаций при синтезе механизмов задаются допустимыми значениями углов давления  $[\vartheta]$ , руководствуясь следующими рекомендациями: для механизмов, звенья которых образуют только вращательные кинематические пары, допустимый угол давления лежит в диапазоне

$[\vartheta] = 45-60^\circ$ , а для механизмов, имеющих сочетание вращательных и поступательных кинематических пар,  $-\ [\vartheta] = 30-45^\circ$ .

При значениях угла давления  $[\vartheta] = 90^\circ$  механизм находится в так называемых «мертвых» положениях, что в статике приводит заклиниванию звеньев, в движении (динамике) механизм преодолевает подобные положения за счет дополнительного объема кинетической энергии.

Для оценки качества шарнирного механизма помимо угла давления используется угол передачи  $\mu$  ([рис. 2.8. б](#)).

*Угол передачи* – это угол, определяющий взаимное расположение осей шатуна и коромысла шарнирного механизма.

Значения углов передачи и давления взаимосвязаны:

$$\vartheta + \mu = 90^\circ.$$

Анализ выражения показывает, что увеличение угла давления приводит к уменьшению угла передачи и наоборот рост значений угла передачи – к снижению угла давления. Одновременный рост или падение значений углов давления и передачи невозможен. При равенстве нулю одного из углов значение второго угла достигает максимума, т. е.  $90^\circ$ .



### 3. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ

*Кинематический анализ механизмов* – это один из видов исследования механизмов, выполняемый без учета силовых факторов, действующих на их звенья в функции времени.

*Целью* кинематического анализа является определение величин, направлений действия и закономерностей изменения кинематических параметров исследуемого механизма в функции времени.

В рамках кинематического анализа плоских рычажных механизмов решаются следующие *задачи*:

1) выявление возможных положений всех звеньев механизма за рассматриваемый промежуток времени;

2) определение величин линейных и относительных скоростей характерных точек механизма, а также выявление значений и направлений угловых скоростей всех звеньев;

3) определение величин линейных и относительных ускорений характерных точек механизма, а также выявление значений и направлений угловых ускорений всех звеньев.

При кинематическом анализе используются аналитический, графический и графоаналитический методы.

К графоаналитическим методам кинематического анализа относятся:

метод кинематических планов (метод планов);

метод кинематических диаграмм (метод диаграмм).

Оба метода дают примерно одинаковый по точности результат. Однако метод диаграмм в основном применяется для определения закона движения и кинематических параметров характерных точек выходных звеньев механизма. Метод планов позволяет найти кинематические параметры любых точек, принадлежащих звеньям механизма.

#### 3.1. ПЛАН ПОЛОЖЕНИЙ МЕХАНИЗМА

В большинстве случаев движение плоских рычажных механизмов носит периодичный характер, т. е. по истечении определенного промежутка времени все процессы, имеющие место в механизме, повторяются. Следовательно, кинематический анализ плоских рычажных механизмов выполняют для одного периода их работы, т. е. за один оборот ведущего звена (кривошипа).

Решением первой задачи кинематического анализа графоаналитическим методом является план положений механизма.

*План положений механизма* – это графическое изображение взаимного расположения звеньев механизма за рассматриваемый промежуток времени, выполненное в определенном масштабном коэффициенте ([рис. 3.1](#)).

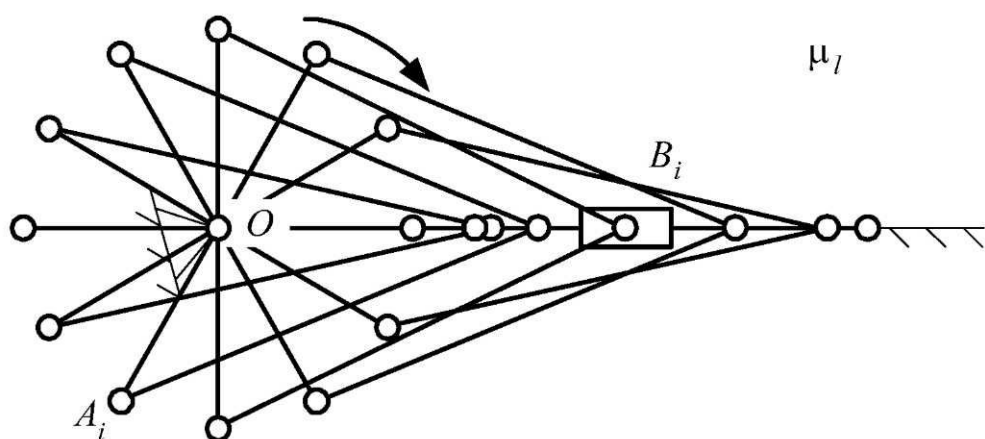


Рис. 3.1. План положений кривошипно-ползунного механизма

Построение планов положений начинают с изображения элементов стойки, т. е. шарнирно-неподвижных опор и направляющих. Далее последовательно изображают ведущие звенья в заданных положениях и структурные группы звеньев. Положения подвижных характерных точек определяются с помощью метода засечек. Если ведущее звено совершает равномерное вращательное движение, то траекторией движения одной из его характерных точек является окружность. Данную траекторию (окружность) делят на равные части: 12, 24, 36, 48 и т. д. Каждой полученной точке присваивается соответствующий номер. За начальное положение принимается одно из крайних положений выходного звена (рис. 3.2).

Под крайними положениями подразумеваются такие положения выходных звеньев, в которых оси кривошипа 1 и шатуна 2 совпадают. Подобные положения точки  $B$  найдем, проведя из точки  $O$  дуги радиусами

$$R_1 = |AB| - |OA|,$$

$$R_2 = |AB| + |OA|,$$

где  $|AB|$ ,  $|OA|$  – отрезки, пропорциональные действительным длинам шатуна и кривошипа.

Положения точки  $A$ , соответствующие крайним положениям точки  $B$ , найдем, проведя из точки  $O$  окружность радиусом  $R_3 = |OA|$  (рис. 3.2). Для построения плана положений механизма необходимо от начального положения кривошипа в направлении его вращения отложить требуемый угол  $\varphi_i$ , соответствующий следующему положению кривошипа. Для определения положения точки  $B$  из точки  $A$  проводится дуга радиусом  $R_4 = |AB|$ . Соединив выявленные точки, получим новое положение звеньев механизма.



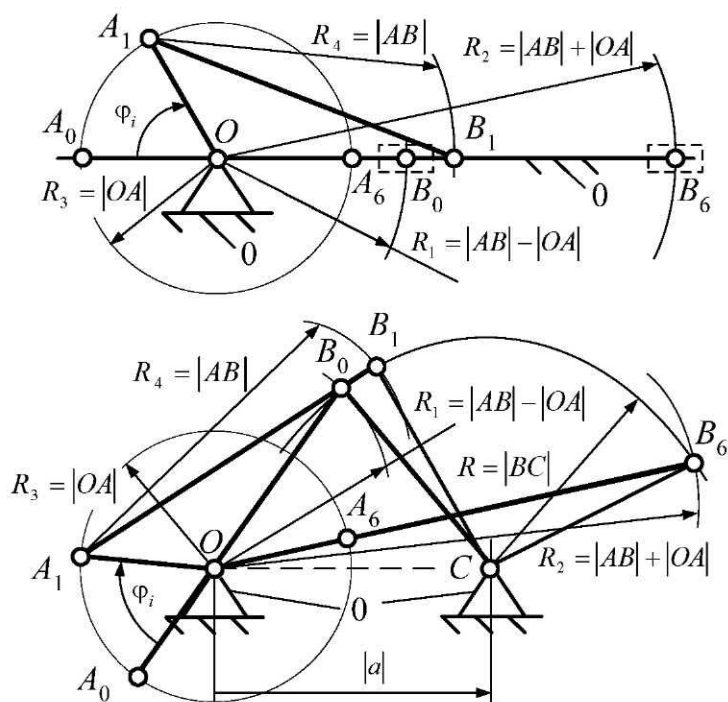


Рис. 3.2. Синтез крайних положений звеньев механизмов

Процесс построения повторяется до полного завершения построения плана положений, содержащего требуемое число положений ведущего звена.

### 3.2. МЕТОД КИНЕМАТИЧЕСКИХ ДИАГРАММ

После построения планов положений переходят к построению *диаграммы пути*. Выбрав систему координат (рис. 3.3, а), задаемся масштабными коэффициентами оси пути  $S$ , м/мм, и оси времени  $t$ , мин/мм:

$$\mu_s = \frac{H}{|y|}, \quad \mu_t = \frac{60}{n \cdot l},$$

где  $n$  – число оборотов кривошипа,  $\text{мин}^{-1}$ ;  $|y|, l$  – произвольные отрезки, мм.

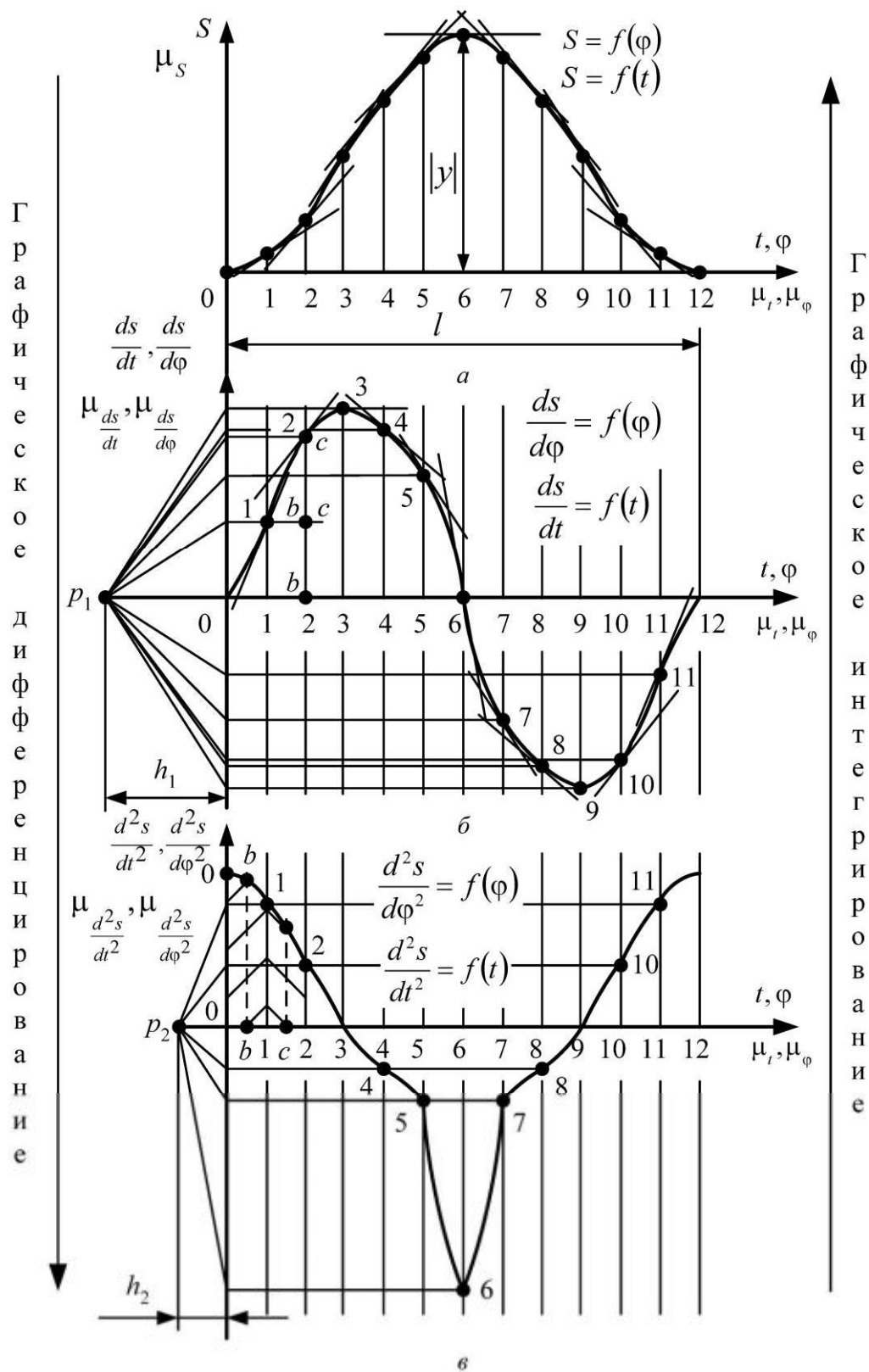


Рис. 3.3. Кинематические диаграммы

Одно из крайних положений выходного звена примем за начальное положение (см. рис. 3.1). Измерив отрезок  $|B_0B_1|$ , определим перемещение выходного звена относительно первого положения кривошипа. Отложив найденный отрезок, получим точку диаграммы пути, соответствующую первому



положению кривошипа. Проведя аналогичные действия, определим точки диаграммы пути для всех остальных положений кривошипа. Соединив найденные точки плавной кривой, получим диаграмму пути, являющуюся функцией от времени  $S = f(t)$  (рис. 3.3, а). Известно, что кривошип совершает вращательные движения с постоянной угловой скоростью, следовательно, можно утверждать, что за одинаковые промежутки времени кривошип перемещается на одинаковые угловые расстояния. Это позволяет с осью времени совместить ось угла поворота кривошипа  $\varphi$ , а полученную диаграмму считать функцией от этого параметра  $S = f(\varphi)$ .

Для решения второй задачи кинематического анализа, используя графическое дифференцирование кривой пути, строят *диаграмму аналога скорости*. Масштабный коэффициент оси времени системы координат (рис. 3.3, б) приравняем к масштабному коэффициенту аналогичной оси диаграммы пути. На продолжении оси времени отложим отрезок  $h_1$ . В результате получим точку  $p_1$ , являющуюся полюсом дифференцирования. Масштабный коэффициент оси аналога скорости, м/(с·мм), определим по формуле

$$\mu_{\frac{ds}{dt}} = \frac{\mu_S}{h_1 \cdot \mu_t}.$$

Через точки, лежащие на кривой пути и соответствующие каждому положению кривошипа, проведем касательные к данной кривой. Через полюс дифференцирования (точку  $p_1$ ) проведем лучи параллельно каждой касательной. Точки пересечения оси аналога скорости с лучами отсекают отрезки, пропорциональные значениям скорости выходного звена относительно каждого положения кривошипа. Отложив найденные отрезки, получим точки диаграммы аналога скорости относительно всех положений кривошипа. Соединив эти отрезки плавной кривой, получим диаграмму аналога скорости, являющуюся функцией от времени  $\frac{ds}{dt} = f(t)$  (рис. 3.3, б). Так как диаграмма пути – это не только функция времени, но и функция угла поворота кривошипа  $\varphi$ , то полученная диаграмма аналога скорости также является функцией времени и функцией угла поворота кривошипа  $\varphi$ , т. е.  $\frac{ds}{dt} = f(\varphi)$ .

Для решения третьей задачи кинематического анализа, используя графическое дифференцирование диаграммы аналога скорости, строят *диаграмму аналога ускорения*. Масштабный коэффициент оси времени системы координат (рис. 3.3, в) приравняем к масштабным коэффициентам аналогичных осей предшествующих диаграмм. На продолжении оси времени отложим отрезок  $h_2$ . В результате получим точку  $p_2$ , являющуюся полюсом дифференцирования. Масштабный коэффициент оси аналога ускорения, м/(с<sup>2</sup>·мм), рассчитаем по формуле

$$\mu \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{\mu \frac{ds}{dt}}{h_2 \cdot \mu_t}$$

Через точки, лежащие на кривой аналога скорости и соответствующие каждому положению кривошипа, проведем касательные к данной кривой. Через полюс дифференцирования (точку  $p_2$ ) проведем лучи параллельно каждой касательной. Точки пересечения оси ускорений с лучами отсекают отрезки, пропорциональные значениям ускорения выходного звена для каждого положения кривошипа. Отложив найденные отрезки, получим точки диаграммы ускорения относительно всех положений кривошипа. Соединив эти точки плавной кривой, получим диаграмму аналога ускорения, являющуюся функцией от времени  $\frac{d^2s}{dt^2} = f(t)$  (рис. 3.3, в). Так как диаграмма аналога скорости – это не только функция времени, но и функция угла поворота кривошипа  $\varphi$ , то полученная диаграмма аналога ускорения также является функцией времени и функцией угла поворота кривошипа  $\varphi$ , т. е.  $\frac{d^2s}{dt^2} = f(\varphi)$ .

Рассмотренный пример кинематического анализа методом диаграмм основан на *графическом дифференцировании*. Однако в ряде случаев требуется обеспечить закон движения выходного звена механизма. В этом случае используется *графическое интегрирование*. Выбрав систему координат и масштабные коэффициенты осей ускорения  $a$  и времени  $t$ , построим диаграмму ускорения (рис. 3.3, в) согласно заданному закону.

Для построения диаграммы скорости воспользуемся графическим интегрированием, т. е. приращение скорости за промежуток времени 0–1 пропорционально площади фигуры 0011. На середине отрезка оси времени 0–1 возьмем точку  $b$ , через которую параллельно оси ускорений проведем прямую  $bb$ . Приравняв отрезок  $|bb|$  к отрезку  $|11|$  и отложив его в первом положении, получим точку искомой диаграммы скорости (рис. 3.3, б). Проведя аналогичные действия, найдем отрезок  $|cc|$ , значение которого пропорционально приращению скорости выходного звена за промежуток времени 1–2. Отложив отрезок  $|22|$ , равный сумме отрезков  $|bb|$  и  $|cc|$ , получим точку искомой диаграммы скорости во втором положении. Проведя аналогичные действия, получим диаграмму скорости  $V = f(t)$  (рис. 3.3, б). По аналогии построим диаграмму пути  $S = f(t)$  (рис. 3.3, а).

### 3.3. МЕТОД КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПЛАНОВ

Планы скоростей и ускорений являются решением второй и третьей задач кинематического анализа. Построение планов скоростей и ускорений выполняется в соответствующем масштабном коэффициенте и основано на графическом решении векторных уравнений распределения величин скоростей и ускорений между характерными точками механизма.



## Принципы образования векторных уравнений

Рассмотрим принцип образования векторных уравнений, разделив типовые рычажные механизмы на две группы по принципу движения характерных точек.

*Первый случай движения (рис. 3.4).* Две точки принадлежат одному звену и удалены друг от друга на некоторое расстояние. Подобная ситуация характерна для шатунов 2 (рис. 3.4, а) и коромысла 3 (рис. 3.4, б).

Вектор скорости точки  $B$ , принадлежащей шатунам 2 (рис. 3.4, а, б), представляет собой геометрическую сумму вектора скорости точки  $A$  и вектора скорости относительного вращательного движения точки  $B$  вокруг условно неподвижной точки  $A$ , принадлежащей этому же шатуну 2:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}.$$

Траекторией относительного вращательного движения точки  $B$  вокруг условно неподвижной точки  $A$  является окружность, радиус которой равен действительной длине шатуна 2 (рис. 3.4, в, г). Из раздела «Кинематика» дисциплины «Теоретическая механика» известно, что линия действия вектора скорости точки, совершающей вращательные движения, является касательной к ее траектории, при этом из курса дисциплины «Геометрия» известно, что касательная к окружности одновременно является перпендикуляром к ее радиусу. Следовательно, линия действия вектора относительной скорости  $\vec{V}_{BA}$  является перпендикуляром к оси шатуна 2, а на плане скоростей он направлен к точке  $b$ , т. к. точка  $B$  стоит первой в индексе при векторе этой скорости.

Вектор ускорения точки  $B$ , принадлежащей шатунам 2 (рис. 3.4, а, б), представляет собой геометрическую сумму вектора ускорения точки  $A$  и векторов нормального ускорения  $\vec{a}_{BA}^n$  и тангенциального ускорения  $\vec{a}_{BA}^t$ :

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{AA}^n + \vec{a}_{AA}^t,$$

где геометрическая сумма векторов  $\vec{a}_{BA}^n$  и  $\vec{a}_{AA}^t$  является вектором относительного ускорения  $\vec{a}_{BA}$ , характеризующего относительное вращательное движение точки  $B$  вокруг условно неподвижной точки  $A$ , принадлежащей этим же шатунам 2, т. е.

$$\vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^t = \vec{a}_{BA}.$$

При этом линия действия вектора нормального ускорения  $\vec{a}_{BA}^n$  параллельна оси шатуна 2 (рис. 3.4, в, г), а вектор направлен к центру вращения, т. е. от точки, стоящей первой в индексе при векторе этого ускорения, к точке, стоящей второй в этом же индексе. Линия действия вектора тангенциального ускорения  $\vec{a}_{AA}^t$  является перпендикуляром к оси шатуна 2 (рис. 3.4, в, г), а вектор на плане ускорений направлен к той точке, которая стоит первой в индексе при векторе этого ускорения.

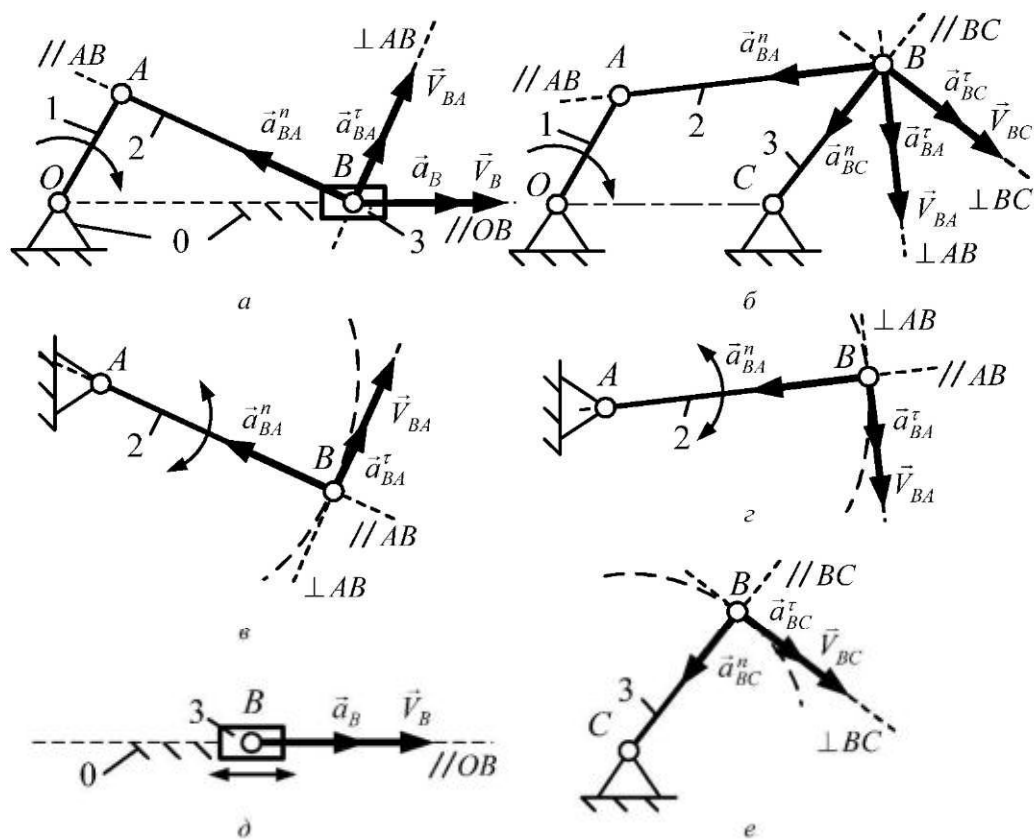


Рис. 3.4. Схема действия векторов относительных скоростей и ускорений (первый вид движения)

Точка  $B$  принадлежит и шатуну 2, и ползуну 3, следовательно, векторы скорости и ускорения точки  $B$ , принадлежащей ползуну 3 (рис. 3.4,  $\delta$ ), действуют по линии, параллельной прямой  $OB$ , т. к. ползун 3 может совершать только возвратно-поступательное движение параллельно прямой  $OB$ , т. е.  $\vec{V}_B$  и  $\vec{a}_B \parallel OB$ .

Для точек  $B$  и  $C$ , принадлежащих коромыслу 3 (рис. 3.4,  $\delta$ ), картина соотношения скоростей и ускорений аналогична описанной выше ситуации, т. е. вектор скорости точки  $B$ , принадлежащей коромыслу 3 (рис. 3.4,  $\epsilon$ ), представляет собой геометрическую сумму вектора скорости точки  $C$  и вектора скорости относительного вращательного движения точки  $B$  вокруг неподвижной точки  $C$ , принадлежащей этому же коромыслу 4:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_C + \vec{V}_{BC}.$$

Траекторией относительного вращательного движения точки  $B$  вокруг неподвижной точки  $C$  является окружность, радиус которой равен действительной длине коромысла 3 (рис. 3.4,  $\epsilon$ ). Следовательно, линия действия вектора относительной скорости  $\vec{V}_{BC}$  является перпендикуляром к оси коромысла 3 (рис. 3.4,  $\epsilon$ ), а на плане скоростей он направлен к той точке, которая стоит первой в индексе при векторе этой скорости.



Вектор ускорения точки  $B$ , принадлежащей коромыслу 3 (рис. 3.4, б), представляет собой геометрическую сумму вектора ускорения точки  $C$  и векторов нормального ускорения  $\vec{a}_{BC}^n$  и тангенциального ускорения  $\vec{a}_{BC}^t$ :

$$\vec{a}_B = \vec{a}_C + \vec{a}_{BC}^n + \vec{a}_{BC}^t.$$

Траекторией относительного вращательного движения точки  $B$  вокруг неподвижной точки  $C$  является окружность, радиус которой равен действительной длине коромысла 3 (рис. 3.4, е). Следовательно, линия действия вектора нормального ускорения  $\vec{a}_{BC}^n$  параллельна оси коромысла 4 (рис. 3.4, е), а вектор направлен к центру вращения, т. е. от точки  $B$ , стоящей первой в индексе при векторе этого ускорения, к точке  $C$ , стоящей второй в этом же индексе. Линия действия вектора тангенциального ускорения  $\vec{a}_{BC}^t$  является перпендикуляром к оси коромысла 3 (рис. 3.4, е), а вектор на плане ускорений направлен к той точке, которая стоит первой в индексе при векторе этого ускорения.

*Второй случай движения.* Две точки принадлежат двум разным звеньям, образующим кинематическую поступательную пару, и в данный момент совпадают, т. е. точка  $A$  принадлежит кривошипу 1, а точка  $B$  – ползуну 2 (рис. 3.5).

Вектор скорости точки  $A$ , принадлежащей звеньям 1 (рис. 3.5, а–в), представляет собой геометрическую сумму вектора скорости точки  $A$  и вектора скорости относительного вращательного движения точки  $A$  вокруг неподвижной точки  $O$ , принадлежащей стойке:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_O + \vec{V}_{AO}.$$

Траекторией относительного вращательного движения точки  $A$  вокруг неподвижной точки  $O$  является окружность, радиус которой равен действительной длине кривошипа 1 (рис. 3.5, г, д) или кулисы 1 (рис. 3.5, е). Следовательно, линия действия вектора относительной скорости  $\vec{V}_{AO}$  является перпендикуляром к оси звена 1, а на плане скоростей он направлен к той точке, которая стоит первой в индексе при векторе этой скорости.

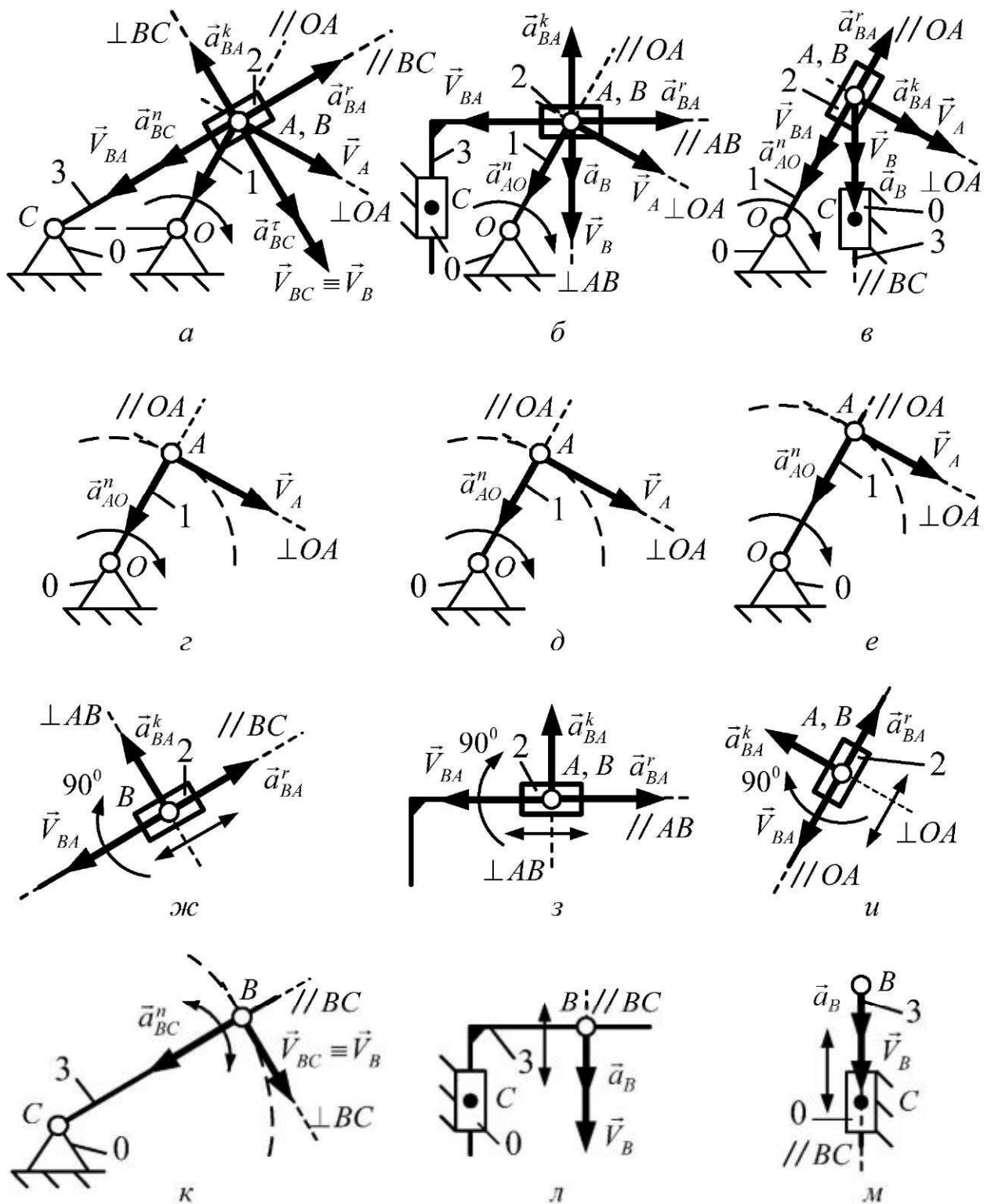


Рис. 3.5. Схема действия векторов относительных скоростей и ускорений (второй вид движения)

Вектор ускорения точки A, принадлежащей звеньям 1 (рис. 3.4, а-в), представляет собой геометрическую сумму вектора ускорения точки O и векторов нормального ускорения  $\vec{a}_{AO}^n$  и тангенциального ускорения  $\vec{a}_{AO}^t$ :

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \vec{a}_{AO}^n + \vec{a}_{AO}^t,$$



где геометрическая сумма векторов  $\vec{a}_{AO}^n$  и  $\vec{a}_{AO}^t$  является вектором относительного ускорения  $\vec{a}_{AO}$ , характеризующего относительное вращательное движение точки  $A$  вокруг условно неподвижной точки  $O$ , принадлежащей этим же шатунам 2, т. е.

$$\vec{a}_{AO}^n + \vec{a}_{AO}^t = \vec{a}_{AO}.$$

Линия действия вектора нормального ускорения  $\vec{a}_{AO}^n$  параллельна оси звена 1 (рис. 3.5, *г-е*), а вектор направлен к центру вращения, т. е. от точки, стоящей первой в индексе при векторе этого ускорения, к точке, стоящей второй в этом же индексе. Линия действия вектора тангенциального ускорения  $\vec{a}_{AO}^t$  является перпендикуляром к оси звена 1 (рис. 3.5, *г-е*), а вектор на плане ускорений направлен к той точке, которая стоит первой в индексе при векторе этого ускорения.

Вектор скорости точки  $B$ , принадлежащей ползунам 2 (рис. 3.5, *а-в*), представляет собой геометрическую сумму вектора скорости точки  $A$  и вектора скорости движения точки  $B$  относительно условно неподвижной точки  $A$ , принадлежащей звену 1:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}.$$

При этом линия действия вектора относительной скорости  $\vec{V}_{BA}$  параллельна оси, соответственно, кулисы 3 (рис. 3.5, *ж*), синусоида 3 (рис. 3.5, *з*) и тангенсоида 3 (рис. 3.5, *и*), а на плане скоростей этот вектор направлен к той точке, которая стоит первой в индексе при векторе этой скорости.

Вектор ускорения точки  $B$ , принадлежащей ползунам 2 (рис. 3.5, *а-в*), представляет собой геометрическую сумму вектора ускорения точки  $A$ , вектора Кориолисова ускорения  $\vec{a}_{BA}^k$  и вектора радиального ускорения  $\vec{a}_{BA}^r$  относительно движения точки  $B$  вокруг условно неподвижной точки  $A$ :

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^k + \vec{a}_{BA}^r.$$

Направление действия вектора Кориолисова ускорения  $\vec{a}_{BA}^k$  определяется поворотом вектора относительной скорости  $\vec{V}_{BA}$  на  $90^\circ$  в направлении действия угловой скорости звена 1 (рис. 3.5, *а-в*). Линия действия вектора радиального ускорения  $\vec{a}_{BA}^r$  является перпендикуляром к линии действия вектора Кориолисов ускорения или параллельна оси звена 3 (рис. 3.5, *ж-и*), а на плане ускорений данный вектор будет направлен к той точке, которая стоит первой в индексе при векторе этого ускорения.

Точка  $B$  принадлежит и ползунам 2, и звеньям 3 (рис. 3.5, *а-в*). Вектор скорости точки  $B$ , принадлежащей кулисе 3 (рис. 3.5, *а*), представляет собой

геометрическую сумму вектора скорости точки  $C$  и вектора скорости относительного вращательного движения точки  $B$  вокруг условно неподвижной точки  $C$ :

$$\vec{V}_B = \vec{V}_C + \vec{V}_{BC}.$$

Линия действия вектора относительной скорости  $\vec{V}_{BC}$  является перпендикуляром к оси кулисы 3 (рис. 3.5, к), а на плане скоростей этот вектор направлен к той точке, которая стоит первой в индексе при векторе этой скорости.

Вектор ускорения точки  $B$ , принадлежащей кулисе 3 (рис. 3.5, а), представляет собой геометрическую сумму вектора ускорения точки  $C$  и векторов нормального ускорения  $\vec{a}_{BC}^n$  и тангенциального ускорения  $\vec{a}_{BC}^t$ :

$$\vec{a}_B = \vec{a}_C + \vec{a}_{BC}^n + \vec{a}_{BC}^t.$$

Траекторией относительного вращательного движения точки  $B$  вокруг неподвижной точки  $C$  является окружность, радиус которой равен действительной длине кулисы 3 (рис. 3.5, к). Следовательно, линия действия вектора нормального ускорения  $\vec{a}_{BC}^n$  параллельна оси кулисы 3 (рис. 3.5, к), а вектор этого ускорения направлен к центру вращения, т. е. от точки  $B$ , стоящей первой в индексе при векторе этого ускорения, к точке  $C$ , стоящей второй в этом же индексе. Линия действия вектора тангенциального ускорения  $\vec{a}_{BC}^t$  является перпендикуляром к оси кулисы 3 (рис. 3.5, к), а вектор на плане ускорений направлен к той точке, которая стоит первой в индексе при векторе этого ускорения.

Векторы скорости и ускорения точки  $B$ , принадлежащей синусоиду 3 (рис. 3.5, л) и тангенсоиду 3 (рис. 3.5, м), действуют по линиям, параллельным прямым  $BC$ , т. к. данные звенья 3 могут совершать только возвратно-поступательные движения параллельно прямой  $BC$ , т. е.  $\vec{V}_B$  и  $\vec{a}_B \parallel BC$ .

### План скоростей

*План скоростей* – это пучок векторов, выполненный в определенном масштабном коэффициенте, лучи которого изображают векторы линейных скоростей характерных точек механизма, а отрезки, соединяющие их вершины, соответствуют векторам относительных скоростей.

Масштабный коэффициент плана скоростей, м/(с·мм), рассчитывается по формуле

$$\mu_V = \frac{V_{AO}}{|pa|},$$



где  $|pa|$  – произвольный отрезок, мм.

Из определения плана скоростей вытекают его *свойства*:

1) все векторы, составляющие план, являются векторами скоростей характерных точек механизма;

2) все векторы скоростей, выходящие из полюса плана (точки  $p$ ), являются векторами линейных скоростей характерных точек механизма;

3) все векторы скоростей, не проходящие через полюс плана (точку  $p$ ), являются векторами относительных скоростей характерных точек механизма;

4) скорости характерных точек механизма, равные нулю, изображаются точечными векторами, совпадающими с полюсом плана скоростей (точкой  $p$ ).

После построения плана скоростей и определения значений скоростей всех характерных точек механизма переходят к определению значений и направлений действия угловых скоростей звеньев механизма.

*Угловая скорость* – это отношение скорости относительного движения соответствующего звена механизма к действительной длине этого звена.

Направление действия угловой скорости звеньев, совершающих вращательные или сложные движения, указывает вектор относительной скорости характерных точек соответствующего звена, перенесенный с плана скоростей в одноименную точку, принадлежащую этому звену на схеме механизма. При этом разрывается связь рассматриваемого звена с другими звеньями, а к свободной характерной точке прикладывается шарнирно-неподвижная опора. В этом случае данная точка становится условно неподвижной, а одноименная точка совместно со звеном под действием вектора относительной скорости получает возможность совершать вращательное движение вокруг условно неподвижной точки в направлении действия этого вектора. Полученное направление вращательного движения рассматриваемого звена является направлением действия угловой скорости этого звена. Угловая скорость звеньев механизмов, совершающих поступательные движения, равна нулю.

### План ускорений

*План ускорений* – это пучок векторов, выполненный в определенном масштабном коэффициенте, лучи которого изображают векторы абсолютных ускорений характерных точек механизма, а отрезки, соединяющие их вершины, соответствуют векторам относительных ускорений.

Масштабный коэффициент плана ускорений,  $m/(c^2 \cdot mm)$ , вычисляют по формуле

$$\mu_a = \frac{a_{OA}^n}{|\pi a|},$$

где  $|\pi a|$  – произвольный отрезок, мм.

Из определения плана ускорений вытекают его *свойства*:

1) все векторы, составляющие план, являются векторами ускорений характерных точек механизма;

2) все векторы ускорений, выходящие из полюса плана (точки  $\pi$ ), являются векторами абсолютных ускорений характерных точек механизма;

3) все векторы ускорений, не проходящие через полюс плана (точку  $\pi$ ), являются векторами относительных ускорений характерных точек механизма;

4) ускорения характерных точек механизма, равные нулю, изображаются точечными векторами, совпадающими с полюсом плана ускорений (точкой  $\pi$ ).

*Следствие из свойства 4.* Если тангенциальные или радиальные ускорения характерных точек механизма равны нулю, то они изображаются точечными векторами, совпадающими на плане ускорений с вершинами векторов (нормальных или Кориолисова) ускорений этих же точек механизма.

После построения плана ускорений и определения значений ускорений всех характерных точек механизма переходят к определению значений и направлений действия угловых ускорений звеньев механизма.

*Угловое ускорение* – это отношение тангенциального (касательного) ускорения звена механизма к действительной длине этого звена.

Направление действия углового ускорения звеньев, совершающих вращательные или сложные движения, указывает вектор тангенциального ускорения характерных точек соответствующего звена, перенесенный с плана ускорений в одноименную точку, принадлежащую этому звену на схеме механизма. При этом разрывается связь рассматриваемого звена с другими звеньями, а к свободной характерной точке прикладывается шарнирно-неподвижная опора. В этом случае данная точка становится условно неподвижной, а одноименная точка совместно со звеном под действием вектора тангенциального ускорения получает возможность совершать вращательное движение вокруг условно неподвижной точки в направлении действия этого вектора. Полученное направление вращательного движения рассматриваемого звена является направлением действия углового ускорения этого звена. Угловое ускорение звеньев механизмов, совершающих поступательные движения, равно нулю.

### Теорема подобия

Модели плоских рычажных механизмов могут содержать характерные точки, являющиеся центрами кинематических пар, которые образованы звеньями, не имеющими связей с элементами стойки. Определение скоростей и ускорений подобных точек осуществляется по *теореме подобия*, которая формулируется следующим образом: отрезки, соединяющие точки на схеме (плане положений) механизма, и отрезки, соединяющие одноименные точки на планах скоростей или ускорений, образуют подобные фигуры.



Если порядок букв при обходе по контуру в выбранном направлении одинаков, то подобные фигуры к тому же и сходственно расположены. Фигура, полученная на плане ускорений, будет повернута относительно исходной фигуры схемы (плана положений) механизма на некоторый угол в направлении вращения ведущего звена.

Согласно формулировке теоремы подобия, характерная точка, являющаяся центром кинематической пары, образованной звеньями механизма, не имеющими связей со стойкой, лежит на схеме механизма на некотором звене, следовательно, одноименная точка как на плане скоростей, так и на плане ускорений расположена на отрезке, изображающем это звено в составе обоих планов. Составив пропорцию, характеризующую отношение действительных длин звеньев и отрезков, соответствующих этим параметрам в составе планов, найдем длину отрезка, определяющего положение рассматриваемой точки как на плане скоростей, так и на плане ускорений. Отложив длину полученного отрезка на планах скоростей и ускорений, установим положение искомой точки. Соединив найденные точки с полюсами планов, получим отрезки, пропорциональные, соответственно, векторам скорости и ускорения рассматриваемой характерной точки. Полученные векторы скорости и ускорения будут направлены от полюсов планов к найденным точкам. Значение скорости и ускорения рассматриваемой характерной точки рассчитаем как произведение длины отрезка с соответствующего плана на его масштабный коэффициент.

## 4. ДИНАМИКА ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

*Динамика* – это раздел дисциплины «Теории механизмов и машин», изучающий методы и алгоритмы анализа динамических процессов, протекающих в механизмах и машинах, под действием приложенных к ним силовых факторов в функции времени.

*Целью* данного раздела является изучение процессов или явлений, протекающих в технических системах под действием силовых факторов в функции времени, а также определение значений и закономерностей изменения динамических параметров исследуемой системы.

Динамические параметры любой технической системы делятся на две группы:

силовые – силы и моменты пар сил;

инерциальные – массы и моменты инерции звеньев.

Достижение целей динамики обеспечивается решением одной из следующих задач:

*прямая задача динамики* – определение закона движения технической системы при заданном управляющем силовом воздействии;

*обратная задача динамики* – определение требуемого управляющего силового воздействия, обеспечивающего заданный закон движения технической системы.

### 4.1. ДИНАМИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Решение задач динамики предусматривает анализ подвижных технических систем. Чтобы заставить техническую систему перемещаться с необходимой скоростью и в требуемом направлении, следует совершить работу над этой системой.

*Работа* – это интеграл скалярного произведения вектора силы  $\vec{F}$  и вектора элементарного приращения перемещения точки ее приложения  $d\vec{S}$ :

$$A = \int_{s_0}^{s_k} F \cdot dS \cdot \cos(\vec{F}, d\vec{S}),$$

где  $s_0, s_k$  – конечное и начальное перемещение точки приложения внешней силы  $F$ ;  $(\vec{F}, d\vec{S})$  – острый угол между вектором силы  $\vec{F}$  и вектором элементарного приращения перемещения точки ее приложения  $d\vec{S}$ .

Любая работа, совершаемая над технической системой, запасается этой системой в виде энергии. Энергия любой технической системы изменяется в зависимости от вида работы, совершаемой над этой системой.



*Энергия* – это способность технической системы совершать работу.

В технических системах различают два вида энергии: кинетическую  $E$  и потенциальную  $U$ .

*Кинетическая энергия* – это накопленная работа, совершаемая над технической системой с целью сообщения этой системе некоторого ускорения и принуждения совершать определенные движения с требуемой скоростью в необходимом направлении.

Кинетическая энергия технической системы рассчитывается по формуле

$$\dot{A} = \sum_{i=1}^{p+k} \left( \frac{m_i \cdot V_{si}^2}{2} \right) + \sum_{i=1}^{r+k} \left( \frac{J_{si} \cdot \omega_i^2}{2} \right),$$

где  $m_i$  – масса  $i$ -го звена, кг;  $V_{si}$  – скорость центра масс  $i$ -го звена, м/с;  $J_{si}$  – момент инерции  $i$ -го звена относительно его центра масс, кг·м<sup>2</sup>;  $\omega_i$  – угловая скорость  $i$ -го звена, с<sup>-1</sup>;  $r$  – число звеньев, совершающих вращательное движение;  $p$  – количество звеньев, совершающих поступательное движение;  $k$  – число звеньев, совершающих сложное движение.

*Потенциальная энергия* – это накопленная работа, совершаемая над технической системой с целью перемещения этой системы или ее элемента в потенциальном поле из точки с низким потенциалом в точку с более высоким потенциалом.

Потенциальная энергия технической системы вычисляется по формуле

$$U = \sum_{i=1}^a \left( \frac{c_i \cdot (\delta\varphi_i)^2}{2} \right) + \sum_{i=1}^s \left( \frac{k_i \cdot (\delta s_i)^2}{2} \right),$$

где  $c_i$  – крутильная жесткость  $i$ -го звена;  $\delta\varphi_i$  – угловая деформация  $i$ -го звена;  $k_i$  – линейная жесткость  $i$ -го звена;  $\delta s_i$  – линейная деформация  $i$ -го звена;  $a$  – число звеньев, подверженных скручиванию;  $s$  – количество звеньев, испытывающих линейную деформацию.

Характеристикой технической системы, призванной информировать об изменении ее энергии, вызванном сменой вида работы, совершаемой над этой системой за некоторый промежуток времени, является мощность.

*Мощность* – это производная работы по времени.

*Средняя мощность* – это отношение совершенной работы ко времени ее выполнения.

Элементарная работа силовых факторов, действующих на техническую систему, определяется по формуле

$$dA = \sum_{i=1}^f (F_i \cdot dS_i \cdot \cos(\vec{F}_i, d\vec{S}_i)) + \sum_{i=1}^m (M_i \cdot d\varphi_i),$$

тогда мощность этой системы

$$N = \frac{dA}{dt} = \sum_{i=1}^f (F_i \cdot V_i \cdot \cos(\vec{F}_i, \vec{V}_i)) + \sum_{i=1}^m (M_i \cdot \omega_i),$$

где  $(\vec{F}_i, \vec{V}_i)$  – острый угол между вектором силы  $\vec{F}_i$  и вектором скорости точки ее приложения  $\vec{V}_i$ ;  $m$  – число внешних моментов, действующих на звенья системы;  $f$  – количество сил, действующих на звенья системы;  $\vec{V}_i$  – скорость приложения внешней силы;  $M_i$  – внешний момент, действующий на  $i$ -е звено;  $\omega_i$  – угловая скорость  $i$ -го звена.

## 4.2. КЛАССИФИКАЦИЯ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ

Все силовые факторы, действующие на звенья технических систем, делятся на три группы: внешние, внутренние и теоретические.

*Внешние силовые факторы* – это силы и моменты пар сил, действующие на техническую систему (механизм) со стороны внешних систем (механизмов) и совершающие работу над этой системой (механизмом).

К внешним силовым факторам относятся:

*движущие силовые факторы* – это внешние силы и моменты пар сил, совершающие положительную работу, т. е. энергия технической системы под их действием увеличивается;

*силовые факторы сопротивления* – это внешние силы и моменты пар сил, совершающие отрицательную работу, т. е. энергия технической системы под их действием уменьшается.

В свою очередь, силовые факторы сопротивления делятся:

на *силовые факторы полезного сопротивления* – это силы и моменты пар сил сопротивления, действующие на звенья технической системы при выполнении этой системой своего служебного назначения;

*силовые факторы трения* – это силы и моменты пар сил сопротивления, возникающие в местах связей и определяемые условиями физико-механического взаимодействия рабочих поверхностей звеньев, образующих кинематические пары. Работа силовых факторов трения всегда отрицательная.

*Внутренние силовые факторы* – это силы и моменты пар сил, действующие между звеньями технической системы. Работа внутренних силовых факторов не изменяет объема энергии технической системы. В технических системах к внутренним силовым факторам относятся реакции связей кинематических пар.

*Теоретические, или расчетные, силовые факторы* – это силы и моменты пар сил, которые не существуют в реальности, а используются в различных видах анализа технических систем с целью их упрощения.



К теоретическим силовым факторам относятся:

*силовые факторы инерции* – это теоретические силы и моменты пар сил, используемые в силовом анализе с целью его упрощения;

*приведенные, или обобщенные, силовые факторы* – это теоретические силы и моменты пар сил, совершающие работу по обобщенной координате, равную работе соответствующей реальной силы или момента пары сил на эквивалентном перемещении точки их приложения.

Во всех перечисленных определениях под силами понимаются равнодействующие соответствующих распределенных нагрузок, а под моментами пар сил – пары сил, эквивалентных по действию этих нагрузок.

### Внешние силовые факторы

Каждое звено технической системы, обладая собственной массой, находится под действием силы тяжести (вес). Силы тяжести являются следствием воздействия на звенья технической системы притяжения Земли и относятся эти силы к внешним движущим силовым факторам.

Сила тяжести (вес)  $i$ -го звена,  $H$ , рассчитывается по формуле

$$G_i = g \cdot m_i,$$

где  $m_i$  – масса  $i$ -го звена, кг;  $g$  – ускорение свободного падения,  $\text{м/с}^2$ .

Масса  $i$ -го звена, кг, определяется следующим образом:

$$m_i = k_i \cdot l_i,$$

здесь  $l_i$ ,  $k_i$  – длина и коэффициент удельной массы  $i$ -го звена.

Коэффициент удельной массы выбирается из следующих интервалов:

для кривошипов – 8–12 кг/м;

для шатунов – 15–20 кг/м;

для коромысел и кулис – 25–40 кг/м.

Масса ползуна, кг, вычисляется по выражению

$$m_{\text{п}} = (0,5 \dots 0,7) \cdot m_{\text{ш}},$$

где  $m_{\text{п}}$ ,  $m_{\text{ш}}$  – соответственно, масса ползуна и масса шатуна, образующего с этим ползуном вращательную кинематическую пару.

Помимо сил тяжести к внешним движущим силам относятся силы давления, действующие на выходные звенья технических систем, значение которых задается диаграммой давления, являющейся функцией от времени или угла поворота ведущего звена. Вид сил сопротивления определяется условием задачи. В большинстве случаев силы сопротивления представлены силами

полезного сопротивления, значение которых учитывается только в положениях технических систем, входящих в состав рабочего хода.

### Внутренние силовые факторы

Как следует из классификации сил, в технических системах к внутренним силовым факторам относятся реакции связей кинематических пар. Рассмотрим реакции связей кинематических пар, образованных звеньями плоских рычажных механизмов без учета трения ([рис. 4.1](#)).

*Поступательная кинематическая пара.*

*Вариант 1.* Звенья 1 и 2 являются подвижными ([рис. 4.1, а](#)). Связи, наложенные звеном 1 на относительное движение звена 2, запрещают поступательное движение этого звена вдоль оси  $Y$  и относительное вращательное движение вокруг оси  $X$ . Используя принцип «исключения связей», заменяем связи соответствующими реакциями. В результате получаем реакцию  $\vec{R}_{12}$  и момент пары сил  $M_{12}$  ([рис. 4.1, б](#)). Вектор реакции  $\vec{R}_{12}$  приложен к точке  $A$ , а линия его действия совпадает с нормалью к контактирующим поверхностям звеньев, образующих данную кинематическую пару. При этом значение и направление действия реакции  $\vec{R}_{12}$  и момента пары сил  $M_{12}$  неизвестны.

*Вариант 2.* Звено 1 неподвижное, а звено 2 является подвижным ([рис. 4.1, в](#)). Связи, наложенные звеном 1 на относительное движение звена 2, запрещают поступательное движение этого звена вдоль оси  $Y$ . Используя принцип «исключения связей», заменяем связи соответствующими реакциями. В результате получаем реакцию  $\vec{R}_{12}$  ([рис. 4.1, г](#)). Вектор реакции  $\vec{R}_{12}$  приложен к точке  $A$ , а линия его действия совпадает с нормалью к контактирующим поверхностям звеньев, образующих данную кинематическую пару. При этом значение и направление действия реакции  $\vec{R}_{12}$  неизвестны.

*Вращательная кинематическая пара.*

Звенья 1 и 2, являются подвижными ([рис. 4.1, д](#)). Связи, наложенные звеном 1 на относительное движение звена 2, запрещают поступательные движение вдоль осей  $X$  и  $Y$ . Используя принцип «исключения связей», заменяем связи соответствующими реакциями. В результате получаем реакцию  $\vec{R}_{12}$  ([рис. 4.1, е](#)). Вектор реакции  $\vec{R}_{12}$  приложен к точке  $B$ , а линия его действия, значение и направление неизвестны. С целью уменьшения числа неизвестных раскладываем реакцию  $\vec{R}_{12}$  на нормальную и тангенциальную составляющие. При этом линия действия реакции  $\vec{R}_{12}^n$  параллельна, а реакции  $\vec{R}_{12}^t$  перпендикулярна к оси звена 2.



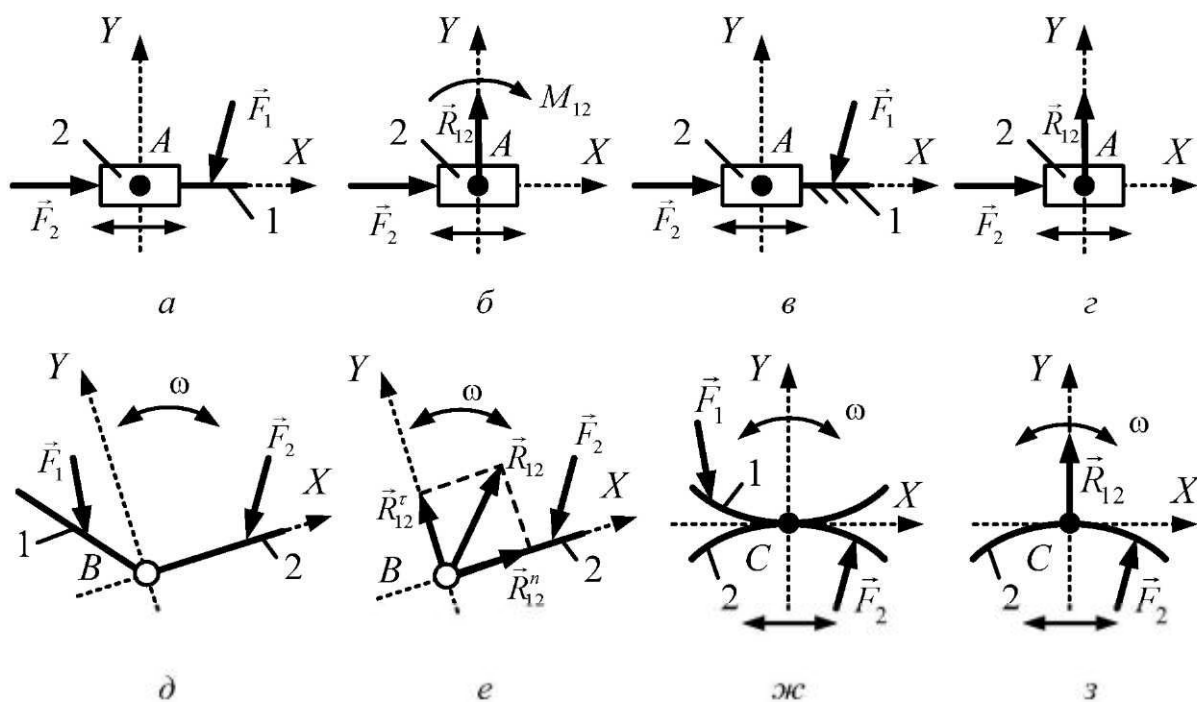


Рис. 4.1. Реакции связей кинематических пар плоских рычажных механизмов

#### Высшая кинематическая пара.

Звенья 1 и 2 являются подвижными (рис. 4.1, ж). Связи, наложенные звеном 1 на относительное движение звена 2, запрещают поступательное движение в направлении оси  $Y$ . Используя принцип «исключения связей», заменяем связи соответствующими реакциями. В результате получаем реакцию  $\vec{R}_{12}$  (рис. 4.1, з). Вектор реакции  $\vec{R}_{12}$  приложен к точке  $C$ , а линия его действия совпадает с нормалью к контактирующим поверхностям звеньев, образующих данную кинематическую пару. При этом значение и направление действия реакции  $\vec{R}_{12}$  неизвестны.

### Теоретические силовые факторы

Пусть  $i$ -е звено технической системы совершает сложное движение (рис. 4.2, а). Известно, что любое звено состоит из множества точек, совершающих движения по собственной траектории с некоторым ускорением  $\vec{a}_i$ . Каждая точка этого звена, обладая собственной массой, находится под действием силы инерции  $\vec{F}_\delta$ . Полученная система сил инерции является плоской системой произвольно расположенных сил. С целью уменьшения числа неизвестных все силы инерции, входящие в плоскую систему сил, заменяем главным вектором сил инерции  $\vec{F}_\delta$ , который приложен к центру масс  $i$ -го звена в точке  $S_i$  и к паре сил инерции с моментом  $M_{\delta i}$  (рис. 4.2, а).

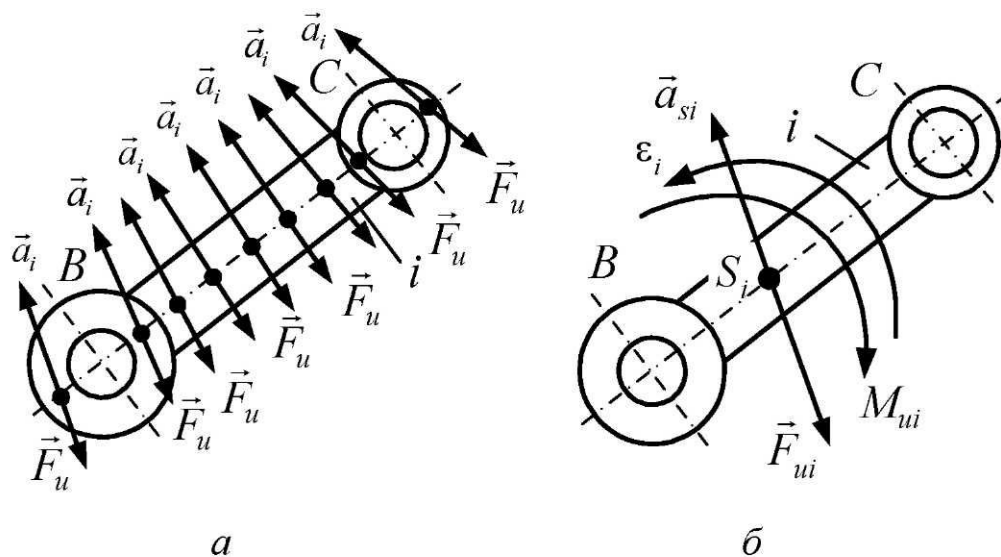


Рис. 4.2. Теоретические силовые факторы  $i$ -го звена

Силу инерции, Н, находим по формуле

$$F_{\text{э}i} = m_i \cdot a_{si},$$

где  $m_i$  – масса  $i$ -го звена, кг;  $a_{si}$  – ускорение центра масс  $i$ -го звена, м/с<sup>2</sup>.

Для определения линии и направления действия главного вектора силы инерции воспользуемся уравнением

$$\vec{F}_{\text{э}i} = -m_i \cdot \vec{a}_{si}.$$

Знак «-» в формуле означает, что вектор силы инерции лежит на линии действия ускорения центра масс  $i$ -го звена и направлен этот вектор противоположно направлению действия вектора ускорения центра масс (рис. 4.2, б). При этом вектор ускорения центра масс  $i$ -го звена определяется с помощью теоремы подобия на плане ускорений.

Момент пары сил инерции, Н·м, вычисляем по формуле

$$M_{\text{э}i} = -J_{si} \cdot \varepsilon_i,$$

где  $J_{si}$  – момент инерции  $i$ -го звена относительно его центра масс, кг·м<sup>2</sup>;  $\varepsilon_i$  – угловое ускорение  $i$ -го звена, с<sup>-2</sup>.

Знак «-» в формуле означает, что направление действия момента пары сил инерции  $i$ -го звена противоположно направлению действия углового ускорения этого же звена (рис. 4.2, б).

### Теоретические силовые факторы для частных случаев движения

*Звено движется поступательно с некоторым ускорением.*

*Случай 1.* Звено 2 движется поступательно по подвижному звену 1 (рис. 4.3, а). Центр масс звена 2 является подвижным, следовательно, на зве-



но действует вектор силы инерции  $\vec{F}_{\epsilon_2}$ , направленный противоположно вектору ускорения центра масс, и момент пары сил инерции  $M_{\epsilon_2}$ , действующий противоположно направлению углового ускорения этого звена.

*Случай 2.* Звено 2 движется поступательно по неподвижному звену 1 (рис. 4.3, б). Центр масс звена 2 является подвижным, следовательно, на звено действует вектор силы инерции  $\vec{F}_{\epsilon_2}$ , направленный противоположно вектору ускорения центра масс, а момент пары сил инерции  $M_{\epsilon_2}$  равен нулю, т. к. угловое ускорение этого звена равно нулю, т. е.  $\epsilon_2 = 0 \Rightarrow M_{u_2} = 0$ .

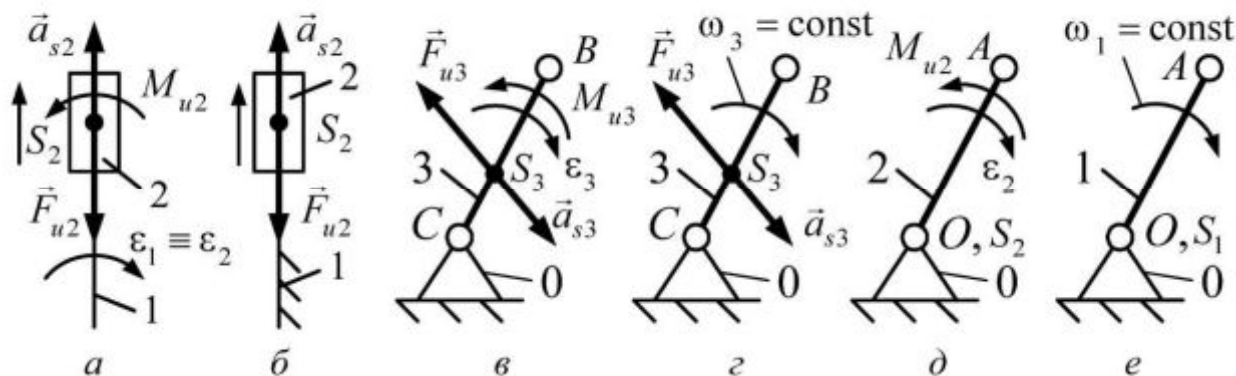


Рис. 4.3. Теоретические силовые факторы для частных случаев движения звеньев

*Звено совершает вращательное движение.*

*Случай 1.* Звено 3 совершает вращательное движение с некоторым ускорением, а центр масс этого звена не совпадает с осью вращения (рис. 4.3, в). Центр масс звена 3 является подвижным, следовательно, на звено действует вектор силы инерции  $\vec{F}_{\epsilon_3}$ , направленный противоположно вектору ускорения центра масс, и момент пары сил инерции  $M_{\epsilon_3}$ , действующий противоположно направлению углового ускорения этого звена.

*Случай 2.* Звено 3 совершает равномерное вращательное движение, а центр масс этого звена не совпадает с осью вращения (рис. 4.3, г). Центр масс звена 3 является подвижным, следовательно, на звено действует вектор силы инерции  $\vec{F}_{\epsilon_3}$ , направленный противоположно вектору ускорения центра масс, а момент пары сил инерции  $M_{\epsilon_3}$  равен нулю, т. к. угловое ускорение этого звена равно нулю, т. е.  $\epsilon_3 = 0 \Rightarrow M_{u_3} = 0$ .

*Случай 3.* Звено 2 совершает вращательное движение с некоторым ускорением, а центр масс этого звена совпадает с осью вращения (рис. 4.3, д). Центр масс звена 2 является неподвижным, следовательно, на звено действует момент пары сил инерции  $M_{\epsilon_2}$ , направленный противоположно угловому ускорению этого звена, сила инерции равна нулю, т. к. ускорение центра масс равно нулю, т. е.  $a_{s_2} = 0 \Rightarrow F_{u_2} = 0$ .

*Случай 4.* Звено 1 совершает равномерное вращательное движение, а центр масс этого звена совпадает с осью вращения (рис. 4.3, e). Центр масс

звена 2 является неподвижным, следовательно, на звено не действует ни сила инерции, ни момент пары сил инерции, т. к. ускорение центра масс равно нулю, т. е.  $a_{s1} = 0 \Rightarrow F_{и1} = 0$ , и момент пары сил инерции равен нулю, т. к. угловое ускорение этого звена равно нулю, т. е.  $\varepsilon_1 = 0 \Rightarrow M_{и1} = 0$ .

### 4.3. ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ИХ ПАРАМЕТРЫ

Исследование динамики технических систем выполняется по их динамическим моделям.

*Динамическая модель* – это модель технической системы, предназначенная для исследования ее параметров в функции времени.

К методам обеспечения эквивалентности динамической модели относятся:

*кинетостатический метод* – это метод обеспечения эквивалентности динамической модели по отношению к состоянию технической системы, основанный на уравнениях силового равновесия;

*энергетический метод* – это метод обеспечения эквивалентности динамической модели по отношению к состоянию технической системы, основанный на уравнениях энергетического равновесия.

В соответствии с методами обеспечения эквивалентности динамической модели в разделе динамика различают два вида анализа технических систем:

- силовой анализ;
- динамический анализ.

Независимо от вида анализа технической системы ее динамические модели составляются с помощью метода приведения, который позволяет задачу о движении системы звеньев свести к более простой задаче о движении одного звена и подвижной точки этого звена. Данное звено называется *звеном приведения*, а его подвижная точка – *точкой приведения*. В качестве звена приведения рекомендуется выбирать ведущее звено, а за точку приведения принимать подвижную точку этого звена (рис. 4.4).

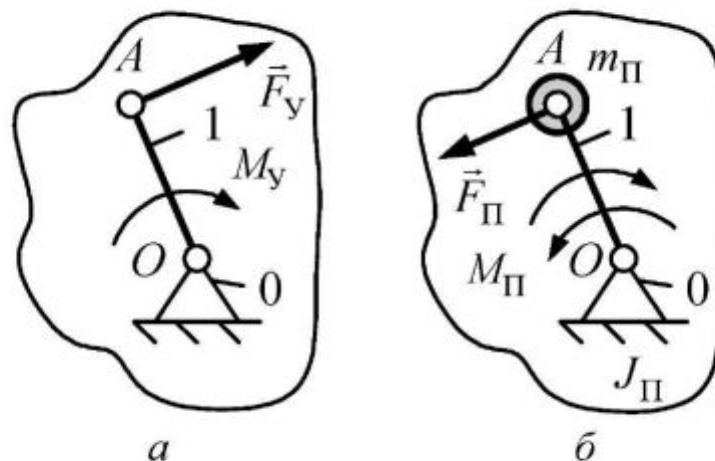


Рис. 4.4. Динамические модели технических систем



*Динамическая модель для силового анализа (рис. 4.4, а)* составляется с использованием кинетостатического метода, согласно которому для сохранения эквивалентности модели по отношению к состоянию технической системы достаточно учесть только силовые параметры, т. е. силы и моменты пар сил. При этом все силовые факторы, действующие на подвижные звенья технической системы, заменяются одной силой, которая называется уравнивающей силой.

*Уравнивающая сила  $F_y$*  – это теоретическая сила, действующая на звено приведения с целью обеспечения заданного закона движения.

Вектор уравнивающей силы прикладывается к точке приведения, а линия его действия является перпендикуляром к оси звена приведения, и вектор этой силы направлен по движению звена приведения. Наличие уравнивающей силы на звене приведения служит причиной возникновения уравнивающего момента пары сил:

$$M_y = F_y \cdot l_n,$$

где  $l_n$  – расстояние между точкой приведения и осью вращения звена приведения (длина звена приведения), м.

*Уравнивающий момент пары сил  $M_y$*  – это момент теоретической пары сил, действующей на звено приведения с целью обеспечения заданного закона движения.

*Динамическая модель для динамического анализа (рис. 4.4, б)* составляется с использованием энергетического метода, согласно которому для сохранения эквивалентности модели по отношению к состоянию технической системы необходимо учесть силовые и инерциальные параметры. При этом все силовые факторы, действующие на ведомые звенья технической системы, заменяются одной силой, которая называется приведенной.

*Приведенная сила* – это теоретическая сила, которая вынуждает звено приведения развивать мгновенную мощность, равную сумме мгновенных мощностей, развиваемых приводимыми силами:

$$F_n = \frac{\sum_{i=1}^n N_i}{V_n},$$

где  $\sum_{i=1}^n N_i$  – сумма мгновенных мощностей, развиваемых приводимыми силами, Н;  $V_n$  – скорость точки приведения, м/с;  $n$  – количество приводимых звеньев технической системы.

Вектор приведенной силы прикладывается к точке приведения, направлен против движения звена приведения, а линия его действия является перпендикуляром к оси звена. Наличие приведенной силы на звене приведения служит причиной возникновения приведенного момента пары сил:

$$M_n = F_n \cdot l_n.$$

*Приведенный момент пары сил* – это момент теоретической пары сил, который вынуждает звено приведения развивать мгновенную мощность, равную сумме мгновенных мощностей, развиваемых приводимыми силами:

$$M_{\text{п}} = \frac{\sum_{i=1}^n N_i}{\omega_{\text{п}}},$$

где  $\omega_{\text{п}}$  – угловая скорость звена приведения,  $\text{с}^{-1}$ .

Сумма мгновенных мощностей развиваемых приводимыми силами, рассчитывается по формуле

$$\sum_{i=1}^n N_i = \sum_{i=1}^f (F_i \cdot V_i \cdot \cos(\vec{F}_i, \vec{V}_i)) + \sum_{i=1}^m (M_i \cdot \omega_i),$$

здесь  $\omega_i$  – угловая скорость  $i$ -го звена;  $f$ ,  $m$  – соответственно, количество внешних сил и внешних моментов пар сил, действующих на ведомые звенья.

Каждое звено технической системы обладает массой, следовательно, для сохранения эквивалентности динамической модели по отношению к состоянию технической системы массы приводимых звеньев заменяют приведенной массой.

*Приведенная масса* – это теоретическая масса, прикладываемая к точке приведения и обладающая кинетической энергией, равной удвоенной сумме кинетических энергий приводимых звеньев:

$$m_{\text{п}} = \frac{2 \sum_{i=1}^n E_i}{V_{\text{п}}^2},$$

где  $\sum_{i=1}^n E_i$  – сумма кинетических энергий приводимых звеньев.

Приведенная масса прикладывается в точку приведения и является причиной возникновения приведенного момента инерции:

$$J_{\text{п}} = m_{\text{п}} \cdot l_{\text{п}}^2.$$

*Приведенный момент инерции* – это теоретический момент инерции, которым должно обладать звено приведения, чтобы его кинетическая энергия была равна удвоенной сумме кинетических энергий приводимых звеньев:

$$J_{\text{п}} = \frac{2 \sum_{i=1}^n E_i}{\omega_{\text{п}}^2}.$$

Сумма кинетических энергий приводимых звеньев определяется по формуле



$$\sum_{i=1}^n E_i = \sum_{i=1}^{p+k} \left( \frac{m_i \cdot V_{si}^2}{2} \right) + \sum_{i=1}^{r+k} \left( \frac{J_{si} \cdot \omega_i^2}{2} \right),$$

где  $m_i$  – масса  $i$ -го звена, кг;  $V_{si}$  – скорость центра масс  $i$ -го звена, м/с;  $J_{si}$  – момент инерции  $i$ -го звена относительно оси, проходящей через его центр масс, кг·м<sup>2</sup>;  $\omega_i$  – угловая скорость  $i$ -го звена, с<sup>-1</sup>;  $r$  – число звеньев, совершающих вращательное движение;  $p$  – количество звеньев, совершающих поступательное движение;  $k$  – количество звеньев, совершающих сложное движение.

Из анализа полученных выражений для приведенных величин следует:

1) приведенная сила и приведенный момент сил зависят от отношения скоростей приводимых (ведомых) звеньев к скорости звена приведения (ведущего звена);

2) приведенная масса и приведенный момент инерции являются функциями квадратов этих же отношений;

3) все приведенные величины являются функциями от времени, следовательно, являются и функциями от угла поворота звена приведения:  $F_y = f(\varphi)$ ,  $M_y = f(\varphi)$ ,  $F_n = f(\varphi)$ ,  $M_n = f(\varphi)$ ,  $m_n = f(\varphi)$ ,  $J_n = f(\varphi)$ .

#### 4.4. СИЛОВОЙ АНАЛИЗ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ

*Силовой анализ* – это вид исследования технических систем, изучающий процессы, имеющие место в этих системах под действием силовых факторов, исходя из условий статики.

Задачами силового анализа являются:

определение значений и направлений действия уравновешивающей силы и уравновешивающего момента (силового управляющего воздействия);

определение значений и направлений действия реакций связей кинематических пар.

##### Методы силового анализа

*Статический* – это метод силового анализа технических систем, базирующийся на уравнениях статического равновесия, имеющих следующий вид:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^f F_i = 0, \\ \sum_{i=1}^m M_i = 0, \end{cases}$$

где  $F_i$  – внешние силы, приложенные к механизму или его звеньям;  $M_i$  – внешние моменты сил, приложенные к механизму или его звеньям;  $f$  – количество внешних сил;  $m$  – количество внешних моментов.

Статический метод силового анализа применяется для анализа технических систем, находящихся в покое или движущихся с малыми скоростями, в случаях, когда неизвестны массы и моменты инерции звеньев системы, т. е. на этапах, предшествующих эскизному проектированию.

*Кинестатический* – это метод силового анализа подвижных технических систем, основанный на *принципе Даламбера*, который имеет следующую формулировку: если к внешним силовым факторам, действующим на звенья технической системы, добавить силы и моменты пар сил инерции, то данная система будет находиться в квазистатическом равновесии и силовой анализ этой системы можно выполнять с использованием уравнений кинестатического равновесия:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^f F_i + \sum_{i=1}^c F_{иi} = 0, \\ \sum_{i=1}^m M_i + \sum_{i=1}^k M_{иi} = 0, \end{cases}$$

где  $F_{иi}$ ,  $M_{иi}$  – соответственно, сила инерции и моменты от пары сил инерции, действующих на  $i$ -е звено технической системы;  $c$  – количество сил инерции;

$k$  – количество моментов пар сил инерции.

Кинестатический метод силового анализа применяется для анализа подвижных технических систем при известных массах и моментах инерции звеньев.

*Кинестатический с учетом трения* – это метод силового анализа подвижных технических систем, базирующийся на уравнениях равновесия, имеющих следующий вид:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^f F_i + \sum_{i=1}^c F_{иi} + \sum_{i=1}^l F_{тpi} = 0, \\ \sum_{i=1}^m M_i + \sum_{i=1}^k M_{иi} + \sum_{i=1}^p M_{тpi} = 0, \end{cases}$$

где  $F_{тpi}$ ,  $M_{тpi}$  – сила и момент трения соответственно;  $l$  – количество сил трения;  $p$  – число моментов трения.

Кинестатический метод силового анализа с учетом трения применяется для анализа подвижных технической системы при известных размерах и характеристиках материалов элементов кинематических пар.

### **Определение числа неизвестных при силовом анализе**

Выбор метода силового анализа технической системы осуществляется в зависимости от числа неизвестных и количества независимых уравнений равновесия. Для определения числа неизвестных необходимо предваритель-



но провести структурный анализ и определить количество избыточных связей и местных подвижностей. После устранения дефектов структуры технической системы и установления квазистатического равновесия выявляется число неизвестных, содержащееся в уравнениях равновесия. При этом если число неизвестных превышает количество уравнений равновесия, то задача является *статически неопределимой*. Для раскрытия статической неопределимости с целью решения поставленной задачи к системе уравнений кинетостатического равновесия необходимо добавить уравнения деформации звеньев.

Суммарное число неизвестных, содержащихся в технической системе, рассчитывается по формуле

$$n_s = W_0 + \sum_{i=1}^{H-1} (H-i) p_i,$$

где  $W_0$  – основная подвижность;  $H$  – число подвижностей звеньев (в пространстве  $H = 6$ , на плоскости  $H = 3$ );  $p_i$  – число кинематических пар.

### Кинетостатический анализ структурных групп второго класса

*Дано:* структурная группа 2-го класса 1-го вида (рис. 4.6, а). Структурная группа  $BCD$  имеет структурную формулу ВВВ и состоит из двух звеньев (2 и 3) и двух поводков (звенья 1 и 4). На звенья структурной группы действуют силы  $F_2$ ,  $F_3$  и моменты пар сил  $M_2$  и  $M_3$ .

*Решение.* Точки  $B$  и  $D$  являются центрами вращательных кинематических пар, следовательно, используя принцип «исключения связей», заменяем связи, наложенные поводками 1 и 4 на движения звеньев 2 и 3, соответствующими реакциями. Получаем реакции  $\vec{R}_{12}$  и  $\vec{R}_{43}$  (рис. 4.6, б), для которых известны только точки их приложения. С целью разрешения поставленной задачи разложим каждую реакцию на составляющие:

$$\vec{R}_{21} = \vec{R}_{21}^n + \vec{R}_{21}^t,$$

$$\vec{R}_{43} = \vec{R}_{43}^n + \vec{R}_{43}^t.$$

В результате проделанных мероприятий структурная группа  $BCD$  находится в равновесии.

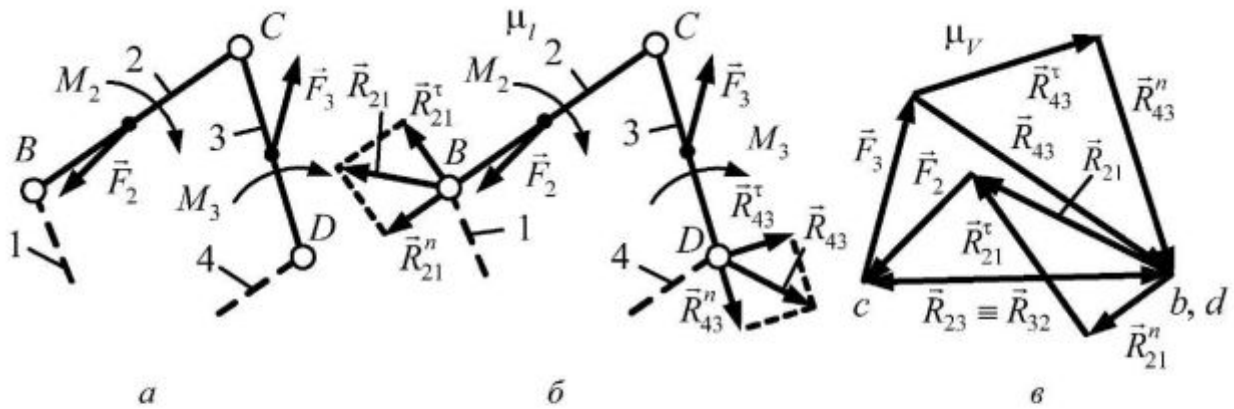


Рис. 4.6. Кинестатический анализ структурной группы 2-го класса 1-го вида

Запишем уравнение равновесия структурной группы  $BCD$  (рис. 4.6, б):

$$\vec{R}_{21}^n + \vec{R}_{21}^t + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{R}_{43}^t + \vec{R}_{43}^n = 0.$$

Полученное уравнение содержит четыре неизвестных, следовательно, рассматриваемая система трижды статически неопределима. С целью скрытия статической неопределимости найдем значения реакций  $\vec{R}_{21}^t$  и  $R_{43}^t$ . Для этого рассмотрим каждое из звеньев 2 и 3 без учета друг друга.

Звено 2 находится под действием силы  $\vec{F}_2$ , реакций  $\vec{R}_{21}^n$ ,  $\vec{R}_{21}^t$  и момента пары сил  $M_2$ . Направление действия векторов  $\vec{R}_{21}^n$ ,  $\vec{R}_{21}^t$  неизвестно, следовательно, при составлении уравнения моментов задаемся произвольным направлением действия векторов этих сил. Если после определения значений данных реакций получим отрицательный результат, то истинное направление действия векторов противоположно принятому.

Запишем уравнение моментов всех сил относительно точки  $C$ :

$$\sum M(F_i)_C = 0, \quad M_C(F_2) + M_C(R_{21}^t) + M_2 = 0.$$

При этом  $M_C(R_{21}^n) = 0$ , т. к. линия действия вектора  $\vec{R}_{21}^n$  проходит через точку  $C$ .

Момент реакции  $\vec{R}_{21}^t$  относительно точки  $C$

$$M_C(R_{21}^t) = R_{21}^t \cdot l_{BC},$$

тогда уравнение моментов принимает вид

$$M_C(F_2) + R_{21}^t \cdot l_{BC} + M_2 = 0,$$

откуда имеем



$$R_{21}^r = - \left[ \frac{M_C(F_2) + M_2}{l_{BC}} \right].$$

Знак искомой реакции  $\vec{R}_{21}^r$  определяется знаком правой части последнего выражения.

Звено 3 находится под действием силы  $\vec{F}_3$ , реакций  $\vec{R}_{43}^n$ ,  $\vec{R}_{43}^r$  и пары сил с моментом  $M_3$ . Направление действия векторов  $\vec{R}_{43}^n$ ,  $\vec{R}_{43}^r$  неизвестно, следовательно, при составлении уравнения моментов задаемся произвольным направлением действия векторов этих сил. Если после определения величин этих реакций получим отрицательный результат, то истинное направление действия векторов противоположно принятому.

Запишем уравнение моментов всех сил относительно точки  $C$ :

$$\sum M(F_i)_C = 0, \quad M_D(F_3) + R_{23}^r l_{CD} + M_3 = 0,$$

При этом  $M_C(R_{43}^n) = 0$ , т. к. линия действия вектора  $\vec{R}_{43}^n$  проходит через точку  $C$ .

Момент реакции  $R_{43}^r$  относительно точки  $C$

$$M_C(R_{43}^r) = R_{43}^r \cdot l_{CD},$$

тогда уравнение моментов принимает вид

$$M_N(F_3) + R_{43}^r \cdot l_{CD} + M_3 = 0,$$

откуда имеем

$$R_{43}^r = - \left[ \frac{M_C(F_3) + M_3}{l_{CD}} \right].$$

Знак искомой реакции  $R_{43}^r$  определяется знаком правой части полученного выражения.

В результате проведенных действий в уравнении равновесия неизвестны только реакции  $R_{21}^n$  и  $R_{43}^n$ , а статическая неопределимость системы уменьшилась до единицы. Величины неизвестных реакций найдем, используя план сил. Построение плана сил производится в масштабном коэффициенте сил  $\mu_F$  и основано на принципе: вершина предыдущего вектора является началом последующего вектора ([рис. 4.6, в](#)).

Для расчета значений реакций  $R_{21}^n$  и  $R_{43}^n$  используем выражения

$$R_{21}^n = |R_{21}^n| \cdot \mu_F,$$

$$R_{43}^n = |R_{43}^n| \cdot \mu_F.$$

Значения полных реакций  $R_{21}$  и  $R_{43}$  вычислим по формулам

$$R_{21} = \sqrt{(R_{21}^n)^2 + (R_{21}^t)^2},$$

$$R_{43} = \sqrt{(R_{43}^n)^2 + (R_{43}^t)^2}.$$

Для определения реакций в шарнире  $C$  соединим точки  $b, d$  с точкой  $c$  на плане сил (рис. 4.6, в). В результате получим векторы реакций  $\vec{R}_{23} \equiv \vec{R}_{32}$ , значения которых определим по выражению

$$R_{23} = R_{32} = |bc| \cdot \mu_F = |dc| \cdot \mu_F.$$

*Дано:* структурная группа 2-го класса 2-го вида (рис. 4.7, а). Структурная группа  $BCD$  имеет структурную формулу ВВП и состоит из двух звеньев (2 и 3) и двух поводков (звенья 1 и 4). На звенья структурной группы действуют силы  $F_2, F_3$  и моменты пар сил  $M_2$  и  $M_3$ .

*Решение.* Точки  $B$  и  $D$  являются центрами, соответственно, вращательной и поступательной кинематических пар, следовательно, используя принцип «исключения связей», заменяем связи, наложенные поводками 1 и 4 на движения звеньев 2 и 3, соответствующими реакциями. Получаем реакции  $\vec{R}_{12}$  и  $\vec{R}_{43}$  (рис. 4.7, б), для которых известны только их приложения и линия действия реакции  $\vec{R}_{43}$  совпадает с нормалью к контактирующим поверхностям звеньев 3 и 4, образующих поступательную кинематическую пару. С целью разрешения поставленной задачи разложим реакцию  $\vec{R}_{12}$  на составляющие:

$$\vec{R}_{21} = \vec{R}_{21}^n + \vec{R}_{21}^t.$$

В результате проделанных мероприятий структурная группа  $BCD$  находится в равновесии.



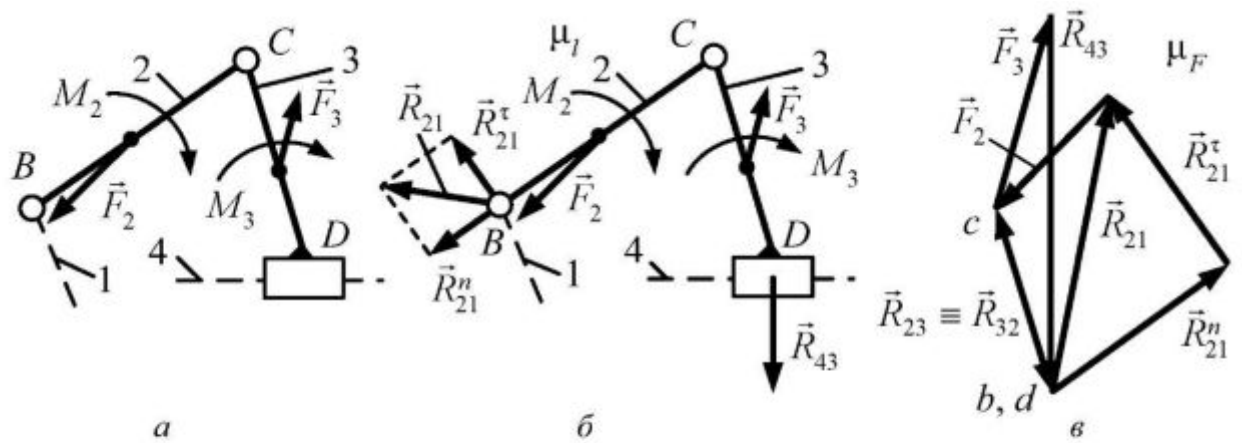


Рис. 4.7. Кинетостатический анализ структурной группы 2-го класса 2-го вида

Запишем уравнение равновесия структурной группы  $BCD$  (рис. 4.7,  $\bar{a}$ ):

$$\vec{R}_{21}^n + \vec{R}_{21}^\tau + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{R}_{43} = 0.$$

Полученное уравнение содержит три неизвестных, следовательно, рассматриваемая система дважды статически неопределима. С целью скрытия статической неопределимости найдем значения реакции  $R_{21}^\tau$ . Для этого рассмотрим звено 2 без учета звена 3.

Звено 2 находится под действием силы  $\vec{F}_2$ , реакций  $\vec{R}_{21}^n$ ,  $\vec{R}_{21}^\tau$  и момента пары сил  $M_2$ . Направление действия векторов  $\vec{R}_{21}^n$ ,  $\vec{R}_{21}^\tau$  неизвестно, следовательно, при составлении уравнения моментов задаемся произвольным направлением действия векторов этих сил. Если после определения значений данных реакций получим отрицательный результат, то истинное направление действия векторов противоположно принятому.

Запишем уравнение моментов всех сил относительно точки  $C$ :

$$\sum M(F_i)_C = 0, \quad M_C(F_2) + M_C(R_{21}^\tau) + M_2 = 0.$$

При этом  $M_C(R_{21}^n) = 0$ , т. к. линия действия вектора  $\vec{R}_{21}^n$  проходит через точку  $C$ .

Момент реакции  $R_{21}^\tau$  относительно точки  $C$

$$M_D(R_{21}^\tau) = R_{21}^\tau \cdot l_{CD},$$

тогда уравнение моментов принимает вид

$$M_C(F_2) + R_{21}^\tau \cdot l_{BC} + M_2 = 0,$$

откуда имеем

$$R_{21}^\tau = - \left[ \frac{M_C(F_2) + M_2}{l_{BC}} \right].$$

Знак искомой реакции  $R_{21}^t$  определяется знаком правой части последнего выражения.

В результате проведенных действий в уравнении равновесия неизвестны только реакции  $R_{21}^n$  и  $R_{43}$ , а статическая неопределимость системы уменьшилась до единицы. Величины неизвестных реакций найдем, используя план сил. Построение плана сил производится в масштабном коэффициенте сил  $\mu_F$  и основано на принципе: вершина предыдущего вектора является началом последующего вектора (рис. 4.7, в).

Для расчета значений реакций  $R_{21}^n$  и  $R_{43}$  используем выражения

$$R_{21}^n = |R_{21}^n| \cdot \mu_F,$$

$$R_{43} = |R_{43}| \cdot \mu_F.$$

Значение полной реакции  $R_{21}$  вычислим по формуле

$$R_{21} = \sqrt{(R_{21}^n)^2 + (R_{21}^t)^2}.$$

Для определения реакций в шарнире  $C$  соединим точки  $b, d$  с точкой  $c$  на плане сил (рис. 4.7, в). В результате получим векторы реакций  $\vec{R}_{23} \equiv \vec{R}_{32}$ , значения которых найдем аналогично анализу предшествующей структурной группы.

*Дано:* структурная группа 2-го класса 3-го вида (рис. 4.8, а). Структурная группа  $BCD$  имеет структурную формулу ВПВ и состоит из двух звеньев (2 и 3) и двух поводков (звенья 1 и 4). На звенья структурной группы действуют силы  $F_2, F_3$  и моменты пары сил  $M_2$  и  $M_3$ .

*Решение.* Точки  $B$  и  $D$  являются центрами вращательных кинематических пар, следовательно, используя принцип «исключения связей», заменяем связи, наложенные поводками 1 и 4 на движения звеньев 2 и 3, соответствующими реакциями. Получаем реакции  $\vec{R}_{12}$  и  $\vec{R}_{43}$  (рис. 4.8, б), для которых известны только точки их приложения. С целью разрешения поставленной задачи разложим каждую реакцию на составляющие:

$$\vec{R}_{21} = \vec{R}_{21}^n + \vec{R}_{21}^t,$$

$$\vec{R}_{43} = \vec{R}_{43}^n + \vec{R}_{43}^t.$$

В результате проделанных мероприятий структурная группа  $BCD$  находится в равновесии.



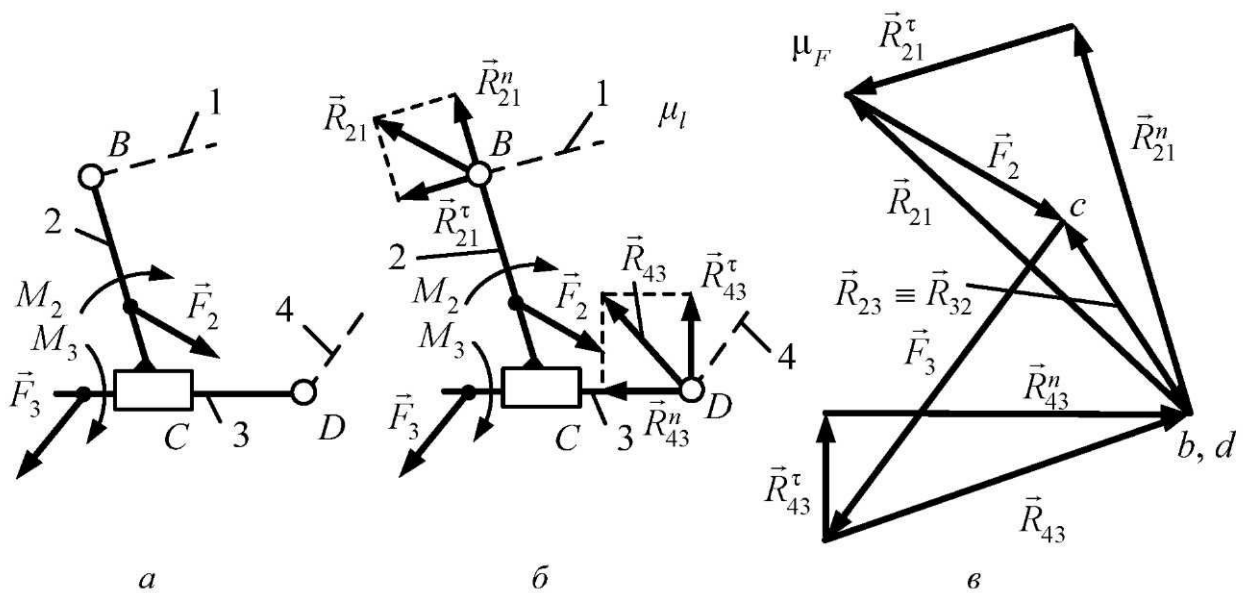


Рис. 4.8. Кинестатический анализ структурной группы 2-го класса 3-го вида

Запишем уравнение равновесия структурной группы  $BCD$  (рис. 4.8, б):

$$\vec{R}_{21}^n + \vec{R}_{21}^\tau + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{R}_{43}^\tau + \vec{R}_{43}^n = 0.$$

Полученное уравнение содержит четыре неизвестных, следовательно, рассматриваемая система трижды статически неопределима. С целью скрытия статической неопределимости найдем значения реакций  $R_{21}^\tau$  и  $R_{43}^\tau$ . Для этого рассмотрим каждое из звеньев 2 и 3 без учета друг друга.

Звено 2 находится под действием силы  $\vec{F}_2$ , реакций  $\vec{R}_{21}^n$ ,  $\vec{R}_{21}^\tau$  и момента пары сил  $M_2$ . Направление действия векторов  $\vec{R}_{21}^n$ ,  $\vec{R}_{21}^\tau$  неизвестно, следовательно, при составлении уравнения моментов задаемся произвольным направлением действия векторов этих сил. Если после определения значений данных реакций получим отрицательный результат, то истинное направление действия векторов противоположно принятому.

Запишем уравнение моментов всех сил относительно точки  $C$ :

$$\sum M(F_i)_C = 0, \quad M_C(F_2) + M_C(R_{21}^\tau) + M_2 = 0.$$

При этом  $M_C(R_{21}^n) = 0$ , т. к. линия действия вектора  $\vec{R}_{21}^n$  проходит через точку  $C$ .

Момент реакции  $R_{21}^\tau$  относительно точки  $C$

$$M_C(R_{21}^\tau) = R_{21}^\tau \cdot l_{BC},$$

тогда уравнение моментов принимает вид

$$M_C(F_2) + R_{21}^\tau \cdot l_{BC} + M_2 = 0,$$

откуда имеем

$$R_{21}^{\tau} = - \left[ \frac{M_C(F_2) + M_2}{l_{BC}} \right].$$

Знак искомой реакции  $\bar{R}_{21}^{\tau}$  определяется знаком правой части последнего выражения.

Звено 3 находится под действием силы  $\vec{F}_3$ , реакций  $\vec{F}_3$ ,  $\bar{R}_{43}^{\tau}$  и пары сил с моментом  $M_3$ . Направление действия векторов  $\bar{R}_{43}^n$ ,  $\bar{R}_{43}^{\tau}$  неизвестно, следовательно, при составлении уравнения моментов задаемся произвольным направлением действия векторов этих сил. Если после определения величин этих реакций получим отрицательный результат, то истинное направление действия векторов противоположно принятому.

Запишем уравнение моментов всех сил относительно точки  $C$ :

$$\sum M(F_i)_C = 0, \quad M_D(F_3) + R_{23}^{\tau} l_{CD} + M_3 = 0.$$

При этом  $M_C(R_{43}^n) = 0$ , т. к. линия действия вектора  $\bar{R}_{43}^n$  проходит через точку  $C$ .

Момент реакции  $R_{43}^{\tau}$  относительно точки  $C$

$$M_C(R_{43}^{\tau}) = R_{43}^{\tau} \cdot l_{CD},$$

тогда уравнение моментов принимает вид

$$M_{\bar{N}}(F_3) + R_{43}^{\tau} \cdot l_{CD} + M_3 = 0,$$

откуда имеем

$$R_{43}^{\tau} = - \left[ \frac{M_C(F_3) + M_3}{l_{CD}} \right].$$

Знак искомой реакции  $R_{43}^{\tau}$  определяется знаком правой части полученного выражения.

В результате проведенных действий в уравнении равновесия неизвестны только реакции  $R_{21}^n$  и  $R_{43}^n$ , а статическая неопределимость системы уменьшилась до единицы. Величины неизвестных реакций найдем, используя план сил. Построение плана сил производится в масштабном коэффициенте сил  $\mu_F$  и основано на принципе: вершина предыдущего вектора является началом последующего вектора (рис. 4.6, в).



Для расчета значений реакций  $R_{21}^n$  и  $R_{43}^n$  используем выражения

$$R_{21}^n = |R_{21}^n| \cdot \mu_F,$$

$$R_{43}^n = |R_{43}^n| \cdot \mu_F.$$

Значения полных реакций  $R_{21}$  и  $R_{43}$  вычислим по формулам

$$R_{21} = \sqrt{(R_{21}^n)^2 + (R_{21}^{\tau})^2},$$

$$R_{43} = \sqrt{(R_{43}^n)^2 + (R_{43}^{\tau})^2}.$$

Для определения реакций в шарнире  $C$  соединим точки  $b, d$  с точкой  $c$  на плане сил (рис. 4.8, в). В результате получим векторы реакций  $\vec{R}_{23} \equiv \vec{R}_{32}$ , значения которых найдем аналогично анализу предшествующих структурных групп.

*Дано:* структурная группа 2-го класса 4-го вида (рис. 4.9, а). Структурная группа  $BCD$  имеет структурную формулу ПВП и состоит из двух звеньев (2 и 3) и двух поводков (звенья 1 и 4). На звенья структурной группы действуют силы  $F_2, F_3$  и моменты пар сил  $M_2$  и  $M_3$ .

*Решение.* Точки  $B$  и  $D$  являются центрами поступательных кинематических пар, следовательно, используя принцип «исключения связей», заменяем связи, наложенные поводками 1 и 4 на движения звеньев 2 и 3, соответствующими реакциями. Получаем реакции  $\vec{R}_{12}$  и  $\vec{R}_{43}$  (рис. 4.9, б), для которых известны точки их приложения и линия действия, совпадающие с нормальными к контактирующим поверхностям звеньев, образующих поступательные кинематические пары.

В результате проделанных мероприятий структурная группа  $BCD$  находится в равновесии.

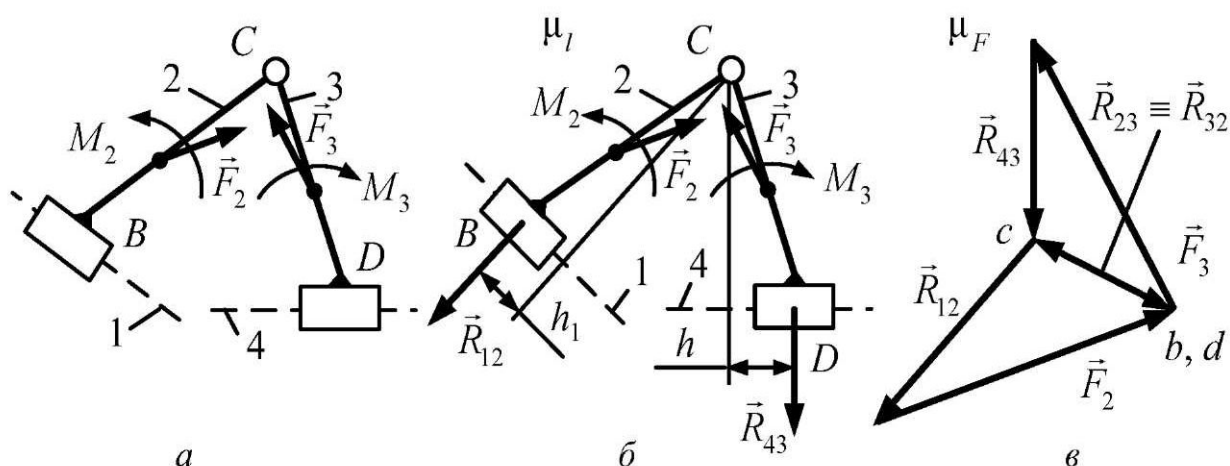


Рис. 4.9. Кинетостатический анализ структурной группы 2-го класса 4-го вида

Запишем уравнение равновесия структурной группы  $BCD$  (рис. 4.9, б):

$$\vec{R}_{21} + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{R}_{43} = 0.$$

Полученное уравнение содержит два неизвестных, следовательно, рассматриваемая система статически определима. Величины неизвестных реакций найдем, используя план сил. Построение плана сил производится в масштабном коэффициенте сил  $\mu_F$  и основано на принципе: вершина предыдущего вектора является началом последующего вектора (рис. 4.9, в).

Для расчета значений реакций  $R_{21}$  и  $R_{43}$  используем выражения

$$R_{21} = |R_{21}| \cdot \mu_F,$$

$$R_{43} = |R_{43}| \cdot \mu_F.$$

Для определения реакций в шарнире  $C$  соединим точки  $b, d$  с точкой  $c$  на плане сил (рис. 4.9, в). В результате получим векторы реакций  $\vec{R}_{23} \equiv \vec{R}_{32}$ , значения которых найдем аналогично анализу предшествующих структурных групп.

*Дано:* структурная группа 2-го класса 5-го вида (рис. 4.10, а). Структурная группа  $BCD$  имеет структурную формулу ППВ и состоит из двух звеньев (2 и 3) и двух поводков (звенья 1 и 4). На звенья структурной группы действуют силы  $F_2, F_3$  и моменты пар сил  $M_2$  и  $M_3$ .

*Решение.* Точки  $B$  и  $D$  являются центрами, соответственно, поступательной и вращательной кинематических пар, следовательно, используя принцип «исключения связей», заменяем связи, наложенные поводками 1 и 4 на движения звеньев 2 и 3, соответствующими реакциями. Получаем реакции  $\vec{R}_{12}$  и  $\vec{R}_{43}$  (рис. 4.10, б), для которых известны только их приложения и линия действия реакции  $\vec{R}_{12}$  совпадает с нормалью к контактирующим поверхностям звеньев 1 и 2, образующих поступательную кинематическую пару. С целью разрешения поставленной задачи разложим реакцию  $\vec{R}_{43}$  на составляющие:

$$\vec{R}_{43} = \vec{R}_{43}^n + \vec{R}_{43}^t.$$

В результате проделанных мероприятий структурная группа  $BCD$  находится в равновесии.



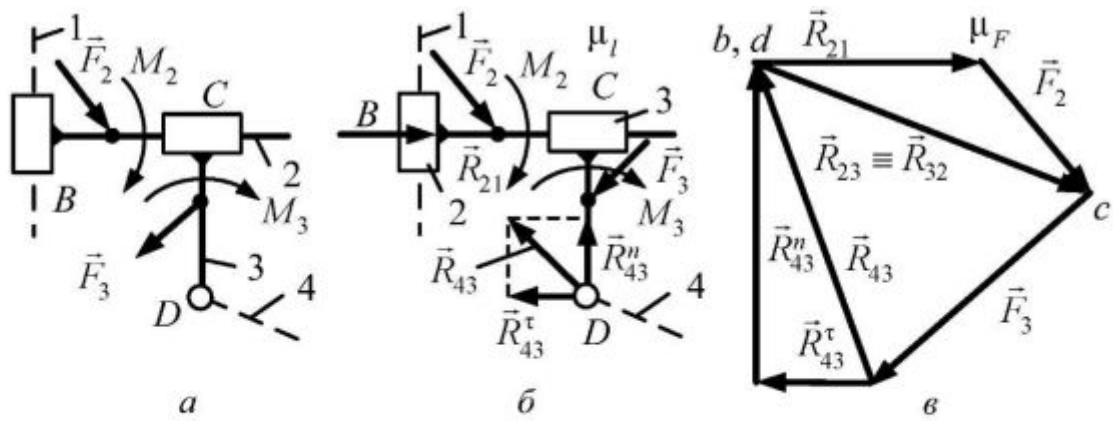


Рис. 4.10. Кинетостатический анализ структурной группы 2-го класса 5-го вида

Уравнение равновесия структурной группы  $BCD$  (рис. 4.10, б) имеем вид

$$\vec{R}_{21} + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{R}_{43}^\tau + \vec{R}_{43}^n = 0.$$

Полученное уравнение содержит три неизвестные, следовательно, рассматриваемая система дважды статически неопределима. С целью скрытия статической неопределимости найдем значения реакции  $R_{43}^\tau$ . Для этого рассмотрим звено 3 без учета звена 2.

Звено 3 находится под действием силы  $\vec{F}_3$ , реакций  $\vec{R}_{43}^n$ ,  $\vec{R}_{43}^\tau$  и момента пары сил  $M_3$ . Направление действия реакций  $\vec{R}_{43}^n$ ,  $\vec{R}_{43}^\tau$  неизвестно, следовательно, при составлении уравнения моментов задаемся, произвольным направлением действия этих сил. Если после определения величин этих реакций получим отрицательный результат, то истинное направление действия векторов противоположно принятому.

Запишем уравнение моментов всех сил относительно точки  $C$ :

$$\sum M(F_i)_C = 0, \quad M_D(F_3) + M_C(R_{23}^\tau) + M_3 = 0.$$

При этом  $M_C(R_{43}^n) = 0$ , т. к. линия действия вектора  $\vec{R}_{43}^n$  проходит через точку  $C$ .

Момент реакции  $R_{43}^\tau$  относительно точки  $C$

$$M_C(R_{43}^\tau) = R_{43}^\tau \cdot l_{CD},$$

тогда уравнение моментов принимает вид

$$M_C(F_3) + R_{43}^\tau \cdot l_{CD} + M_3 = 0,$$

откуда имеем

$$R_{43}^\tau = - \left[ \frac{M_C(F_3) + M_3}{l_{CD}} \right].$$

Знак искомой реакции  $R_{43}^{\tau}$  определяется знаком правой части последнего выражения.

В результате проведенных действий в уравнении равновесия неизвестны только реакции  $R_{21}$  и  $R_{43}^n$ , а статическая неопределимость системы уменьшилась до единицы. Величины неизвестных реакций найдем, используя план сил. Построение плана сил производится в масштабном коэффициенте сил  $\mu_F$  и основано на принципе: вершина предыдущего вектора является началом последующего вектора (рис. 4.10, в).

Для расчета значений реакций  $R_{21}$  и  $R_{43}^n$  используем выражения

$$R_{43}^n = |R_{43}^n| \cdot \mu_F,$$

$$R_{12} = |R_{12}| \cdot \mu_F.$$

Значение полной реакции  $R_{43}$  вычислим по формуле

$$R_{43} = \sqrt{(R_{43}^n)^2 + (R_{43}^{\tau})^2}.$$

Для определения реакций в шарнире  $C$  соединим точки  $b, d$  с точкой  $c$  на плане сил (рис. 4.10, в). В результате получим векторы  $\vec{R}_{23} \equiv \vec{R}_{32}$ , значения которых найдем аналогично анализу предшествующих структурных групп.

### Кинетостатический анализ первичного механизма

В общем случае первичный механизм состоит из кривошипа и стойки, образующих вращательную кинематическую пару 5-го класса. Под действием силовых факторов первичный механизм не находится в равновесии. Для того чтобы равновесие имело место, необходимо дополнительно ввести силу или пару сил, которые уравновешивали бы систему силовых факторов, приложенных к кривошипу. К подобным силовым факторам относятся уравновешивающая сила или уравновешивающий момент пары сил.

*Дано:* первичный механизм, состоящий из кривошипа и стойки, образующих вращательную кинематическую пару 5-го класса (рис. 4.11, а), находится под действием силы  $\vec{F}_1$ , момента пары сил  $M_1$  и реакции  $\vec{R}_{21}$ , учитывающей влияние силовых факторов, приложенных к ведомым звеньям.

*Решение.* Точка  $O$  является центром вращательной кинематической пары, следовательно, используя принцип «исключения связей», заменяем связи, наложенные стойкой 0 на движения кривошипа 1 соответствующей реакцией. В результате получаем реакцию  $\vec{R}_{01}$  (рис. 4.11, б), компенсирующую действие на кривошип системы силовых факторов, состоящей из силы  $\vec{F}_1$ , момента пары сил  $M_1$  и реакции  $\vec{R}_{21}$ . Для реакции  $\vec{R}_{01}$  известна только точка ее приложения. С целью разрешения поставленной задачи разложим реакцию на составляющие:

$$\vec{R}_{01} = \vec{R}_{01}^n + \vec{R}_{01}^{\tau}.$$



Для приведения полученной системы в равновесие к точке  $A$  прикладываем вектор уравновешивающей силы  $\vec{F}_y$ , линия действия которого является перпендикуляром к оси кривошипа. В результате проведенных мероприятий первичный механизм находится в равновесии.

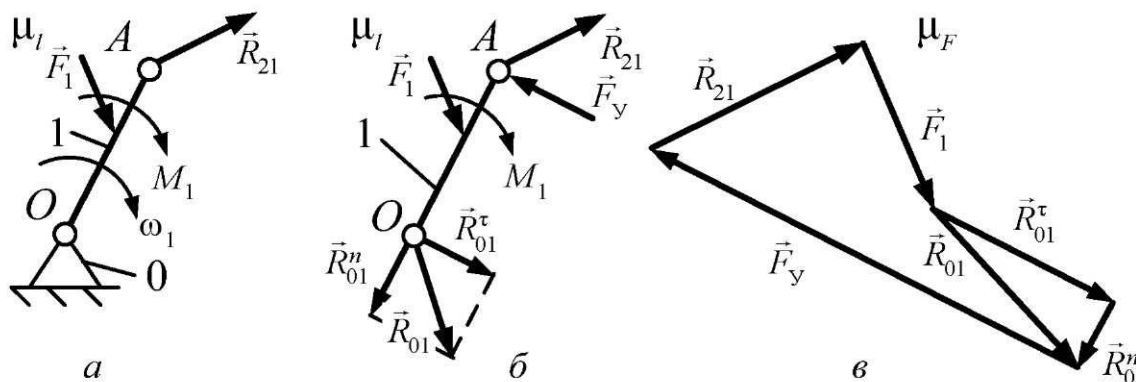


Рис. 4.11. Кинетостатический анализ первичного механизма

Запишем уравнение равновесия первичного механизма (рис. 4.11, б):

$$\vec{F}_0 + \vec{R}_{21} + \vec{F}_1 + \vec{R}_{01}^\tau + \vec{R}_{01}^n = 0.$$

Полученное уравнение равновесия содержит три неизвестных, следовательно, рассматриваемая система дважды статически неопределима. Направление действия векторов сил  $\vec{R}_{01}^n$ ,  $\vec{R}_{01}^\tau$  и  $\vec{F}_y$  неизвестно, следовательно, при составлении уравнения моментов задаемся произвольным направлением действия векторов этих сил. Если после определения значений данных реакций получим отрицательный результат, то истинное направление действия векторов противоположно принятому направлению. С целью раскрытия статической неопределимости найдем значение реакции  $R_{01}^\tau$ .

Запишем уравнение моментов всех сил, действующих на кривошип 1 относительно точки  $A$ :

$$\sum (F_i)_A = 0, \quad M_A(F_1) + M_A(R_{01}^\tau) + M_1 = 0.$$

При этом  $M_A(R_{01}^n) = 0$ ,  $M_A(R_{21}) = 0$  и  $M_A(F_y) = 0$ , т. к. линии действия векторов  $\vec{R}_{01}^n$ ,  $\vec{R}_{21}$  и  $\vec{F}_y$  проходят через точку  $A$ .

Момент реакции  $R_{01}^\tau$  относительно точки  $A$

$$M_A(R_{01}^\tau) = R_{01}^\tau \cdot l_{OA},$$

тогда уравнение моментов принимает вид

$$M_A(F_1) + R_{01}^\tau \cdot l_{OA} + M_1 = 0,$$

откуда имеем

$$R_{01}^{\tau} = - \left[ \frac{M_A(F_1) + M_1}{l_{OA}} \right].$$

Знак искомой реакции  $R_{01}^{\tau}$  определяется знаком правой части последнего выражения.

В результате проведенных действий в уравнении равновесия неизвестна только реакция  $R_{01}^n$  и сила  $F_y$ , а статическая неопределимость системы уменьшилась до единицы. Величины неизвестных сил найдем, используя план сил. Построение плана сил производится в масштабном коэффициенте сил  $\mu_F$  и основано на принципе: вершина предыдущего вектора является началом последующего вектора ([рис. 4.11, в](#)).

Для расчета значений реакций силы  $R_{01}^n$  и  $F_y$  используем выражения

$$R_{01}^n = |R_{01}^n| \cdot \mu_F,$$

$$F_y = |F_y| \cdot \mu_F.$$

Значение полной реакции  $R_{01}$  вычислим по формуле

$$R_{01} = \sqrt{(R_{01}^n)^2 + (R_{01}^{\tau})^2}.$$

Найдем уравновешивающий момент:

$$M_y = F_y \cdot l_{OA}.$$

Значение уравновешивающего момента пропорционально величине силового управляющего воздействия, которое необходимо приложить к ведущему звену механизма, чтобы привести его в движение согласно заданному закону.

### Теорема И. Е. Жуковского

Решение задач силового анализа можно обеспечить и более простым методом, воспользовавшись теоремой И. Е. Жуковского. Использование данной теоремы для выполнения силового анализа плоских рычажных механизмов позволяет определить силовое управляющее воздействие.

*Формулировка теоремы:* если какой-либо механизм с подвижностью, равной единице, под действием системы сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ , приложенных к точкам  $D, F, \dots, G$ , находится в равновесии, то в равновесии находится и повернутый на  $90^\circ$  план скоростей, рассматриваемый как «жесткий рычаг», вращающийся вокруг полюса плана скоростей и нагруженный той же



системой сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ , приложенных к одноименным точкам  $d, f, \dots, g$  этого плана.

Из формулировки теоремы следует, что для выполнения силового анализа рассматриваемым методом необходимо построить план скоростей, в котором все отрезки, изображающие векторы линейных и относительных скоростей, повернуты по отношению к действительным их направлениям на  $90^\circ$ . Такой план скоростей называется *повернутым*.

Построение повернутого плана скоростей производится в любом масштабном коэффициенте  $\mu_v$ , т. к. условие равновесия технической системы не зависит от размеров плана скоростей.

Рассмотрим применение теоремы И. Е. Жуковского на примере кривошипно-ползунного механизма.

*Дано:* кинематическая схема механизма ([рис. 4.12, а](#)), план скоростей ([рис. 4.12, б](#)), длина кривошипа  $l_{OA}$ , длина шатуна  $l_{AB}$ , значения всех кинематических параметров. На звенья механизма действуют силы  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ , моменты пар сил  $M_1$  и  $M_2$ .

*Решение.* Исходя из формулировки теоремы, заменяем моменты  $M_1$  и  $M_2$  соответствующими парами сил, значения которых найдем по выражениям

$$F_{M1} = F'_{M1} = \frac{M_1}{l_{OA}},$$

$$F_{M2} = F'_{M2} = \frac{M_2}{l_{OA}}.$$

Для сохранения эквивалентности действия моментов  $M_1$  и  $M_2$  заменяющие пары сил прикладываем к крайним точкам соответствующих звеньев. При этом линии действия векторов данных сил являются перпендикулярами к осям этих же звеньев. Направление действия полученных пар сил соответствует направлению моментов  $M_1$  и  $M_2$  ([рис. 4.12, в](#)).

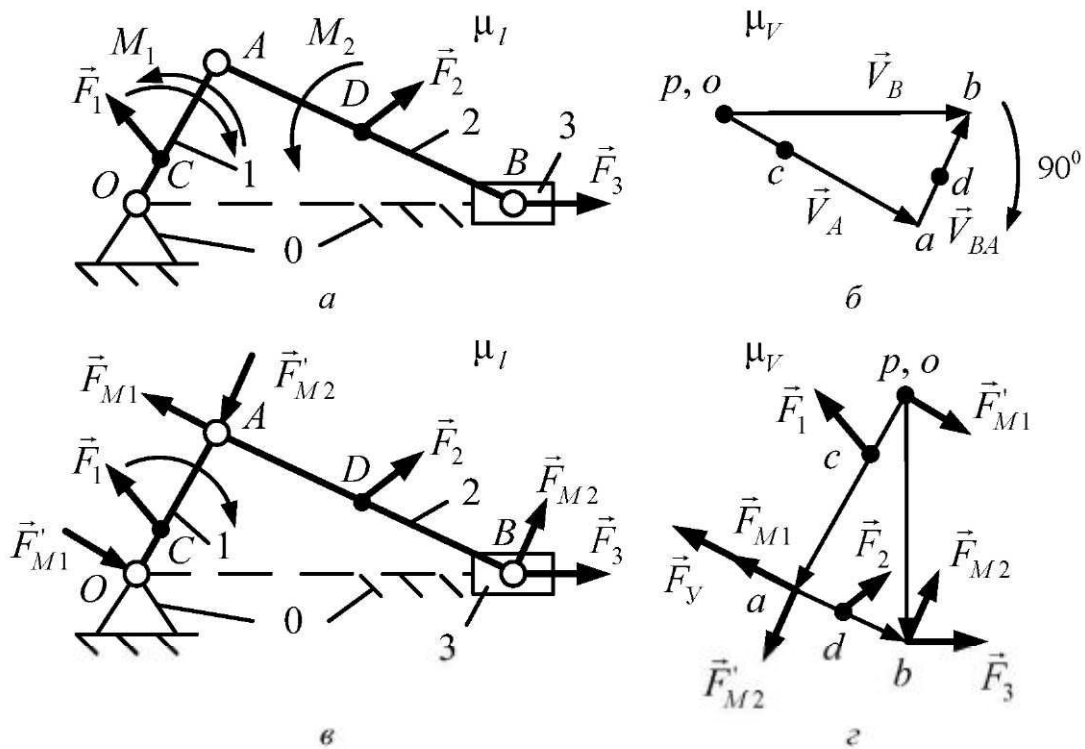


Рис. 4.12. Теорема Жуковского для кривошипно-ползунного механизма

В масштабном коэффициенте  $\mu_V$  строим повернутый на  $90^\circ$  план скоростей, поворот осуществляем в направлении движения кривошипа (рис. 4.12, б). В одноименные точки повернутого плана скоростей с кинематической схемой механизма (рис. 4.12, а) переносим все внешние силы  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$ ,  $\vec{F}_3$ ,  $\vec{F}_{M1}$ ,  $\vec{F}'_{M1}$ ,  $\vec{F}_{M2}$ ,  $\vec{F}'_{M2}$ , действующие на звенья механизма (рис. 4.12, в). Для установления равновесия полученной системы к точке  $a$  перпендикулярно к отрезку  $|pa|$  прикладываем вектор уравнивающей силы. С целью определения значения уравнивающей силы составим сумму моментов всех сил, действующих на данную систему относительно полюса повернутого плана скоростей:

$$\sum M(F_i)_p = 0,$$

$$M_p(F_y) + M_p(F_1) + M_p(F_2) + M_p(F_3) + \\ + M_p(F_{M1}) + M_p(F_{M2}) + M_p(F'_{M2}) = 0.$$

При этом  $\sum M_p(F'_{M1}) = 0$ , т. к. линия действия вектора  $\vec{F}'_{M1}$  проходит через полюс плана скоростей.

Момент уравнивающей силы  $F_y$  относительно полюса плана скоростей



$$M_p(F_y) = F_y \cdot l_{OA},$$

тогда составленное уравнение моментов принимает вид

$$F_{\delta} \cdot l_{OA} + M_p(F_1) + M_p(F_2) + M_p(F_3) + \\ + M_p(F_{M1}) + M_p(F_{M2}) + M_p(F'_{M2}) = 0,$$

откуда имеем

$$F_y = - \left[ \frac{M_p(F_1) + M_p(F_2) + M_p(F_3) + M_p(F_{M1}) + M_p(F_{M2}) + M_p(F'_{M2})}{l_{OA}} \right].$$

Уравновешивающий момент найдем по аналогии с кинетостатическим анализом первичного механизма.

## 4.5. ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ

*Динамический анализ* – это вид исследования подвижных технических систем, изучающий процессы, протекающие в этих системах под действием силовых факторов в функции времени.

### Режимы движения технической системы

Любая техническая система, находясь в неподвижном состоянии, обладает некоторым объемом кинетической энергии, обеспечивающим существование этой системы (рис. 4.13). Для начала движения технической системе необходимо сообщить дополнительный объем кинетической энергии, совершив работу над этой системой. В зависимости от вида работы, совершаемой внешними силовыми факторами, для любой технической системы различают три режима движения: разгон, установившееся движение и торможение.

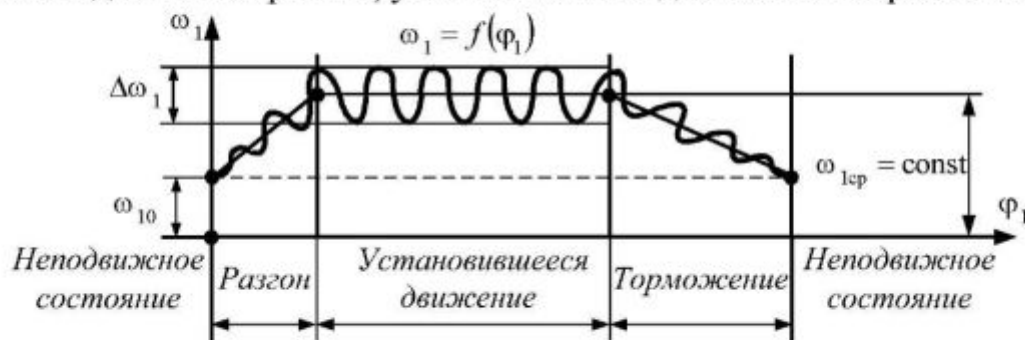


Рис. 4.13. Режимы движения механизма или машины

*Разгон* – это режим движения технической системы, при котором работа движущих сил больше работы сил сопротивления:

$$A_d > A_c,$$

следовательно, суммарная работа механизма в режиме разгона всегда положительная, т. е.

$$A_\Sigma > 0.$$

*Установившееся движение* – это режим движения механизма, при котором работа движущих сил равна работе сил сопротивления:

$$A_d = A_c,$$

следовательно, суммарная работа механизма в режиме установившегося движения равна нулю, т. е.

$$A_\Sigma = 0.$$

*Торможение* – это режим движения механизма, при котором работа движущих сил меньше работы сил сопротивления:

$$A_d < A_c,$$

следовательно, суммарная работа механизма в режиме разгона всегда отрицательная, т. е.

$$A_\Sigma < 0.$$

Режимы «разгон» и «торможение» сопровождаются переходными процессами и в зависимости от структуры технической системы и характера действия силовых факторов протекают в период от нескольких долей до десятков секунд. Основным режимом движения является режим установившегося движения, т. к. на этом режиме осуществляется выполнение служебного назначения технической системы. На режиме установившегося движения ведущее звено технической системы находится под воздействием внешних силовых факторов и в каждый момент времени имеет разное значение скорости движения. Мгновенное значение скорости движения ведущего звена технической системы формируется соотношением двух групп внешних силовых факторов: движущих силовых факторов и силовых факторов сопротивления. Величина движущих силовых факторов определяется параметрами энергетической машины и данной системы, а значение силовых факторов сопротивления формируется условиями эксплуатации технической системы.



Поскольку как движущие силовые факторы, так и силовые факторы сопротивления не являются постоянными величинами, то скорость движения ведущего звена технической системы также не является константой. Значение скорости движения ведущего звена технической системы колеблется в течение рассматриваемого промежутка времени в некотором диапазоне от максимума до минимума и наоборот. Колебания значений скорости движения ведущего звена технической системы вызывают изменение величин реакций в кинематических парах, что как следствие является одной из причин возникновения упругих колебаний звеньев. Наличие в технической системе упругих колебаний – основная причина неравномерности движения ведущего звена, называемая *неравномерностью хода*, для оценки которой используется коэффициент неравномерности хода:

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{\text{ср}}} = \frac{V_{\max} - V_{\min}}{V_{\text{ср}}},$$

где  $\omega_{\max}$ ,  $\omega_{\min}$ ,  $\omega_{\text{ср}}$  – максимальное, минимальное и среднее значения угловой скорости ведущего звена;  $V_{\max}$ ,  $V_{\min}$ ,  $V_{\text{ср}}$  – максимальное, минимальное и среднее значения линейной скорости точки, принадлежащей ведущему звену.

Значения коэффициентов неравномерности хода являются стандартизованными величинами и определяются по справочной литературе в зависимости от типа технической системы ([табл. 4.1](#)).

Таблица 4.1

Техническая система	Коэффициент неравномерности	Техническая система	Коэффициент неравномерности
Насосы	$\frac{1}{5} - \frac{1}{30}$	Турбогенераторы	$\frac{1}{200} - \frac{1}{500}$
Компрессоры	$\frac{1}{50} - \frac{1}{100}$	Электродвигатели	$\frac{1}{100} - \frac{1}{200}$
Сельхозмашины	$\frac{1}{5} - \frac{1}{50}$	Двигатели судовые	$\frac{1}{100} - \frac{1}{150}$
Металлорежущие станки	$\frac{1}{20} - \frac{1}{50}$	Двигатели внутреннего сгорания	$\frac{1}{80} - \frac{1}{100}$
Ткацкие, мукомольные машины	$\frac{1}{10} - \frac{1}{50}$	Двигатели авиационные	$\frac{1}{200} - \frac{1}{500}$

Неравномерность хода любой технической системы может быть обусловлена:

- 1) несовпадением законов изменения приведенных движущих силовых факторов и приведенных силовых факторов сопротивления;
- 2) непостоянством значений приведенного момента инерции.

Первая причина является следствием наличия двух вариантов соотношения законов изменения приведенных моментов сил.

1. Приведенный момент сил сопротивления – функция угла поворота ведущего звена, а приведенный момент движущих сил – величина постоянная:

$$M_{п.д} = \text{const}, \quad M_{п.с} = f(\varphi_1).$$

2. Приведенный момент движущих сил – функция угла поворота ведущего звена, а приведенный момент сил сопротивления – величина постоянная:

$$M_{п.с} = \text{const}, \quad M_{п.д} = f(\varphi_1).$$

Первый вариант характерен для механизмов станков, поршневых насосов, а второй – для механизмов двигателей внутреннего сгорания и паровых машин.

Вторая причина возникновения неравномерности хода является следствием непостоянства значений кинематических параметров технической системы.

Неравномерность хода отрицательно сказывается на основных показателях работоспособности технической системы. Для минимизации влияния неравномерности движения на работу технической системы необходимо решить задачу регулирования значений скорости движения ведущего звена. Изменение массы технической системы на величину дополнительной маховой массы позволяет решить поставленную задачу. Роль дополнительной маховой массы выполняет маховое колесо или маховик, которые вводятся в структуру технической системы в качестве дополнительного звена. Наличие дополнительной маховой массы в структуре технической системы исключает возможность появления неблагоприятных режимов движения ведущего звена:

*ведущее звено движется с ускорением*, т. е. работа движущих сил превышает работу сил сопротивления, следовательно, маховое колесо аккумулирует приращение кинетической энергии;

*ведущее звено движется с замедлением*, т. е. работа сил сопротивления превышает работу движущих сил, следовательно, маховое колесо отдает ранее накопленную кинетическую энергию.

В случаях, когда введение в структуру технической системы дополнительного звена невозможно по конструктивным или иным причинам для реализации маховых масс используются звенья, уже существующие в структуре



технической системы, но совершающие только вращательные движения: ротор энергетической машины, соединительные муфты, зубчатые колеса, кулачки, шкивы, звездочки и др.

### Метод Виттенбауэра

Для расчета величины дополнительной маховой массы используется метод Виттенбауэра, согласно которому значение маховой массы пропорционально величине ее момента инерции. Для определения значения момента инерции маховой массы строится диаграмма  $\Delta A = f(J_1)$ , которая является замкнутой кривой и называется диаграмма «энергия–масса». Касательные, проведенные к диаграмме «энергия–масса», определяют величину отрезка, пропорциональную значению момента инерции дополнительной маховой массы механизма.

Для построения диаграммы «энергия–масса» необходимо составить динамическую модель технической системы и построить две диаграммы:

изменения кинетической энергии  $\Delta E = f(\varphi_1)$ ;

приведенного момента инерции  $J_{\text{п}} = f(\varphi_1)$ .

Диаграмма изменения кинетической энергии получается посредством последовательного преобразования диаграмм приведенных моментов  $M_{\text{п}} = f(\varphi_1)$  и работ  $A = f(\varphi_1)$ .

Рассмотрим построение диаграммы «энергия–масса» на примере анализа кривошипно-ползунного механизма двухтактного двигателя внутреннего сгорания (рис. 4.14).

Дано: кинематическая схема механизма (рис. 4.14, а), длина кривошипа  $l_{OA}$ , длина шатуна  $l_{AB}$ , значения всех кинематических параметров. Звенья кривошипно-ползунного механизма находятся под действием сил тяжести. На ползун 3 действует сила полезного сопротивления  $\vec{F}_{\text{п.с}}$ .

Для составления динамической модели воспользуемся методом приведения. В качестве звена приведения выберем кривошип 1, а за точку приведения примем подвижную точку А этого звена (рис. 4.14, б). Для двигателя внутреннего сгорания (рис. 4.14, а) характерно следующее соотношение приведенных моментов сил:

$$M_{\text{п.с}} = \text{const}, \quad M_{\text{п.д}} = f(\varphi_1).$$

Рассчитаем приведенный момент движущих сил:

$$M_{\text{п.д}} = \pm \frac{G_1 \cdot V_{s1}}{\omega_1} \cos(\vec{G}_1, \vec{V}_{s1}) \pm \frac{G_2 \cdot V_{s2}}{\omega_1} \cos(\vec{G}_2, \vec{V}_{s2}) \pm \frac{G_3 \cdot V_{s3}}{\omega_1} \cos(\vec{G}_3, \vec{V}_{s3}) \pm \frac{F_{\text{п.д}} \cdot V_B}{\omega_1} \cos(\vec{F}_{\text{п.д}}, \vec{V}_B),$$

где знак «+» выбирается в случае, если вектор силы и вектор скорости точки приложения этого вектора совпадают по направлению, «-» – если направления этих векторов противоположно друг другу.

Приведенный момент сил сопротивления является постоянной величиной и действует на протяжении всего цикла работы механизма:

$$M_{\text{п.с}} = \frac{\sum_{i=1}^s M_{\text{п.и}}}{s},$$

где  $s$  – число положений звена приведения за промежуток времени.

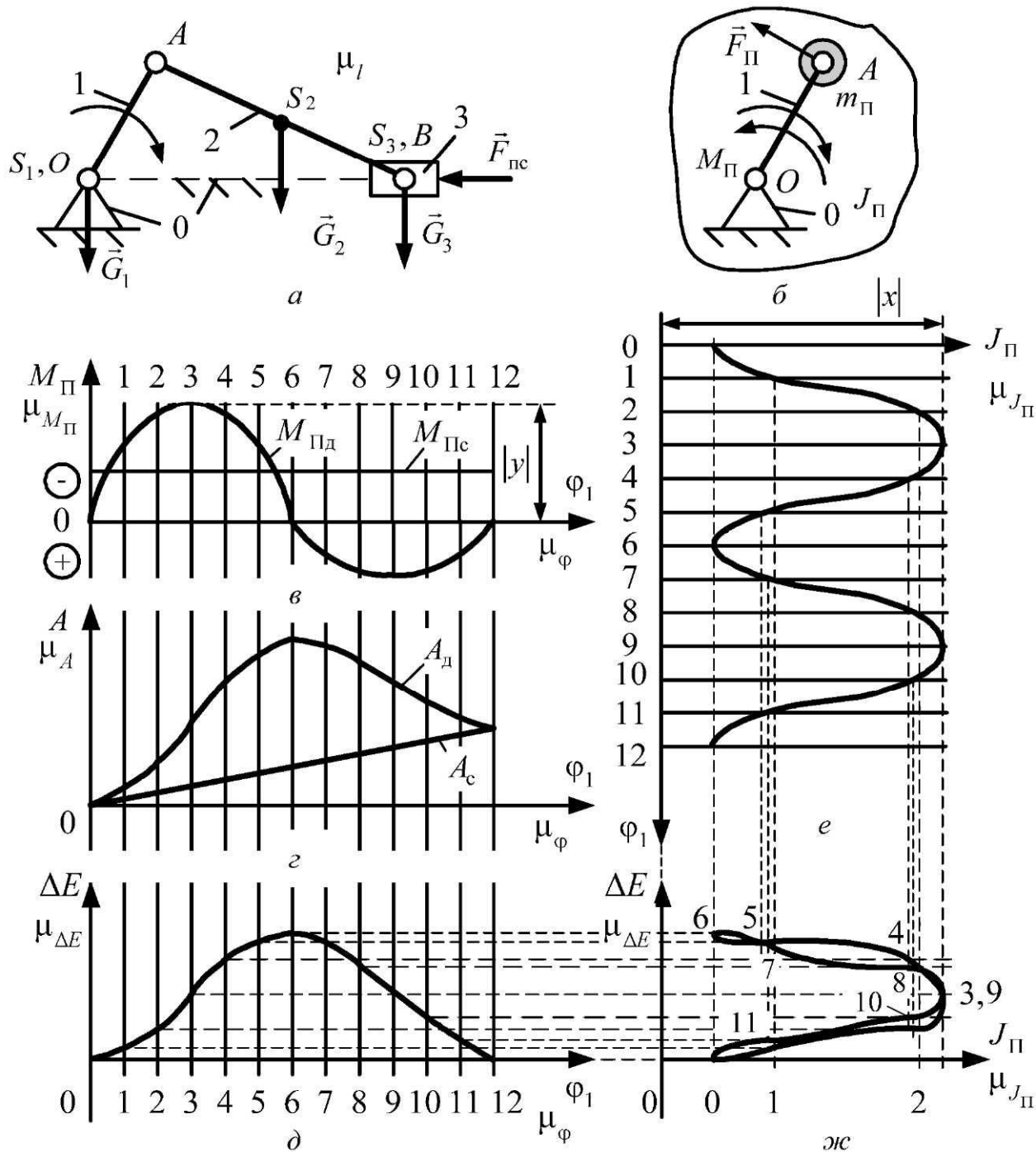


Рис. 4.14. Динамический анализ кривошипно-ползунного механизма



Разрешив полученные выше выражения относительно заданного числа положений ведущего звена, построим диаграмму приведенных моментов сил (рис. 4.14, в).

Масштабный коэффициент оси приведенных моментов сил равен

$$\mu_M = \frac{M_{п\max}}{|y|},$$

здесь  $M_{п\max}$  – максимальное значение приведенного момента, Н/м;  $|y|$  – произвольно выбранный отрезок, изображающий максимальное значение приведенного момента на диаграмме, построенной в масштабном коэффициенте, мм (рис. 4.14, в).

Кривая работ движущих сил строится методом графического интегрирования диаграммы приведенных моментов этих сил (рис. 4.14, г):

$$A_d = \int_0^{\varphi} M_{пд} d\varphi.$$

Значение приведенного момента сил сопротивления не изменяется на протяжении цикла работы рассматриваемой системы, тогда для построения кривой работ сил сопротивления необходимо соединить прямой начальную и конечную точки кривой работ движущих сил:

$$A_c = \int_0^{\varphi} M_{пс} d\varphi = M_{пс} \cdot \varphi.$$

Находим масштабный коэффициент оси работ:

$$\mu_A = \mu_M \cdot \mu_{\varphi} \cdot \Delta\varphi \cdot m,$$

где  $\mu_{\varphi}$ ,  $\Delta\varphi$  – масштабный коэффициент и шаг оси угла поворота звена приведения;  $m$  – коэффициент уменьшения построения,  $m = 1, 2, 3, \dots$

Кривая изменения кинетической энергии представляет собой разность работ движущих сил и сил сопротивления (рис. 4.14, д):

$$\Delta E = A_a - A_b.$$

Масштабный коэффициент оси изменения кинетической энергии равен масштабному коэффициенту оси работ:

$$\mu_{\Delta E} = \mu_A.$$

Приведенный момент инерции рассчитаем по формуле

$$J_{\Gamma} = J_{s1} + J_{s2} \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 + m_2 \left( \frac{V_{s2}}{\omega_1} \right)^2 + m_3 \left( \frac{V_B}{\omega_1} \right)^2.$$

Используя данные, полученные по представленной формуле, в выбранном масштабном коэффициенте  $\mu_J$  построим диаграмму приведенного момента инерции (рис. 4.14, е).

Масштабный коэффициент оси приведенного момента инерции найдем по выражению

$$\mu_J = \frac{J_{i \max}}{|x|},$$

здесь  $|x|$  – произвольно выбранный отрезок, изображающий максимальное значение приведенного момента инерции в масштабном коэффициенте, мм;  $J_{i \max}$  – максимальное значение приведенного момента инерции, кг·м<sup>2</sup> (рис. 4.14, е).

Методом графического исключения значений угла поворота звена приведения, построим кривую зависимости изменения кинетической энергии от приведенного момента инерции. Полученная кривая является  $\Delta E = f(J_n)$  и называется диаграмма «энергия–масса» (рис. 4.14, ж).

Для определения момента инерции маховой массы к диаграмме «энергия–масса» до пересечения с осью  $\Delta E$  проводятся касательные. Углы наклона касательных соответствуют максимальному и минимальному значениям угловой скорости ведущего звена механизма (рис. 4.15).

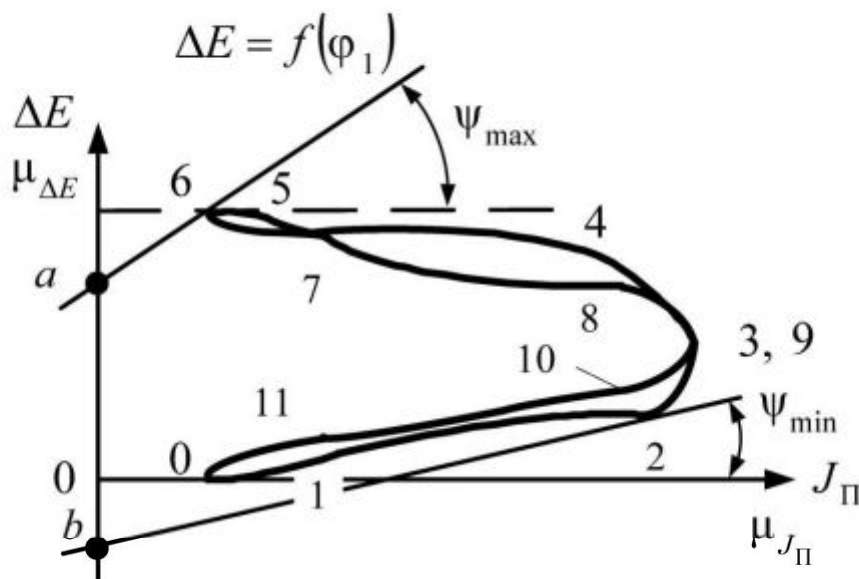


Рис. 4.15. Анализ диаграммы «энергия–масса»

Углы наклона касательных определим по формулам

$$\psi_{\max} = \arctg \left( \frac{\mu_{J_n} (1 + \delta) \cdot \omega_{n, \text{cp}}^2}{2\mu_{\Delta E}} \right),$$

$$\psi_{\min} = \arctg \left( \frac{\mu_{J_n} (1 - \delta) \cdot \omega_{n, \text{cp}}^2}{2\mu_{\Delta E}} \right),$$

где  $\omega_{i, \text{нб}}$  – среднее значение звена приведения, с<sup>-1</sup>,

$$\omega_{n, \text{cp}} = \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2}.$$



Момент инерции маховой массы рассчитаем по формуле

$$J_{\text{м.м}} = \frac{|ab| \cdot \mu_{\Delta E}}{\delta \cdot \omega_{\text{н.ср}}^2},$$

здесь  $|ab|$  – отрезок, лежащий на оси изменения кинетической энергии между касательными к диаграмме «энергия–масса».

## 4.6. ВИБРОЗАЩИТА МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

При движении любой технической системы, находящейся под действием двух групп внешних силовых факторов, в этой системе возникают упругие колебания, приводящие к появлению вибраций. Наличие вибраций вызывает рост сил трения, сопровождающихся потерями кинетической энергии на нагрев звеньев, снижением прочности контактирующих поверхностей, что способствует уменьшению значения КПД, ресурса работы и кинематической точности технической системы.

Для минимизации влияния вибрации на работоспособность технической системы используют следующие мероприятия:

1. *Уравновешивание*, или *балансировка*. Проводится на стадии обоих этапов синтеза технической системы и предусматривает реализацию мероприятий, направленных на снижение виброактивности этой системы.

2. *Защита от внешних воздействий*. Выполняется на стадии доводочных работ и предусматривает реализацию средств защиты как технической системы от внешних вибраций, исходящих от других технических систем, так и рабочего-оператора от вибраций самой системы.

К виброзащитным устройствам относятся:

*динамический гаситель*, или *антивибратор* – это устройство виброзащиты, в котором возникновение вибраций исключается посредством изменения собственных частот системы и частот возмущающих сил;

*виброизолятор* – это устройство виброзащиты, в котором возникновение вибраций исключается посредством уменьшения амплитуд колебаний за счет наличия собственных упругих и демпфирующих свойств.

Рассмотрим техническую систему, которая состоит из двух подвижных звеньев, образующих между собой кинематическую пару и обладающих возможностью совершать поступательные движения только вдоль оси  $X$ .

*Взаимодействие двух подвижных звеньев*. Оба звена обладают собственной массой, а на звено 2 действует сила  $\vec{F}_2$ , действие сил тяжести обоих звеньев не учитываем ([рис. 4.16](#)).

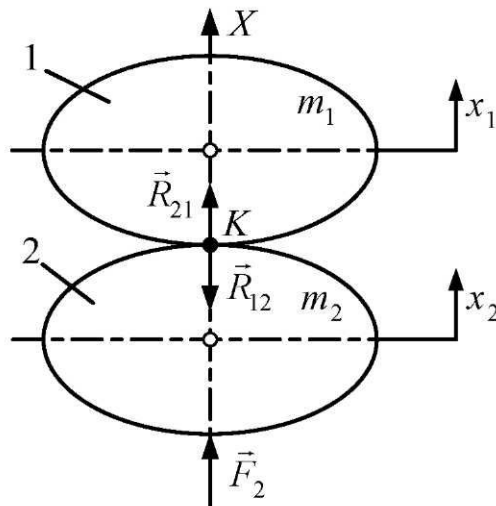


Рис. 4.16. Взаимодействие двух подвижных звеньев

Запишем уравнения движения технической системы:

$$\begin{cases} m_1 \cdot a_1 = R_{21}, \\ m_2 \cdot a_2 = -R_{12} + F_2, \end{cases}$$

где  $m_1, m_2, a_1, a_2$  – массы и ускорения, соответственно, звеньев, 1 и 2;  $R_{21}, R_{12}$  – реакции в кинематической паре, образованной звеньями 1 и 2.

Под действием силы  $\vec{F}_2$  звено 2 переместится на расстояние  $x_2$ , а звено 1 под воздействием звена 2 – на расстояние  $x_1$ . Допустим, что звенья являются абсолютно жесткими, и контакт между ними в процессе движения не нарушается. Следовательно, расстояния  $x_1$  и  $x_2$ , на которые переместятся звенья 1 и 2, будут равными друг другу:

$$x = x_1 = x_2,$$

тогда ускорения, с которыми перемещаются звенья 1 и 2, также будут одинаковыми:

$$a = a_1 = a_2.$$

С учетом принятых допущений приведем уравнения движения звеньев технической системы к виду

$$R_{21} = F_2 - m_2 \cdot a = m_1 \cdot a,$$

тогда ускорение технической системы

$$a = \frac{R_{21}}{m_1} = \frac{F_2 - R_{21}}{m_2}.$$

Проведя соответствующие преобразования, получим выражение для определения реакции кинематической пары:

$$R_{21} = F_2 \frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

Кинетическую энергию технической системы найдем по формуле



$$E = (m_1 + m_2) \frac{V^2}{2}.$$

Потенциальная энергия технической системы равна нулю:

$$U = 0.$$

Запишем уравнение энергетического равновесия технической системы:

$$E - U = E.$$

Анализ полученного уравнения показывает, что вся энергия технической системы преобразуется в кинетическую энергию при равенстве потенциальной энергии нулю ( $U = 0$ ), что свидетельствует о наличии в этой системе упругих колебаний или вибраций.

*Взаимодействие двух подвижных звеньев через виброизолятор.* Для изменения энергетического состояния технической системы введем в ее структуру виброизолятор, состоящий из упругого и демпфирующего элементов (рис. 4.17)

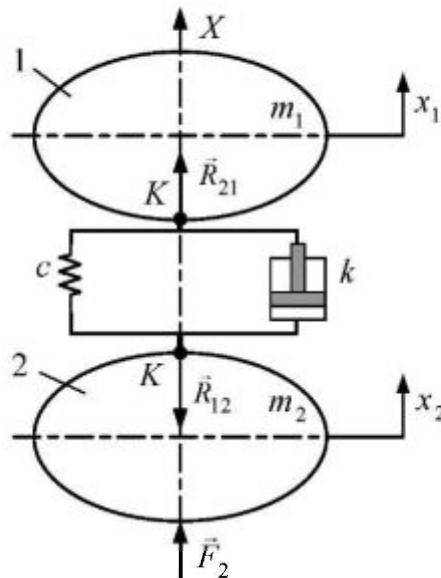


Рис.4.17. Взаимодействие двух подвижных звеньев через виброизолятор

Оба звена обладают собственной массой, а на звено 2 действует сила  $\vec{F}_2$ , действие сил тяжести обоих звеньев не учитываем.

Запишем уравнение движения технической системы с виброизолятором:

$$\begin{cases} m_1 a_1 + c \Delta x + k \Delta x^2 = 0, \\ m_2 a_2 + c \Delta x - k \Delta x^2 + F_2 = 0, \end{cases}$$

где  $m_1, m_2$  – массы звеньев 1 и 2 механизма;  $c, k$  – соответственно, жесткость упругого и демпфирующего элемента виброизолятора.

Под действием силы  $\vec{F}_2$  звенья 1 и 2 данной механической системы переместятся на неодинаковые расстояния  $x_1$  и  $x_2$ , т. е.  $x_1 \neq x_2$ . Предположим,

что  $x_2 > x_1$ , следовательно, кинетическая энергия технической системы при наличии виброизолятора описывается выражением

$$E = \frac{m_1 \cdot a_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot a_2^2}{2},$$

тогда потенциальная энергия

$$U = \frac{c \cdot \Delta x^2}{2},$$

где

$$\Delta x = x_2 - x_1.$$

Анализ полученных выражений показывает, что наличие виброизолятора в технической системе вынуждает систему, помимо расходования части объема работы внешних силовых факторов на изменение кинетической энергии, часть объема работы внешних силовых факторов переводить в потенциальную энергию упругого элемента, а часть объема работы терять в демпфирующем элементе. Демпфирующий элемент технической системы рассеивает полученную энергию в окружающую среду, т. е. переводит в тепловую и передает в атмосферу.

*Взаимодействие двух подвижных звеньев через динамический гаситель.* Введем в техническую систему помимо виброизолятора динамический гаситель (рис. 4.18).

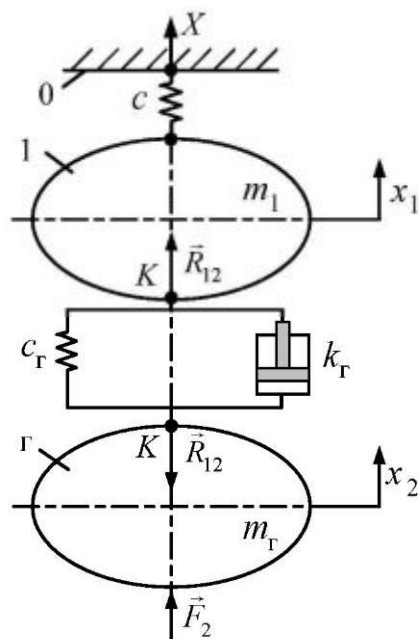


Рис. 4.18. Взаимодействие двух подвижных звеньев через динамический гаситель

Оба звена обладают собственной массой, а на звено 2 действует сила  $\vec{F}_2$ , действие сил тяжести обоих звеньев не учитываем. В этом случае звено 2 становится частью динамического гасителя.



Динамический гаситель, или антивибратор, применяется для снижения резонансных частот, возникающих в технической системе на фазе установившегося движения. Динамические гасители выполняются в виде упругого или физического маятника. Настройка динамического гасителя заключается в подборе его собственной частоты, т. е. собственная частота гасителя должна быть равна частоте тех колебаний, амплитуду которых необходимо уменьшить.

Собственную частоту динамического гасителя определяем по формуле

$$\omega_r = \sqrt{\frac{c_r}{m_r}},$$

где  $m_r$ ,  $c_r$  – масса и жесткость пружины динамического гасителя.

Запишем уравнение движения механической системы с динамическим гасителем:

$$\begin{cases} m_1 \cdot a_1 + c \cdot x_1 + c_r \cdot \Delta x + k_r \cdot \Delta \dot{x} = F_2, \\ m_r \cdot a_r - c_r \cdot \Delta x - k_r \cdot \Delta \dot{x} = 0, \end{cases}$$

где  $c$ ,  $k_r$  – соответственно, жесткость упругого и демпфирующего элементов динамического гасителя.

Кинетическую энергию технической системы при наличии динамического гасителя вычислим по выражению

$$E = \frac{m_1 \cdot V_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot V_2^2}{2},$$

Потенциальную энергию технической системы при наличии динамического гасителя рассчитаем по формуле

$$U = \frac{c \cdot \Delta x^2}{2} + \frac{c_r \cdot \Delta x^2}{2},$$

здесь

$$\Delta x = x_2 - x_r.$$

Анализ полученных выражений показывает, что наличие динамического гасителя в технической системе резко снижает вибрации и вынуждает эту систему, помимо расходования работы внешних силовых факторов на изменение кинетической энергии, часть объема работы, совершаемой внешними

силовыми факторами, переводить в потенциальную энергию упругого элемента, а часть работы этих факторов терять в демпфирующем элементе. Демпфирующий элемент рассеивает полученную энергию, т. е. переводит ее в тепло и отдает в окружающую среду. Однако в этом случае в технической системе вместо одной собственной частоты появляется две. Следовательно, динамические гасители эффективны только в узком диапазоне частот, расположенных вблизи частоты настройки гасителя.



## 5. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ВЫСШЕЙ ПАРЫ

В предыдущих главах рассматривались задачи анализа и синтеза технических систем с низшими кинематическими парами. Низшие пары обеспечивают передачу значительных силовых факторов. Однако реализация структур технических систем только низшими парами не всегда целесообразна из-за сложности кинематической схемы. В таких случаях используют механизмы с высшими кинематическими парами, которые позволяют воспроизвести практически любой закон движения при минимальном числе звеньев. Наличие высшей кинематической пары позволяет сократить число подвижных звеньев, что приводит к уменьшению габаритов механизма. Типовой механизм с высшей кинематической парой состоит из стойки и двух подвижных звеньев. Подвижные звенья, взаимодействуя со стойкой, образуют низшие кинематические пары, а между собой составляют высшую кинематическую пару.

### 5.1. ТЕОРЕМА О ВЫСШЕЙ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ПАРЕ

Поверхности звеньев, образующих высшую кинематическую пару и обеспечивающие заданные законы их относительного движения, называются *сопряженными*, или *начальными*.

На относительное движение начальных поверхностей звеньев накладывается ограничение, которое называется *теоремой о высшей кинематической паре*: в каждой точке касания начальных поверхностей, вектор скорости  $\vec{V}_P$  этой точки лежит на перпендикуляре к общей нормали  $n-n$ , проведенной через точку касания (рис. 5.1).

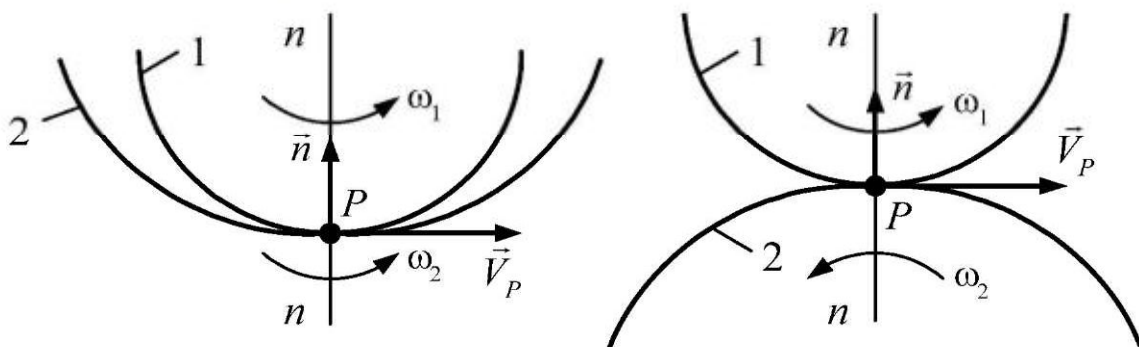


Рис. 5.1. Вектор скорости точки контакта сопряженных поверхностей

Условие основной теоремы высшей пары:  
в векторном виде

$$\vec{V}_P \cdot \vec{n} = 0,$$

в аналитическом виде

$$V_P \cdot n \cdot \cos(\vec{V}_P, \vec{n}) = 0,$$

где  $\vec{n}$  – единичный вектор, направленный по общей нормали  $n-n$ .

Теорема доказывается «от противного». Если условие теоремы не выполняется, т. е. вектор скорости точки контакта начальных поверхностей не лежит на перпендикуляре к общей нормали, тогда имеется составляющая этой скорости, направленная по общей нормали. В этом случае происходит либо отрыв одной поверхности от другой, либо внедрение этих поверхностей друг в друга, что недопустимо для существования кинематической пары как подвижного соединения. Следовательно, составляющая скорости точки контакта начальных поверхностей не действует по общей нормали, а это возможно только при условии, что вектор скорости этой точки лежит на перпендикуляре к общей нормали, т. е. условие теоремы выполняется. Теорема доказана.

## 5.2. ПОЛЮС И ЦЕНТРОИДЫ

Рассмотрим техническую систему, состоящую из двух абсолютно твердых звеньев 1 и 2, совершающих сложные движения. Свяжем со звеном 1 систему координат  $O_1X_1Y_1$ , а со звеном 2, соответственно, систему координат  $O_2X_2Y_2$  (рис. 5.2).

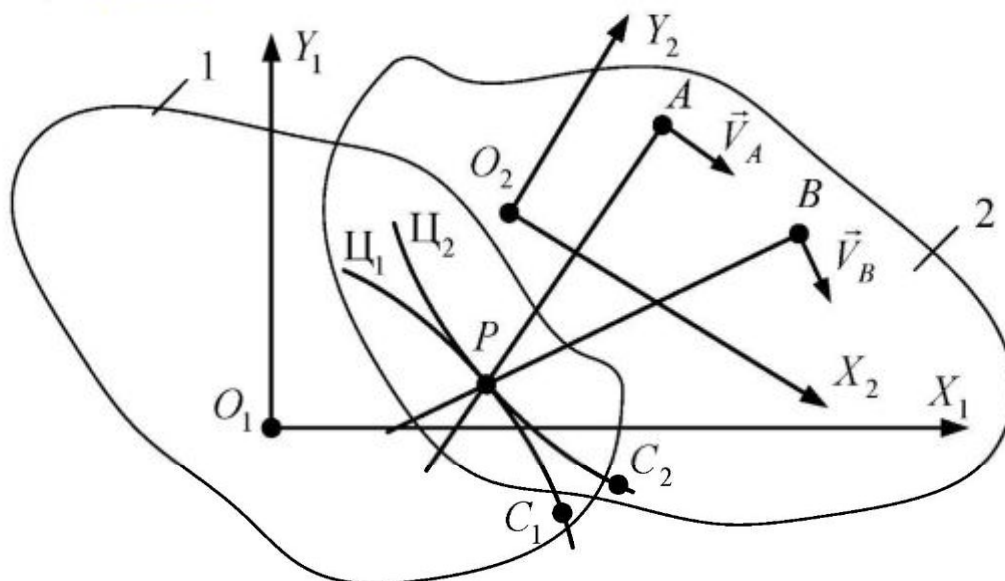


Рис. 5.2 . Схема расположения центроид в высшей кинематической паре

Сложное движение звена 1 относительно звена 2 в рассматриваемый момент времени будет эквивалентно вращению звена 2 вокруг мгновенного центра скоростей, совпадающего с полюсом сопряжения  $P$ .

*Полюс сопряжения* (зацепления) – это точка касания начальных поверхностей звеньев, образующих высшую кинематическую пару.

Мгновенное положение полюса сопряжения  $P$  определяется пересечением перпендикуляров с линиями действия векторов скоростей точек  $A$  и  $B$ , принадлежащих звену 2. В следующий момент времени точки  $A$  и  $B$  изменят свое положение, следовательно, полюс сопряжения  $P$  также переместится.



Рассматривая перемещение звеньев за некоторый промежуток времени, получим геометрическое место полюсов сопряжения. Геометрическое место полюсов сопряжения в системе координат  $O_1X_1Y_1$  называется подвижной центроидой  $\zeta_1$ , а в системе координат  $O_2X_2Y_2$  – неподвижной центроидой  $\zeta_2$  (рис. 5.2).

*Центроида* – это геометрическое место мгновенных центров скоростей являющихся полюсами сопряжения (зацепления) контактирующих начальных поверхностей звеньев, образующих высшую кинематическую пару.

В процессе движения звеньев центроиды контактируют друг с другом в мгновенных центрах скоростей, т. е. перекатываются друг по другу без скольжения. В этом случае точки центроид, лежащие в полюсе сопряжения, в следующий момент времени окажутся в положениях  $C_1$  и  $C_2$  соответственно. При этом путь, пройденный рассматриваемыми точками обеих центроид за некоторый промежуток времени, будет одинаковым, что возможно только при равенстве начальных скоростей, следовательно, скорости данных точек в полюсе сопряжения равны друг другу, а скорость относительного движения равна нулю, т. е.

$$V_{P1} = V_{P2},$$

$$V_{P12} = V_{P21} = 0.$$

Полученные выражения представляют собой основное свойство высшей кинематической пары, из которого следует: скорости точек центроид в полюсе сопряжения равны друг другу, а скорость относительного движения этих точек равна нулю.

### 5.3. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА СОПРЯЖЕНИЯ (ЗАЦЕПЛЕНИЯ)

В плоских механизмах с высшими кинематическими парами вместо сопряженных или начальных поверхностей рассматривают сопряженные или начальные профили (окружности).

*Сопряженные или начальные профили* – это кривые, получаемые в сечении сопряженных или начальных поверхностей плоскостью, проведенной параллельно плоскости их движения.

Пусть звенья 1 и 2 плоского механизма с высшей кинематической парой совершают вращательные движения вокруг параллельных осей в разных направлениях (рис. 5.3). При этом точка  $A$  принадлежит звену 1, а точка  $B$  – звену 2. Значения скоростей точек  $A$  и  $B$  выражаются:

$$V_A = l_{AO} \cdot \omega_1,$$

$$V_B = l_{BC} \cdot \omega_2.$$

Звенья 1 и 2 образуют высшую кинематическую пару, следовательно, контакт начальных профилей рассматриваемых звеньев имеет место в полю-

се сопряжения  $P$ . Полус сопряжения  $P$  является мгновенным центром скоростей в относительном движении звеньев.

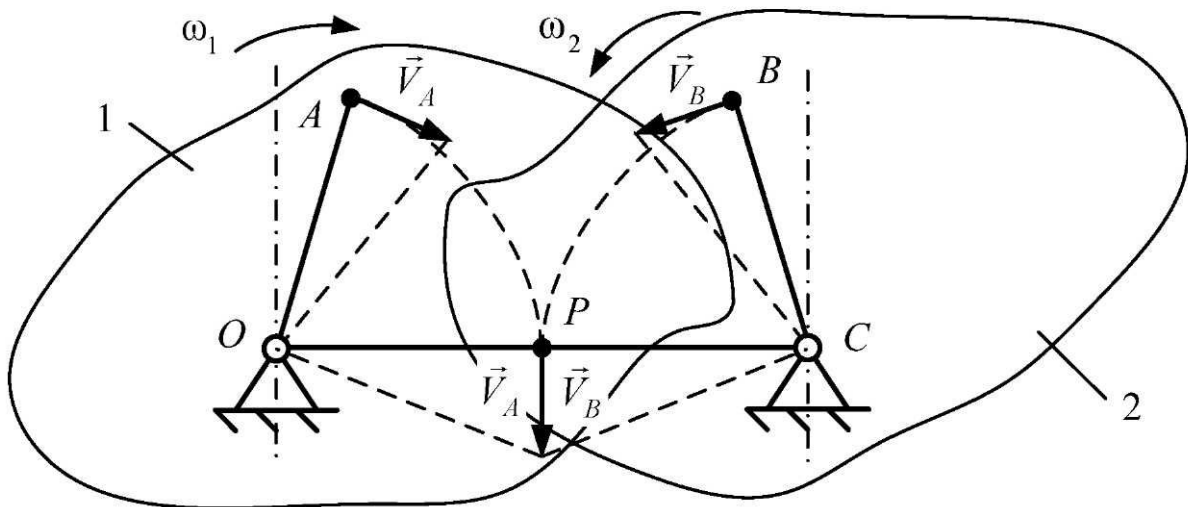


Рис. 5.3. К выводу формулы для передаточного отношения плоских механизмов с высшей кинематической парой

Из теоремы о высшей кинематической паре следует: вектора скоростей точек контакта начальных профилей, расположенные в полюсе сопряжения, действуют по прямой, являющейся перпендикуляром к общей нормали. Общая нормаль начальных поверхностей совпадает с прямой  $OC$ , следовательно, полюс  $P$  должен лежать на перпендикуляре к этой прямой. Кроме того, мгновенный центр  $P$  должен лежать на прямой  $OC$ , т. к. только в точках этой прямой вектора скоростей точек  $A$  и  $B$  имеют одинаковое направление. В полюсе сопряжения скорость относительного движения звеньев 1 и 2 равна нулю, а скорости точек  $A$  и  $B$  равны друг другу:

$$\omega_1 \cdot l_{OP} = \omega_2 \cdot l_{CP},$$

откуда следует

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{l_{CP}}{l_{OP}}.$$

Из проведенного анализа следует: общая нормаль в точке касания начальных профилей проходит через полюс сопряжения  $P$ , который делит межосевое расстояние  $OC$  на части, отношение значений которых обратно пропорционально отношению угловых скоростей звеньев.

В теории зубчатых механизмов сделанный вывод носит название *основной теоремы зацепления*, которая доказана Виллисом. Основная теорема зацепления рассматривает отношение угловых скоростей звеньев, которое называется кинематическим передаточным отношением:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2}.$$



Полученное выражение определяет основное свойство теоремы зацепления, которая имеет следующую формулировку: передаточное отношение звеньев, совершающих вращательные движения, прямо пропорционально отношению угловых скоростей и обратно пропорционально отношению расстояний от центров вращения до полюса.

## 5.4. МЕХАНИЗМЫ С ВЫСШИМИ КИНЕМАТИЧЕСКИМИ ПАРАМИ

*Механизм с высшей кинематической парой* – это механизм, структура которого содержит хотя бы одну высшую кинематическую пару.

К типовым механизмам данного вида относятся:

механизмы фрикционные ([рис. 5.4](#), [рис.5.5](#));

механизмы с гибкими звеньями ([рис. 5.6](#), [рис.5.7](#));

механизмы мальтийские ([рис. 5.8, а](#));

механизмы поводковые ([рис. 5.8, б](#));

механизмы зубчатые ([рис. 6.1](#), [рис.6.4](#), [рис.6.5](#), [рис.6.6](#));

механизмы цевочные ([рис. 6.3.](#));

механизмы кулачковые ([рис. 9.1](#)).

*Фрикционный механизм* – это механизм с высшей кинематической парой, в котором передача движения и преобразование силовых факторов осуществляется за счет сил трения или сцепления.

Фрикционные механизмы обладают рядом достоинств: простота конструкции, бесшумность работы, предохранение от перегрузок, возможность бесступенчатого изменения передаточного отношения, что подтверждается их применением практически в машинах всех видов.

Все фрикционные механизмы делятся на две группы: типовые (простые) механизмы ([рис. 5.4](#)) и вариаторы ([рис. 5.5](#)).

Схема типового фрикционного механизма содержит: стойку и два подвижных звена, которыми являются катки 1 и 2 ([рис. 5.4, а–г](#)), каток 1 и диск 2 ([рис. 5.4, д](#)) и каток 1 и плоскость 2 ([рис. 5.4, е](#)).

Простые фрикционные механизмы подразделяются на следующие группы: механизмы с параллельными осями и механизмы с пересекающимися осями. К простым фрикционным механизмам относятся цилиндрические с внешним ([рис. 5.4, а, б](#)) или внутренним касанием ([рис. 5.4, в](#)), а механизмы с пересекающимися осями являются конические ([рис. 5.4, г](#)) и лобовые ([рис. 5.4, д](#)). Лобовыми называются конические фрикционные механизмы, имеющие значение угла пересечения осей подвижных звеньев  $\delta = 90^\circ$ .

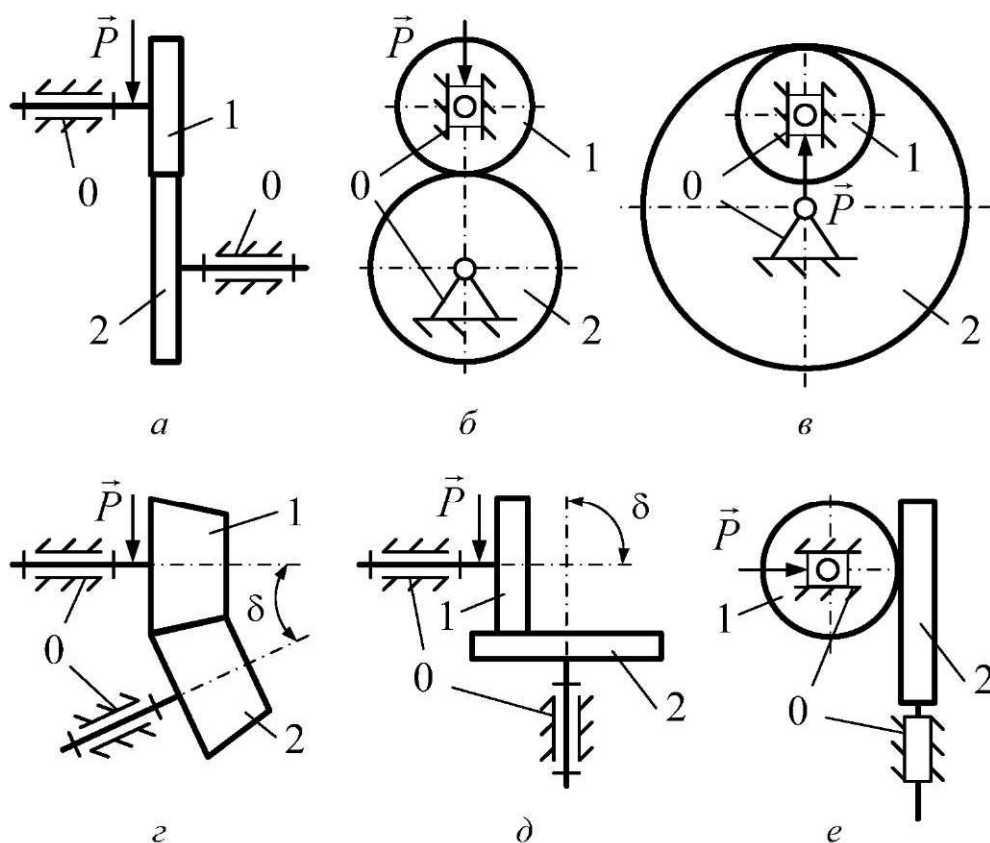


Рис. 5.4. Структурные схемы фрикционных механизмов

Во фрикционных механизмах преобразование движения и силовых факторов осуществляется путем непосредственного касания рабочих поверхностей подвижных звеньев. Однако для создания достаточной по величине силы трения необходимо наличие дополнительного силового усилия, что приводит к деформациям рабочих поверхностей звеньев, вызывая их повышенный износ. Непостоянство передаточного отношения существенно сужает область применения данных механизмов.

Фрикционные механизмы, обладающие возможностью изменения передаточного отношения в заданном диапазоне, называются вариаторами (рис. 5.5). Вариаторы применяются в машинах разного назначения, требующих плавного изменения скорости движения ведомых звеньев в требуемых пределах по заданному закону.



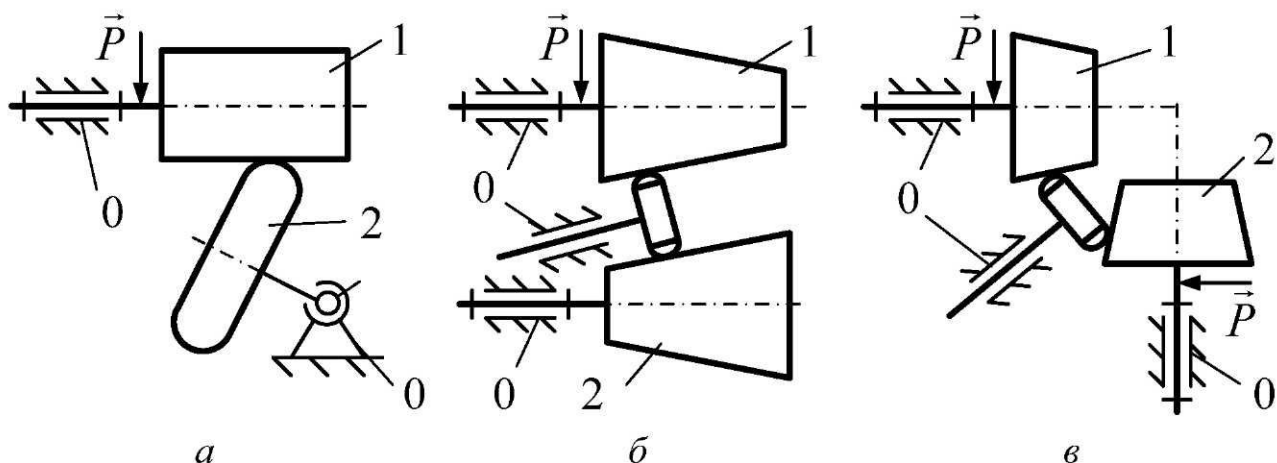


Рис. 5.5. Структурные схемы фрикционных вариаторов

Вариаторы делятся на две группы:

*вариаторы с непосредственным касанием звеньев* – это вариаторы, в которых регулирование значений передаточной функции (передаточного отношения) осуществляется за счет перемещения одного из звеньев-катков ([рис. 5.5, а](#));

*вариаторы с промежуточным звеном* – это вариаторы, в которых регулирование значений передаточной функции (передаточного отношения) осуществляется за счет перемещения промежуточного звена ([рис. 5.5, б, в](#)).

Передаточная функция (передаточное отношение) вариаторов бесступенчато изменяется в пределах от 2,5 до 5.

*Механизмы с гибкими звеньями* – это механизмы с высшими кинематическими парами, в которых передача движения осуществляется за счет наличия гибкого звена.

Схема типового механизма с гибким звеном содержит: стойку и три подвижных звена, которыми являются гибкое звено 3 и шкивы 1 и 2 ([рис. 5.6, а, б](#)) или валки 1 и 2 ([рис. 5.6, в](#)) или звездочки 1 и 2 ([рис. 5.6, г](#)). В качестве гибких звеньев выступают: ремни, шнуры, канаты, тросы проволока, ленты, цепи и др. Механизмы с гибкими звеньями обладают рядом существенных достоинств: простота конструкции, плавность работы, возможность передачи движения на большие расстояния при малом числе звеньев, что подтверждается их применением практически в машинах всех видов, а также в приборостроении. Механизмы с гибкими звеньями подразделяются на механизмы с фрикционным сцеплением – ременные ([рис. 5.6, а, б](#)), механизмы с непосредственным креплением ([рис. 5.6, в](#)) и механизмы с зацеплением – цепные ([рис. 5.6, г](#)). Ременные механизмы и механизмы с непосредственным креплением подразделяются на механизмы с параллельными осями или открытые ([рис. 5.6, а, в](#)), механизмы перекрестные и механизмы со скрещивающимися осями или полуперекрестные ([рис. 5.6, б](#)). Цепные механизмы бывают только открытыми ([рис. 5.6, г](#)).

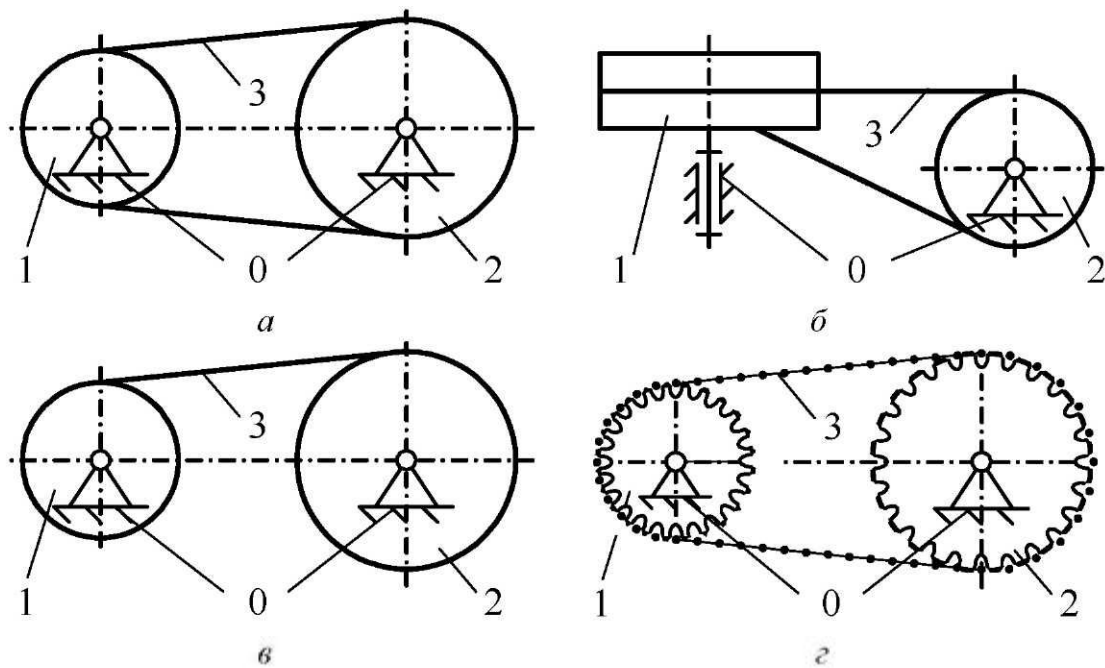


Рис. 5.6. Структурные схемы механизмов с гибкими звеньями

В механизмах с гибкими звеньями преобразование движения и силовых факторов осуществляется посредством изменения формы рабочих поверхностей гибкого звена. Наличие проскальзывания и вытягивания ремней, канатов и тросов в ременных механизмах и механизмах с непосредственным креплением, повышенный износ цепей в цепных механизмах, а также непостоянство передаточного отношения всех видов механизмов с гибкими звеньями существенно сужает область их применения. Частным случаем механизмов с гибкими звеньями являются шариковые механизмы, образованные гибким шлангом и набором шариков (рис. 5.7).

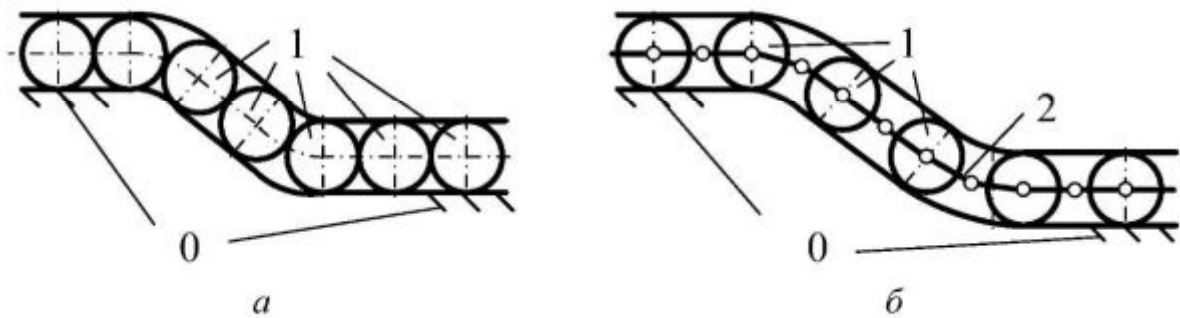


Рис. 5.7. Структурные схемы шариковых механизмов

В типовых схемах шариковых механизмов гибкий шланг является элементом стойки 0, а в качестве подвижных звеньев выступают шариками 1. Наличие гибкого шланга в шариковых механизмах обеспечивает возможность преобразования движения и силовых факторов на большие расстояния при произвольном расположении осей и минимальном числе звеньев, что обеспечивается непосредственным касанием шариков друг с другом (рис. 5.7, а). С целью исключения контакта шариков 1 между собой в механизмах данного вида приме-



няется гибкий сепаратор 2 (рис. 5.7, б), что значительно снижает износ рабочих поверхностей звеньев, повышая долговечность и ресурс работы механизма.

*Мальтийский механизм* – это механизм, содержащий кривошип, имеющий специальный выступ-палец прерывисто сцепляющийся с пазом выходного звена (рис. 5.8, а).

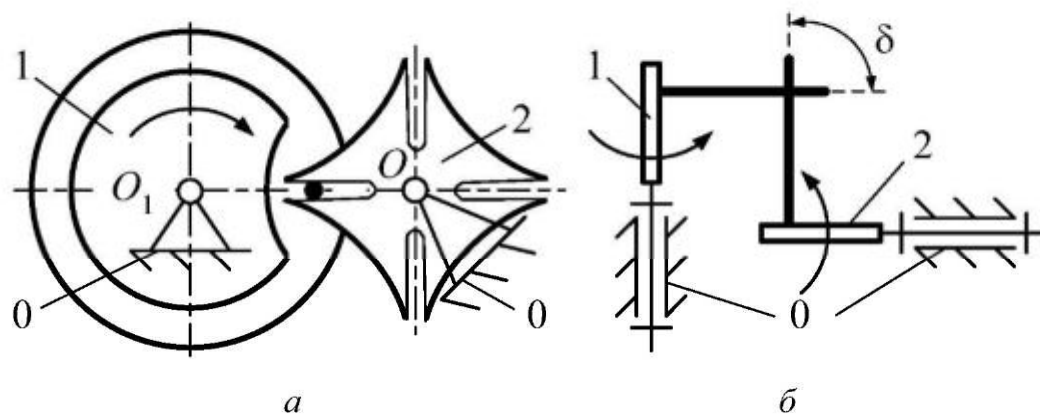


Рис. 5.8. Схемы мальтийского и поводкового механизмов

Мальтийские механизмы предназначены для преобразования вращательного движения ведущего звена в прерывистое движение выходного звена, сопровождаемое остановками или выстоями требуемой продолжительности. Одной из разновидностей мальтийских механизмов являются поводковые механизмы.

*Поводковый механизм* – это механизм, подвижные звенья которого имеют специальные цилиндрические выступы-пальцы (рис. 5.8, б).

Поводковые механизмы предназначены для передачи вращательного движения между звеньями с пересекающимися осями. Оси вращения звеньев поводковых механизмов могут пересекаться под любым углом  $\delta$ . При  $\delta = 90^\circ$  поводковые механизмы являются ортогональными.

*Ортогональный механизм* – это механизм, образованный звеньями с геометрическими осями вращения пересекающимися под прямым углом, т. е.  $\delta = 90^\circ$  (рис. 5.8, б).

Мальтийские и поводковые механизмы имеют широкое распространение в приборостроении, в изделиях точного машиностроения и являются частным случаем механизмов зацепления.

## 6. ЗУБЧАТЫЕ МЕХАНИЗМЫ

*Зубчатый механизм* – это механизм с высшей кинематической парой, в структуру которого входят звенья, снабженные специальными выступами-зубьями.

Зубчатые механизмы обладают рядом полезных свойств, обусловивших их широкое распространение практически во всех видах машин. В промышленности применяются машины, состоящие только из зубчатых механизмов. Однако наибольшее распространение зубчатые механизмы получили в качестве передаточных или преобразующих устройств, используемых в более сложных технических системах для согласования характеристик рабочей и энергетической машин.

Зубчатые механизмы предназначены для передачи вращательного движения между звеньями, а также для изменения значений угловой скорости и силовых факторов. Зубчатые механизмы, предназначенные для уменьшения угловой скорости выходного звена с одновременным повышением крутящего момента по сравнению с входными значениями этих параметров, называются *редукторами*, а зубчатые механизмы, предназначенные для увеличения угловой скорости с потерей значения крутящего момента на выходном звене, – *мультипликаторами*.

Типовой зубчатый механизм состоит из стойки и двух подвижных звеньев, которые называются зубчатыми колесами.

*Зубчатое колесо* – это звено зубчатого механизма, снабженное специальными выступами-зубьями.

В зависимости от особенностей структуры, все зубчатые механизмы подразделяются на два вида: простые и сложные.

### 6.1. ПРОСТЫЕ ЗУБЧАТЫЕ МЕХАНИЗМЫ

*Простой зубчатый механизм* – это трехзвенный механизм, состоящий из двух зубчатых колес и стойки.

В простых зубчатых механизмах зубчатые колеса образуют между собой высшие кинематические пары, а со стойкой создают низшие кинематические пары (поступательные или вращательные).

Ведущее звено простого зубчатого механизма называется *шестерня*, а ведомое звено – *зубчатое колесо*. Параметры шестерни зубчатого механизма принято обозначать с индексом 1, а параметры зубчатых колес – с индексами, соответствующими номерам их колес.

Работа простых зубчатых механизмов основана на использовании принципа рычага, т. е. преобразование движения осуществляется посредством нажатия зубьев шестерни на зубья колеса.

Простые зубчатые механизмы классифицируют:

1) по форме начальных поверхностей:

конические ([рис. 6.1](#));

глобоидные ([рис. 6.2](#));

цилиндрические ([рис. 6.4](#), [рис. 6.5.](#), [рис. 6.6](#));



- 2) по расположению звеньев в пространстве:
  - пространственные ([рис. 6.1](#), [рис.6.2](#));
  - плоские ([рис. 6.3](#), [рис. 6.4.](#), [рис. 6.5.](#), [рис. 6.6](#));
- 3) по расположению геометрических осей:
  - с параллельными геометрическими осями ([рис. 6.3](#), [рис. 6.4.](#), [рис. 6.5.](#), [рис. 6.6](#));
  - с пересекающимися геометрическими осями ([рис. 6.1](#));
  - со скрещивающимися геометрическими осями ([рис.6.2](#));
- 4) по форме профиля зуба:
  - с эвольвентным профилем;
  - с циклоидальным профилем;
  - с круговым профилем (передачи Новикова);
  - с профилем по «улиткам Паскаля»;
- 5) по форме линии зуба:
  - с прямым зубом или прямозубые;
  - с косым зубом или косозубые;
  - шеvronные;
  - с криволинейным зубом;
- 6) по форме и виду зубчатых колес:
  - с круглыми колесами ([рис. 6.4](#), [рис. 6.5.](#), [рис. 6.6](#));
  - с некруглыми колесами.

## 6.2. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ МЕХАНИЗМЫ С ВЫСШЕЙ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ПАРОЙ

*Пространственный механизм с высшей кинематической парой* – это механизм с высшей кинематической парой, звенья которого совершают движения в пересекающихся плоскостях.

К механизмам данного вида относятся:

конические ([рис. 6.1](#));

червячные ([рис. 6.2](#)).

*Конический зубчатый механизм* – это пространственный механизм с пересекающимися осями вращения зубчатых колес, которые имеют начальные конические поверхности ([рис. 6.1](#)).

Конические зубчатые механизмы применяются для преобразования движения и силовых факторов между звеньями с пересекающимися осями. Оси зубчатых колес в конических механизмах могут составлять любой угол ([рис. 6.1, а, б](#)), однако наибольшее распространение получили ортогональные конические зубчатые механизмы ([рис. 6.1, в](#)).

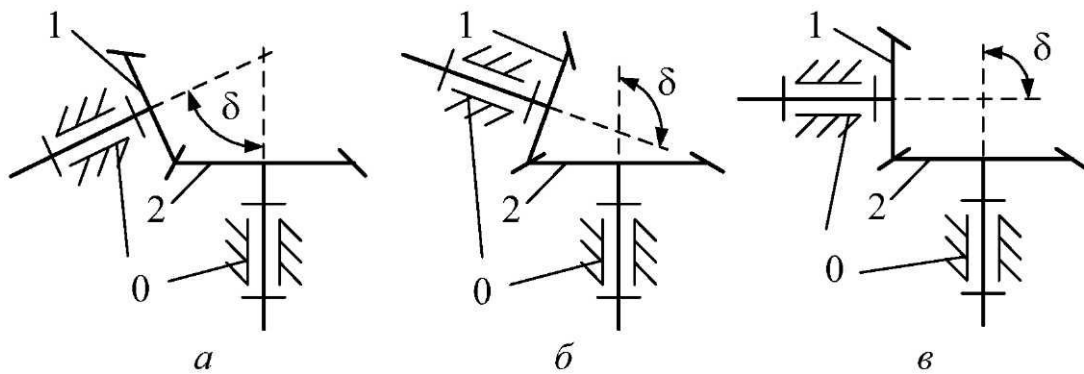


Рис. 6.1. Схемы конических механизмов

Конические зубчатые механизмы являются реверсивными, т. е. позволяют звеньям совершать вращательные движения как по ходу часовой стрелки, так и против данного направления, а также могут работать в режиме редуктора или мультипликатора, что приводит к наличию двух видов передаточных отношений: прямого и обратного.

*Прямое передаточное отношение* – это передаточное отношение механизма от входного звена к выходному звену:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1},$$

где  $z_1, z_2, r_1, r_2$  – соответственно, числа зубьев и радиусы делительных поверхностей шестерни 1 и колеса 2.

*Обратное передаточное отношение* – это передаточное отношение механизма от выходного звена к входному звену:

$$i_{21} = \frac{1}{i_{12}} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{z_1}{z_2},$$

где  $i_{12}$  – прямое передаточное отношение.

Конические зубчатые механизмы эффективны для реализации передаточных отношений до 5 и обеспечивают КПД 0,96–0,98.

*Червячный механизм* – это пространственный механизм со скрещивающимися осями вращения звеньев (рис. 6.2), одно из которых имеет рабочую поверхность, выполненную в виде винтовой линии.

Звено червячного механизма, имеющее рабочую поверхность, выполненную в виде винтовой линии, называется червяк 1, а ведомое звено – червячное колесо 2 (рис. 6.2). В червячных механизмах поверхности зубьев червячного колеса 2 огибают под определенным углом поверхности витков червяка 1 и контактируют с ними по линиям, что повышает несущую способность механизма. В большинстве случаев в качестве начальных поверхностей червяка выступают цилиндры. Подобные червячные механизмы называются цилиндрическими (рис. 6.2, а). Для червяков с цилиндрическими начальными поверхностями характерно постоянство значения угла подъема винтовой линии.



Однако применяются червячные механизмы, в которых червяк имеет начальную поверхность в виде тора или глобоида, такие червячные механизмы, соответственно, называются *торовыми* (рис. 6.2, б) или *глобоидными* (рис. 6.2, в).

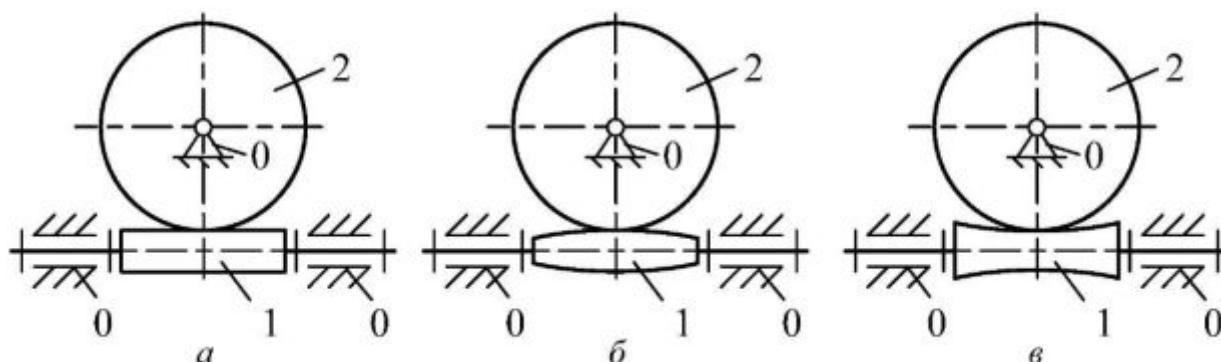


Рис. 6.2. Схемы червячных механизмов

Червячные механизмы являются реверсивными, однако в основном используются в режиме редуктора.

Передаточное отношение червячного механизма

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1},$$

где  $z_1$ ,  $z_2$  – соответственно, числа заходов червяка 1 и зубьев колеса 2.

Червячные механизмы позволяют реализовать большие передаточные числа, однако имеют сравнительно низкий КПД (0,6–0,97).

### 6.3. ПЛОСКИЕ ЗУБЧАТЫЕ МЕХАНИЗМЫ

*Плоский зубчатый механизм* – это механизм, в котором зубчатые колеса совершают движения в одной плоскости.

К механизмам данного вида относятся:

цевочные (рис. 6.3);

цилиндрические (рис. 6.5);

торцевые (рис. 6.6, а);

реечные (рис. 6.6, б).

*Цевочный механизм* – это механизм с параллельными геометрическими осями вращения звеньев, одно из которых имеет специальные цилиндрические выступы-цевки (рис. 6.3).

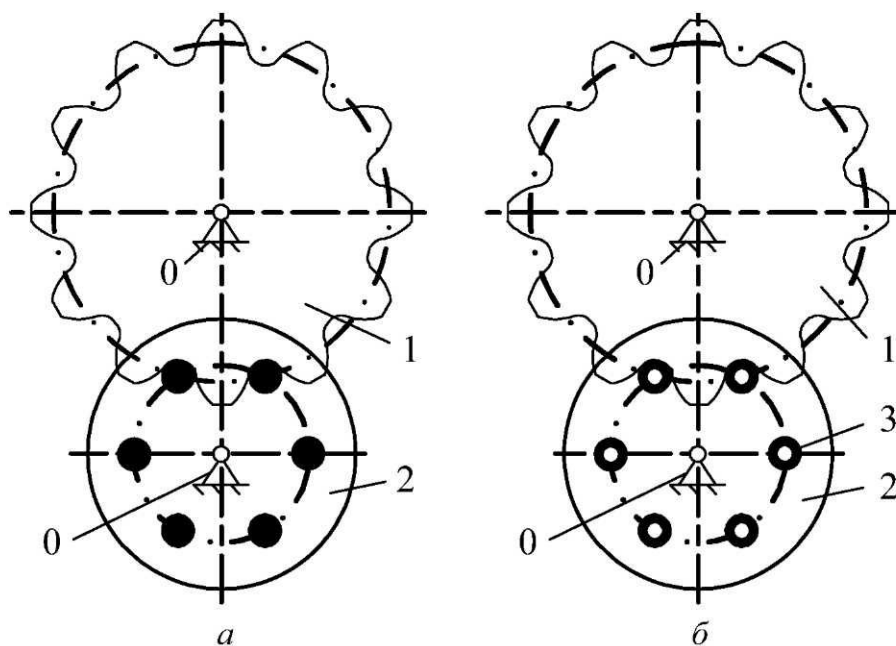


Рис. 6.3. Схемы цевочных механизмов

*Структурный анализ.* Цевочные механизмы являются представителями плоских механизмов, следовательно, определение подвижности проводится по формуле Чебышева, представленной в степенях подвижностей кинематических пар. Структура цевочных механизмов содержит: стойку 0, звездочку 1 и цевочное колесо 2. При этом звездочка 1 и цевочное колесо 2 являются подвижными звеньями, следовательно,  $n = 2$ . Подвижные звенья, взаимодействуя со стойкой, образуют две вращательные кинематические пары с подвижностью, равной единице:  $0 - 1$ ,  $2 - 0$ , а контакт подвижных звеньев друг с другом свидетельствует о существовании высшей кинематической пары с подвижностью, равной двум:  $1 - 2$ , следовательно,  $p_1 = 2$ ,  $p_2 = 1$ .

Подставив полученные данные в структурную формулу, получим

$$W = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 = 6 - 4 - 1 = 1.$$

Результат означает, что для однозначного определения взаимного расположения звеньев механизмов данного вида достаточно одной обобщенной координаты.

В цевочных механизмах преобразование движения и силовых факторов осуществляется путем непосредственного касания рабочей поверхности звездочки 1 с рабочими поверхностями цевок цевочного колеса 2 (рис. 6.3, а). Вследствие разности скоростей движения звеньев в зоне их контакта имеет место трение скольжения, что приводит к интенсивному износу этих поверхностей, а также к росту потерь, уменьшению КПД и ресурса работы цевочного механизма. Для замены в высшей кинематической паре трения скольжения на трение качения в структуре цевочного механизма цевки выполняются в виде отдельного звена 3, обладающего возможностью совершения вращательного движения вокруг своей оси. Взаимодействие цевки 3 с цевочным колесом 2 приводит к образованию кинематической пары с подвижностью, равной единице:  $3 - 2$  (рис. 6.3, б). Подвижность этой кинематической пары



не изменяет подвижность цевочного механизма и не влияет на его передающие функции, а является местной подвижностью.

*Цилиндрический зубчатый механизм* – это зубчатый механизм с параллельными геометрическими осями колес, которые имеют начальные цилиндрические поверхности.

Для простых цилиндрических зубчатых механизмов характерно наличие двух видов зацепления: внешнего и внутреннего.

*Внешнее зацепление* – это вид зацепления цилиндрических зубчатых колес, в котором геометрические центры этих колес лежат по разные стороны относительно нормали  $n - n$  к линии центров прямой  $O_1O_2$ , проведенной через полюс зацепления (рис. 6.4).

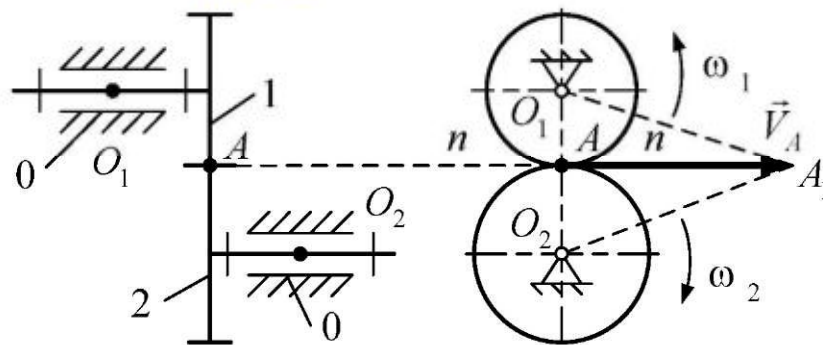


Рис. 6.4. Схема простого зубчатого механизма с внешним зацеплением

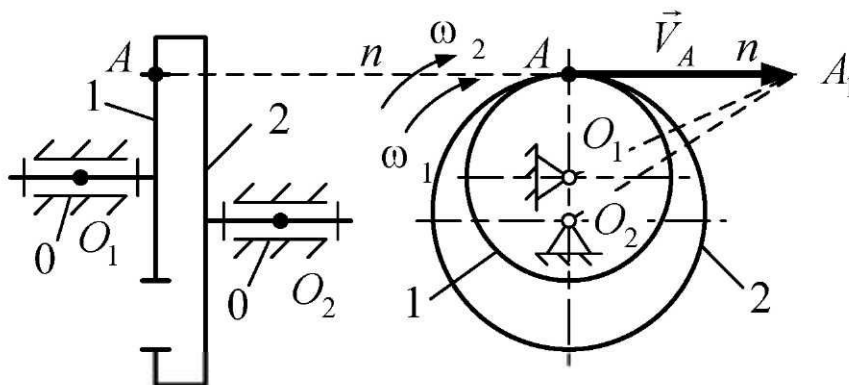


Рис. 6.5. Схема простого зубчатого механизма с внутренним зацеплением

*Внутреннее зацепление* – это вид зацепления цилиндрических зубчатых колес, в котором геометрические центры этих колес лежат по одну сторону относительно нормали  $n - n$  к линии центров прямой  $O_1O_2$ , проведенной через полюс зацепления (рис. 6.5).

*Структурный анализ.* Цилиндрические зубчатые механизмы являются представителями плоских механизмов, следовательно, определение подвижности проводится по формуле Чебышева, представленной в степенях подвижностей кинематических пар.

Независимо от вида зацепления, цилиндрические зубчатые механизмы (рис. 6.3, рис. 6.4) образованы двумя подвижными звеньями 1 и 2, следовательно,  $n = 2$ . Подвижные звенья и стойка образуют две вращательные кинематические

пары с подвижностью, равной единице:  $0 - 1, 2 - 0$ , и одну высшую кинематическую пару с подвижностью, равной двум:  $1 - 2$ , следовательно,  $p_1 = 2, p_2 = 1$ .

Подставив полученные данные в структурную формулу, имеем

$$W = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 = 6 - 4 - 1 = 1.$$

Результат означает, что для однозначного определения взаимного расположения звеньев механизмов данного вида достаточно одной обобщенной координаты.

*Кинематический анализ.* Для решения задач кинематического анализа воспользуемся характерными точками механизма, в качестве которых выбираем геометрические центры кинематических пар. Скорости остальных точек определим, используя свойства годографов скоростей. Под годографом скоростей точек звена механизма понимается прямая, проходящая через вершину вектора скорости характерной точки и мгновенный центр скоростей данного звена.

Скорость точки  $A$ , принадлежащей колесу 1 простого зубчатого механизма ([рис. 6.4](#), [рис. 6.5](#)),

$$V_A = \omega_1 \cdot \frac{d_1}{2},$$

где  $d_1$  – делительный диаметр колеса 1.

Скорость точки  $A$ , принадлежащей колесу 2 простого зубчатого механизма,

$$V_A = \omega_2 \cdot \frac{d_2}{2},$$

где  $d_2$  – делительный диаметр колеса 2.

Независимо от вида зацепления, контакт зубчатых колес происходит в полюсе зацепления, а из основной теоремы зацепления следует равенство скоростей точек сопряженных профилей:

$$\omega_1 \cdot \frac{d_1}{2} = \omega_2 \cdot \frac{d_2}{2};$$

преобразовав, получаем прямое передаточное отношение

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{d_2}{d_1} = \pm \frac{z_2}{z_1}.$$

Знак « $-$ » означает, что входное и выходное звенья цилиндрического зубчатого механизма с внешним зацеплением вращаются в разных направлениях, т. е. происходит смена направления вращения на выходном звене по сравнению с направлением вращения на входном звене ([рис. 6.4](#)). Знак « $+$ » в выражении говорит, что входное и выходное звенья цилиндрического зубчатого механизма с внутренним зацеплением вращаются в одном направлении, т. е. смены направления вращения на выходном звене, по сравнению с направлением вращения на входном звене, не происходит ([рис. 6.5](#)).



Цилиндрические зубчатые механизмы являются реверсивными и могут работать как в режиме редуктора, так и в режиме мультипликатора, что приводит к наличию двух видов передаточных отношений.

Обратное передаточное отношение

$$i_{21} = \frac{1}{i_{12}} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \pm \frac{d_1}{d_2} = \pm \frac{z_1}{z_2}.$$

где «-» и «+» – соответственно, для внешнего и внутреннего зацеплений.

Наибольшее распространение получили прямозубые цилиндрические зубчатые механизмы, т. е. механизмы, образованные зубчатыми колесами с прямой линией зубьев (рис. 6.6, а). Однако прямозубые цилиндрические зубчатые механизмы работают при небольших (меньше 3 м/с) или средних (от 3 до 15 м/с) окружных скоростях и их нагрузочная способность пропорциональна габаритным размерам.

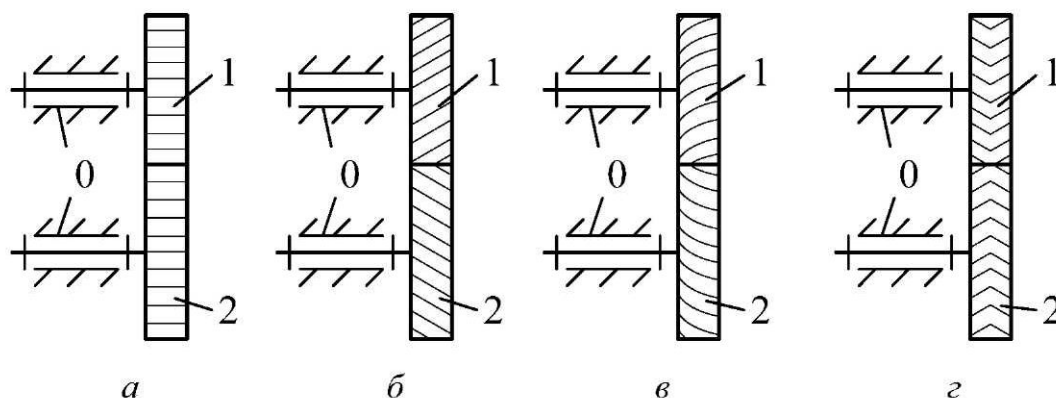


Рис. 6.6. Схема форм линии зуба простых зубчатых механизмов

Повышение нагрузочной способности при сохранении габаритов обеспечивается формированием цилиндрических зубчатых механизмов с зубчатыми колесами, имеющими косую (рис. 6.6, б) или криволинейную линию зубьев (рис. 6.6, в). Данные виды цилиндрических зубчатых механизмов работают при средних (от 3 до 15 м/с) или больших (выше 15 м/с) окружных скоростях и имеют существенных недостаток: появление в процессе работы дополнительных осевых усилий. Исключить данный недостаток позволяют шевронные цилиндрические зубчатые механизмы (рис. 6.6, г), которые обладают более высокой нагрузочной способностью, что является следствием увеличения площади контакта зубьев колес.

Одной из разновидностей цилиндрических механизмов являются механизмы с торцевым зацеплением, или торцевые механизмы (рис. 6.7, а). Структура подобных механизмов содержит стойку и два зубчатых колеса с торцевыми зубьями, имеющие выпуклые рабочие поверхности. Цилиндрические механизмы с торцевым зацеплением сочетают основные достоинства цилиндрических и конических механизмов.

Частным случаем цилиндрических механизмов являются реечные механизмы (рис. 6.7, а). Структура реечных механизмов содержит стойку и два колеса, одно из которых имеет рабочую поверхность в виде развертки начальной цилиндрической окружности и называется рейка 2. Механизмы подобного вида являются реверсивными и могут работать как в режиме редуктора, так и в режиме мультипликатора, следовательно, обладают двумя видами передаточного отношения.

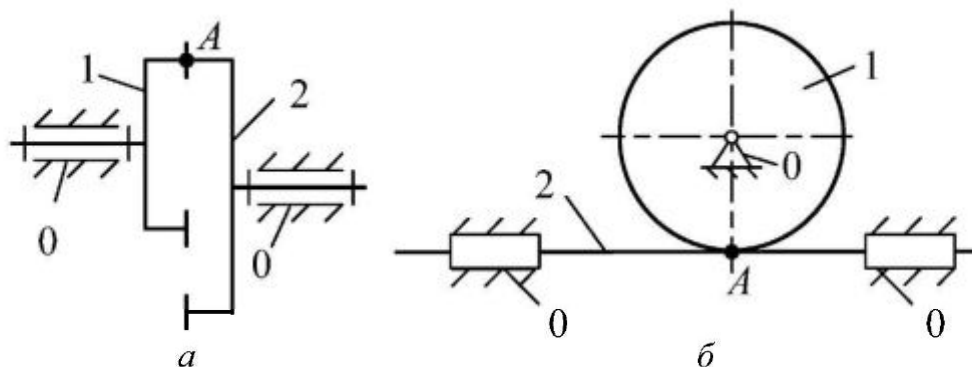


Рис. 6.7. Схемы частных случаев цилиндрических механизмов

Прямое передаточное отношение

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{V_A} = \frac{\omega_1}{\omega_1 \cdot r_1} = \frac{1}{r_1},$$

где  $V_A$  – линейная скорость точки контакта звеньев механизма;  $r_1$  – радиус делительной окружности зубчатого колеса 1.

Обратное передаточное отношение

$$i_{21} = \frac{1}{i_{12}} = r_1.$$

Реечные механизмы применяются для преобразования вращательного движения колеса 1 в поступательное движение рейки 2 или наоборот.

## 6.4. ЭВОЛЬВЕНТА ОКРУЖНОСТИ И ЕЕ СВОЙСТВА

Образующей профилей зубьев цилиндрических колес является кривая второго порядка. В силу простоты построения и наличия ряда полезных свойств наибольшее распространение получил эвольвентный профиль зубьев, т. е. профиль зубьев, выполненный по эвольвенте окружности.

*Эвольвента* – это кривая  $M_0M_i$ , геометрическим местом центров кривизны которой является другая кривая, называемая эволютой.

*Эволюта* – это часть дуги  $M_0N_i$  основной окружности, соответствующая геометрическому месту центров кривизны эвольвенты.



*Основная окружность* – это теоретическая окружность, соединяющая точки зарождения эвольвент.

Эвольвенты окружности описываются точками производящей прямой при ее перекатывании по основной окружности без скольжения (рис. 6.7). Производящая прямая является нормалью к эвольвенте в рассматриваемой произвольной точке  $M_i$  и соответствует касательной к основной окружности в точке  $N_i$ . Отрезок нормали  $M_iN_i$  производящей прямой равен радиусу кривизны эвольвенты, т. е.

$$M_iN_i = \rho = r_b \cdot \operatorname{tg}(\alpha),$$

где  $\alpha$  – угол профиля.

Положение текущей точки на эвольвенте  $M_i$  определяется радиус-вектором  $OM_i$ , углом развернутости  $\nu$  и эволютным углом  $\theta$  (рис. 6.8):

$$\hat{I} M_i = r_i = r_b / \cos(\alpha);$$

$$\alpha + \theta = \alpha + \operatorname{inv}(\alpha);$$

$$\theta = \operatorname{inv} \alpha = \operatorname{tg}(\alpha) - \alpha.$$

Ниже приведены свойства эвольвенты окружности.

1. Форма эвольвенты определяется только значением радиуса основной окружности  $r_b$ . При стремлении радиуса основной окружности к бесконечности ( $r_b \rightarrow \infty$ ) эвольвента переходит в прямую линию.

2. Эвольвента имеет две ветви и точку возврата  $M_0$ , лежащую на основной окружности. При перекатывании производящей прямой по основной окружности в направлении хода часовой стрелки получаем положительную ветвь  $\mathcal{E}^+$  эвольвенты, а при перекатывании производящей прямой по основной окружности в противоположном направлении – отрицательную ветвь  $\mathcal{E}^-$ . Эвольвента не имеет точек внутри основной окружности (рис. 6.8).

3. Все эвольвенты одной основной окружности являются эквидистантами друг к другу.

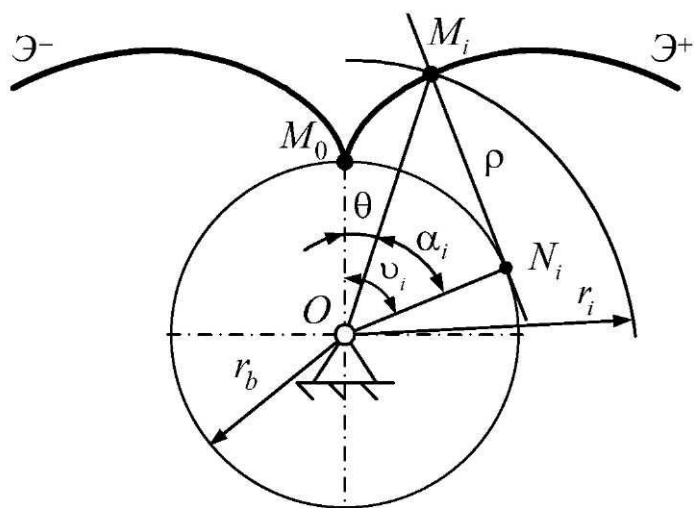


Рис. 6.8. Схема расположения ветвей эвольвенты основной окружности

4. Точки, связанные с производящей прямой  $M_i N_i$ , но не лежащие на этой прямой и расположенные выше точки  $M_i$ , описывают укороченную эвольвенту, а расположенные ниже точки  $N_i$  описывают удлиненную эвольвенту.

## 6.5. ЭВОЛЬВЕНТНОЕ ЗАЦЕПЛЕНИЕ И ЕГО СВОЙСТВА

Контактирующие профили зубьев колес, выполненные по эвольвентам окружностей, образуют эвольвентное зацепление.

Основными геометрическими параметрами эвольвентного зубчатого зацепления являются межосевое расстояние и угол зацепления (рис. 6.9).

Эвольвентное зацепление имеет два вида межосевого расстояния: начальное:

$$a_w = \frac{d_{w1} + d_{w2}}{2};$$

делительное:

$$a = \frac{d_1 + d_2}{2}.$$

где  $d_{w1}$ ,  $d_{w2}$ ,  $d_1$ ,  $d_2$  – соответственно, диаметры начальных и делительных окружностей шестерни и колеса.

Профили зубьев, образующих эвольвентное зацепление, контактируя друг с другом, образуют угол, который называется *угол зацепления*. Определение значения угла зацепления осуществляется посредством расчета инволюты этого угла.

Инволюта угла зацепления:

$$\text{inv}(\alpha_w) = \frac{2 \cdot x_\Sigma \cdot \text{tg}(\alpha)}{z_1 + z_2} + \text{inv}(\alpha),$$

где  $x_\Sigma$  – суммарный коэффициент относительного смещения;  $\alpha$  – угол профиля зубьев.



При равенстве нулю коэффициентов относительного смещения обоих зубчатых колес начальное и делительное межосевые расстояния эвольвентного зацепления равны, начальная и делительная поверхности каждого колеса совпадают, а угол зацепления равен углу профиля.

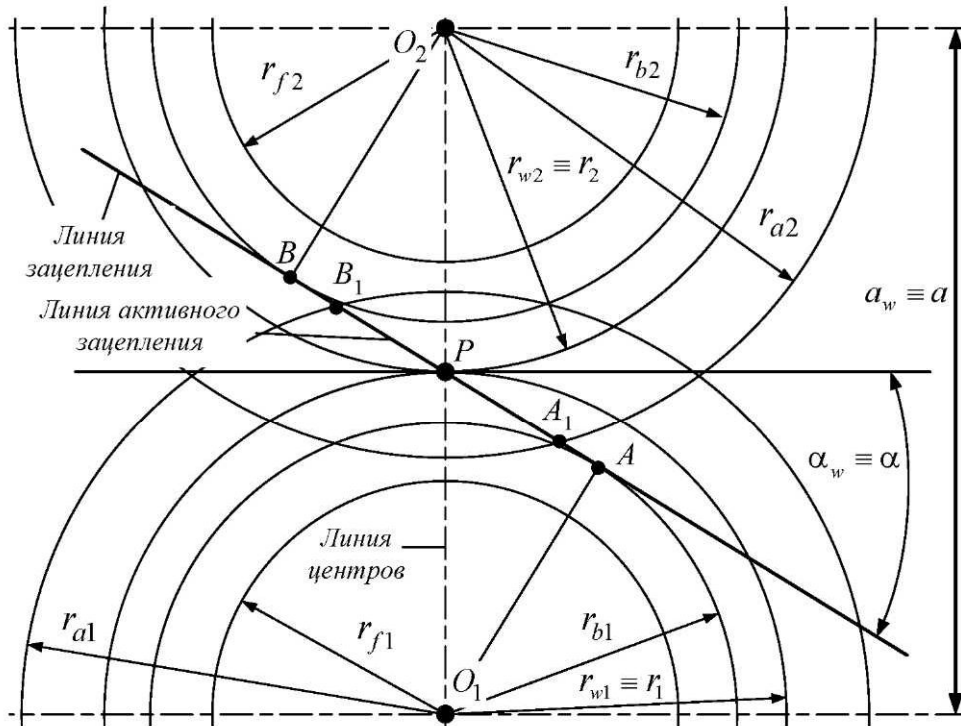


Рис. 6.9. Геометрические параметры эвольвентного зубчатого зацепления

Ниже приведены свойства эвольвентного зацепления.

1. Передаточное отношение эвольвентного зацепления определяется только отношением величин радиусов основных окружностей и является величиной постоянной:

$$i'_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{b2} \cdot \cos(\alpha_w)}{r_{b1} \cdot \cos(\alpha_w)} = \frac{r_{b2}}{r_{b1}} = \text{const.}$$

где  $r_{b2}, r_{b1}$  – радиусы основных окружностей колес.

2. При изменении межосевого расстояния в эвольвентном зацеплении его передаточное отношение не изменяется:

$$i'_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{b2} \cos(\alpha'_w)}{r_{b1} \cos(\alpha'_w)} = \frac{r_{b2}}{r_{b1}} = i_{12}.$$

3. За пределами линии активного зацепления  $A_1B_1$  (рис. 6.9) ветви эвольвент не имеют общей нормали, следовательно, профили зубьев, выполненные по этим кривым, будут пересекаться. Пересечение профилей является причиной возникновения интерференции эвольвент, что приводит к заклиниванию контактирующих профилей зубьев колес.

## 6.6. ЭВОЛЬВЕНТНЫЕ ЗУБЧАТЫЕ КОЛЕСА И ИХ ПАРАМЕТРЫ

*Эвольвентное зубчатое колесо* – это звено зубчатого механизма, снабженное системой зубьев, профили которых выполнены по эвольвентам окружности.

Геометрия эвольвентного зубчатого колеса характеризуется геометрическими параметрами. К основным геометрическим параметрам эвольвентного зубчатого колеса относятся: модуль  $m$ , шаг  $p$ , угол профиля  $\alpha$ , число зубьев  $z$  и коэффициент относительного смещения  $x$  (рис. 6.10).

Модуль зацепления соответствует линейной величине, в  $\pi$  раз меньшей окружного шага, или отношению шага по любой концентрической окружности зубчатого колеса к числу  $\pi$ . На колесе можно провести бесчисленное множество окружностей, на каждой из которых будет иметься свой модуль. В зависимости от вида окружности, по которой определяется модуль, различают несколько основных видов модулей: делительный, основной, начальный. Для косозубых колес дополнительно различают: нормальный, торцевой и осевой модули. Для ограничения числа модулей ГОСТом установлен стандартный ряд его значений, которые определяются по делительной окружности.

*Модуль* – это число миллиметров диаметра делительной окружности зубчатого колеса, приходящееся на один зуб.

*Делительная окружность* – это теоретическая окружность зубчатого колеса, на которой модуль и шаг принимают стандартные значения (рис. 6.10).

Диаметр делительной окружности, мм,

$$d = z \cdot m.$$

При равенстве коэффициента относительного смещения делительная окружность совпадает с начальной окружностью.

*Начальная окружность* – это теоретическая окружность зубчатого колеса, принадлежащая его начальной поверхности.

Диаметр начальной окружности, мм,

$$d_w = d \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\alpha_w)},$$

где  $\alpha$  – угол профиля;  $\alpha_w$  – угол зацепления.

Делительная окружность делит зуб на головку и ножку (см. рис. 6.6).

*Головка зуба* – это часть зуба, расположенная между делительной окружностью зубчатого колеса и его окружностью вершин.

*Ножка зуба* – это часть зуба, расположенная между делительной окружностью зубчатого колеса и его окружностью впадин.

Сумма высот головки  $h_a$  и ножки  $h_f$  соответствует высоте зубьев  $h$ :

$$h = h_a + h_f.$$

Высота зубьев, мм,



$$h = \frac{d_a - d_f}{2},$$

где  $d_a, d_f$  – соответственно, диаметры окружностей вершин и впадин, мм.

Окружность вершин – это теоретическая окружность зубчатого колеса, соединяющая вершины его зубьев (рис. 6.10).

Диаметр окружности вершин, мм,

$$d_a = d + 2m(h_a^* + x - \Delta y),$$

где  $x$  – коэффициент относительного смещения;  $h_a^*$  – коэффициент высоты головки зуба;  $\Delta y$  – коэффициент уравнительного смещения:

$$\Delta y = x_{\Sigma} - \frac{a_w - a}{m},$$

здесь  $a_w, a$  – начальное и делительное межосевые расстояния.

Окружность впадин – это теоретическая окружность зубчатого колеса, соединяющая все его впадины (рис. 6.10).

Диаметр окружности впадин, мм,

$$d_f = d + 2m(x - h_f^*),$$

где  $h_f^*$  – коэффициент высоты ножки зуба.

Окружной шаг, или шаг  $p$  – это расстояние по дуге делительной окружности между одноименными точками профилей соседних зубьев.

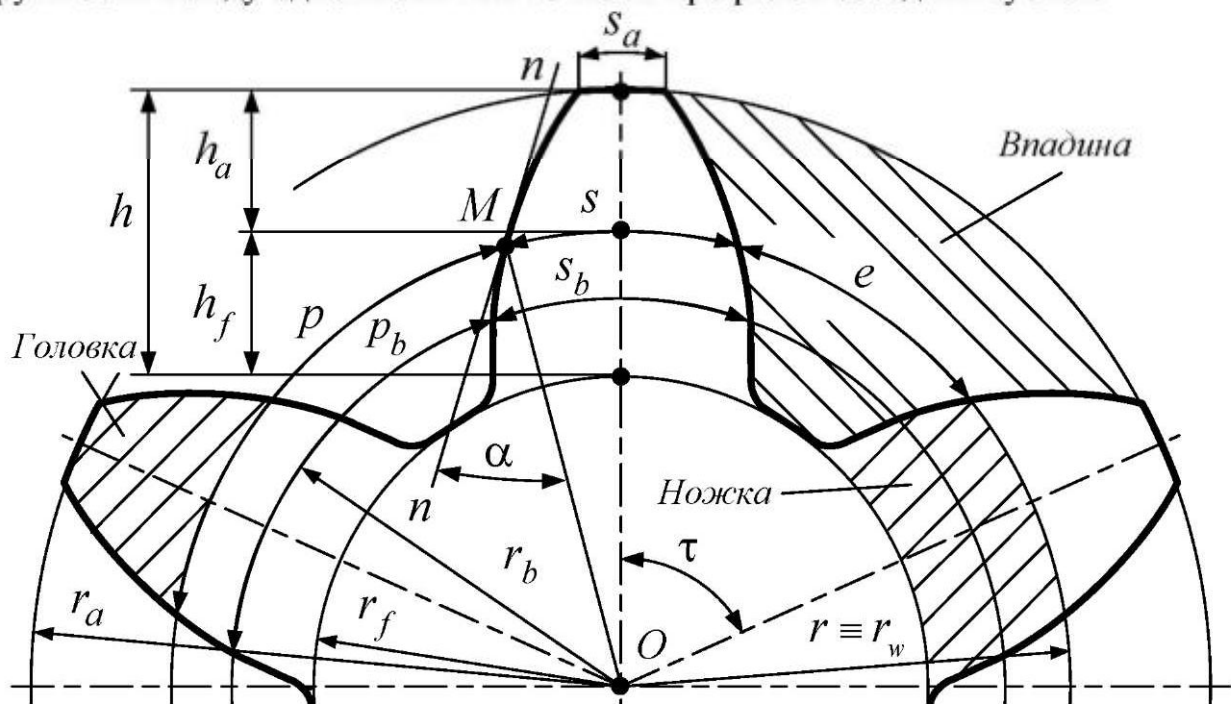


Рис. 6.10. Геометрические параметры эвольвентного зубчатого колеса

Окружной шаг по делительной окружности, мм,

$$p = m \cdot \pi.$$

Помимо окружного шага дополнительно различают ([рис. 6.10](#)):

*угловой шаг* – это центральный угол, охватывающий дугу делительной окружности, соответствующий окружному шагу:

$$\tau = \frac{360}{z},$$

*шаг по основной окружности* – это расстояние по дуге основной окружности между одноименными точками профилей соседних зубьев:

$$p_b = p \cdot \cos(\alpha).$$

Диаметр основной окружности

$$d_b = d \cdot \cos(\alpha).$$

Окружной шаг зубчатого колеса по делительной окружности делится на толщину зуба  $s$  по делительной окружности и ширину впадины  $e$  по делительной окружности:

$$p = s + e.$$

*Толщина зуба  $s$  по делительной окружности* – это расстояние по дуге делительной окружности между разноименными точками профилей одного зуба ([рис. 6.10](#)):

$$s = 2 \cdot m \left( \frac{\pi}{4} + x \cdot (\operatorname{tg} \alpha) \right).$$

*Ширина впадины  $e$  по делительной окружности* – это расстояние по дуге делительной окружности между разноименными точками профилей соседних зубьев ([рис. 6.10](#)):

$$e = p - s.$$

В стандартном эвольвентном зубчатом зацеплении при  $x = 0$  ширина впадины и толщина зуба равны друг другу, т. е.

$$s = e = \pi \frac{m}{2}.$$

Зуб эвольвентного зубчатого колеса можно рассматривать как консольную балку переменного сечения. В зависимости от вида окружности, по которой измеряется толщина зуба, дополнительно различают несколько видов данного параметра ([рис. 6.10](#)).

*Толщина зуба  $s_b$  по основной окружности* – это расстояние по дуге основной окружности между разноименными точками профилей одного зуба.

*Толщина зуба  $s_a$  по окружности вершин* – это расстояние по дуге окружности вершин между разноименными точками профилей одного зуба:



$$s_a = m \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\alpha_a)} \left( \frac{\pi}{2} + \Delta - z(\operatorname{inv}(\alpha_a) - \operatorname{inv}(\alpha)) \right),$$

где  $\Delta$  – коэффициент изменения толщины зуба;  $\alpha_a$  – угол профиля на окружности вершин.

Коэффициент изменения толщины зуба

$$\Delta = 2x \operatorname{tg}(\alpha).$$

Угол профиля  $\alpha$  – это острый угол между касательной  $t-t$  к профилю зуба в точке, лежащей на делительной окружности зубчатого колеса и радиус-вектором, проведенным в данную точку из его геометрического центра (рис. 6.10).

Угол профиля на окружности вершин

$$\alpha_a = \arccos\left(\frac{d_b}{d_a}\right).$$

Значения угла профиля стандартизованы. Наибольшее распространение получил угол профиля  $\alpha = 20^\circ$ . В то же время применяются зубчатые колеса с углами профиля, значения которых меньше или больше  $20^\circ$ .

## 6.7. МЕТОДЫ ПОЛУЧЕНИЯ ФОРМООБРАЗУЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРОФИЛЕЙ ЗУБЬЕВ

В основу существующих вариантов получения формообразующих поверхностей зубьев эвольвентных колес положены два метода: метод копирования и метод огибания.

Сущность метода копирования заключается в следующем: рабочие кромки режущего инструмента по форме образующей кривой соответствуют профилю впадин зубчатого колеса. Процесс формирования профилей зубьев колеса сопровождается последовательной обработкой впадин, что свидетельствует о малой точности и низкой производительности данного метода. К вариантам получения формообразующих кривых зубчатых колес по методу копирования относятся:

*Нарезание зубчатого колеса профилированной дисковой или пальцевой фрезой.* При этом методе нарезание производится в следующем порядке: прорезается впадина первого зуба, затем заготовка с помощью делительного устройства (делительной головки) поворачивается на требуемый угловой шаг и прорезается следующая впадина. Операции повторяются до тех пор, пока не будут прорезаны все впадины. Данный способ обладает низкой производительностью, невысокими точностью и качеством обрабатываемых поверхностей.

*Отливка зубчатого колеса в форму.* При данном методе внутренняя поверхность литейной формы с наружной поверхностью зубчатого колеса образуют конгруэнтную пару. Метод обладает высокой производительно-

стью и точностью, однако получение высокой прочности и твердости поверхности зубьев весьма затруднено.

В основу *метода огибания* положено свойство сопряженных профилей. Известно, что сопряженные профили зубчатых колес являются взаимноогibaющими кривыми. Метод подразумевает, что режущий инструмент и заготовка за счет кинематической цепи оборудования выполняют определенные движения, которые имитируют зубчатое зацепление. Это позволяет обрабатывать все впадины колеса практически одновременно, что позволяет значительно сократить время формирования профилей зубьев колеса.

К вариантам получения формообразующих кривых зубчатых колес по методу огибания относятся:

*Обработка зубчатых колес на зубофрезерных или зубодолбежных станках.* Метод обладает достаточно высокой производительностью, точностью изготовления, чистота обработки поверхностей зубчатых колес средняя. Возможно изготовление колес из нетвердых материалов.

*Накатка зубьев.* Метод обеспечивает высокую производительность и хорошую чистоту обработки поверхностей. Применяется для изготовления колес из пластичных материалов на этапах черновой обработки.

*Обработка зубчатых колес на зубошлифовальных станках.* Метод применяется как окончательная операция после зубонарезания или накатки зубьев и термической обработки. Обеспечивает высокую точность и чистоту обработки поверхностей. Применяется для изготовления колес из материалов с высокой прочностью.

## **6.8. ИСХОДНЫЙ КОНТУР И ИСХОДНЫЙ ПРОИЗВОДЯЩИЙ КОНТУР**

Для сокращения номенклатуры режущего инструмента ГОСТ устанавливает нормативный ряд модулей, определяющих соотношения между параметрами элементов зуба, которые определяются: для зубчатых колес геометрическими параметрами *исходного контура*, а для режущего инструмента геометрическими параметрами *исходного производящего контура*.

Исходный контур и исходный производящий контур образуют между собой конгруэнтную пару ([рис. 6.11](#)), т. е. один контур заполняет другой контур без зазора. Однако с целью исключения заклинивания зубьев одного колеса во впадинах другого в зоне прямой вершин зубьев исходного контура предусматривается наличие радиального зазора.



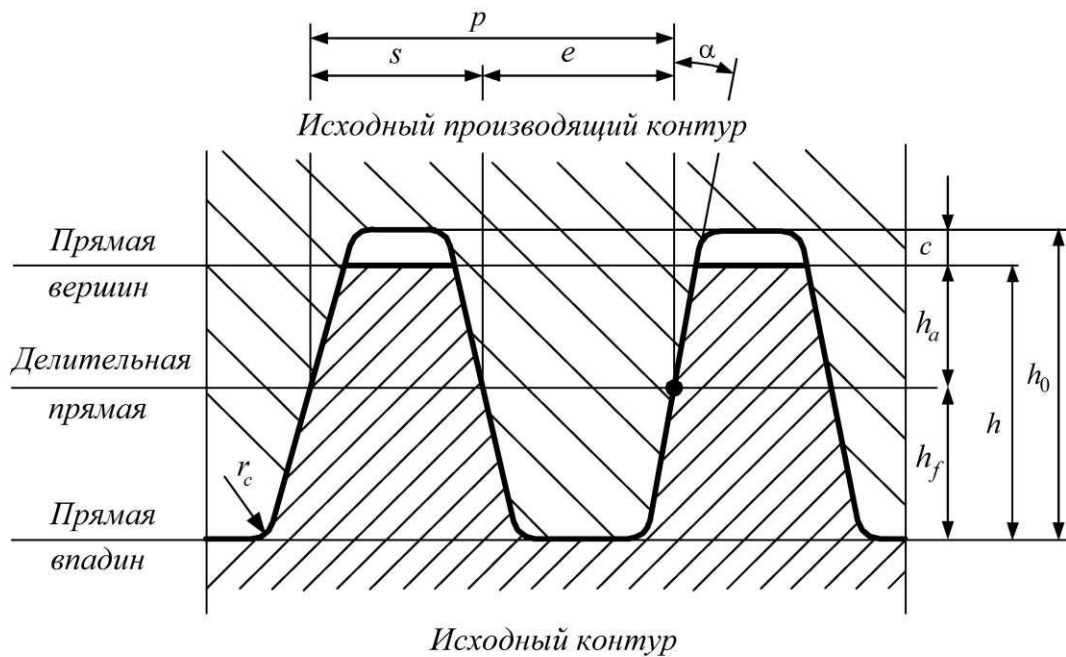


Рис. 6.11. Схема конгруэнтной пары

Высота исходного производящего контура

$$h_0 = h_0^* \cdot m,$$

где  $h_0^*$  – коэффициент высоты исходного производящего контура.

Высота исходного контура

$$h = h_0 - c,$$

здесь  $c$  – радиальный зазор:

$$c = c^* \cdot m,$$

здесь  $c^*$  – коэффициент радиального зазора.

Высота исходного контура с учетом коэффициента радиального зазора

$$h = m(h_0^* - c^*).$$

Высота исходного контура раскладывается на высоты головки и ножки:

$$h = h_a^* + h_f^*.$$

Высота головки зуба

$$h_a = h_a^* \cdot m,$$

где  $h_a^*$  – коэффициент высоты головки зуба.

Высота ножки зуба

$$h_f = h_f^* \cdot m,$$

где  $h_f^*$  – коэффициент высоты ножки зуба.

Согласно ГОСТ 13755-81, при угле профиля  $\alpha = 20^\circ$  и величине коэффициента относительного смещения  $x = 0$  значения коэффициентов и параметров исходного производящего контура должны быть следующими:

коэффициент высоты исходного производящего контура	$h_0^* = 2,5;$
коэффициент радиального зазора	$c^* = 0,25;$
коэффициент высоты исходного контура	$h^* = 2,25;$
коэффициент высоты головки зуба	$h_a^* = 1;$
коэффициент высоты ножки зуба	$h_f^* = 1,25;$
радиус сопряжения	$r_c = 0,384 \cdot m.$

## 6.9. ВИДЫ ЗУБЧАТЫХ КОЛЕС

В зависимости от расположения исходного производящего контура относительно исходного контура заготовки колеса, различают три варианта настройки системы «станок–заготовка».

Станочная начальная прямая СНП является касательной к делительной окружности колеса, а делительная прямая ДП режущего инструмента совпадает с этой прямой ([рис. 6.12, а](#)). Настройка системы «станок–заготовка» соответствует изготовлению *нулевых колес* или *колес без смещения* ( $x = 0$ ). При этом делительная и начальная окружности совпадают, а толщина зуба по делительной окружности  $s$  равна ширине впадины  $e$ , т. е.

$$s = e.$$

Станочная начальная прямая СНП является касательной к делительной окружности колеса, а делительная прямая ДП режущего инструмента смещена относительно этой прямой на величину  $x \cdot m$  в положительном направлении оси  $X$  ([рис. 6.12, б](#)). Настройка системы «станок–заготовка» соответствует изготовлению *положительных колес* или *колес с положительным смещением* ( $x > 0$ ). При этом начальная окружность смещается таким образом, чтобы делительная прямая режущего инструмента являлась бы касательной к этой окружности, а толщина зуба по делительной окружности  $s$  становится больше ширины впадины  $e$ , т. е.

$$s > e.$$



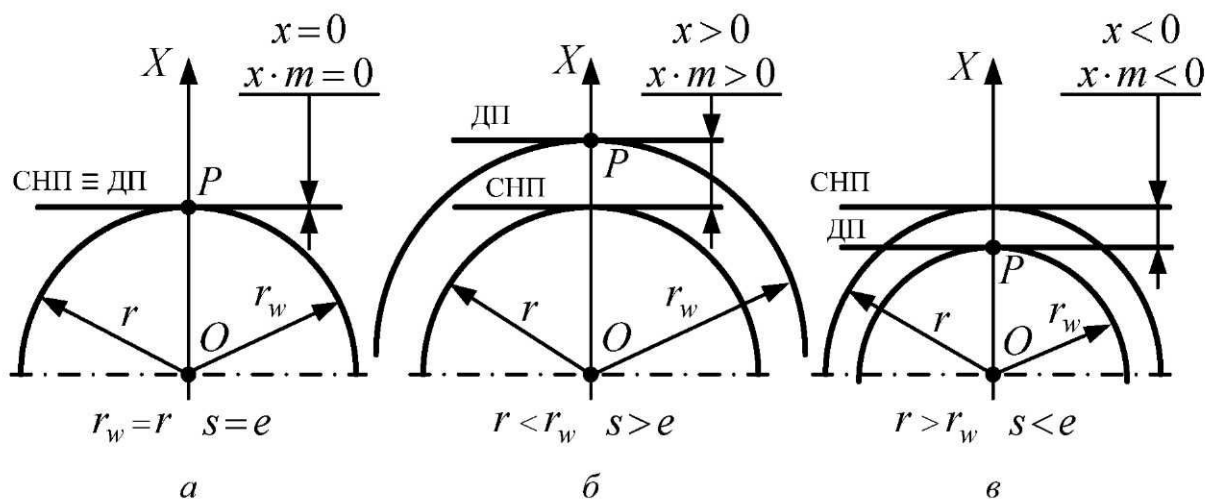


Рис. 6.12. Варианты настройки системы «станок-заготовка»

Станочная начальная прямая СНП является касательной к делительной окружности колеса, а делительная прямая ДП режущего инструмента смещена относительно этой прямой на величину  $x \cdot m$  в отрицательном направлении оси  $X$  (рис. 6.12, в). Настройка системы «станок-заготовка» соответствует изготовлению отрицательных колес или колес с отрицательным смещением ( $x < 0$ ). При этом начальная окружность смещается таким образом, чтобы делительная прямая режущего инструмента являлась касательной к этой окружности, а толщина зуба по делительной окружности  $s$  была меньше ширины впадины  $e$ , т. е.

$$s < e.$$

При нарезании зубчатых колес со смещением профилеобразующая кривая зуба изменяется и становится отличной от эвольвенты, т. к. для ее образования используются участки разных эвольвент.

## 6.10. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ЗУБЧАТЫХ КОЛЕС

Одним из основных условий работоспособности эвольвентных зубчатых механизмов является отсутствие интерференции профилей зубьев. Сущность явления интерференции заключается в следующем: теоретическая часть пространства зацепления оказывается одновременно занятой профилями контактирующих зубьев колес, составляющих эвольвентное зацепление. Интерференция профилей приводит к заклиниванию зубьев одного колеса во впадинах другого. Для исключения интерференции в эвольвентном зацеплении точки касания профилей зубьев колес должны всегда находиться на линии зацепления, что обеспечивается при угле профиля  $\alpha = 20^\circ$  числом зубьев колес больше 17.

При нарезании эвольвентных зубчатых колес с числами зубьев меньше 17 имеет место интерференция части профиля зуба колеса и профилей зубьев режущего инструмента. В этом случае режущие кромки инструмента срезают часть формообразующей кривой профилей зубьев колеса.

При положительных значениях коэффициента относительного смещения имеет место интерференция профилей зубьев режущего инструмента и части эвольвентного профиля, принадлежащего головке зуба колеса, что приводит к срезу этой части профиля. В этом случае имеет место заострение зуба колеса. В результате делительная окружность не изменяет своего размера, профиль зуба увеличивает радиус кривизны, радиус окружности впадин и толщина зуба по делительной окружности увеличиваются, радиус окружности вершин и толщина зуба по этой окружности и высота зуба уменьшаются (рис. 6.13, а). Изменение профилей зубьев колес приводит к увеличению нагрузочной способности механизма. Заострение головок зубьев зубчатых колес является нежелательным, т. к. это приводит к снижению кинематической точности механизма и вызывает увеличение склонности зубьев к скалыванию.

Зуб зубчатого колеса считается незаостренным, а зубчатый механизм – охраняющим работоспособность при выполнении следующего условия:

$$s_a \geq [s_a],$$

где  $[s_a]$  – допускаемое значение толщины зуба по окружности вершин  $s_a$ :

для силовых механизмов  $[s_a] = 0,4 m$ ,

для кинематических механизмов  $[s_a] = 0,25 m$ .



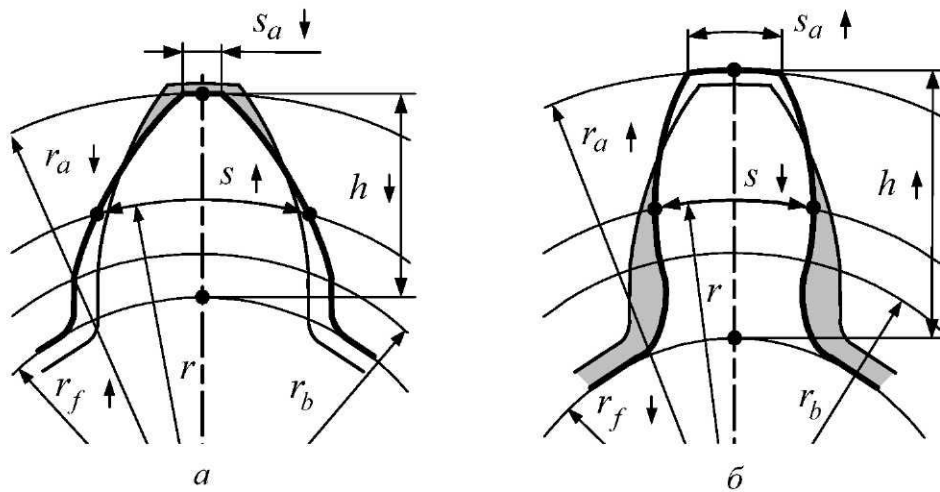


Рис. 6.13. Изменение параметров зубьев колес со смещением

При отрицательных значениях коэффициента относительного смещения относительного, имеет место интерференция профилей зубьев режущего инструмента и части эвольвентного профиля, принадлежащего ножке зуба колеса, что приводит к срезу этой части профиля. В этом случае имеет место подрезание части профиля зуба колеса в его основании в области переходной кривой. В результате делительная окружность не изменяет своего размера, профиль зуба уменьшает радиус кривизны, радиус окружности впадин и толщина зуба по делительной окружности уменьшаются, радиус окружности вершин и толщина зуба по этой окружности и высота зуба увеличиваются (рис. 6.13, б). Изменение профилей зубьев колес приводит к увеличению кинематической точности механизма. Подрезание ножек зубьев зубчатых колес является нежелательным, т. к. это ослабляет ножку зуба колеса, что приводит к уменьшению нагрузочной способности механизма. Зуб зубчатого колеса считается не подрезанным, а зубчатый механизм – сохраняющим работоспособность при выполнении следующего условия:

$$x \geq \left( h_a^* - \frac{z}{2} \sin^2 \alpha \right).$$

Минимальное значение коэффициента относительного смещения, при котором обеспечивается отсутствие подреза ножек и заострение головок зубьев зубчатых колес, определяется по выражению

$$x_{\min} = \frac{17 - z}{17}.$$

В некоторых случаях с целью обеспечения требуемого сочетания качественных показателей зубчатого механизма сознательно идут на введение смещения. При этом положительные колеса используются в силовых механизмах, а отрицательные применяются в кинематических механизмах.

## 6.11. БЛОКИРУЮЩИЙ КОНТУР

Процесс определения геометрических параметров эвольвентных зубчатых колес с учетом значений коэффициентов относительного смещения называется *корригированием* зубчатых колес. Для выбора значений коэффициентов относительного смещения, удовлетворяющих условиям отсутствия заострения головок и подреза ножек зубьев зубчатых колес, используются блокирующие контура.

*Блокирующий контур* – это область сочетания коэффициентов относительного смещения пары зубчатых колес, удовлетворяющих ограничениям по порезу и заострению профилей зубьев, обеспечивающая оптимальное сочетание качественных показателей (рис. 6.14).

Границы блокирующего контура (рис. 6.14) отсекают те значения коэффициентов относительного смещения, которые не удовлетворяют заданным условиям. Значения, коэффициентов смещения, расположенные внутри блокирующего контура, являются допустимыми, и каждой паре коэффициентов смещения соответствует определенное сочетание качественных показателей. Для выбора коэффициентов смещения на блокирующий контур наносятся изолинии качественных показателей, с использованием которых внутри контура выбирается точка, соответствующая сочетанию значений коэффициентов смещения пары зубчатых колес, обеспечивающих оптимальное сочетание качественных показателей зубчатого механизма.

Блокирующий контур (рис. 6.14) образуется взаимодействием следующих ограничивающих линий:

- 1 – линия значений коэффициента торцевого перекрытия  $\varepsilon_{\alpha}$ ;
- 2 – линия толщины зуба колеса 1 по окружности вершин  $s_{a1}$ ;
- 3 – линия допустимых подрезаний зубьев колеса 2;
- 4 – линия допустимых подрезаний зубьев колеса 1;
- 5 – линия интерференции или заклинивания.

На область, расположенную внутри ограничивающих линий 1–5, дополнительно накладываются линии качественных показателей:

- 6, 7 – линии оптимальных значений коэффициента толщины зуба колеса 2 по окружности вершин  $s_{a2}$ ;
- 8 – линия равенства значений коэффициентов удельных скольжений колес 1 и 2 ( $\lambda_1 = \lambda_2$ );
- 9, 10 – линии оптимальных значений коэффициента толщины зуба колеса 1 по окружности вершин  $s_{a1}$ ;
- 11 – линия равенства значений коэффициента смещения колеса 1 минимально допустимым величинам;
- 12 – линия равенства значений коэффициента смещения колеса 2 минимально допустимым величинам;
- 13 – линия значений коэффициента торцевого перекрытия  $\varepsilon_{\alpha}$ .



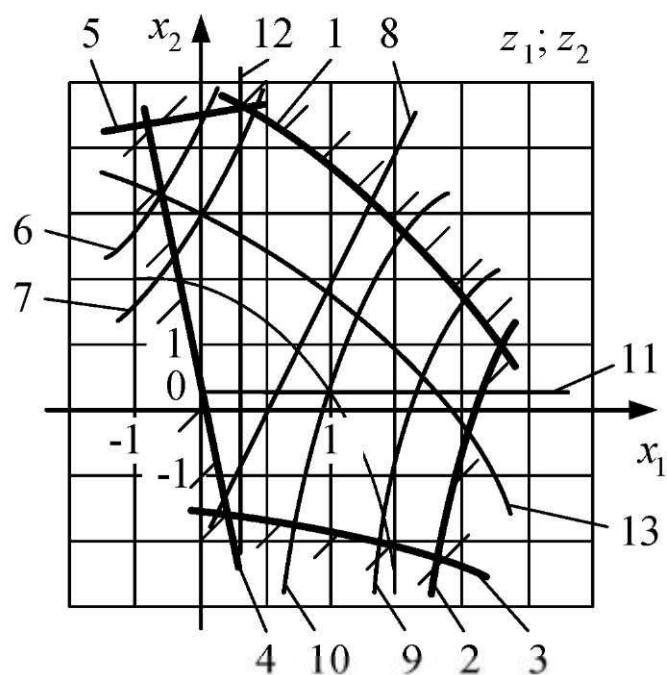


Рис. 6.14. Блокирующий контур

Каждый блокирующий контур строится под конкретное сочетание чисел зубьев зубчатых колес, образующих эвольвентное зацепление с учетом требуемого сочетания качественных показателей. Все блокирующие контура стандартизованы и выбираются по справочной литературе.

## 6.12. КАЧЕСТВЕННЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ ЗУБЧАТЫХ МЕХАНИЗМОВ

К качественным показателям цилиндрического эвольвентного прямозубого механизма относятся:

- коэффициент полезного действия  $\eta$ ;
- коэффициент перекрытия  $\varepsilon_\alpha$ ;
- коэффициент удельного скольжения  $\lambda$ ;
- коэффициент формы зуба  $Y$ ;
- коэффициент удельного давления  $\vartheta$ .

*Коэффициент полезного действия* – это величина, характеризующая количество полезно используемой механизмом суммарной энергии.

КПД механизма определяется по выражению

$$\eta = \frac{A_{\text{ВЫХ}}}{A_{\text{ВХ}}} = \frac{A_{\text{ВХ}} - \xi}{A_{\text{ВХ}}} < 1,$$

где  $\xi$  – коэффициент потерь.

*Коэффициент перекрытия* – это отношение угла перекрытия  $\varphi_\alpha$  зубчатого колеса к его угловому шагу  $\tau$ :

$$\varepsilon_{\alpha} = \frac{\varphi_{\alpha}}{\tau}.$$

*Угол перекрытия* – это угол, на который поворачивается зубчатое колесо за время зацепления одной пары зубьев.

Для нормальной работы эвольвентного зубчатого механизма необходимо обеспечить непрерывность зацепления колес, т. е. каждая последующая пара зубьев колес должна войти в зацепление до момента выхода из зацепления предшествующей пары зубьев. Для сохранения непрерывности зацепления необходимо выполнение следующего условия:

$$\varepsilon_{\alpha} > 1,06.$$

Коэффициент перекрытия характеризует количество пар зубьев колес, одновременно находящихся в зацеплении, и определяется по выражению

$$\varepsilon_{\alpha} = \frac{z_1}{2\pi} (\operatorname{tg}(\alpha_{a1}) - \operatorname{tg}(\alpha_w)) + \frac{z_2}{2\pi} (\operatorname{tg}(\alpha_{a2}) - \operatorname{tg}(\alpha_w)),$$

где  $z_1, z_2, \alpha_{a1}, \alpha_{a2}$  – параметры зубчатых колес 1 и 2, находящихся в зацеплении.

В зависимости от формы линии зуба, значения коэффициента перекрытия лежат в пределах:

для прямозубых колес  $\varepsilon_{\alpha} = 1,06-1,30$ ;

для косозубых колес  $\varepsilon_{\alpha} = 1,30-1,60$ ;

для шевронных колес  $\varepsilon_{\alpha} = 1,60-1,98$ .

Наиболее благоприятными значениями коэффициента перекрытия являются целые числа, что возможно обеспечить только при использовании режущего инструмента с углом профиля не равным  $20^{\circ}$ . Дробные величины данного коэффициента вызывают изменение жесткости зубчатого механизма, что может привести к появлению колебаний.

*Коэффициент удельного скольжения* используется при геометрических расчетах зубчатых механизмов для оценки скольжения:

$$\lambda = \frac{V_C}{V_C^t},$$

где  $V_C, V_C^t$  – соответственно, скорость скольжения и проекция этой скорости на контактную нормаль, м/с.

Относительное скольжение активных частей профилей зубьев, в значительной степени оказывает влияние на величину их износа. Скорость скольжения в точке контакта профилей зубьев определяется по выражению

$$V_C = (\omega_1 \pm \omega_2) \cdot l = r_b (\omega_1 \pm \omega_2) \cdot (\operatorname{tg}(\alpha) - \operatorname{tg}(\alpha_w)),$$



где  $l$  – расстояние от точки контакта до полюса зацепления, знак «+» принимается для внутреннего зацепления, знак «-» – для внешнего зацепления колес.

Коэффициент формы зуба  $Y$  используется для оценки влияния геометрии зуба на его изгибную прочность. Коэффициент формы зуба определяется через параметры балки параболического сечения, которая вписывается в контур зуба колеса таким образом, чтобы вершина параболы проходила через точку пересечения оси симметрии зуба с нормалью к профилю зуба в его вершине, а ветви параболы касались профиля зуба в его основании (рис. 6.15).

Коэффициент формы зуба  $Y$  определяется по выражению

$$Y = \frac{S_p^2}{6 \cdot m \cdot l},$$

где  $S_p$  – толщина зуба по хорде окружности, проходящей через точки касания параболы и профилей зуба;  $l$  – высота от вершины вписанной параболы до точек касания профиля зуба в его основании с параболой (рис. 6.15).

Коэффициент удельного давления характеризует влияние геометрической формы профиля зуба на контактную прочность:

$$\mathfrak{G} = \frac{m}{\rho_n},$$

где  $\rho_n$  – приведенный радиус кривизны контактирующих эвольвент, мм:

$$\rho_n = \frac{\rho_1 \cdot \rho_2}{\rho_1 \pm \rho_2},$$

здесь  $\rho_1$  и  $\rho_2$  – радиусы кривизны профилей в контактной точке, знак «+» относится к цилиндрическим зубчатым механизмам с внешним зацеплением, а «-» – к цилиндрическим зубчатым механизмам с внутренним зацеплением.

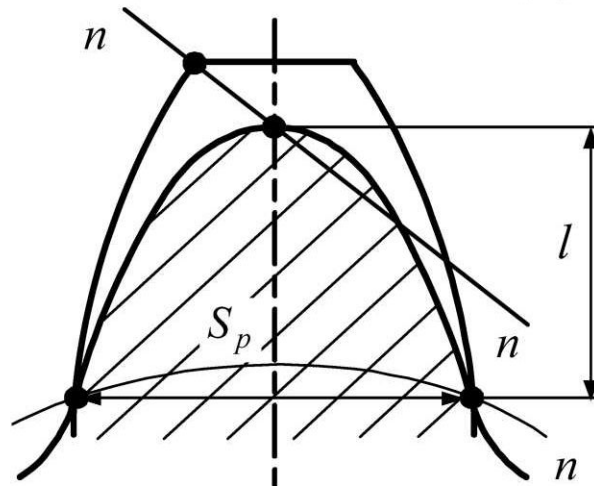


Рис. 6.15. Схема определения коэффициента формы зуба

Значения коэффициента удельного давления зависят от вида зацепления и места контакта профилей зубьев колес. Для прямозубого цилиндрического зубчатого механизма с внешним зацеплением коэффициент удельного давления в полюсе определяется по выражению

$$g = \frac{2x_{\Sigma}}{z_1 \cdot z_2 \cdot \operatorname{tg}(\alpha_w) \cdot \cos(\alpha)},$$

где  $x_{\Sigma}$  – суммарный коэффициент относительного смещения;  $\alpha$  – угол профиля зубьев;  $\alpha_w$  – угол зацепления.



## 7. СЛОЖНЫЕ ЗУБЧАТЫЕ МЕХАНИЗМЫ

В большинстве случаев перед инженером-конструктором стоит задача изменения входных параметров в выходные параметры в широком диапазоне, а также передачи движения на большие расстояния при обеспечении требуемого направления вращения выходного звена, что делает неэффективным применение простых механизмов. В этом случае для решения данной задачи применяются сложные зубчатые механизмы.

*Сложный зубчатый механизм* – это зубчатый механизм, образованный числом зубчатых колес больше двух.

Сложные зубчатые механизмы подразделяются:

- 1) по количеству рядов:
  - однорядные механизмы ([рис. 7.1, а](#));
  - многорядные механизмы ([рис. 7.2, а](#));
- 2) по числу потоков механической энергии:
  - однопоточные механизмы ([рис. 7.1, а](#), [рис. 7.2, а](#));
  - многопоточные механизмы ([рис. 7.3, а](#));
- 3) по кинематическому состоянию осей вращения зубчатых колес:
  - механизмы с неподвижными осями вращения колес ([рис. 7.1, а](#), [рис. 7.2, а](#), [рис. 7.3, а](#));
  - механизмы с подвижными осями вращения колес ([рис. 7.4](#));
- 4) по количеству входных и выходных звеньев:
  - механизмы с одним входным и одним выходным звеном ([рис. 7.1, а](#), [рис. 7.2, а](#), [рис. 7.3, а](#), [рис. 7.4](#));
  - механизмы с одним входным и несколькими выходными звеньями ([рис. 7.9, а](#));
  - механизмы с несколькими входными и одним выходным звеном ([рис. 7.9, а](#));
  - механизмы с несколькими входными и выходными звеньями;
- 5) по виду передаточной функции:
  - механизмы с постоянной передаточной функцией ([рис. 7.1, а](#), [рис. 7.2, а](#), [рис. 7.3, а](#));
  - механизмы с переменной передаточной функцией ([рис. 7.9](#));
- 6) по виду звеньев:
  - механизмы с жесткими звеньями ([рис. 7.1, а](#), [рис. 7.2, а](#), [рис. 7.3, а](#), [рис. 7.4](#));
  - механизмы с деформируемыми звеньями ([рис. 7.10](#), [рис. 7.11](#)).

Рассмотрим разновидности сложных зубчатых механизмов, состоящих из цилиндрических механизмов.

### 7.1. ОДНОРЯДНЫЕ ЗУБЧАТЫЕ МЕХАНИЗМЫ

*Однорядный зубчатый механизм* – это сложный зубчатый механизм, образованный последовательным соединением простых зубчатых механизмов с расположением всех зубчатых колес в один ряд ([рис. 7.1, а](#)).

*Структурный анализ.* Схема сложного однорядного зубчатого механизма (рис. 7.1, а) образована последовательным соединением простых зубчатых цилиндрических механизмов, относящихся к плоским механизмам, следовательно, рассматриваемый механизм также является плоским, подвижность которого определяется по формуле Чебышева.

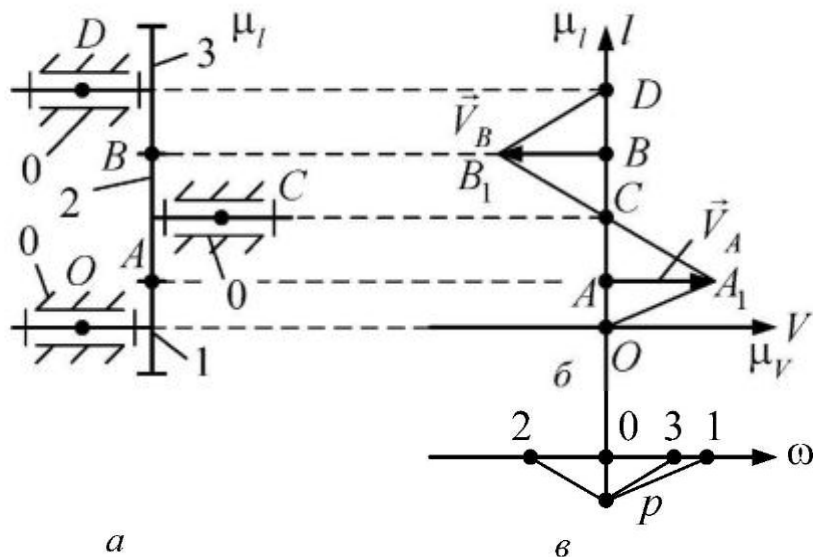


Рис. 7.1. Схема однорядного зубчатого механизма

Из анализа схемы механизма вытекает: сложный однорядный зубчатый механизм состоит из стойки 0, представленной тремя шарнирно-неподвижными опорами и трех подвижных звеньев 1, 2, 3, т. е.  $n = 3$ .

Стойка 0 с подвижными звеньями 1, 2, 3 создает три одноподвижные кинематические пары: 0 – 1, 2 – 0, 3 – 0, а зубчатые колеса 1, 2, 4 между собой образуют две высшие кинематические пары: 1 – 2, 2 – 3 с подвижностью равной двум, тогда  $p_1 = 3$ , а  $p_2 = 2$ .

Подставив значения коэффициентов в формулу Чебышева, получим

$$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 2 = 1.$$

Результат означает, что для однозначного определения взаимного расположения звеньев сложного однорядного зубчатого механизма (рис. 7.1, а) достаточно одной обобщенной координаты.

*Кинематический анализ.* Сложный однорядный зубчатый механизм (рис. 7.1, а) образован последовательным соединением простых зубчатых механизмов, следовательно, передаточное отношение данного механизма складывается на передаточные отношения простых механизмов:

$$i_{13} = i_{12} \cdot i_{23},$$

где  $i_{12}$ ,  $i_{23}$  – передаточные отношения простых зубчатых механизмов.



Передаточные отношения простых зубчатых механизмов:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{z_2}{z_1},$$

$$i_{23} = \frac{\omega_2}{\omega_3} = -\frac{z_3}{z_2},$$

где  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, z_1, z_2, z_3$  – угловые скорости и числа зубьев колес 1, 2 и 3.

Подставив последние два равенства в предшествующее им выражение и преобразовав, приведем к виду

$$i_{13} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right)\left(-\frac{z_3}{z_2}\right) = +\frac{z_3}{z_1}.$$

Полученное равенство представляет собой прямое передаточное отношение сложного однорядного зубчатого механизма от шестерни 1 (ведущего колеса) к выходному колесу 3. Знак «+» означает, что шестерня 1 и выходное звено 3 вращаются в одном направлении. Анализ выражения показывает, что передаточное отношение сложного однорядного зубчатого механизма не зависит от параметров колеса 2, являющегося паразитным зубчатым колесом.

*Паразитное зубчатое колесо* – это зубчатое колесо, геометрические параметры которого не оказывают влияния на передаточные отношения сложного механизма.

Паразитные зубчатые колеса вводятся в структуру сложных зубчатых механизмов с целью изменения направления вращения выходного звена.

Сложные однорядные зубчатые механизмы являются реверсивными, могут работать в режиме редуктора или мультипликатора и имеют как прямое, так и обратное передаточное отношение:

$$i_{31} = \frac{1}{i_{13}} = \left(-\frac{z_1}{z_2}\right)\left(-\frac{z_2}{z_3}\right) = +\frac{z_1}{z_3}.$$

Для выявления соотношения линейных и угловых скоростей подвижных звеньев сложного однорядного зубчатого механизма ([рис. 7.1, а](#)) выберем характерные точки, являющиеся центрами кинематических пар, за которые принимаем точки  $O, C, D$ . Анализ ведем от шестерни 1 к выходному звену по контуру схемы сложного однорядного механизма.

Точка  $O$  лежит на геометрической оси шестерни 1, которая является неподвижной осью ([рис. 7.1, а](#)). Следовательно, скорость точки  $O$  равна нулю в любой момент времени. Следующей точкой является точка  $A$ , скорость которой  $A$  определим по выражению

$$V_A = \omega_1 \frac{d_1}{2},$$

где  $d_1$  – делительный диаметр шестерни 1.

Точка  $A$  принадлежит и колесу 2, следовательно, получим

$$V_A = \omega_2 \frac{d_2}{2},$$

где  $d_2$  – делительный диаметр колеса 2.

Точка  $A$  являются полюсом зацепления шестерни 1 и колеса 2, следовательно, линейные скорости этих колес равны, т. е.

$$\omega_1 \frac{d_1}{2} = \omega_2 \frac{d_2}{2}.$$

Выразим из полученного равенства угловую скорость колеса 2:

$$\omega_2 = \omega_1 \cdot i_{21},$$

где  $i_{21}$  – обратное передаточное отношение простого зубчатого механизма с внешним зацеплением, образованного колесами 1 и 2:

$$i_{21} = -\frac{d_1}{d_2} = -\frac{z_1}{z_2}.$$

Точка  $B$  является полюсом зацепления колес 2 и 3, следовательно, линейные скорости этих колес равны, тогда имеем

$$V_B = \omega_2 \frac{d_2}{2} = \omega_3 \frac{d_3}{2},$$

где  $d_2, d_3$  – делительные диаметры колес 2 и 3 соответственно.

Из полученного равенства выразим угловую скорость колеса 4:

$$\omega_3 = \omega_2 \cdot i_{32},$$

где  $i_{32}$  – обратное передаточное отношение простого зубчатого механизма с внутренним зацеплением, образованного колесами 2 и 3:

$$i_{32} = +\frac{d_2}{d_3} = +\frac{z_2}{z_3}.$$

Используя полученные равенства, выразим угловую скорость колеса 3 через угловую скорость колеса 1:

$$\omega_3 = \omega_1 \cdot i_{21} \cdot i_{32} = \omega_1 \cdot i_{31},$$



где  $i_{31}$  – обратное передаточное отношение однорядного механизма.

Используя графоаналитический метод, построим планы линейных и угловых скоростей ([рис. 7.1, б, в](#)).

Масштабный коэффициент плана скоростей,  $\text{м}/(\text{мм} \cdot \text{с})$ ,

$$\mu_v = \frac{V_A}{|AA_1|},$$

здесь  $|AA_1|$  – произвольно выбранный отрезок, мм.

Для построения плана линейных скоростей в выбранном масштабном коэффициенте откладываем отрезок  $AA_1$ , изображающий вектор скорости точки  $A$  ([рис. 7.1, б](#)). Соединив точку  $O$  и  $A_1$ , получим годограф скоростей точек, принадлежащих шестерне 1. Точка  $A$  является полюсом зацепления шестерни 1 и колеса 2, следовательно, вектор скорости точки  $A$  принадлежит и колесу 2. Соединив точку  $A_1$  с точкой  $C$ , лежащей на геометрической оси колеса 2, получим годограф скоростей точек колеса 2. Используя свойство годографов, продлеваем годограф  $AC_1$  до пересечения с прямой  $BB_1$ . Полученный отрезок  $BB_1$  является вектором скорости точки  $B$ , принадлежащей колесу 2. Точка  $B$  является полюсом зацепления колес 2 и 3, следовательно, вектор скорости точки  $B$  принадлежит и колесу 3. Соединив точку  $B_1$  с точкой  $D$ , лежащей на геометрической оси колеса 3, получим годограф скоростей точек, принадлежащих этому колесу. Полученная картина ([рис. 7.1, б](#)) и будет являться планом линейных скоростей сложного однорядного зубчатого механизма ([рис. 7.1, а](#)).

Для построения плана угловых скоростей сложного однорядного зубчатого механизма спроецируем годографы скоростей шестерни 1 и колес 2, 3 на ось угловых скоростей. Для этого, используя метод параллельного переноса, сносим прямые, параллельные годографам скоростей, таким образом, чтобы они прошли через полюс плана, т.е. точку  $p$ . Полученная картина ([рис. 7.1, в](#)) и будет являться планом угловых скоростей сложного однорядного зубчатого механизма ([рис. 7.1, а](#)).

Значения угловых скоростей ведомых звеньев найдем из пропорции

$$\frac{\omega_1}{|01|} = \frac{\omega_2}{|02|} = \frac{\omega_3}{|03|},$$

где  $|01|$ ,  $|02|$ ,  $|03|$  – отрезки с плана угловых скоростей.

Угловые скорости звеньев 2 и 3,  $\text{с}^{-1}$ :

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{|02|}{|01|},$$

$$\omega_3 = \omega_1 \frac{|03|}{|01|}.$$

С целью проверки правильности построения планов выразим передаточное отношение однорядного планетарного механизма через элементы плана угловых скоростей:

$$i_{13} = \frac{\omega_1}{\omega_3} = + \frac{|01|}{|03|},$$

где знак «+» обеспечивается совпадением направлений отрезков  $|01|$  и  $|03|$  на плане угловых скоростей (рис. 7.1, в).

Сложные однорядные механизмы эффективны при небольших передаточных числах ( $i \leq 5$ ), т. к. механизмы с передаточными числами выше 5 имеют большие габаритные размеры и обладают невысокой прочностью. Для реализации передаточных чисел больше 5 применяются сложные многоступенчатые или многорядные механизмы.

## 7.2. МНОГОРЯДНЫЕ ЗУБЧАТЫЕ МЕХАНИЗМЫ

*Многоступенчатый, или многорядный, зубчатый механизм* – это сложный зубчатый механизм, образованный последовательным соединением простых зубчатых механизмов с расположением зубчатых колес по нескольким рядам (рис. 7.2, а).

*Структурный анализ.* Схема сложного многорядного зубчатого механизма (рис. 7.2, а) образована последовательным соединением простых зубчатых цилиндрических механизмов, относящихся к плоским механизмам, следовательно, рассматриваемый механизм также является плоским, подвижность которого определяется по формуле Чебышева.

Из анализа схемы механизма вытекает: сложный многорядный зубчатый механизм состоит из стойки 0, представленной тремя шарнирно неподвижными опорами и трех подвижных звеньев 1, 2, 4. Колеса 2 и 3 жестко соединены друг с другом и образуют блок зубчатых колес, который рассматривается как одно звено 2. В этом случае  $n = 3$ .

*Блок зубчатых колес* – это звено сложного зубчатого механизма, состоящее из нескольких жестко связанных зубчатых колес, имеющих общую геометрическую ось и одинаковую угловую скорость.

Стойка 0 с подвижными звеньями 1, 2, 4 образует три одноподвижные кинематические пары: 0 – 1, 2 – 0, 4 – 0, а зубчатые колеса 1, 2, 4 между собой образуют две высшие кинематические пары: 1 – 2, 3 – 4 с подвижностью равной двум, тогда  $p_1 = 3$ , а  $p_2 = 2$ .

Подставив значения коэффициентов в формулу Чебышева, получим

$$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 2 = 1.$$

Результат означает, что для однозначного определения взаимного расположения звеньев сложного многорядного зубчатого механизма (рис. 7.2, а) достаточно одной обобщенной координаты.



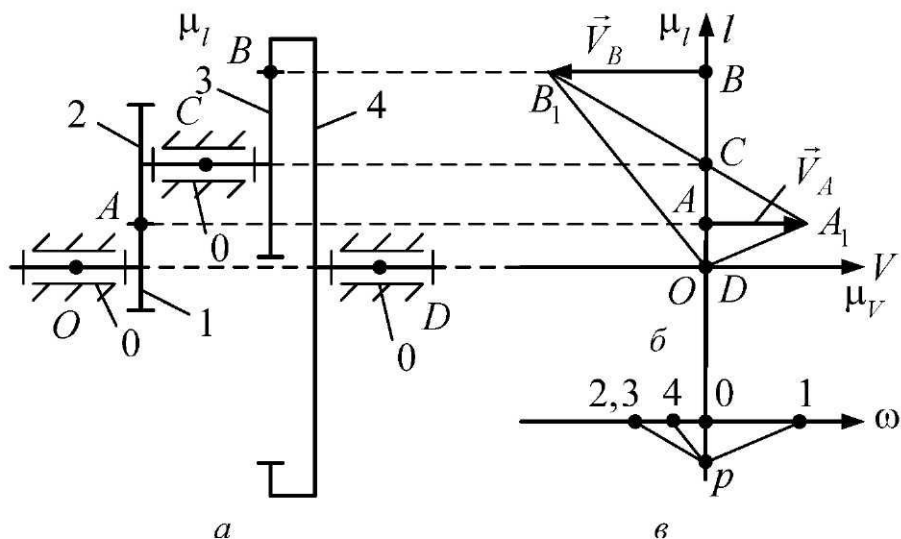


Рис. 7.2. Схема многорядного зубчатого механизма

*Кинематический анализ.* Сложный многорядный зубчатый механизм (рис. 7.2, а) образован последовательным соединением простых механизмов, следовательно, передаточное отношение рассматриваемого механизма представляется в виде

$$i_{14} = i_{12} \cdot i_{34},$$

где  $i_{12}$ ,  $i_{34}$  – передаточные отношения простых зубчатых механизмов.

Передаточные отношения простых зубчатых механизмов:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{z_2}{z_1},$$

$$i_{34} = \frac{\omega_4}{\omega_3} = +\frac{z_4}{z_3},$$

где  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$ ,  $\omega_4$ ,  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$ ,  $z_4$  – соответственно, угловые скорости и числа зубьев колес 1, 2, 3 и 4.

Подставив последние два равенства в предшествующее им выражение и преобразовав, приведем к виду

$$i_{14} = \left( -\frac{z_2}{z_1} \right) \left( +\frac{z_4}{z_3} \right) = -\frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3}.$$

Полученное равенство является прямым передаточным отношением сложного многорядного зубчатого механизма от шестерни 1 к выходному зубчатому колесу 4. Знак «-» означает, что шестерня 1 и зубчатое колесо 4 вращаются в разных направлениях. Анализ выражения показывает, что пере-

данное отношение сложного многорядного зубчатого механизма зависит от параметров всех колес, его образующих.

Сложные многорядные зубчатые механизмы являются реверсивными, могут работать в режиме редуктора или мультипликатора и имеют как прямое, так и обратное передаточное отношение:

$$i_{41} = \frac{1}{i_{14}} = \left( -\frac{z_1}{z_2} \right) \left( +\frac{z_3}{z_4} \right) = -\frac{z_1 \cdot z_3}{z_2 \cdot z_4}.$$

Для выявления соотношений линейных и угловых скоростей подвижных звеньев сложного многорядного зубчатого механизма (рис. 7.2, а), используя графоаналитический метод, построим планы линейных и угловых скоростей (рис. 7.2, б, в). За характерные точки принимаем точки  $O$ ,  $C$ ,  $D$ , лежащие на геометрических осях шестерни 1, зубчатых колес 2, 3, а точки  $A$  и  $B$  являются мгновенными полюсами зацепления этих же колес. Анализ ведем от шестерни 1 по контуру схемы механизма.

Скорость точки  $A$ , принадлежащей шестерне 1, найдем по выражению

$$V_A = \omega_1 \cdot \frac{d_1}{2}.$$

Точка  $A$  принадлежит и колесу 2, следовательно, получим

$$V_A = \omega_2 \cdot \frac{d_2}{2},$$

где  $d_2$  – делительный диаметр колеса 2.

Точка  $A$  является полюсом зацепления шестерни 1 и колеса 2, следовательно, линейные скорости этих колес равны, т. е.

$$\omega_1 \frac{d_1}{2} = \omega_2 \frac{d_2}{2}.$$

Выразим из полученного равенства угловую скорость колеса 2:

$$\omega_2 = \omega_1 \cdot i_{21},$$

где  $i_{21}$  – обратное передаточное отношение простого зубчатого механизма с внешним зацеплением, образованного колесами 1 и 2:

$$i_{21} = -\frac{d_1}{d_2} = -\frac{z_1}{z_2}.$$

Для блока зубчатых колес 2 и 3 характерно равенство угловых скоростей, т. е.  $\omega_3 = \omega_2$ .

Точка  $C$  является полюсом зацепления колес 3 и 4, следовательно, линейные скорости этих колес равны, тогда имеем



$$V_{\tilde{N}} = \omega_3 \frac{d_3}{2} = \omega_4 \frac{d_4}{2},$$

где  $d_3, d_4$  – соответственно, делительные диаметры колес 3 и 4.

Из полученного равенства выразим угловую скорость колеса 4:

$$\omega_4 = \omega_3 \cdot i_{43},$$

где  $i_{43}$  – обратное передаточное отношение простого зубчатого механизма с внутренним зацеплением, образованного колесами 3 и 4:

$$i_{43} = +\frac{d_3}{d_4} = +\frac{z_3}{z_4}.$$

Используя полученные равенства, выразим угловую скорость колеса 4 через угловую скорость колеса 1:

$$\omega_4 = \omega_1 \cdot i_{41},$$

где  $i_{41}$  – обратное передаточное отношение многорядного механизма.

Кинематический анализ сложного многорядного зубчатого механизма ([рис. 7.2, а](#)) более наглядно может быть реализован графоаналитическим методом, построением планов линейных и угловых скоростей ([рис. 7.2, б, в](#)).

Для определения значений угловых скоростей ведомых звеньев составим пропорцию:

$$\frac{\omega_1}{|01|} = \frac{\omega_2}{|02|} = \frac{\omega_4}{|04|},$$

где  $|01|, |02|, |03|$  – отрезки с плана угловых скоростей.

Угловые скорости звеньев 2, 3 и 4,  $c^{-1}$ ,

$$\omega_2 = \omega_3 = \omega_1 \frac{|02|}{|01|},$$

$$\omega_4 = \omega_1 \frac{|04|}{|01|}.$$

С целью проверки правильности построения планов выразим передаточное отношение однорядного планетарного механизма через элементы плана угловых скоростей:

$$i_{14} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = -\frac{|01|}{|04|},$$

где знак «-» обеспечивается противоположным направлением отрезков  $|01|$  и  $|04|$  на плане угловых скоростей ([рис. 7.2, в](#)).

Сложный многорядный зубчатый механизм (рис. 7.2, а) образован последовательным соединением двух простых механизмов. При количестве простых зубчатых механизмов больше двух передаточное отношение сложного многорядного механизма определяется по выражению

$$i_{1n} = i_{12} \cdot \dots \cdot i_{(n-1)n} = (-1)^k \frac{z_2 \cdot \dots \cdot z_n}{z_1 \cdot \dots \cdot z_{(n-1)}}$$

где  $i_{12}, i_{(n-1)n}$  – передаточные отношения первого и последнего простых зубчатых механизмов соответственно;  $z_1, z_2, z_{(n-1)}, z_n$  – числа зубьев колес 1, 2, предпоследнего и выходного соответственно;  $n$  – количество зубчатых колес;  $k$  – число простых зубчатых механизмов с внешним зацеплением.

### 7.3. МНОГОПОТОЧНЫЕ ЗУБЧАТЫЕ МЕХАНИЗМЫ

Все зубчатые механизмы рассмотренных видов являются однопоточными, т. е. в процессе передачи и преобразования входной поток механической энергии не претерпевает разделения по нескольким потокам. Однако в некоторых случаях условия технического задания не позволяют использовать подобные механизмы. В этом случае применяются многопоточные механизмы (рис. 7.3, а).

*Многопоточный зубчатый механизм* – это сложный зубчатый механизм, структура которого содержит кинематические цепи, образующие несколько замкнутых контуров, и входной поток механической энергии в процессе передачи и преобразования делится по нескольким потокам, а затем суммируется в один поток на выходном звене.

Разделение входного потока механической энергии по нескольким потокам позволяет распределить действие силовых факторов по большему числу кинематических пар, что приводит к снижению значений реакций связей и позволяет уменьшить габаритные размеры и массу механизмов.

*Структурный анализ.* Схема сложного многопоточного зубчатого механизма (рис. 7.3, а) образована последовательным и параллельным соединением простых зубчатых механизмов, относящихся к плоским механизмам, следовательно, рассматриваемый механизм также является плоским, подвижность которого определяется по формуле Чебышева.

Из анализа схемы механизма (рис. 7.3, а) вытекает: структура многопоточного зубчатого механизма состоит из стойки 0, представленной тремя шарнирно неподвижными опорами, двух блоков зубчатых колес 1 и 2 и подвижного звена 4. Колеса 2 и 3 входят в состав блока зубчатых колес, рассматриваются как одно звено. Схема механизма содержит избыточную связь, представленную вторым блоком колес 2 и 3. Избыточная связь введена в структуру механизма с целью уменьшения значений силовых факторов, действующих в зацеплениях зубьев колес 1 и 2, 3 и 4. Следовательно, при определении подвижности необходимо исключить из схемы механизма дефекты структуры, т. е. второй блок колес 2 и 3. В этом случае  $n = 3$ .



Стойка 0 с подвижными звеньями 1, 2, 4 создает три одноподвижные кинематические пары: 0 – 1, 2 – 0, 4 – 0, а зубчатые колеса 1, 2, 4 между собой образуют две высшие кинематические пары: 1 – 2, 3 – 4 с подвижностью, равной двум. Дополнительные ряды колес 1–2 и 3–4 (рис. 7.3, а) являются избыточной связью, поэтому подвижность данных кинематических пар не учитываем, тогда  $p_1 = 3$ , а  $p_2 = 2$ .

Подставив полученные результаты в формулу Чебышева, получим

$$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 2 = 1.$$

Результат означает, что для однозначного определения взаимного расположения звеньев сложного многопоточного зубчатого механизма (рис. 7.3, а) достаточно одной обобщенной координаты.

*Кинематический анализ.* Прямое передаточное отношение сложного многопоточного зубчатого механизма от шестерни 1 к выходному колесу 4 (рис. 7.3, а) выражается в виде

$$i_{14} = -\frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3}.$$

Знак «-» в выражении означает, что шестерня 1 и зубчатое колесо 4 вращаются в разных направлениях. Анализ выражения показывает, что передаточное отношение сложного многорядного зубчатого механизма зависит от параметров колес, его образующих.

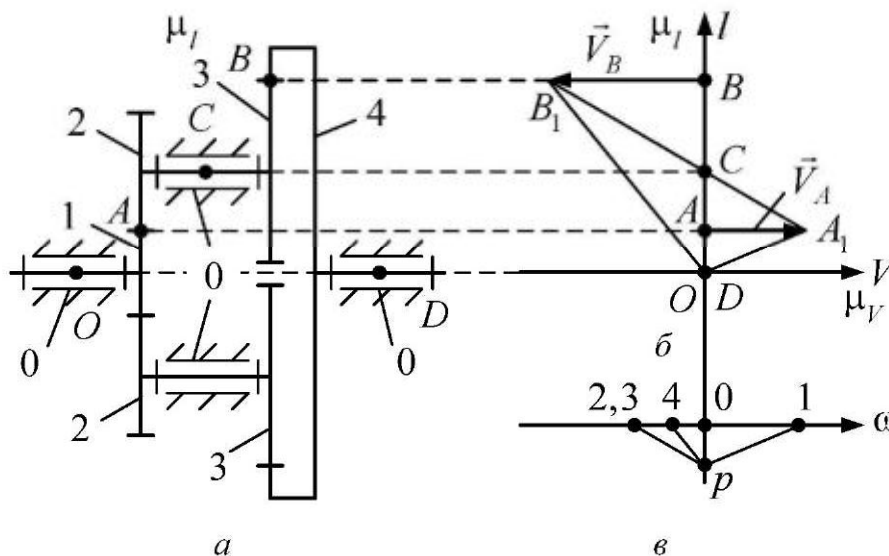


Рис. 7.3. Схема многопоточного зубчатого механизма

Сложные многопоточные зубчатые механизмы являются реверсивными могут работать в режиме редуктора и в режиме мультипликатора, следовательно, для механизмов данного вида характерно наличие как прямого, так и обратного передаточного отношения:

$$i_{41} = \frac{1}{i_{14}} = -\frac{z_1 \cdot z_3}{z_2 \cdot z_4}.$$

Взаимосвязь линейных и угловых скоростей подвижных звеньев сложного многорядного многопоточного зубчатого механизма ([рис. 7.3, а](#)) наглядно характеризуется при помощи планов линейных и угловых скоростей ([рис. 7.3, б, в](#)).

Для определения значений угловых скоростей ведомых звеньев составим пропорцию:

$$\frac{\omega_1}{|01|} = \frac{\omega_2}{|02|} = \frac{\omega_4}{|04|},$$

где  $|01|$ ,  $|02|$ ,  $|04|$  – отрезки с плана угловых скоростей.

Угловые скорости звеньев 2, 3 и 4,  $\text{с}^{-1}$ :

$$\omega_2 = \omega_3 = \omega_1 \frac{|02|}{|01|},$$

$$\omega_4 = \omega_1 \frac{|04|}{|01|}.$$

С целью проверки правильности построения планов выразим передаточное отношение однорядного планетарного механизма через элементы плана угловых скоростей:

$$i_{14} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = -\frac{|01|}{|04|},$$

где знак « $-$ » обеспечивается противоположным направлением ков  $|01|$  и  $|04|$  на плане угловых скоростей ([рис. 7.3, в](#)).

## 7.4. ЭПИЦИКЛИЧЕСКИЕ ЗУБЧАТЫЕ МЕХАНИЗМЫ

Однорядные, многорядные и многопоточные зубчатые механизмы являются представителями сложных зубчатых механизмов с неподвижными осями вращения зубчатых колес. С помощью механизмов перечисленных видов не всегда удастся обеспечить выполнение заданных условий. В этом случае применяются сложные зубчатые механизмы с подвижными геометрическими осями вращения колес. Подобные механизмы называются эпициклическими.



*Эпициклический зубчатый механизм* – это сложный зубчатый механизм, имеющий в своей структуре хотя бы одно звено с подвижной геометрической осью вращения.

К эпициклическим зубчатым механизмам относятся: планетарные (рис. 7.4) и дифференциальные механизмы (рис. 7.9, а).

*Планетарный зубчатый механизм* – это эпициклический зубчатый механизм с подвижностью, равной единице.

К типовым планетарным механизмам относятся:

однорядный планетарный зубчатый механизм с одним внешним и одним внутренним зацеплением (рис. 7.4, а);

двухрядный планетарный зубчатый механизм с одним внешним и одним внутренним зацеплением (рис. 7.4, б);

двухрядный планетарный зубчатый механизм с двумя внешними зацеплениями (рис. 7.4, в);

двухрядный планетарный зубчатый механизм с двумя внутренними зацеплениями (рис. 7.4, г).

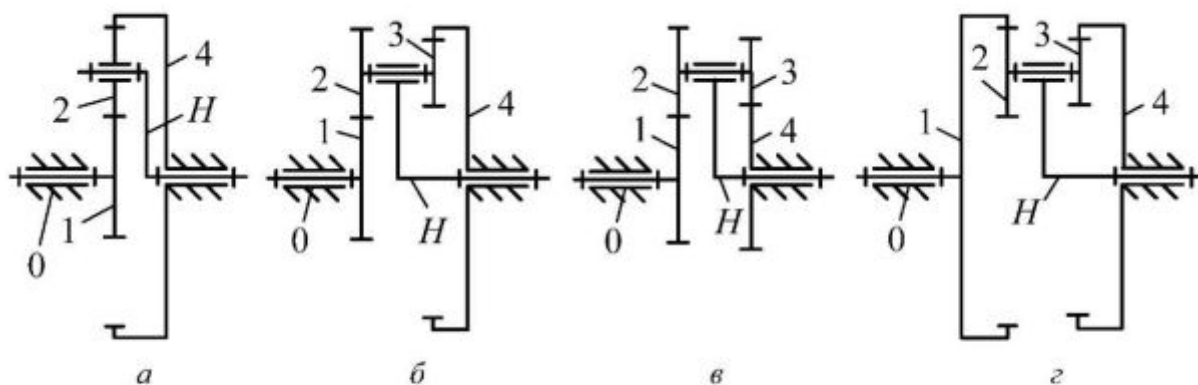


Рис. 7.4. Схемы планетарных механизмов

Независимо от схемы (рис. 7.4), структура планетарных зубчатых механизмов содержит следующие звенья: солнечное колесо, корона, один или нескольких сателлитов и водило.

*Солнечное колесо* – это зубчатое колесо с внешними зубьями, расположенное в центре планетарного механизма.

*Корона* – это зубчатое колесо планетарного механизма с внутренними зубьями.

*Сателлит* – это зубчатое колесо планетарного механизма, геометрическая ось вращения которого является подвижной.

*Водило* – это подвижное звено планетарного механизма, на котором установлены сателлиты.

Солнечное колесо в схемах планетарных механизмов (рис. 7.4, а–в) представлено подвижным звеном 1, а в схеме (рис. 7.4, г) солнечное колесо отсутствует. При этом схема планетарного механизма (рис. 7.4, в) помимо подвижного солнечного колеса 1 содержит и неподвижное солнечное колесо 4. Короной в схемах планетарных механизмов (рис. 7.4, а, б, г) является неподвижное колесо 4, а в схеме (рис. 7.4, в) корона отсутствует. При этом схема планетарного

механизма (рис. 7.4, *з*) помимо неподвижной короны 4 содержит и подвижную корону 1. Сателлитом в планетарных механизмах является подвижное колесо 2. В схеме (рис. 7.4, *а*) сателлит представлен одним колесом, а в схемах (рис. 7.4, *б–з*) сателлит – это блок зубчатых колес 2 и 3. Водило во всех схемах планетарных механизмов представлено в виде рычажной системы *H* и предназначено для установки сателлитов и обеспечения вращательного движения этих звеньев как вокруг собственной оси вращения, так и вокруг оси вращения водила *H*.

В зависимости от схемы планетарного механизма возможная реализация сочетаний значений КПД и величин передаточных чисел представлена в табл. 7.1.

Таблица 7.1

Схема планетарного механизма	Рис. 7.4			
	<i>а</i>	<i>б</i>	<i>в</i>	<i>з</i>
Передаточное число	3–9	3–25	20–250	30–300
КПД	0,97–0,99	0,96–0,98	0,90–0,93	0,90–0,93

*Структурный анализ.* Все схемы планетарных механизмов (рис. 7.4) образованы последовательным соединением простых зубчатых механизмов, которые являются плоскими механизмами. Следовательно, для определения подвижности данного механизма можно воспользоваться формулой Чебышева.

Из анализа схем планетарных механизмов (рис. 7.4) вытекает: все планетарные механизмы состоят из стойки 0, трех подвижных звеньев 1, 2 и *H*. Корона 4 является неподвижным звеном, следовательно, является элементом стойки 0. В этом случае  $n = 3$ .

Все схемы планетарных механизмов (рис. 7.4) содержат по три одноподвижные кинематические пары: 0 – 1, 2 – *H*, *H* – 0 и по две высшие кинематические пары: 1 – 2, 2 – 0 с подвижностью, равной двум, тогда  $p_1 = 3$ , а  $p_2 = 2$ .

Подставив значения коэффициентов в формулу Чебышева, получим

$$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 2 = 1.$$

Результат означает, что для однозначного определения взаимного расположения звеньев любой схемы типового планетарного механизма (рис. 7.4) достаточно одной обобщенной координаты.

## 7.5. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛАНЕТАРНЫХ ЗУБЧАТЫХ МЕХАНИЗМОВ

Передаточные отношения планетарных механизмов определяются с помощью формулы Виллиса. Формула Виллиса выводится с использованием метода обращенного движения. *Сущность метода обращенного движения* заключается в следующем: если в некоторый момент времени подвижному



звену какого-либо механизма сообщить такую же по величине угловую скорость, с которой данное звено совершает вращательные движения, но противоположного направления, то это звено в данный момент времени можно рассматривать как условно неподвижное.

Используя метод обращенного движения (рис. 7.4, а), сообщим всем звеньям планетарных механизмов угловую скорость, равную по величине угловой скорости водила  $H$ , но противоположного направления. В этом случае угловая скорость водила  $H$  будет равна нулю ( $\omega_H = 0$ ), и это звено можно считать условно неподвижным, а планетарные механизмы преобразуются в одно- или многорядные зубчатые механизмы с неподвижными геометрическими осями вращения колес. Передаточные отношения полученных механизмов найдем по выражению:

$$i_{14}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_4 - \omega_H}.$$

Полученное выражение является формулой Виллиса, характеризующей внутреннее передаточное отношение планетарного механизма.

*Внутреннее передаточное отношение* – это передаточное отношение планетарного механизма при неподвижном водиле  $H$ .

Рассмотрим применение формулы Виллиса на примере однорядного планетарного зубчатого механизма с одним внешним и одним внутренним зацеплением (рис. 7.5, а).

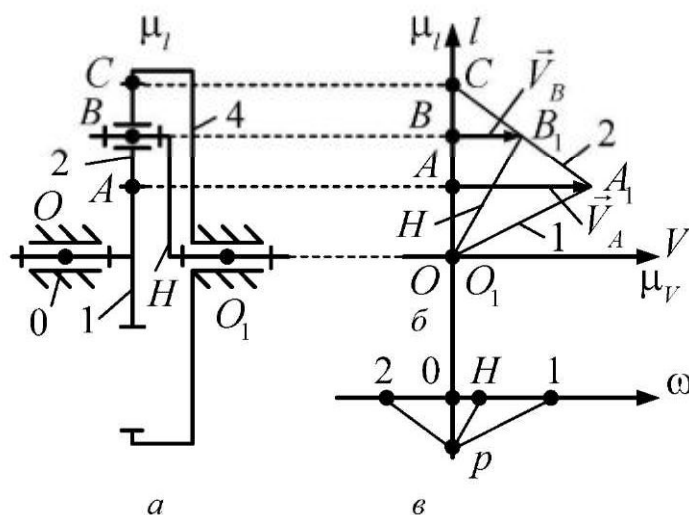


Рис. 7.5. Планы скоростей для однорядного планетарного зубчатого механизма

Корона 4 неподвижна, следовательно, угловая скорость этого звена равна нулю, т. е.  $\omega_4 = 0$ , тогда формула Виллиса приводится к виду

$$i_{14}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_4 - \omega_H} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{0 - \omega_H} = 1 - i_{1H}^A.$$

Преобразовав данное выражение, получим

$$i_{1H}^A = 1 - i_{14}^H,$$

где  $i_{14}^H$  – внутреннее передаточное отношение планетарного механизма.

Внутреннее передаточное отношение однорядного планетарного зубчатого механизма (рис. 7.5, а)

$$i_{14}^H = i_{12} \cdot i_{24} = \left( -\frac{z_2}{z_1} \right) \left( +\frac{z_4}{z_2} \right) = -\frac{z_4}{z_1}.$$

С учетом внутреннего передаточного отношения формула для прямого передаточного отношения примет вид

$$i_{1H}^A = 1 + \frac{z_4}{z_1}.$$

Однорядный планетарный зубчатый механизм является реверсивным и может работать в режиме редуктора и в режиме мультипликатора, следовательно, для данного механизма характерно наличие обратного передаточного отношения (рис. 7.5, а):

$$i_{H1}^A = \frac{1}{i_{1H}^A} = \frac{1}{1 + \frac{z_4}{z_1}} = \frac{z_1}{z_1 + z_4}.$$

Для выявления соотношений линейных и угловых скоростей звеньев однорядного планетарного зубчатого механизма, используя графоаналитический способ, построим планы линейных и угловых скоростей. Для построения плана линейных скоростей выбираем характерные точки  $O, A, B, C, O_1$  (рис. 7.5, а). Откладываем отрезок  $AA_1$ . Соединив точку  $A_1$  с точкой  $O$ , получим годограф скоростей точек, принадлежащих солнечному колесу 1, а соединив ее с точкой  $C$ , получим годограф скоростей точек, принадлежащих сателлиту 2. На пересечении годографа сателлита 2 с прямой  $BB$  получим точку  $B_1$ . Полученный отрезок  $BB_1$  является вектором скорости точки  $B$ , принадлежащей сателлиту 2. Соединив точку  $B_1$  с точкой  $O_1$ , получим годограф для точек водила  $H$ . Построенная картина является планом линейных скоростей (рис. 7.5, а). Перенеся все годографы таким образом, чтобы они проходили через точку  $p$ , являющуюся полюсом плана, получим план угловых скоростей (рис. 7.5, а).

Для определения значений угловых скоростей ведомых звеньев составим пропорцию:

$$\frac{\omega_1}{|01|} = \frac{\omega_2}{|02|} = \frac{\omega_H}{|0H|},$$

где  $|01|, |02|, |0H|$  – отрезки с плана угловых скоростей, мм.



Угловые скорости звеньев 2 и H,  $c^{-1}$ ,

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{|02|}{|01|},$$

$$\omega_H = \omega_1 \frac{|0H|}{|01|}.$$

С целью проверки правильности построения планов выразим передаточное отношение однорядного планетарного механизма через элементы плана угловых скоростей:

$$i_{1H}^4 = \frac{\omega_1}{\omega_H} = + \frac{|01|}{|0H|},$$

где знак «+» обеспечивается совпадением направлений отрезков  $|01|$  и  $|0H|$  на плане угловых скоростей (рис. 7.5, в).

## 7.6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ЗУБЧАТЫЕ МЕХАНИЗМЫ

*Дифференциальный зубчатый механизм* – это эпициклический зубчатый механизм с подвижностью больше единицы.

Дифференциальные зубчатые механизмы или дифференциалы относятся к разновидностям механизмов с несколькими входными или выводными звеньями.

В зависимости от соотношения количества входных и выходных звеньев дифференциалы делятся на суммирующие и разделяющие.

*Суммирующий зубчатый дифференциал* – это дифференциальный зубчатый механизм, в котором несколько входных потоков механической энергии суммируется в один выходной поток. Структура суммирующих дифференциалов имеет несколько входных звеньев и одно выходное звено.

*Разделяющий зубчатый дифференциал* – это дифференциальный зубчатый механизм, в котором входной поток механической энергии разделяется в несколько выходных потоков. Разделяющие дифференциалы имеют одно входное звено и несколько выходных звеньев.

Разделяющие дифференциалы применяются в транспортных машинах с целью обеспечения разных скоростей вращения колес при движении по криволинейной траектории.

С целью упрощения рассматриваемой задачи представим транспортную машину в виде системы материальных точек, перемещающейся по криволинейной траектории (рис. 7.6).

Скорость движения транспортной машины

$$V = \omega \cdot \rho,$$

где  $\omega$ ,  $\rho$  – угловая скорость и радиус кривизны траектории движения.

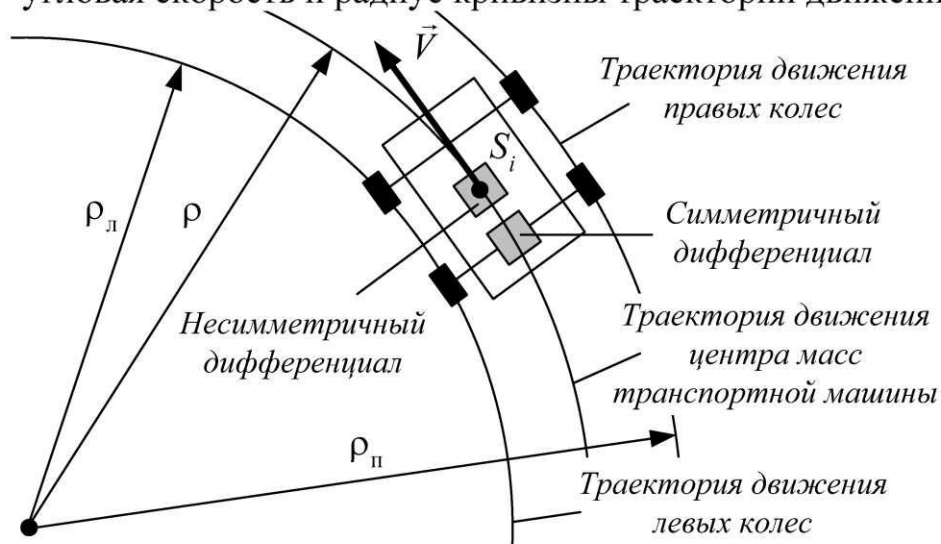


Рис. 7.6. Схема траекторий движения элементов транспортной машины

Исходя из рассматриваемой ситуации, при повороте транспортной машины левое колесо проходит меньший путь, чем правое колесо этой же пары (рис. 7.6). При жестком соединении колес данная картина приводит к следующей ситуации: колесо, перемещающееся по траектории большего радиуса, будет пробуксовывать, что приведет к увеличению потерь на трение и повышенному износу рабочих поверхностей колес, т. е.

$$\omega_l \cdot \rho_l = V = \omega_n \cdot \rho_n,$$

где  $\omega_l$ ,  $\omega_n$ ,  $\rho_l$ ,  $\rho_n$  – угловая скорость и радиус кривизны траектории движения левого и правого колес соответственно.

Анализ данного равенства показывает, что  $\rho_l < \rho_n$ , следовательно, угловые скорости вращения колес одной пары не одинаковы:  $\omega_l > \omega_n$ , что свидетельствует о разности силовых факторов, действующих на эти звенья, и приводит к неравномерности износа рабочих поверхностей колес одной пары.

В зависимости от обеспечиваемого соотношения значений силовых факторов, действующих на выходные звенья, разделяющие дифференциальные зубчатые механизмы делятся на симметричные и несимметричные механизмы.

*Симметричный зубчатый дифференциал* – это дифференциальный зубчатый механизм, обеспечивающий движение выходных звеньев с разными скоростями при сохранении равенства силовых факторов, действующих на эти звенья.

*Несимметричный зубчатый дифференциал* – это дифференциальный зубчатый механизм, обеспечивающий движение выходных звеньев с разными скоростями при неравенстве силовых факторов, действующих на эти звенья.

Симметричные дифференциалы устанавливаются между звеньями, имеющими общую ось вращения, а несимметричные дифференциалы распо-



лагают между звеньями транспортных машин, воспринимающих неодинаковые силовые факторы (рис. 7.6).

Схемы типовых дифференциальных зубчатых механизмов можно получить, если в типовых схемах планетарных механизмов (рис. 7.4) разрешить перемещаться звену 4 (неподвижное звено).

В качестве примера рассмотрим схему двухрядного дифференциального механизма с одним внешним и одним внутренним зацеплением (рис. 7.7, а).

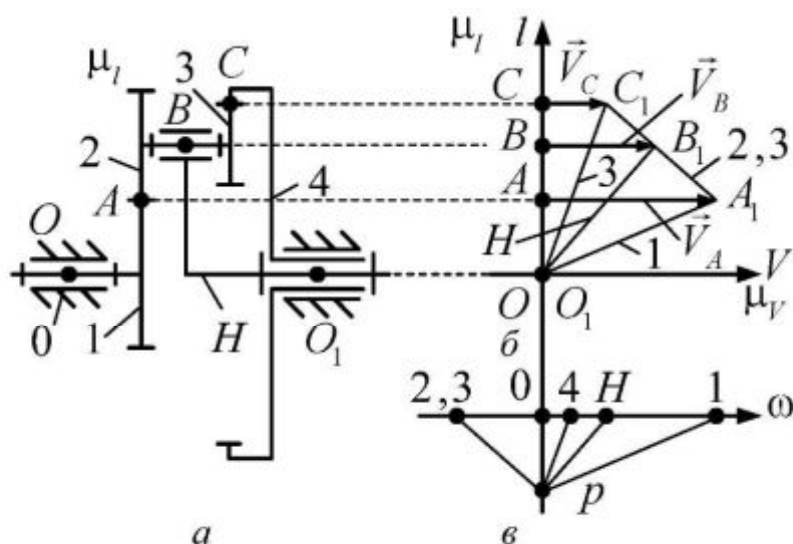


Рис. 7.7. Планы скоростей двухрядного дифференциального зубчатого механизма с одним внешним и одним внутренним зацеплением

*Структурный анализ.* Дифференциальный зубчатый механизм (рис. 7.7, а) имеет одно входное звено (колесо 1) и два выходных звена (корона 4 и водило  $H$ ). Схема механизма имеет четыре подвижных звена 1, 2, 4 и  $H$ . Следовательно,  $n = 4$ . Стойка 0 представлена тремя шарнирно-неподвижными опорами. Структура дифференциала содержит четыре одноподвижные кинематические пары: 0 – 1, 2 –  $H$ ,  $H$  – 0, 4 – 0 и две высшие кинематические пары: 1 – 2, 3 – 4 с подвижностью, равной двум, тогда  $p_1 = 4$ , а  $p_2 = 2$ .

Подставив значения коэффициентов в формулу Чебышева, получим

$$W = 3 \cdot n - 2 \cdot p_2 - p_4 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 2 = 2.$$

Результат означает, что для однозначного определения взаимного расположения звеньев дифференциального зубчатого механизма (рис. 7.7, а) достаточно двух обобщенных координат.

*Кинематический анализ.* Для разделяющих дифференциальных механизмов характерно наличие неопределенности движения выходных звеньев, что приводит к затруднениям при выполнении кинематического анализа. Для упрощения анализа считаем, что дифференциальный зубчатый механизм (рис. 7.7, а) является суммирующим, т. е. имеет два входных звена: колеса 1 и 4 и одно выходное звено  $H$ . Используя формулу Виллиса для обоих входных потоков, получим:

вход с колеса 1

$$i_{12} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_2 - \omega_H} = -\frac{z_2}{z_1},$$

вход с колеса 4

$$i_{43} = \frac{\omega_4 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = +\frac{z_3}{z_4}.$$

Разделим первое выражение на второе:

$$\left( \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_2 - \omega_H} \right) \bigg/ \left( \frac{\omega_4 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} \right) = \left( -\frac{z_2}{z_1} \right) \bigg/ \left( +\frac{z_3}{z_4} \right).$$

Упростив, получим

$$\frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_4 - \omega_H} = -\frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3} = i_{14}^H.$$

Преобразовав, приведем к виду

$$\omega_H = \frac{1}{1 - i_{14}^H} \omega_1 - \frac{i_{14}^H}{1 - i_{14}^H} \omega_4.$$

Полученное выражение определяет зависимость угловой скорости выходного звена  $H$  от значений угловых скоростей ведущих звеньев 1 и 4.

План линейных скоростей строится в следующей последовательности. В выбранном масштабном коэффициенте откладываем отрезки  $AA_1$  и  $CC_1$ , изображающие вектора скоростей точек  $A$  и  $C$  (рис. 7.7, а), соответственно, принадлежащие ведущим звеньям 1 и 4. Годографы скоростей точек, принадлежащих звеньям 1 и 4, получим путем соединения точек точки  $A_1$  и  $C_1$  с точкой  $O$ . Соединив точки  $A_1$  и  $C_1$  между собой, найдем годограф скоростей для точек звена 2. Используя свойство годографов, на пересечении отрезка  $A_1C_1$

с прямой  $BB$ , определим положение точки  $B_1$ . Полученный отрезок  $B$  является вектором скорости точки  $B$ , принадлежащей сателлиту 2. Соединив точку  $B_1$  с точкой  $O_1$ , лежащей на геометрической оси водила  $H$ , получим годограф скоростей точек, принадлежащих этому звену. Полученная картина (рис. 7.7, а) и будет являться планом линейных скоростей двухрядного дифференциального зубчатого механизма (рис. 7.7, а).

Для построения плана угловых скоростей двухрядного дифференциального зубчатого механизма спроецируем годографы скоростей звеньев 1, 2, 4 и  $H$  на ось угловых скоростей. Для этого перенесем годографы скоростей таким образом, чтобы они проходили через полюс плана, т. е. точку  $p$ . Полученная картина (рис. 7.7, а) и будет являться планом угловых скоростей двухрядного дифференциального зубчатого механизма.



## 7.7. ЗАМКНУТЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ЗУБЧАТЫЕ МЕХАНИЗМЫ

Для исключения неопределенности движения выходных звеньев схему разделяющего дифференциала как бы «замыкают». Для образования замкнутой схемы необходимо функционально связать между собой выходные звенья. Полученный таким образом механизм называется замкнутым дифференциалом (рис. 7.8, а).

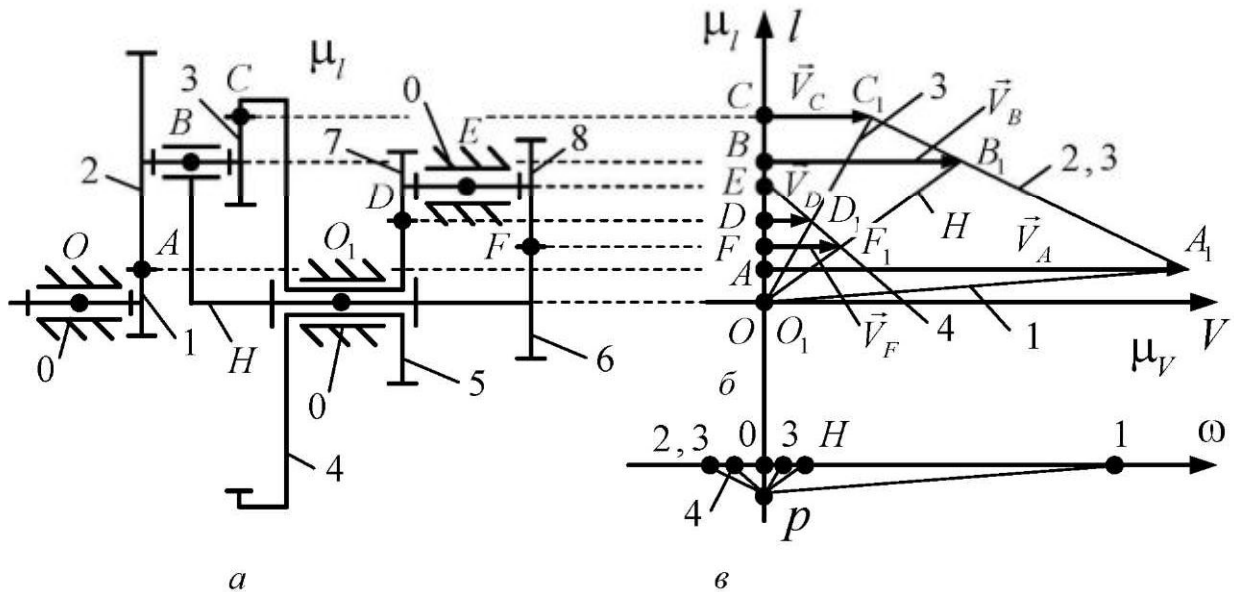


Рис. 7.8. Схема замкнутого дифференциала

*Замкнутый зубчатый дифференциал* – это дифференциальный механизм, в котором выходные звенья соединены друг с другом замыкающей передачей с неподвижными осями вращения колес.

Замкнутые дифференциалы являются многопоточными механизмами, что позволяет реализовать большие передаточные числа при высоком КПД. Замкнутые дифференциальные зубчатые механизмы имеют более сложную структуру и относятся к механизмам с подвижностью, равной единице.

*Структурный анализ.* Структура замкнутого дифференциального механизма (рис. 7.8, а) имеет пять подвижных звеньев 1, 2 – 3, 4 – 5, 7 – 8 и H – 6. Следовательно,  $n = 5$ . Стойка 0 с подвижными звеньями образует пять одноподвижных кинематических пар: 0 – 1, 2 – H, H – 0, 4 – 0, 7 – 0, и четыре высших кинематических пары с подвижностью, равной двум: 1 – 2, 3 – 4, 5 – 7, 8 – 6, тогда  $p_1 = 5$ , а  $p_2 = 4$ . Подставив выявленные значения коэффициентов в формулу Чебышева, будем иметь

$$W = 3 \cdot n - 2 \cdot p_2 - p_4 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 5 - 4 = 1.$$

Результат означает, что для однозначного определения взаимного расположения звеньев замкнутого дифференциального зубчатого механизма (рис. 7.8, а) достаточно одной обобщенной координаты.

*Кинематический анализ.* Для определения передаточного отношения замкнутого дифференциала разделим схему механизма на дифференциальную и замыкающую части.

Передаточное отношение дифференциальной части механизма с использованием формулы Виллиса примет вид

$$i_{14}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_4 - \omega_H} = -\frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3}.$$

Передаточное отношение замыкающей части

$$i_{56} = \frac{\omega_6}{\omega_5} = -\frac{z_7 \cdot z_6}{z_5 \cdot z_8}.$$

С учетом равенств  $\omega_5 = \omega_3$  и  $\omega_6 = \omega_H$  приведем выражение к виду

$$\omega_H = -\omega_5 \frac{z_7 \cdot z_6}{z_5 \cdot z_8}.$$

Подставляя последнее равенство в выражение для передаточного отношения дифференциальной части, получим

$$i_{14} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = -\frac{z_7 \cdot z_6}{z_5 \cdot z_8} - \frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3} \left( 1 + \frac{z_7 \cdot z_6}{z_5 \cdot z_8} \right).$$

Взаимосвязь линейных и угловых скоростей подвижных звеньев замкнутого дифференциального механизма (рис. 7.8, а) наглядно характеризуется при помощи планов линейных (рис. 7.8, а) и угловых скоростей (рис. 7.8, а).

## 7.8. КОРОБКИ ПЕРЕДАЧ

Все сложные зубчатые механизмы рассмотренных видов относятся к механизмам с постоянным передаточным отношением. Однако существует множество машин и устройств, требующих наличия возможности изменения передаточного числа в процессе его работы в требуемых пределах. Механизмы, обладающие подобными возможностями, называются коробками скоростей или передач.

*Коробка* – это сложный зубчатый механизм, обладающий возможностью изменения передаточного отношения в требуемом диапазоне.



Схема типовая коробка состоит из двух рядов зубчатых колес с наличием возможности перемещения блока зубчатых колес 2 и 4 вдоль геометрической оси (рис. 7.9, а).

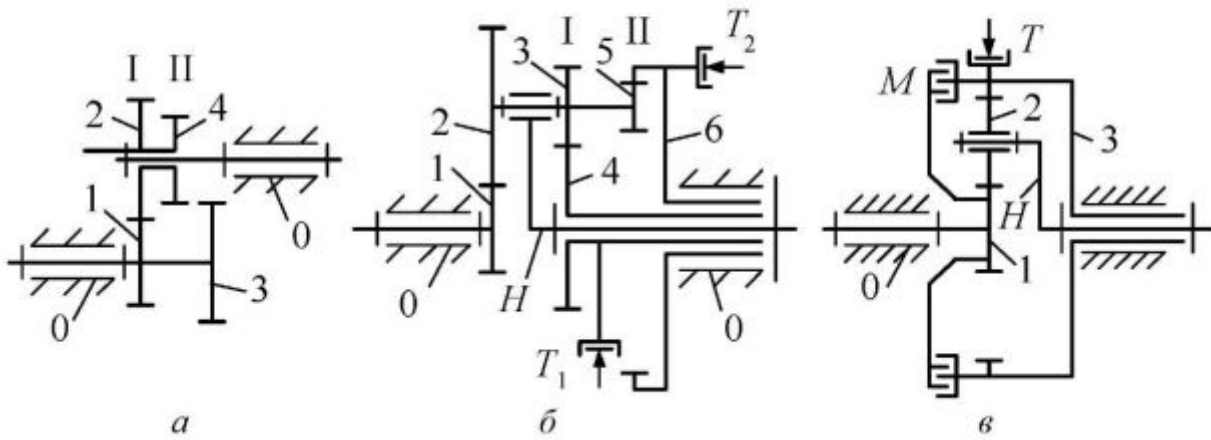


Рис. 7.9. Схемы коробок

В зависимости от ряда колес, находящихся в зацеплении, типовая коробка (рис. 7.9, а) может иметь два значения передаточного отношения:

ряд I

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{z_2}{z_1},$$

ряд II

$$i_{34} = \frac{\omega_3}{\omega_4} = -\frac{z_4}{z_3}.$$

Изменение значений передаточного отношения в более широком диапазоне можно реализовать в коробках, построенных на основе планетарных механизмов (рис. 7.9, б). Планетарная коробка снабжена элементами управления, в качестве которых выступают тормоза  $T_1$  и  $T_2$ . В зависимости от включенного тормоза, получается ряд I или II.

Ряд I – при включении тормоза  $T_1$  колесо 4 становится неподвижным, а колесо 6 вращается вхолостую, при этом передаточное отношение

$$i_{1H}^4 = 1 - i_{14}^H = 1 - \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(-\frac{z_4}{z_3}\right) = 1 - \frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3}.$$

Ряд II – при включении тормоза  $T_2$  колесо 6 становится неподвижным, а колесо 4 вращается вхолостую, при этом передаточное отношение

$$i_{1H}^4 = 1 - i_{14}^H = 1 - \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(+\frac{z_6}{z_5}\right) = 1 + \frac{z_2 \cdot z_6}{z_1 \cdot z_5}.$$

Реализация передаточных чисел в еще более широком диапазоне возможна с помощью дифференциальных коробок. Дифференциальные коробки

(рис. 7.9, в) обладают возможностью изменения передаточного отношения без разрыва потока механической энергии при малых габаритах. Для образования коробки передач в схему дифференциала вводятся управляющие устройства, в качестве которых помимо муфты  $M$  выступает тормоз  $T$ . При включенном тормозе  $T$  и выключенной муфте  $M$  происходит остановка колеса 3, а механизм преобразуется в планетарный однорядный механизм с одним внешним и одним внутренним зацеплением. При включенной муфте  $M$  и выключенном тормозе  $T$  весь механизм вращается как единое целое. При одновременном включении муфты  $M$  и тормоза  $T$  механизм теряет свою работоспособность.

## 7.9. ВОЛНОВЫЕ МЕХАНИЗМЫ

*Волновой зубчатый механизм* – это механизм с высшими кинематическими парами, содержащий в своей структуре сочетание жестких и гибких зубчатых колес.

Из определения следует, что структура механизмов данного вида содержит хотя бы одно зубчатое колесо, выполненное в виде тонкостенной оболочки, что позволяет этому звену испытывать упругие деформации в процессе зацепления с жесткими зубчатыми колесами. Наличие возможности упругой деформации одного из зубчатых колес позволяет сократить их количество.

Типовые волновые зубчатые механизмы могут быть получены вследствие модификации типовых планетарных механизмов (рис. 7.10).

Структура рассматриваемого волнового механизма (рис. 7.10) состоит из стойки 0 и подвижных звеньев. При этом стойка представлена двумя шарнирно неподвижными опорами. В то же время зубчатое колесо 4 является неподвижной короной и также относится к элементам стойки 0. К подвижным звеньям относятся: ведущий вал 1; карданный механизм 2; зубчатое колесо (сателлит) 3 и водило  $H$ .

Волновые механизмы являются реверсивными, могут работать в режиме редуктора или мультипликатора и обладают, аналогично планетарным механизмам, тремя видами передаточных отношений.

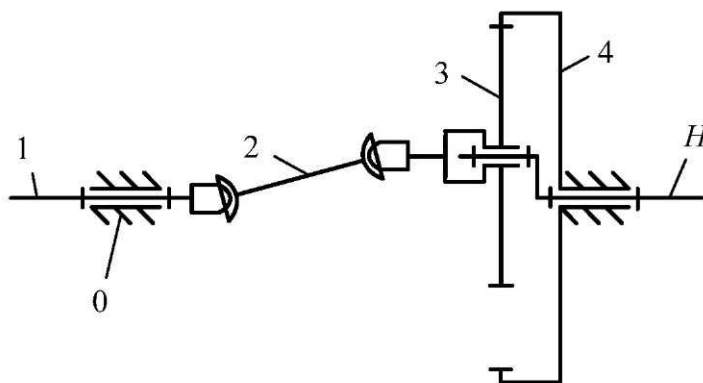


Рис. 7.10. Схема типового волнового механизма



Передаточные отношения волнового зубчатого механизма ([рис. 7.10](#)) определяются по формуле Виллиса, тогда, применив метод обращенного движения, получим

$$i_{3H}^{(4)} = 1 - i_{34}^{(H)} = 1 - \frac{z_4}{z_3} = \frac{z_3 - z_4}{z_3},$$

где  $i_{3H}^{(4)}$ ,  $i_{34}^{(H)}$  – прямое и внутреннее передаточные отношения;  $z_3$ ,  $z_4$  – числа зубьев зубчатых колес волнового зубчатого механизма.

Обратное передаточное отношение волнового механизма ([рис. 40](#))

$$i_{H3}^{(4)} = \frac{1}{i_{3H}^{(4)}} = \frac{1}{1 - \frac{z_4}{z_3}} = \frac{z_3}{z_3 - z_4}.$$

Анализ полученных выражений показывает, что число зубьев короны 4 всегда больше числа зубьев сателлита 3, т. е.  $z_4 > z_3$ . Следовательно, прямое и обратное передаточные отношения волнового механизма ([рис. 7.10](#)) будут отрицательными.

Карданный вал 2 реализован в виде универсального шарнира, являющегося шарниром Гука. Шарнир Гука предназначен для передачи вращательного движения и силовых факторов между сателлитом 3 и входным валом 1 при значительных перекосах осей вращения этих звеньев. Наличие шарнира Гука в структуре волнового механизма усложняет его структуру вследствие образования дополнительных кинематических пар, что снижает точность и надежность волнового механизма ([рис. 7.10](#)).

Исключение данных недостатков при наличии возможности реализации еще больших передаточных чисел возможно, если сателлит 3 сделать в виде гибкого зубчатого колеса. В этом случае водило  $H$  будет являться генератором волн, т. к. при его вращении зона зацепления зубьев колес перемещается, создавая последовательную волновую деформацию сателлита 3. Генератор волн выполняется в виде рычага, снабженного деформирующими элементами. В качестве деформирующих элементов применяются ролики (силовые механизмы) или кулачки специальной формы (кинематические механизмы). В зависимости от числа деформирующих элементов генератора волн, волновые зубчатые механизмы делятся на двухволновые ([рис. 7.11, а](#)) и многоволновые ([рис. 7.11, б](#)).

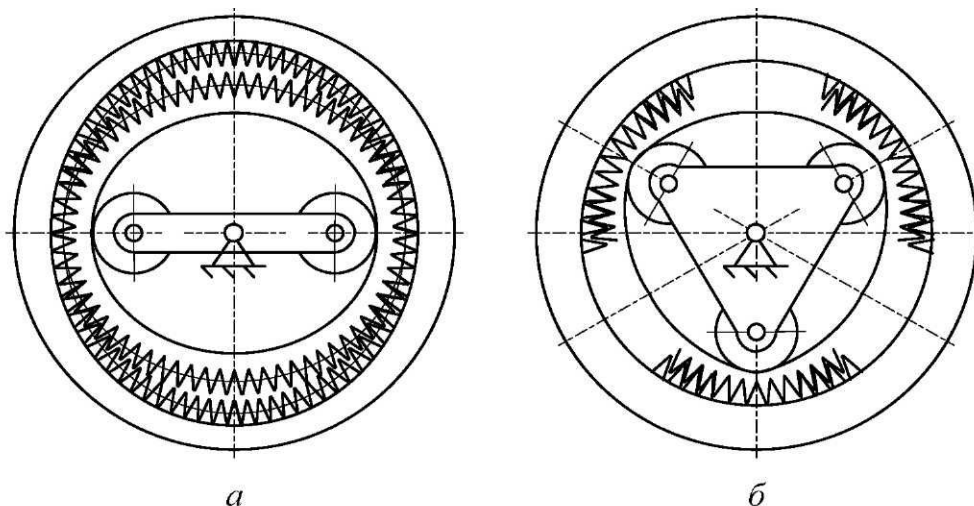


Рис. 7.11. Схемы двух- (*a*) и многоволновых (*б*) волновых механизмов

Волновые механизмы обладают рядом достоинств, что определило распространение механизмов данного вида практически во всех видах машин. Основным достоинством механизмов данного вида является наличие малой разности чисел зубьев  $\Delta z$  колес, его образующих. Чем меньше разность чисел зубьев, тем большим передаточным числом обладает волновой зубчатый механизм. Чтобы получить такое же передаточное число при помощи сложных зубчатых механизмов с неподвижными осями вращения колес, потребуется гораздо большее количество зубчатых колес. Малая разность чисел зубьев колес приводит к существованию многопарного зацепления, что существенно повышает нагрузочную способность волновых механизмов и позволяет обеспечить большие значения КПД. Однако использование эвольвентных зубчатых колес, обладающих  $\Delta z = 2-3$ , невозможно, т. к. это приводит к возникновению интерференции профилей зубьев колес. Для схемы волнового механизма, представленного на [рис. 7.10](#), интерференция отсутствует при  $\Delta z \geq 7$ .



## 8. СИНТЕЗ ЗУБЧАТЫХ МЕХАНИЗМОВ

*Синтез зубчатых механизмов* – это процесс поиска начальных (сопряженных) профилей зубьев, формирующих геометрические параметры звеньев зубчатого механизма с целью обеспечения заданных условий.

Синтез зубчатых механизмов выполняется в два этапа: структурный синтез и метрический синтез.

На этапе структурного синтеза осуществляется формирование структурной схемы механизма, т. е. обосновываются число подвижных звеньев и видов движений, ими совершаемых; количество элементов стойки; число, класс и подвижность кинематических пар; количество и вид кинематических цепей, а также дополнительно обосновывается введение в структуру механизма каждой избыточной связи и местной подвижности. Для типовых зубчатых механизмов данная задача сводится к выбору структурной схемы из набора схем типовых механизмов, исходя из заданных условий. Основное внимание уделяется возможности реализации заданного передаточного числа и взаимному расположению осей входного и выходного звеньев.

Этап метрического синтеза предусматривает определение геометрических параметров зубчатых колес, формирующих качественные показатели зубчатого механизма, а также обеспечивающих выполнение основных условий работоспособности механизмов данного вида.

Ниже приведены условия метрического синтеза зубчатых механизмов.

1. *Основное условие синтеза.* Данное условие заключается в обеспечении заданного закона движения выходного звена, т. е. фактический закон движения выходного звена должен отличаться от заданного с наименьшей погрешностью, что обеспечивается постоянством передаточного отношения простого зубчатого механизма:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \text{const.}$$

2. *Обязательное условие синтеза.* Данное условие подразумевает обеспечение существования зубчатого механизма как замкнутой кинематической цепи, т. е. законы движения ведомых колес механизма не должны иметь разрывов, а начальные профили зубьев должны только соприкасаться. Наличие разрывов в законах движения звеньев говорит о потере контакта элементов высшей кинематической пары, а пересечение начальных профилей свидетельствует о существовании интерференции профилей зубьев колес.

3. *Желательное условие синтеза.* Данное условие подразумевает обеспечение преобразования движения и силовых факторов с наименьшими потерями, т. е. коэффициент полезного действия зубчатого механизма должен быть максимально возможным.

Метрический синтез зубчатых механизмов предполагает выполнение и других требований и условий, учитывающих специфику состава структуры и условий эксплуатации каждого конкретного механизма. К подобным условиям относятся: простота конструкции и технологичность звеньев; наличие

полной или частичной взаимозаменяемости звеньев; возможность регулирования межосевого расстояния или изменения передаточной функции в заданном диапазоне; бесшумность работы; минимальные габариты и др.

## 8.1. СИНТЕЗ ЗУБЧАТЫХ МЕХАНИЗМОВ С НЕПОДВИЖНЫМИ ОСЯМИ КОЛЕС

В большинстве случаев на этапе структурного синтеза осуществляется выбор структурной схемы из набора типовых схем простых зубчатых механизмов, исходя из заданного расположения осей входного и выходного звеньев. При параллельном расположении осей данных звеньев принимается схема цилиндрического механизма, при пересекающихся осях – конического, а при скрещивающихся осях используются червячные механизмы.

На этапе метрического синтеза цилиндрических механизмов число зубьев шестерни 1 выбирается исходя из условия отсутствия интерференции или подреза зубьев колес с внешними зубьями:

$$z_1 \geq z_{\min},$$

где при угле профиля  $\alpha = 20^\circ$  минимально возможное число зубьев  $z_{\min} = 17$ .

Число зубьев колеса 2 определим по выражению

$$z_2 = z_1 \cdot u_{12}.$$

где  $u_{12}$  – передаточное число простого зубчатого механизма.

При определении чисел зубьев цилиндрических зубчатых механизмов с внутренним зацеплением колес ([рис. 6.3](#)) в дополнение к предшествующему условию необходимо учесть и условия отсутствия заклинивания зубьев колес во внутреннем зацеплении, т. е.

$$\begin{aligned} z_{в.з} &\geq 20, \\ z_{вн.з} &\geq 85, \\ (z_{вн.з} - z_{в.з}) &\geq 8. \end{aligned}$$

где  $z_{в.з}$ ,  $z_{вн.з}$  – число зубьев колес с внешними и внутренними зубьями соответственно.

На этапе метрического синтеза сложных зубчатых механизмов с неподвижными осями вращения колес производится представление заданного передаточного числа в виде произведения передаточных чисел простых зубчатых механизмов, составляющих сложный механизм. Числа зубьев колес каждого простого механизма определяются в зависимости от вида зацепления по аналогии с предшествующими случаями.

В качестве примера рассмотрим определение чисел зубьев колес сложных однорядных и многорядных механизмов.

*Сложный однорядный механизм ([рис. 8.1, а](#)).* Выразим передаточное отношение механизма через числа зубьев колес, его образующих:



$$i_{13} = i_{12} \cdot i_{23} = \left( -\frac{z_2}{z_1} \right) \cdot \left( +\frac{z_3}{z_2} \right) = -\frac{z_3}{z_1}.$$

Из данного выражения получаем

$$z_3 = i_{13} \cdot z_1.$$

Передаточное отношение простого механизма, образованного колесами 1 и 2, представим в виде

$$z_2 = i_{12} \cdot z_1.$$

При условии отсутствия интерференции или подреза зубьев колес с внешними зубьями выбираем число зубьев шестерни 1. Далее по полученным выражениям определяем числа зубьев колес 2 и 3. Найденные значения проверяем по условию отсутствия заклинивания зубьев во внутреннем зацеплении.

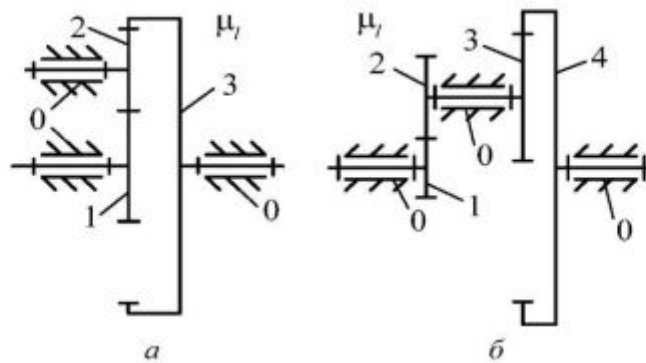


Рис. 8.1. Схемы сложных зубчатых механизмов с неподвижными осями вращения зубчатых колес

*Сложный многорядный механизм (рис. 8.1, б).* Выразим передаточное отношение механизма через числа зубьев колес его образующих:

$$i_{14} = i_{12} \cdot i_{34} = \left( -\frac{z_2}{z_1} \right) \cdot \left( +\frac{z_4}{z_3} \right).$$

Передаточное отношение простого механизма, образованного колесами 1 и 2, представим в виде

$$z_2 = i_{12} \cdot z_1,$$

Передаточное отношение простого механизма, образованного колесами 3 и 4, представим в виде

$$z_4 = i_{34} \cdot z_3.$$

При условии отсутствия интерференции или подреза зубьев колес с внешними зубьями выбираем число зубьев шестерни 1, а при условии отсутствия заклинивания зубьев во внутреннем зацеплении определяем число зубьев колеса 3. Далее по полученным выражениям определяем числа зубьев колес 2 и 4. Полученные значения проверяем на соответствие заданному передаточному числу зубчатого механизма.

## 8.2. УСЛОВИЯ СИНТЕЗА ПЛАНЕТАРНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Этап структурного синтеза планетарных механизмов заключается в выборе структурной схемы механизма из набора схем типовых механизмов данного вида (рис. 8.4). Метрический синтез типовых планетарных механизмов сводится к подбору чисел зубьев колес, из которых он состоит. Подбор чисел зубьев должен осуществляться с учетом как общих условий синтеза зубчатых механизмов, так и условий, учитывающих специфику структуры механизмов данного вида, т. е. на данном этапе синтеза необходимо обеспечить:

- 1) заданное передаточное число с требуемой точностью;
- 2) соосность входного и выходного звеньев;
- 3) соседство сателлитов;
- 4) сборку механизма;
- 5) отсутствие подреза зубьев колес с внешними зубьями;
- 6) отсутствие заклинивания зубьев колес во внутреннем зацеплении;
- 7) обеспечение минимальных габаритных размеров механизма.

Рассмотрим особенности представленных условий метрического синтеза на примере двухрядного планетарного механизма с одним внешним и одним внутренним зацеплением (рис. 8.2, а).

*Условие 1.* Если точность обеспечения заданного передаточного числа особыми условиями не оговорена, то необходимо обеспечить реализацию передаточного числа с точностью  $\pm 5\%$ , т. е. передаточное отношение спроектированного механизма должно лежать в следующем диапазоне:

$$u_{\phi} = (0,95-1,05) \cdot u_{\tau},$$

где  $u_{\phi}$ ,  $u_{\tau}$  – фактическое и теоретическое (заданное) передаточные числа соответственно.

*Условие 2.* Условие соосности предполагает совпадение осей вращения солнечного колеса 1 и водила  $H$ , что возможно при равенстве межосевых расстояний в обоих рядах зубчатых колес, т. е. межосевых расстояний простых зубчатых механизмов, составляющих рассматриваемый планетарный механизм (рис. 8.2, а):

$$a_I = a_{II},$$

где  $a_I$ ,  $a_{II}$  – межосевые расстояния простых зубчатых механизмов.

Межосевые расстояния простых зубчатых механизмов представим в виде

$$a_I = \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2},$$
$$a_{II} = \frac{d_4}{2} - \frac{d_3}{2},$$

где  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$ ,  $d_4$  – диаметры делительных окружностей колес 1, 2, 3 и 4.



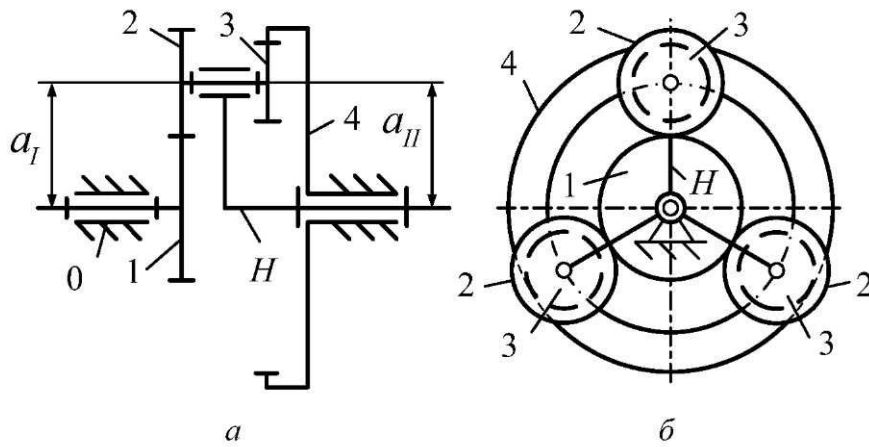


Рис. 8.2. Схема двухрядного планетарного механизма с тремя сателлитами

Приравняв составленные выражения, получим

$$\frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2} = \frac{d_4}{2} - \frac{d_3}{2}.$$

Считая зубчатые колеса планетарного механизма обладающими одинаковыми модулями и выполненными без смещения, т. е. нулевыми, представим выражение в виде

$$\frac{m \cdot z_1}{2} + \frac{m \cdot z_2}{2} = \frac{m \cdot z_4}{2} - \frac{m \cdot z_3}{2}.$$

Упростив данное равенство, получим условием соосности для двухрядного планетарного механизма с одним внешним и одним внутренним зацеплениями (рис. 8.2, а):

$$z_1 + z_2 = z_4 - z_3,$$

где  $z_1, z_2, z_3, z_4$  – числа зубьев колес 1, 2, 3 и 4 соответственно.

По аналогии получим условия соосности для остальных схем типовых планетарных механизмов:

*однорядный планетарный механизм (рис. 7.4, а)*

$$z_4 = z_1 + 2z_2;$$

*двухрядный планетарный механизм с двумя внешними зацеплениями (рис. 7.4, в)*

$$z_1 + z_2 = z_4 + z_3;$$

*двухрядный планетарный механизм с двумя внутренними зацеплениями (рис. 7.4, г)*

$$z_1 - z_2 = z_4 - z_3.$$

*Условие 3.* Условие соседства предполагает обеспечение отсутствия контакта спутников друг с другом. Проверка данного условия выполняется только при числе спутников (потоков) больше единицы. Если в схеме планетарного механизма (рис. 8.2, б) имеется несколько спутников, расположенных на некоторой окружности, то может возникнуть ситуация, когда вершины зубьев колес спутников будут задевать друг друга. Исключение подобного явления возможно при выполнении условия соседства:

$$\sin\left(\frac{\pi}{k}\right) > \frac{z_{\max 2,3} + 2}{z_1 \pm z_2},$$

где  $k$  – число спутников (потоков);  $z_{\max 2,3}$  – большее число зубьев колес спутника.

*Условие 4.* Условие сборки предполагает обеспечение собираемости планетарного механизма. Данное условие проверяется при числе спутников (потоков) больше единицы. В планетарных механизмах установка спутников возможна только в одном и том же положении. Сборка планетарного механизма (рис. 8.2, а), имеющего несколько спутников, выполняется в следующей последовательности: зубья солнечного колеса 1 располагают относительно зубьев короны 4 таким образом, чтобы зубья колес спутника 2–3 входили во впадины колес 1 и 4, позволяя установить первый спутник. После установки первого спутника зубья солнечного колеса 1 и короны 4 расположатся определенным образом относительно зубьев колес спутника 2–3. Установка второго спутника возможна только в этом же положении. Для возобновления позиционирования зубьев солнечного колеса 1 относительно короны 4 с целью установки второго спутника необходимо выполнить поворот водила  $H$  на некоторый угол. В результате солнечное колесо 1 совершит целое число полных оборотов, а первый спутник переместится на угол, значение которого пропорционально числу спутников. При этом зубья солнечного колеса 1 и короны 3 расположатся таким образом, что установка второго спутника станет возможна. Для установки всех последующих спутников процесс повторяется.

Для проверки условия сборки используется следующее выражение:

$$i_{1H}^3 \frac{z_1}{k} (1 + k \cdot p) = B,$$

где  $p$  – число полных оборотов;  $B$  – целое число.

Условие сборки выполняется, если при заданном числе спутников (потоков) и любом значении  $p$  параметр  $B$  равен только целым числам. Если же существует хотя бы одно значение параметра  $p$ , при котором  $B$  является не целым числом, то условие сборки не выполняется и полученный вариант соотношения чисел зубьев колес планетарного механизма является недопустимым, и использовать его для выполнения метрического синтеза планетарного механизма невозможно.



*Условие 5.* Подрезание ножек значительно ослабляет зубья колес с внешними зубьями, что приводит к снижению нагрузочной способности зубчатого механизма. Исключить данное явление возможно при выполнении условия отсутствия интерференции:

$$z_i \geq z_{\min},$$

где  $z_i$ ,  $z_{\min}$  – соответственно, число зубьев  $i$ -го колеса с внешними зубьями и минимальное число зубьев, при котором отсутствует подрезание зубьев; при величине угла профиля  $\alpha = 20^\circ$ , соответственно,  $z_{\min} = 17$ .

*Условие 6.* Интерференция во внутреннем зацеплении колес приводит к заклиниванию зубьев одного колеса во впадинах другого колеса. Отсутствие заклинивания зубьев во внутреннем зацеплении обеспечивается при выполнении следующего ряда условий:

$$\begin{aligned} z_{в.з} &\geq 20; \\ z_{вн.з} &\geq 85; \\ (z_{вн.з} - z_{в.з}) &\geq 8. \end{aligned}$$

*Условие 7.* Данное условие используется для принятия окончательного решения при наличии нескольких вариантов сочетания чисел зубьев колес планетарного механизма, удовлетворяющих условиям 1–6. В этом случае наиболее предпочтительным считается тот вариант, который позволит планетарному механизму иметь минимально возможные габариты при сохранении способности выполнения служебного назначения и соблюдения условий синтеза зубчатых механизмов и дополнительных условий синтеза планетарных механизмов 1–6.

### 8.3. СИНТЕЗ ОДНОРЯДНЫХ ПЛАНЕТАРНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Определение чисел зубьев колес однорядного планетарного механизма ([рис. 7.4, а](#)) выполняем в нижеприведенной последовательности:

Согласно [условию 1](#), выражаем внутреннее передаточное отношение:

$$i_{14}^H = \frac{z_4}{z_1}.$$

Преобразуем полученное равенство в виде

$$z_4 = i_{14}^H \cdot z_1.$$

По условию соосности 2 составим равенство

$$z_4 = z_1 + 2z_2.$$

Подставив в полученное равенство предшествующее выражение и преобразовав его, получим

$$z_2 = \frac{z_1}{2}(i_{14}^H - 1).$$

Из условия 5 выбираем число зубьев солнечного колеса 1. Затем по полученным выражениям определяем числа зубьев сателлита 2 и короны 4. Полученные данные проверяем на выполнение [условий 6, 3 и 4](#). Если [условиям 6, 3 и 4](#) удовлетворяют несколько сочетаний чисел зубьев колес, то проводим их сравнение по [условию 7](#). Окончательно выбираем тот вариант сочетания чисел зубьев, при котором обеспечиваются минимально возможные габариты для однорядного планетарного механизма.

## 8.4. МЕТОД СОМНОЖИТЕЛЕЙ

Одним из методов определения чисел зубьев колес двухрядных планетарных механизмов является метод сомножителей, который позволяет объединить в расчетные формулы условия подбора [1, 2, 5 и 6](#). Выполнение остальных условий ([3, 4, 7](#)) для выбранных сочетаний чисел зубьев проверяется дополнительно.

Из [условия 1](#) выражаем внутреннее передаточное отношение двухрядных планетарных механизмов ([рис. 7.4, б-г](#)):

$$i_{14}^H = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_4}{z_3}.$$

Выражаем числа зубьев колес через сомножители:

$$A = z_1; \quad B = z_2; \quad C = z_3; \quad D = z_4.$$

Сомножители могут быть произвольными целыми числами, соотношение которых должно быть равно внутреннему передаточному отношению двухрядного планетарного механизма:

$$i_{14}^H = \frac{B}{A} \cdot \frac{D}{C}.$$

Для схем двухрядных планетарных механизмов необходимо, чтобы значения сомножителей обеспечивали соотношения для передаточных отношений простых зубчатых механизмов в зависимости от вида зацепления:



*внешнее зацепление*

$$\frac{B}{A} = \frac{z_2}{z_1} = (1-6);$$

*внутреннее зацепление*

$$\frac{D}{C} = \frac{z_4}{z_3} = (1,1-8).$$

Из [условия 2](#) выразим через сомножители условие соосности планетарных механизмов:

*двухрядный планетарный механизм с одним внешним зацеплением и одним внутренним зацеплением (рис. 7.4, а)*

$$A + B = D - C;$$

*двухрядный планетарный механизм с двумя внешними зацеплениями (рис. 7.4, в)*

$$A + B = D + C;$$

*двухрядный планетарный механизм с двумя внутренними зацеплениями (рис. 7.4, г)*

$$A - B = D - C.$$

Сохраняя тождества, введем в условия соосности два дополнительных сомножителя:

*двухрядный планетарный механизм с одним внешним зацеплением и одним внутренним зацеплением (рис. 7.4, а)*

$$a(A + B) = b(D - C),$$

где

$$a = (D - C),$$

$$b = (A + B);$$

*двухрядный планетарный механизм с двумя внешними зацеплениями (рис. 7.4, в)*

$$a(A + B) = b(D + C),$$

где

$$a = (D + C),$$

$$b = (A + B);$$

*двухрядный планетарный механизм с двумя внутренними зацеплениями*  
(рис. 7.4, з)

$$a(A - B) = b(D - C),$$

где

$$a = (D - C),$$

$$b = (A - B).$$

Проведя соответствующие преобразования, получим

$$z_1 = a \cdot A \cdot q, \quad z_2 = a \cdot B \cdot q, \quad z_3 = b \cdot C \cdot q, \quad z_4 = b \cdot D \cdot q,$$

где  $q$  – произвольный множитель, обеспечивающий выполнение условий [5](#) и [6](#).

Зубья колес двухрядных планетарных механизмов, рассчитанные по полученным выражениям, удовлетворяют [условиям 1, 2, 5 и 6](#). Затем проверяем условие соседства [3](#) и в случае его выполнения проверяем условие сборки [4](#). Если эти условия выполняются, то полученный вариант сочетаний чисел зубьев колес считаем одним из возможных решений. Если [условиям 3 и 4](#) удовлетворяют несколько сочетаний чисел зубьев, то проводим их сравнение по [условию 7](#). Окончательным считается тот вариант сочетания чисел зубьев, при котором обеспечивает минимально возможные габаритные размеры двухрядных планетарных механизмов.

## **8.5. ОПТИМИЗАЦИЯ ПРИ СИНТЕЗЕ ЗУБЧАТЫХ МЕХАНИЗМОВ**

Оптимизация при синтезе механизмов применяется с целью повышения эффективности обоих этапов синтеза.

Применение ПЭВМ на этапах как структурного, так и метрического синтеза зубчатых механизмов с неподвижными осями вращения колес позволяет за относительно короткий промежуток времени получить большое количество возможных решений. Сопоставляя варианты полученных решений, обеспечивающих сочетания чисел зубьев колес, определяется тот вариант, который наилучшим образом удовлетворяет заданным условиям, выступающим в качестве критериев оптимизации. При этом перебор вариантов чисел зубьев колес выполняется в пределах заданных ограничений по какой-то определенной стратегии. Программы оптимального синтеза могут или использовать метод сомножителей или применять перебор допустимых значений соответствующих параметров и осуществлять их проверку на соответствие



заданным условиям или принятым критериям. Использование ПЭВМ на обоих этапах синтеза однорядных и многорядных планетарных механизмов позволяет сократить время синтеза механизмов рассматриваемого вида и повысить качество полученных результатов.

## 9. КУЛАЧКОВЫЕ МЕХАНИЗМЫ

*Кулачковый механизм* – это механизм с высшей кинематической парой, обладающий возможностью обеспечения выстоев выходного звена, а структура содержит хотя бы одно звено с рабочей поверхностью переменной кривизны.

Кулачковые механизмы предназначены для преобразования движения ведущего звена в требуемый вид движения выходного звена согласно заданному закону.

Схема типового кулачкового механизма имеет структуру, содержащую стойку и два подвижных звена (рис. 9.1). При этом в кулачковом механизме при двух подвижных звеньях можно реализовать преобразование движения и силовых факторов по закону любой сложности.

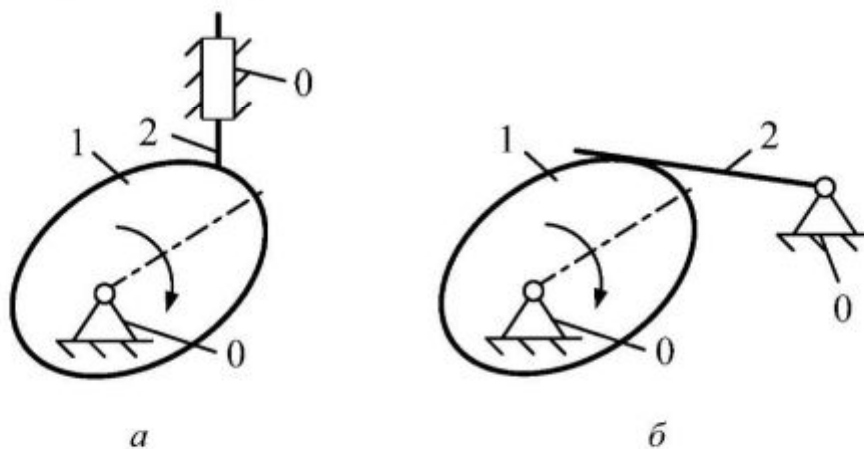


Рис. 9.1. Кинематические схемы кулачковых механизмов

В типовых схемах кулачковых механизмов ведущее звено называется *кулачком*, а в качестве выходного звена выступает *толкатель* (рис. 9.1, а) или *коромысло* (рис. 9.1, б).

*Кулачок* – это звено кулачкового механизма, имеющее рабочую поверхность переменной кривизны.

*Толкатель* – это выходное звено кулачкового механизма, совершающее поступательные движения.

*Коромысло* – это выходное звено кулачкового механизма, совершающее только вращательные движения и не имеющее возможности осуществления поворота на угол более  $360^\circ$ .

В кулачковых механизмах преобразование движения и силовых факторов осуществляется путем непосредственного касания рабочей поверхности кулачка с поверхностью выходного звена. В этом случае вследствие разности скоростей движения контактирующих звеньев в зоне их контакта имеет место трение скольжения, что приводит к интенсивному износу этих поверхностей, а также к росту потерь, уменьшению КПД и ресурса работы кулачкового механизма. Для замены в высшей кинематической паре трения скольжения на трение качения в схему кулачкового механизма вводят дополнительное звено, которое называется роликом. Ролик образует с выходным звеном одноподвижную кинематическую пару 5-го класса (рис. 9.2). Подвижность этой



кинематической пары не оказывает влияния на передаточную функцию кулачкового механизма и является местной подвижностью.

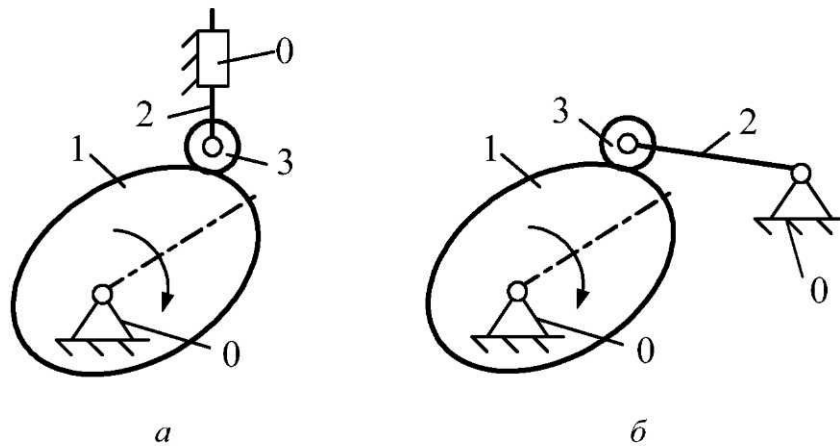


Рис. 9.2. Кинематические схемы кулачковых механизмов с роликом

При введении в схему дополнительного звена – ролика – преобразование движения и силовых факторов осуществляется посредством соприкосновения рабочей поверхности кулачка с поверхностью ролика, который взаимодействует с выходным звеном. В этом случае кулачок имеет два вида профилей (рис. 9.3): конструктивный и теоретический.

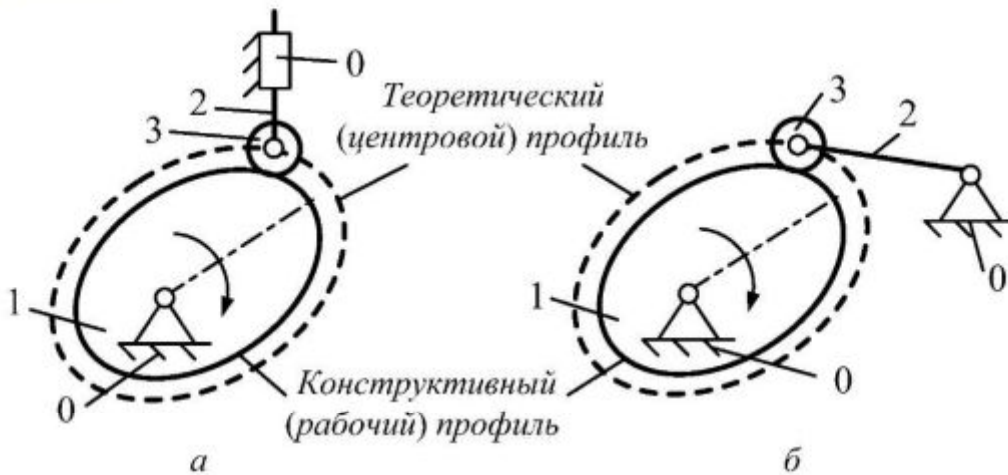


Рис. 9.3. Виды профилей кулачка в кулачковых механизмах

*Конструктивный (рабочий) профиль* – это наружный профиль кулачка.  
*Теоретический (центральной) профиль* – это профиль, который описывает центр ролика при его перекатывании без скольжения по конструктивному профилю кулачка.

## 9.1. КЛАССИФИКАЦИЯ КУЛАЧКОВЫХ МЕХАНИЗМОВ

Кулачковые механизмы классифицируются:

1) по служебному назначению:

кулачковые механизмы, обеспечивающие перемещение выходного звена по заданному закону движения;

кулачковые механизмы, обеспечивающие только заданное максимальное перемещение выходного звена (ход толкателя или угол размаха коромысла);

2) по расположению звеньев в пространстве:

плоские кулачковые механизмы ([рис. 9.1](#), [рис. 9.2](#));

пространственные кулачковые механизмы ([рис. 9.4](#));

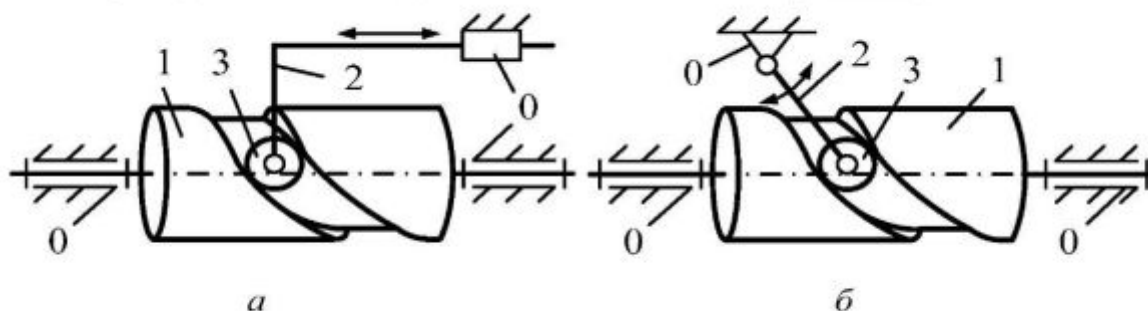


Рис. 9.4. Схемы пространственных кулачковых механизмов

3) по виду движения кулачка:

кулачковые механизмы с вращательным движением кулачка ([рис. 9.2](#));

кулачковые механизмы с поступательным движением кулачка ([рис. 9.5](#));

кулачковые механизмы с винтовым движением кулачка;

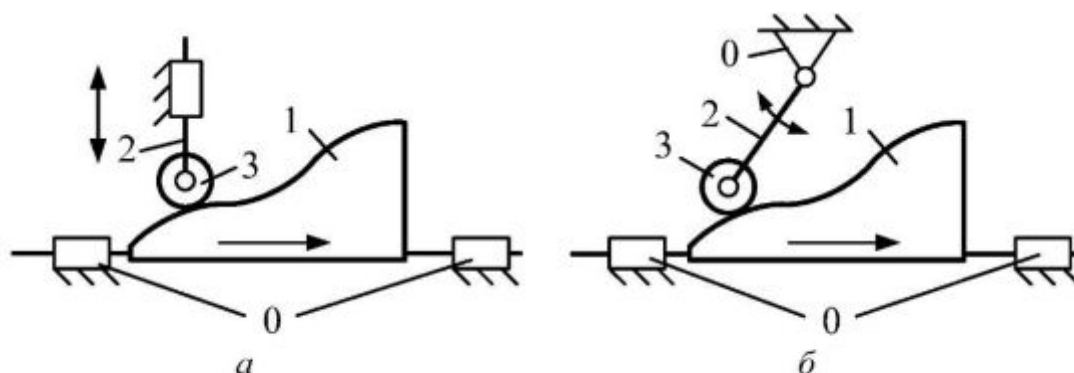


Рис. 9.5. Схемы кулачковых механизмов с поступательным движением кулачка

4) по виду движения выходного звена:

кулачковые механизмы с поступательным движением выходного звена ([рис. 9.1, а](#), [рис. 9.2, а](#), [рис. 9.4, а](#), [рис. 9.5, а](#));

кулачковые механизмы с вращательным движением выходного звена ([рис. 9.1, б](#), [рис. 9.2, б](#), [рис. 9.4, б](#), [рис. 9.5, б](#));

5) по наличию ролика в составе схемы:

кулачковые механизмы с роликом ([рис. 9.2](#), [рис. 9.4](#), [рис. 9.5](#));

кулачковые механизмы с без ролика ([рис. 9.1](#));

6) по виду кулачка:

кулачковые механизмы с плоским кулачком ([рис. 9.1](#), [рис. 9.2](#), [рис. 9.5](#));

кулачковые механизмы с цилиндрическим кулачком ([рис. 9.4](#));

кулачковые механизмы с глобоидным кулачком ([рис. 9.6, а](#));

кулачковые механизмы со сферическим кулачком ([рис. 9.6, б](#));



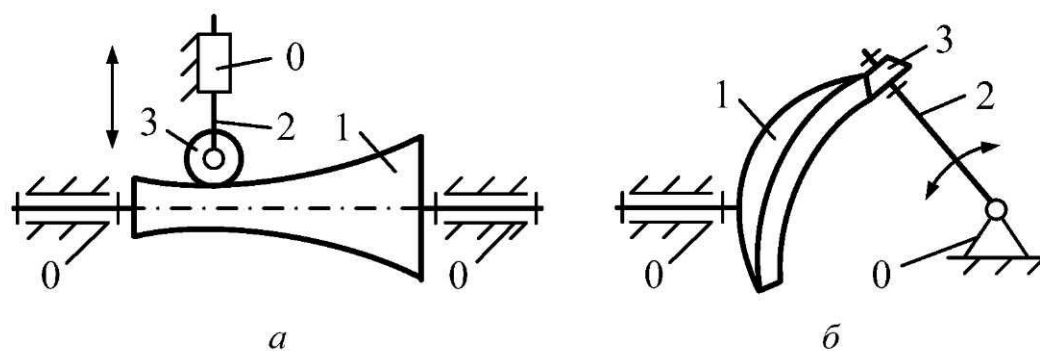


Рис. 9.6. Схемы кулачковых механизмов с глобоидным и сферическим кулачками

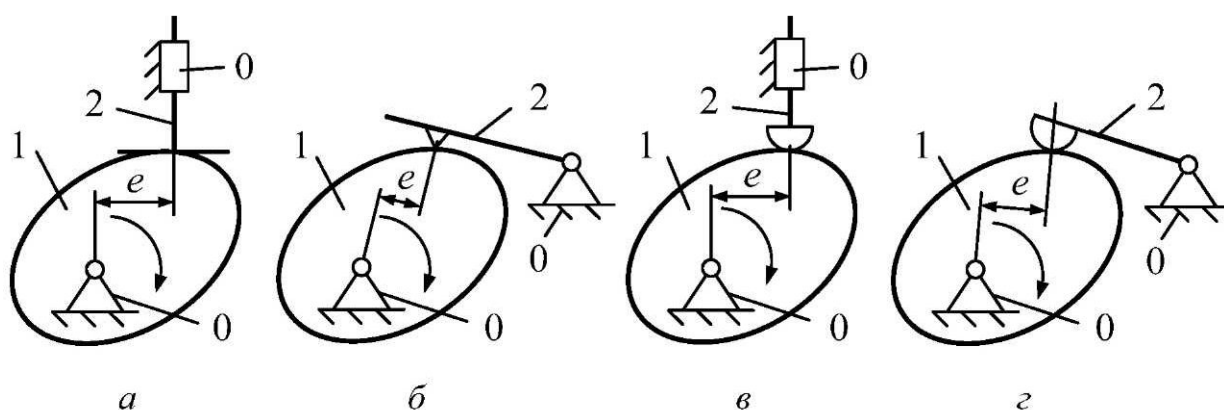


Рис. 9.7. Схемы дезаксиальных кулачковых механизмов

7) по форме рабочей поверхности выходного звена:

кулачковые механизмы с заостренной рабочей поверхностью выходного звена ([рис. 9.1, а](#), [рис. 9.7, б](#), [рис. 9.8, б](#));

кулачковые механизмы с плоской рабочей поверхностью выходного звена ([рис. 9.7, а](#), [рис. 9.8, а](#));

кулачковые механизмы с цилиндрической рабочей поверхностью выходного звена ([рис. 9.2](#));

кулачковые механизмы со сферической рабочей поверхностью выходного звена ([рис. 9.7, в, г](#), [рис. 9.8, в, г](#));

8) по наличию смещения:

дезаксиальные кулачковые механизмы ([рис. 9.7](#));

аксиальные кулачковые механизмы ([рис. 9.8](#)).

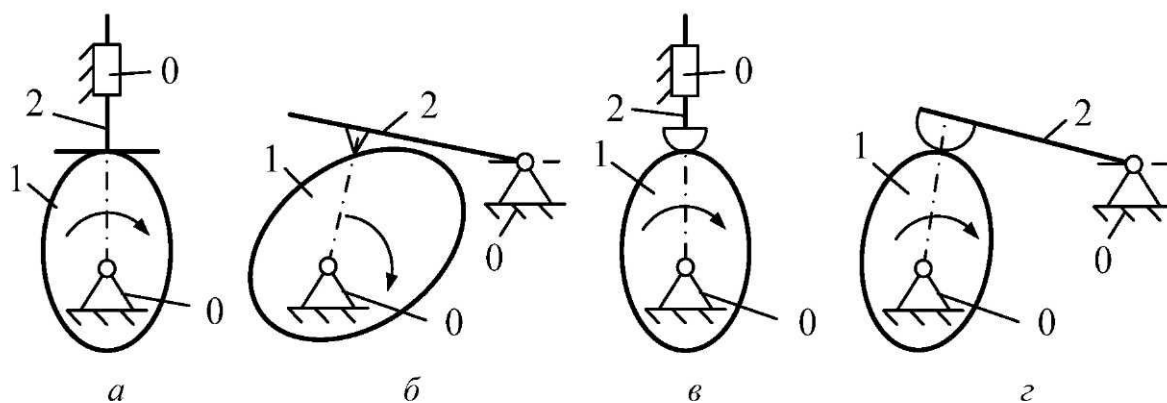


Рис. 9.8. Схемы аксиальных кулачковых механизмов

*Дезаксиальный кулачковый механизм* – это кулачковый механизм, в котором ось пути выходного звена смещена относительно центра вращения кулачка на некоторую величину (рис. 9.7). Величина смещения называется эксцентриситет, или дезаксиал, и обозначается  $e$ .

*Аксиальный кулачковый механизм* – это кулачковый механизм, в котором ось пути выходного звена проходит через центр вращения кулачка (рис. 9.8).

## 9.2. СПОСОБЫ ЗАМЫКАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ВЫСШЕЙ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ПАРЫ

В процессе движения кулачковых механизмов возможна ситуация приводящая к потере контакта подвижных звеньев, что приводит к размыканию элементов высшей кинематической пары. Размыкание элементов высшей кинематической пары приводит к прекращению ее существованию, что отражается на законе движения звеньев в виде наличия разрывов и недопустимо для нормальной работы кулачковых механизмов. Для обеспечения постоянства контакта звеньев, образующих высшую кинематическую пару, в кулачковых механизмах используются следующие способы замыкания:

*Силовое замыкание* – это способ обеспечения постоянства контакта звеньев высшей кинематической пары посредством использования сил тяжести звеньев или сил упругости пружин (рис. 9.9).

В кулачковых механизмах с силовым замыканием звеньев, образующих высшую пару, движение выходного звена на фазе удаления осуществляется за счет воздействия контактной поверхности кулачка на контактную поверхность выходного звена, т. е. ведущим звеном является кулачок, а ведомым звеном – выходное звено: толкатель или коромысло. На фазе сближения выходное звено движется вследствие действия силы упругости пружины или силы тяжести выходного звена, т. е. ведущим звеном является выходное звено: толкатель или коромысло, а ведомым звеном – кулачок.



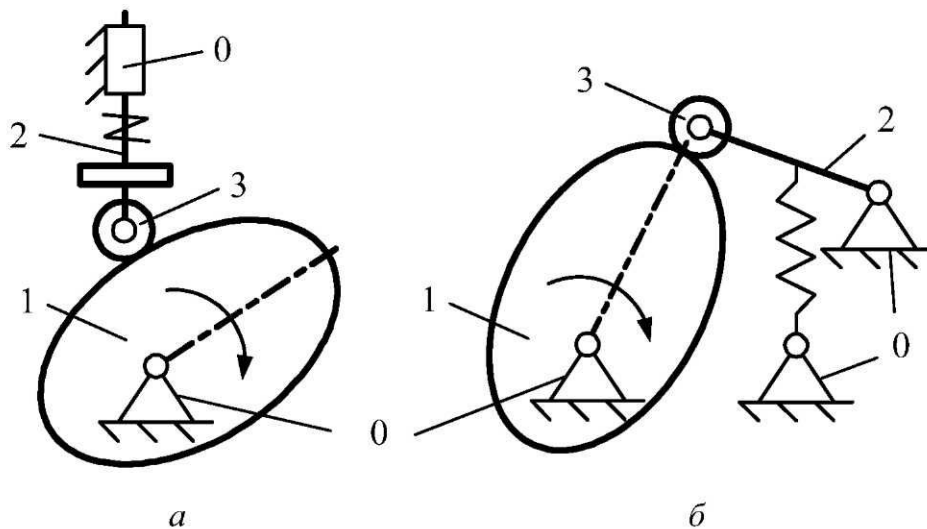


Рис. 9.9. Схемы кулачковых механизмов с силовым замыканием

*Геометрическое замыкание* – это способ обеспечения постоянства контакта звеньев высшей кинематической пары посредством конфигурации рабочих поверхностей кулачка (рис. 9.10).

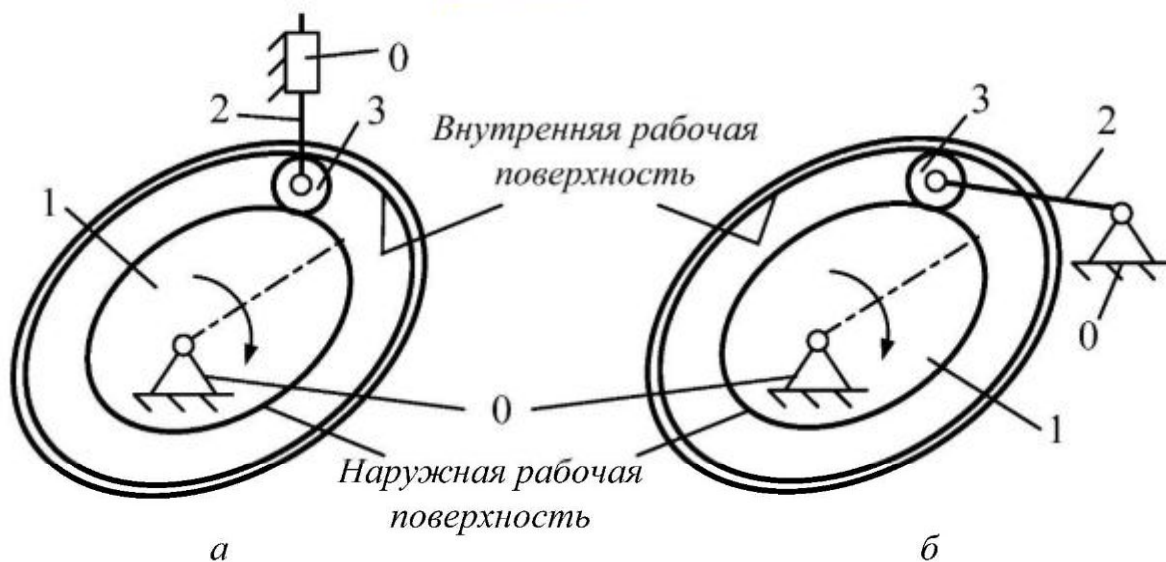


Рис. 9.10. Схемы кулачковых механизмов с геометрическим замыканием

В кулачковых механизмах с геометрическим замыканием звеньев, образующих высшую пару, движение выходного звена на фазе удаления осуществляется за счет воздействия наружной рабочей поверхности кулачка на контактную поверхность выходного звена. Движение выходного звена на фазе сближения является следствием воздействия внутренней рабочей поверхности кулачка на контактную поверхность выходного звена. На обеих фазах ведущим звеном выступает кулачок, а ведомым звеном является выходное звено: толкатель или коромысло.

### 9.3. ОСНОВНЫЕ ПАРАМЕТРЫ КУЛАЧКОВОГО МЕХАНИЗМА

Кулачковые механизмы, образованные на базе типовых схем, относятся к циклоидальным механизмам с периодом работы, равным  $2\pi$ , и характеризуются наличием нескольких фаз движения выходного звена (рис. 9.11):

*фаза удаления* – это фаза движения звеньев кулачковых механизмов, сопровождаемая перемещением выходного звена из нижнего положения в верхнее;

*фаза верхнего стояния или выстоя* – это фаза движения звеньев кулачковых механизмов, сопровождаемая *стоянием или выстоем* выходного звена в верхнем положении;

*фаза сближения* – это фаза движения звеньев кулачковых механизмов, сопровождаемая перемещением выходного звена из верхнего положения в нижнее;

*фаза нижнего стояния или выстоя* – это фаза движения звеньев кулачковых механизмов, сопровождаемая *стоянием или выстоем* выходного звена в нижнем положении.

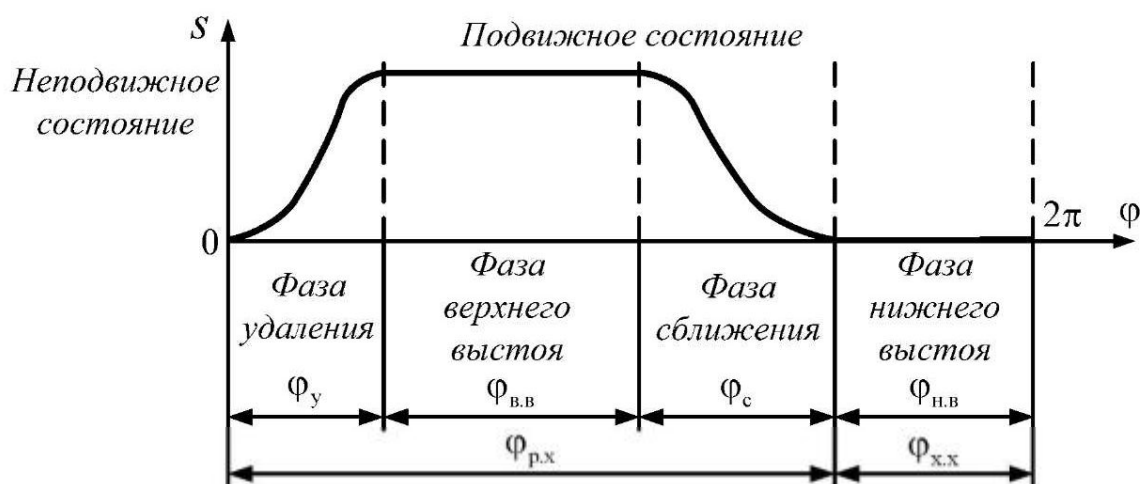


Рис. 9.11. Фазы движения выходного звена кулачковых механизмов

Каждая фаза движения звеньев кулачковых механизмов характеризуется соответствующими двумя видами углов (рис. 9.12):

*фазовый угол  $\varphi$*  – это угол поворота кулачка за время действия определенной фазы движения выходного звена;

*профильный угол  $\delta$*  – это угловая координата рабочей точки теоретического профиля кулачка, соответствующая текущему фазовому углу.

В соответствии с классификацией фаз, фазовые углы делятся на четыре вида (рис. 9.11):

фазовый угол удаления  $\varphi_y$  (рис. 9.12);

фазовый угол верхнего стояния или выстоя  $\varphi_{в.в}$  (рис. 9.12);



фазовый угол сближения  $\varphi_c$  (рис. 9.12);  
 фазовый угол нижнего стояния или выстоя  $\varphi_{н.в}$  (рис. 9.12).

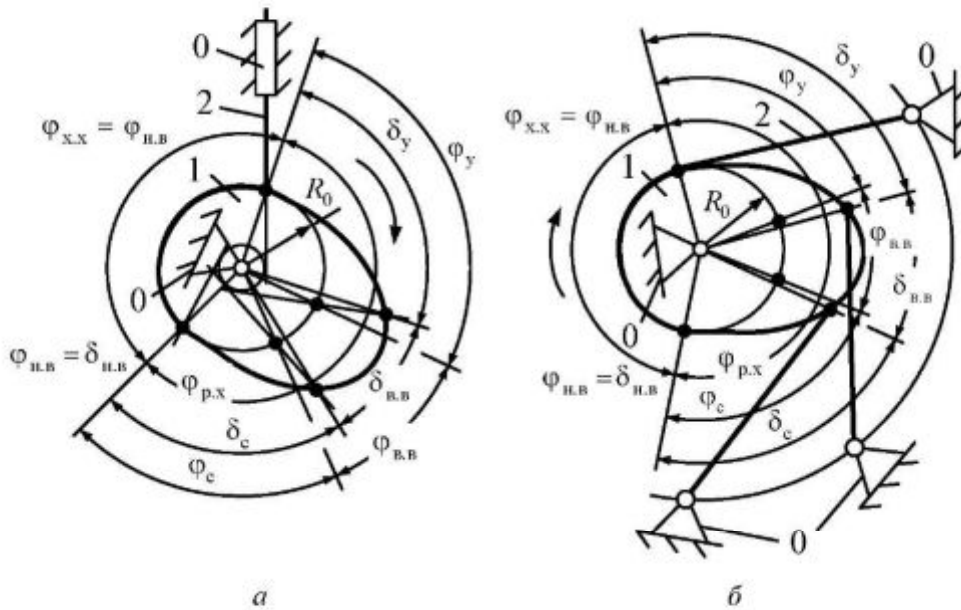


Рис. 9.12. Фазовые и профильные углы кулачковых механизмов

Сумма всех четырех фазовых углов образует цикловой фазовый угол:

$$\varphi = \varphi_y + \varphi_{в.в} + \varphi_c + \varphi_{н.в} = 2\pi.$$

Сумма первых трех фазовых углов составляет фазовый угол рабочего хода кулачкового механизма (рис. 9.11):

$$\varphi_{р.х} = \varphi_y + \varphi_{в.в} + \varphi_c.$$

Фазовый угол холостого хода кулачкового механизма равен фазовому углу нижнего выстоя (рис. 9.11), т. е.

$$\varphi_{х.х} = \varphi_{н.в}.$$

Каждой фазе движения звеньев кулачковых механизмов соответствует свой профильный угол, углы также делятся на четыре вида (рис. 9.12):

- угол удаления  $\delta_y$ ;
- угол верхнего стояния или выстоя  $\delta_{в.в}$ ;
- угол сближения  $\delta_c$ ;
- угол нижнего стояния или выстоя  $\delta_{н.в}$ .

В общем случае фазовый и профильный углы соответствующих фаз движения звеньев типовых кулачковых механизмов не равны друг другу:

$$\varphi \neq \delta.$$

Равенство фазовых и профильных углов соответствующих фаз движения звеньев характерно только на фазе нижнего выстоя (рис. 9.12), а для остальных фаз движения звеньев имеет место только для типовых кулачковых механизмов без ролика.

## 9.4. СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ ПЛОСКИХ КУЛАЧКОВЫХ МЕХАНИЗМОВ

Звенья типовых кулачковые механизмы совершают движения в параллельных плоскостях, следовательно, данные механизмы являются плоскими, подвижность которых рассчитывается по формуле Чебышева.

*Кулачковые механизмы без ролика (рис. 9.1).* Структура обоих видов типовых кулачковых механизмов состоит из трех звеньев, из которых кулачок 1 и толкатель или коромысло 2 являются подвижными звеньями, а стойка 0 – неподвижным звеном, следовательно,  $n = 2$ . Стойка представлена в схеме механизма с толкателем одной шарнирно-неподвижной опорой и неподвижным ползуном, а в схеме механизмов с коромыслом – двумя шарнирно-неподвижными опорами. Подвижные звенья и стойка образуют две вращательные кинематические пары с подвижностью, равной единице:  $0 - 1$ ,  $2 - 0$  и одну высшую кинематическую пару с подвижностью, равной двум:  $1 - 2$ , следовательно,  $p_1 = 2$ ,  $p_2 = 1$ .

Подставив полученные данные в структурную формулу, получим

$$W = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 = 6 - 4 - 1 = 1.$$

Результат означает, что для однозначного определения взаимного расположения звеньев механизмов данного вида достаточно одной обобщенной координаты.

*Кулачковые механизмы с роликом (рис. 9.2).* Схемы обоих кулачковых механизмов состоят из четырех звеньев, из которых кулачок 1, толкатель или коромысло 2 и ролик 3 являются подвижными звеньями, а стойка 0 – неподвижным звеном, следовательно,  $n = 3$ . Стойка представлена в схеме механизма с толкателем одной шарнирно-неподвижной опорой и неподвижным ползуном, а в схеме механизмов с коромыслом – двумя шарнирно-неподвижными опорами. Подвижные звенья и стойка образуют три вращательные кинематические пары с подвижностью, равной единице:  $0 - 1$ ,  $2 - 3$ ,  $3 - 0$  и одну высшую кинематическую пару с подвижностью, равной двум:  $1 - 3$ , следовательно,  $p_1 = 2$ ,  $p_2 = 1$ .

Подставив полученные данные в структурную формулу, получим

$$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 1 = 9 - 6 - 1 = 2.$$

Расчет по формуле Чебышева для типовых кулачковых механизмов с роликом показывает, что подвижность равна двум. Результат говорит о наличии дефектов структуры в схемах типовых кулачковых механизмов с роликом, что свидетельствует о наличии двух видов подвижностей разного функционального назначения. Подвижность типового плоского кулачкового механизма с одним ведущим звеном, образующим первичный механизм с подвижностью, равной единице, равна единице, следовательно, вторая единица подвижности приходится на долю местной подвижности, образованной роликом с выходным звеном:

$$W = 2 = W_0 + W_i = 1 + 1,$$

где  $W_0$ ,  $W_m$  – соответственно, основная (расчетная) и местная подвижность кулачкового механизма.



## 9.5. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКИХ КУЛАЧКОВЫХ МЕХАНИЗМОВ

Для проведения кинематического анализа типовых кулачковых механизмов необходимо знать основные размеры всех его звеньев или закон движения выходного звена.

В общем случае целью кинематического анализа типовых кулачковых механизмов при заданной схеме механизма является определение закона движения выходного звена, а при известных основных размерах всех звеньев – определение закона движения выходного звена.

Закон движения выходного звена определяют как функцию от угла поворота кулачка исходя из особенностей структуры кулачкового механизма и заданных параметров:

$$S = f(\varphi),$$

где  $\varphi$  – угол поворота кулачка.

Данная функциональная зависимость может быть получена аналитическим или графоаналитическим методом. Аналитический метод, как и при анализе механизмов других видов, позволяет получить более точные данные, однако графоаналитический метод более прост и дает наглядный результат, что и обусловило его широкое распространение в инженерных расчетах для получения первичного представления о значениях и закономерностях изменения кинематических параметров кулачковых механизмов исходя из заданных условий.

*Графоаналитический метод* кинематического анализа может осуществляться двумя методами: методом кинематических диаграмм или методом кинематических планов. Метод планов применительно к анализу типовых кулачковых механизмов основан на использовании заменяющих механизмов.

*Заменяющий механизм* – это механизм, структура которого содержит только низшие кинематические пары, имеющие при определенных положениях ведущего звена те же перемещения, скорости и ускорения для выходного звена, что и соответствующий ему механизм с высшей парой.

При выборе схемы заменяющего механизма основное внимание уделяют сохранению законов движения ведущего и выходного звеньев кулачковых механизмов и взаимному расположению осей этих звеньев. Каждая высшая кинематическая пара заменяется двумя низшими парами, что приводит к появлению в структуре заменяющего механизма фиктивного звена 3. Исходя из вышесказанного, с учетом вида движения, совершаемого выходным звеном, схемы кулачковых механизмов заменяют соответствующей схемой типового рычажного механизма.

Кинематический анализ типовых рычажных механизмов рассмотрен выше ([см. гл. 2](#)).

В большинстве случаев закон движения выходного звена типового кулачкового механизма задан посредством второй производной пути по углу поворота или по времени (налог ускорения). В этом случае для получения непосредственно закона движения выходного звена используется метод кинематических диаграмм ([рис. 9.13](#)).

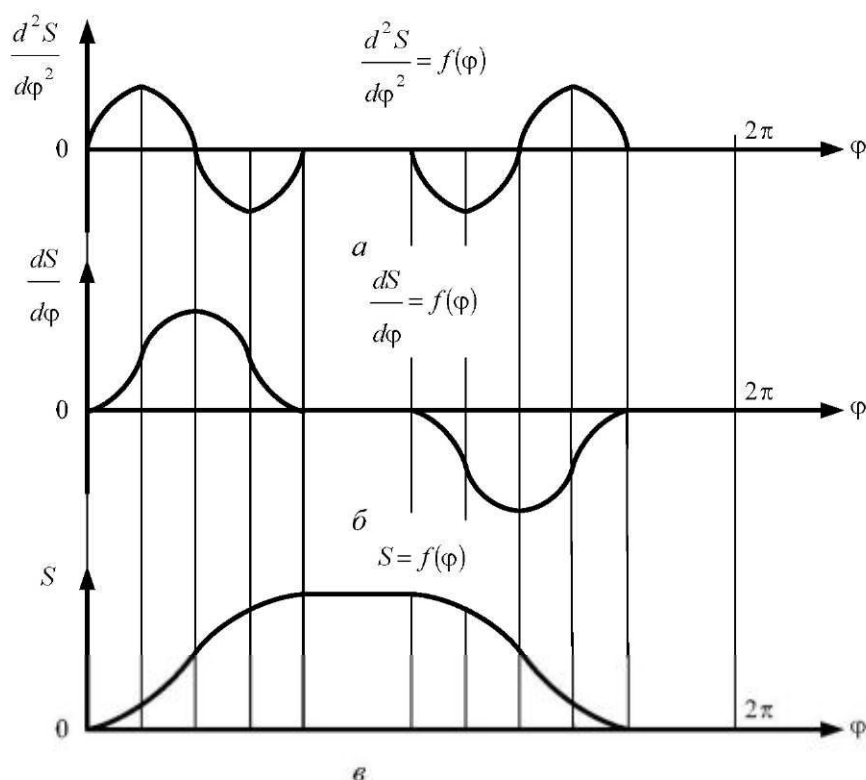


Рис. 9.13. Кинематический анализ кулачковых механизмов методом диаграмм

Процесс определения закона движения осуществляется в нижеприведенной последовательности.

Вначале, исходя из заданных условий, строится диаграмма аналога ускорения  $\frac{d^2s}{d\varphi^2} = f(\varphi)$  (рис. 9.13, а). Затем, воспользовавшись графическим интегрированием диаграммы аналога ускорения, сначала формируют диаграмму аналога скорости  $\frac{ds}{d\varphi} = f(\varphi)$  (рис. 9.14, б), потом, используя графическое интегрирование диаграммы аналога скорости, получают диаграмму пути  $s = f(\varphi)$  (рис. 9.13, в).

Кинематический анализ позволяет получить необходимые данные для перехода к этапу метрического синтеза кулачковых механизмов.

## 9.6. СИНТЕЗ ПЛОСКИХ КУЛАЧКОВЫХ МЕХАНИЗМОВ

Основными критериями, которыми руководствуются при решении задач синтеза кулачковых механизмов, являются: минимизация габаритно-массовых характеристик и значений углов давления, а также обеспечение технологичности конструктивного профиля кулачка.

Синтез любого кулачкового механизма выполняется в два этапа: структурный синтез и метрический синтез.

На этапе структурного синтеза осуществляется формирование структурной схемы кулачкового механизма, т. е. обосновывается число звеньев



подвижных звеньев и виды движения, ими совершаемого; количество и вид элементов стойки; число, класс и подвижность кинематических пар, количество и вид кинематических цепей. Дополнительно обосновывается введение в структуру кулачкового механизма каждой избыточной связи и местной подвижности. Определяющими условиями при выборе структурной схемы являются: заданные законы преобразования движения входного и выходного звеньев и взаимное расположение осей этих звеньев. Если оси входного и выходного звеньев параллельны, то выбирается плоская схема механизма. При пересекающихся или перекрещивающихся осях необходимо использовать пространственную схему. В кулачковых механизмах, работающих под действием небольших силовых факторов, используют выходное звено с заостренной рабочей поверхностью. В кулачковых механизмах, работающих под действием больших силовых факторов, с целью повышения долговечности и уменьшения износа в состав структуры вводят ролик или увеличивают приведенный радиус кривизны контактирующих поверхностей звеньев.

На этапе метрического синтеза определяются основные размеры звеньев кулачкового механизма и конфигурация рабочих поверхностей профилей кулачка, обеспечивающая реализацию заданных законов движения и передаточной функции или максимального перемещения выходного звена.

## 9.7. ЗАКОНЫ ДВИЖЕНИЯ ВЫХОДНОГО ЗВЕНА

Если в техническом задании условиями метрического синтеза кулачкового механизма закон движения выходного звена не задан, то его необходимо самостоятельно выбрать из набора типовых законов движения, которые делятся на три группы:

- законы безударные ([рис. 9.14](#));
- законы с жесткими ударами ([рис. 9.15](#));
- законы с мягкими ударами ([рис. 9.16](#)).

Основными представителями безударных законов движения выходных звеньев являются: синусоидальный ([рис. 9.14, а](#)) и трапецеидальный законы движения ([рис. 9.14, б](#)). Оба закона обеспечивают плавную работу механизма, однако имеют существенный недостаток, выражающийся в медленном нарастании перемещения выходного звена, сопровождаемого большими значениями ускорений.

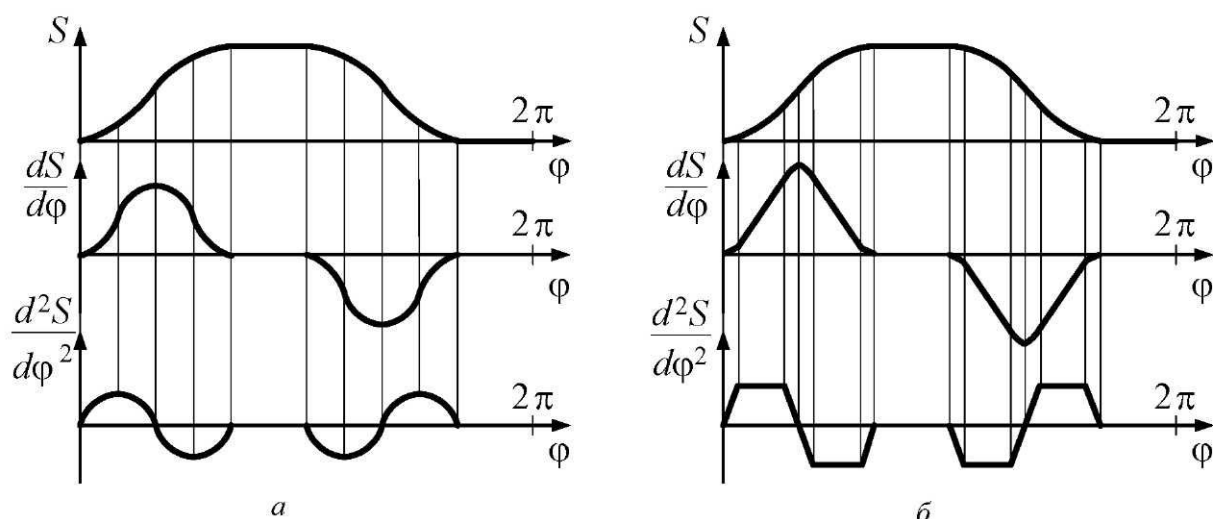


Рис. 9.14. Безударные законы движения выходного звена кулачкового механизма

Безударные законы движения выходных звеньев являются предпочтительными с точки зрения восприятия звеньями кулачковых механизмов силовых факторов. Кулачки, реализованные по безударным законам движения, имеют конструктивные профили более сложной конфигурации, изготовление которых технологически сложно, т. к. требует применения высокоточного оборудования, поэтому их изготовление существенно дороже. Кулачковые механизмы с безударными законами выходных звеньев целесообразно применять при высоких скоростях и жестких требованиях к точности и долговечности.

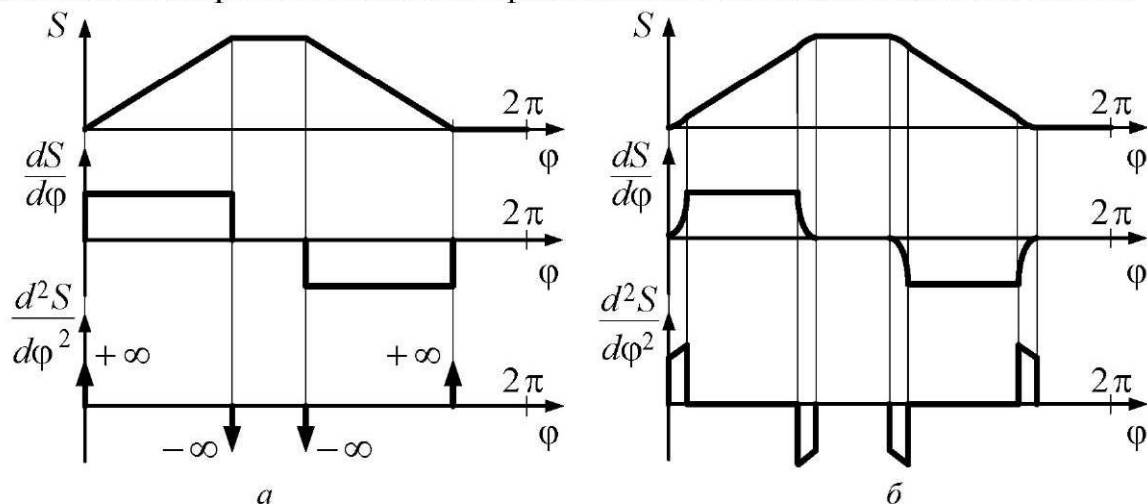


Рис. 9.15. Законы движения выходного звена кулачкового механизма с жесткими ударами



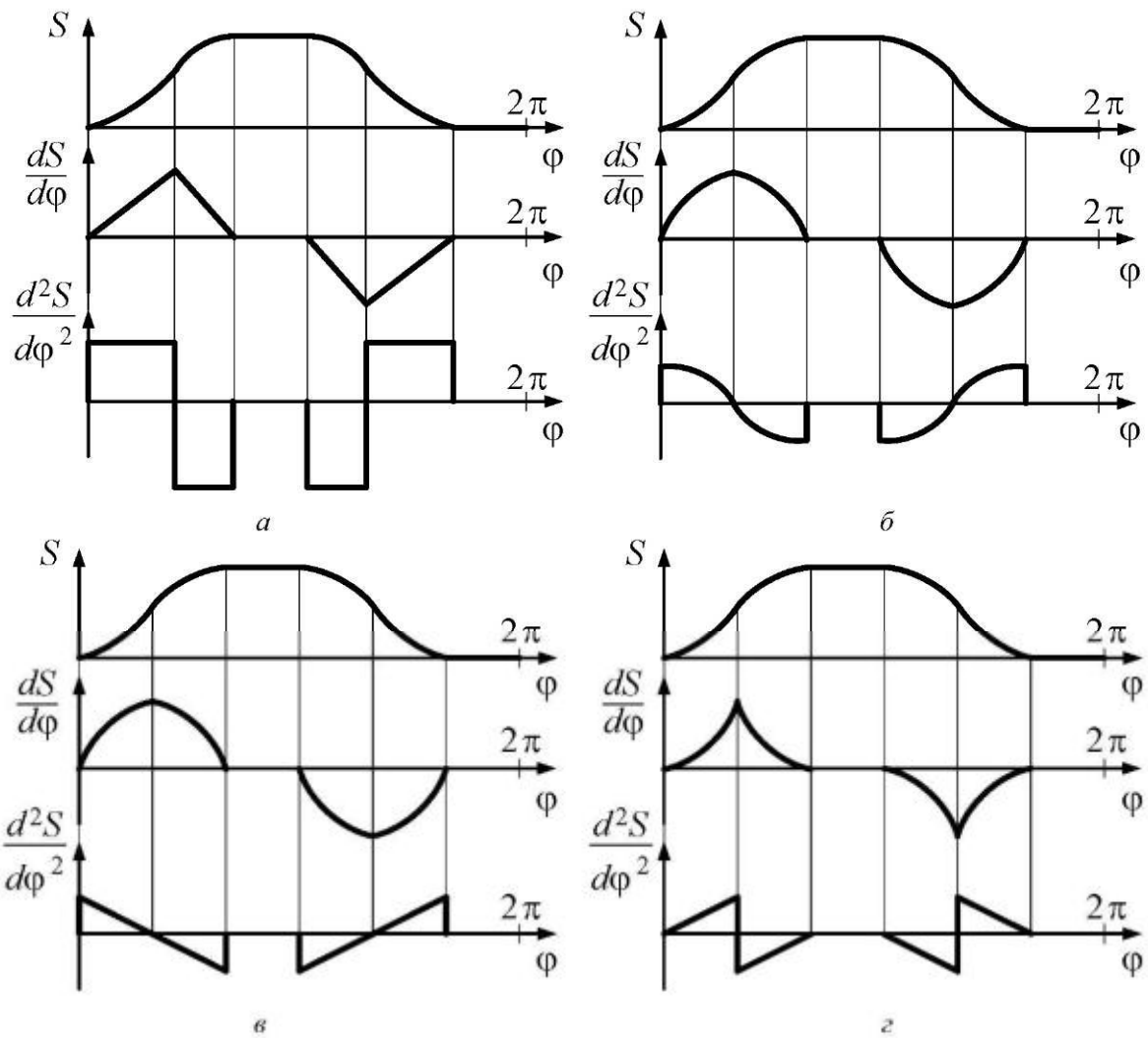


Рис. 9.16. Законы движения выходного звена кулачкового механизма с мягкими ударами

Основными представителями законов движения выходных звеньев с жесткими ударами являются: линейный (рис. 9.15, а) и линейный с переходными кривыми (рис. 9.15, б). Для законов с жесткими ударами характерно наличие в начале и конце фаз удаления и сближения точек, имеющих значения ускорений, теоретически равных бесконечности, что вызывает в зоне контакта звеньев кулачкового механизма появление сил инерции, также равных бесконечности. Данное явление свидетельствует о возникновении соударения рабочих поверхностей контактирующих звеньев. Законы с жесткими ударами имеют ограниченное применение и используются в неответственных механизмах, работающих при низких скоростях движения и невысокой долговечности.

Для обеспечения качественных показателей кулачкового механизма наиболее предпочтительными являются законы движения выходных звеньев с мягкими ударами. К подобным законам относятся: равноускоренный (рис. 9.16, а), косинусоидальный (рис. 9.16, б), линейно-убывающий (рис. 9.16, в) и линейно-возрастающий (рис. 9.16, г).

Законы с мягкими ударами допускают наличие соударения рабочих поверхностей контактирующих звеньев кулачкового механизма, возникающие при мгновенном изменении значений ускорений точек контакта на конечную

величину. Мягкие удары менее опасны. Реализация данных законов осуществляется в механизмах, работающих с небольшими скоростями при высокой долговечности.

В действительности наибольшее распространение имеют комбинированные законы, т. е. законы движения, образованные однотипными функциями или функциями разных групп.

## 9.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАДИУСА ИСХОДНОГО КОНТУРА КУЛАЧКА

Габаритные размеры кулачкового механизма определяются параметрами исходного контура кулачка. Положение центра вращения кулачка совмещается с геометрическим центром исходного контура и должно удовлетворять условию: текущее значение угла давления в любой точке конструктивного профиля кулачка не должно превышать допустимой величины. Если кулачок является плоским и совершает вращательные движения, то его исходным контуром является окружность. В этом случае процесс поиска исходного контура сводится к определению его радиуса.

В большинстве случаев кулачок вращается только в одном направлении, однако при проведении ремонтных работ необходима возможность реверсивного движения кулачка. При изменении направления движения фазы удаления и сближения меняются местами. Для определения области допустимых решений, т. е. области возможного расположения центра вращения кулачка, строится диаграмма  $S = f\left(\frac{dS}{d\varphi}\right)$ . Графически область допустимых решений определяется семейством касательных, проведенных к полученной кривой под углами наклона с соответствующими значениями допустимого угла давления (рис. 9.17, рис. 9.18).

Выбор центра вращения кулачка производится только внутри области допустимых решений. При этом должны обеспечиваться наименьшие габаритные размеры кулачкового механизма. Минимальный радиус исходного контура  $R_{\min}$  получается посредством соединения вершины области допустимых решений точки  $O$  с началом системы координат точкой  $0$ , т. е.  $R_0 = R_{\min}$  (рис. 9.17, рис. 9.18).

Радиус исходного контура аксиальных кулачковых механизмов с толкателем при равенстве фазовых углов удаления и сближения (рис. 9.17, а) соответствует минимальному радиусу, т. е.  $R_0 = R_{\min}$ . Определение радиуса исходного контура аксиальных кулачковых механизмов с толкателем при неравенстве фазовых углов удаления и сближения (рис. 9.17, б) осуществляется посредством соединения начала системы координат точки  $0$  с точкой  $O_1$ , расположенной в области допустимых решений и являющейся точкой пересечения оси пути с одной из касательных, т. е.  $R_0 = R_1$ .



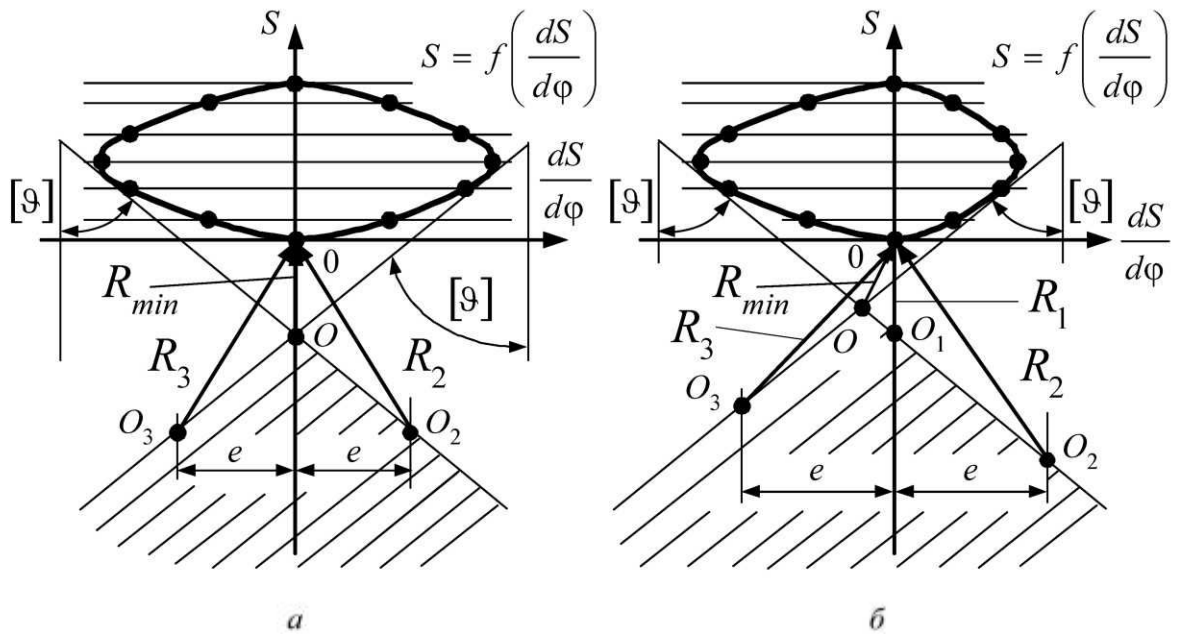


Рис. 9.17. Схемы определения радиуса исходного контура кулачковых механизмов с толкателем

Для определения радиуса исходного контура дезаксиальных кулачковых механизмов с толкателем необходимо параллельно оси пути  $S$  провести две прямые, смещенные относительно оси пути на величину, пропорциональную значению эксцентриситета (рис. 9.17). На пересечении касательных, ограничивающих область допустимых решений, с данными прямыми найдем точки  $O_2$  и  $O_3$ . Соединяем точки  $O_2$  и  $O_3$  с центром начала системы координат точкой  $O$ . Полученные радиусы  $R_2$  и  $R_3$  будут несколько больше минимального радиуса исходного контура  $R_{min}$ .

Для дезаксиальных кулачковых механизмов с толкателем при равенстве фазовых углов удаления и сближения (рис. 9.17, а) радиусы  $R_2$  и  $R_3$  будут равны по величине. В этом случае за радиус исходного контура принимается тот радиус, который соответствует заданному расположению эксцентриситета (правый или левый). Для дезаксиальных кулачковых механизмов с толкателем при неравенстве фазовых углов удаления и сближения (рис. 9.17, б) радиусы  $R_2$  и  $R_3$  не будут равны по величине. В этом случае за радиус исходного контура принимается тот радиус, который имеет меньшее значение. В частности,  $R_2 > R_3$ , т. е.  $R_0 = R_3$ .

В кулачковых механизмах с коромыслом при заданном межосевом расстоянии  $a_w$  положения точек  $O_4$  и  $O_5$  найдем на пересечении дуги с радиусом  $R = a_w$ , проведенной из точки  $E$  с касательными (рис. 9.18, а). Соединив точки  $O_4$  и  $O_5$  с началом координат точкой  $O$ , получим радиусы  $R_4$  и  $R_5$ . За радиус исходного контура принимается тот радиус, который имеет меньшее значение. В частности,  $R_4 > R_5$ , т. е.  $R_0 = R_4$ .

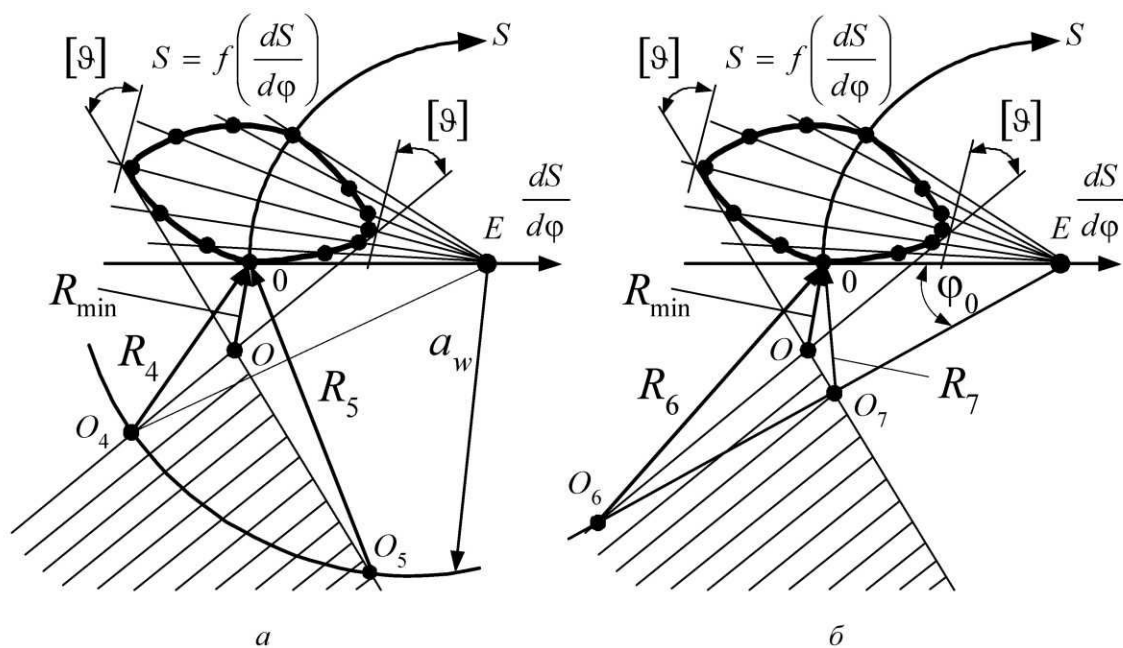


Рис. 9.18. Схемы определения радиуса исходного контура кулачковых механизмов с коромыслом

Для определения радиуса исходного контура кулачковых механизмов с коромыслом при заданном угле  $\varphi_0$  находим положения точек  $O_6$  и  $O_7$  на пересечении прямой, проведенной через точку  $E$  под углом  $\varphi_0$ , отложенным от оси аналога скорости  $\frac{dS}{d\varphi}$  с касательными (рис. 9.18, б). Соединив точки  $O_6$  и  $O_7$  с началом координат точкой  $O$ , получим радиусы  $R_6$  и  $R_7$ . За радиус исходного контура принимается тот радиус, который имеет меньшее значение. В частности,  $R_6 > R_7$ , т. е.  $R_0 = R_7$ .

## 9.9. ВЫБОР РАДИУСА РОЛИКА

При выборе радиуса ролика руководствуются следующими положениями:

1. Ролик является простой деталью, процесс изготовления которой не сложен. Поэтому на его рабочей поверхности можно обеспечить высокую контактную прочность. Для кулачка, вследствие сложной конфигурации рабочей поверхности, обеспечение высокой контактной прочности весьма затруднено. С целью обеспечения достаточного соотношения контактных прочностей рабочих поверхностей кулачка и ролика при выборе радиуса ролика  $r_{\text{рол}}$  учитывают следующее условие:

$$r_{\text{рол}} = 0,4 \cdot R_0,$$

где  $R_0$  – радиус исходного контура кулачка.

Выполнение этого соотношения обеспечивает примерное равенство контактных прочностей рабочих поверхностей кулачка и ролика. Радиус ро-



лика значительно меньше радиуса исходного контура кулачка, следовательно, ролик вращается с большей по величине угловой скоростью, а точки его рабочей поверхности вступают в гораздо большее число контактов, что приводит к неравномерности износа контактирующих поверхностей кулачка и ролика. Для обеспечения равномерности износа рабочих поверхностей кулачка и ролика, поверхность ролика должна обладать большей по величине контактной прочностью.

2. Конструктивный (рабочий) профиль кулачка не должен быть заостренным или срезанным (рис. 9.19, а). Поэтому на выбор радиуса ролика накладывается ограничение:

$$r_{\text{рол}} = 0,7 \cdot \rho_{\text{min}},$$

где  $\rho_{\text{min}}$  – минимальный радиус кривизны теоретического профиля кулачка.

Заостренный или срезанный профиль кулачка (рис. 9.19, б) не позволит ролику перекатиться через его вершину, что приводит к повреждению рабочих поверхностей обоих звеньев и к потере работоспособности кулачкового механизма.

3. Значение радиуса ролика выбирается из стандартного ряда натуральных целых чисел в следующем диапазоне:

$$r_{\text{рол}} = (0,35-0,45)R_0.$$

При выборе радиуса ролика необходимо дополнительно учитывать следующие моменты: увеличение значения радиуса ролика приводит к росту габаритов и массы выходного звена, что ухудшает динамические характеристики кулачкового механизма и уменьшает угловую скорость ролика. Снижение значения радиуса ролика приводит к увеличению габаритов кулачка и его массы, что вызывает рост величин угловой скорости ролика и снижение нагрузочной способности и ресурса работы кулачкового механизма.

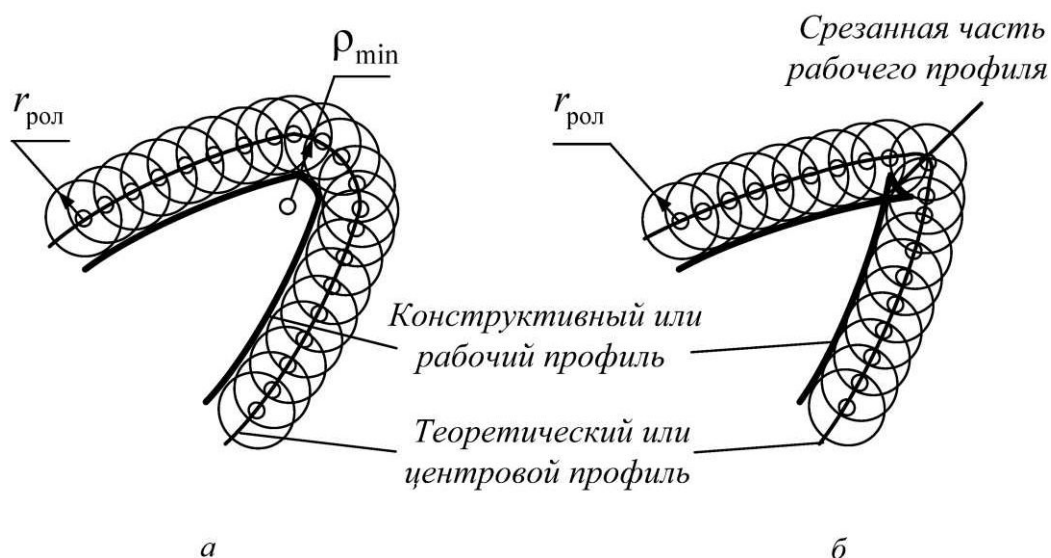


Рис. 9.19. Схема формирования вершины конструктивного профиля кулачка

В некоторых случаях ввод в состав структуры кулачкового механизма дополнительного звена (ролика) невозможен по ряду причин. В этом случае местная подвижность, заменяющая трение скольжения трением качения, отсутствует, а на выходном звене обеспечивается очень небольшой рабочий участок с криволинейной поверхностью. Точки криволинейного участка скользят по рабочей поверхности кулачка, т. е. износ поверхности выходного звена является более интенсивным. Для снижения износа рабочий участок выходного звена выполняют скругленным. Увеличение радиуса скругления не вызывает рост габаритов и массы выходного звена, однако приводит к уменьшению размеров конструктивного профиля кулачка. Исходя из этого, радиус скругления рабочей поверхности выходного звена можно принимать достаточно большим по величине.

## 9.10. СИНТЕЗ ПРОФИЛЕЙ ПЛОСКИХ КУЛАЧКОВ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

*Дезаксиальные кулачковые механизмы с толкателем.* Построение профилей кулачка проводится в нижеприведенной последовательности (рис. 9.20):

1. Определяется масштабный коэффициент длин  $\mu_l$ .
2. На свободном месте выбирается произвольная точка  $O$ , являющаяся центром исходного контура кулачка.
3. Из выбранной точки  $O$  в масштабном коэффициенте длин проводятся концентрические окружности с радиусами  $R_0$  и  $e$ .
4. К окружности радиусом  $e$  проводится касательная до пересечения с окружностью  $R_0$ , полученная точка пересечения является началом отсчета оси пути  $S$ .
5. От начала отсчета на окружности радиусом  $R_0$  в направлении вращения кривошипа откладываются фазовые углы, а на оси пути в масштабном коэффициенте  $\mu_l$  – перемещения толкателя.
6. Дуги исходного контура, соответствующие фазовым углам удаления и сближения, делим на равные части, количество которых равно числу точек, входящих в состав фаз удаления и сближения. Полученные точки соединяем с точкой  $O$ , являющейся центром вращения кулачка.
7. Из каждой точки деления проводятся касательные к окружности радиусом  $e$ .



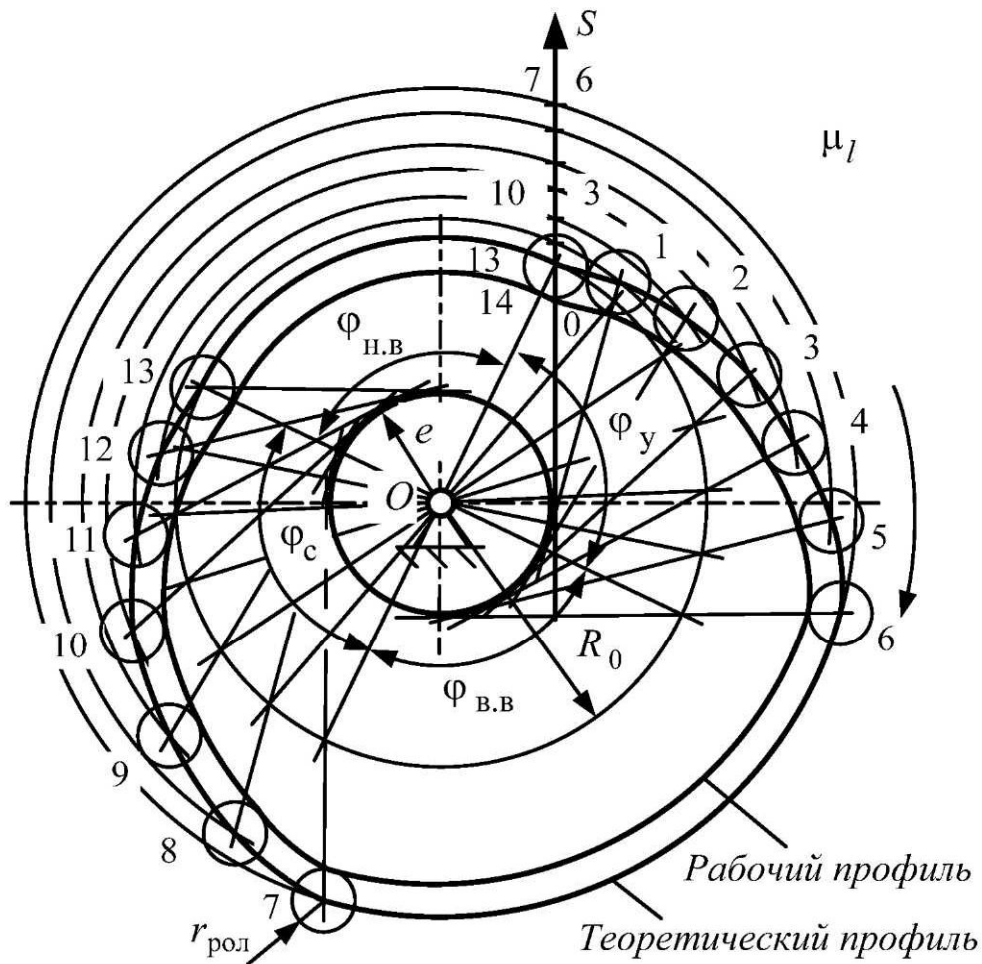


Рис. 9.20. Синтез дезаксиального кулачкового механизма с толкателем

8. Из точки  $O$ , являющейся центром окружности радиусом  $R_0$ , проводим окружности радиусами, равными сумме  $R_0$  и соответствующего перемещения толкателя до пересечения с касательными к окружности радиусом  $e$ .

9. Полученные точки соединяются плавной кривой, образуя теоретический профиль кулачка, совпадающий на данном этапе с рабочим профилем.

Для синтеза дезаксиальных кулачковых механизмов с толкателем и роликом необходимо дополнительно выполнить следующее:

10. Исходя из заданных условий определяется радиус ролика  $r_{рол}$ .

11. Из произвольно выбранных точек теоретического профиля кулачка проводим радиусами  $r_{рол}$  окружности, имитирующие положения ролика в составе схемы кулачкового механизма.

12. Проведя огибающую кривую относительно всех положений ролика, получаем рабочий профиль кулачка.

*Аксиальные кулачковые механизмы с толкателем.* Построение профилей кулачка проводится в такой последовательности ([рис. 9.21](#)):

1. Определяется масштабный коэффициент длин  $\mu_l$ .

2. На свободном месте выбирается произвольная точка  $O$ , являющаяся центром исходного контура кулачка.

3. Из выбранной точки  $O$  в масштабном коэффициенте длин проводится окружность с радиусом  $R_0$ .

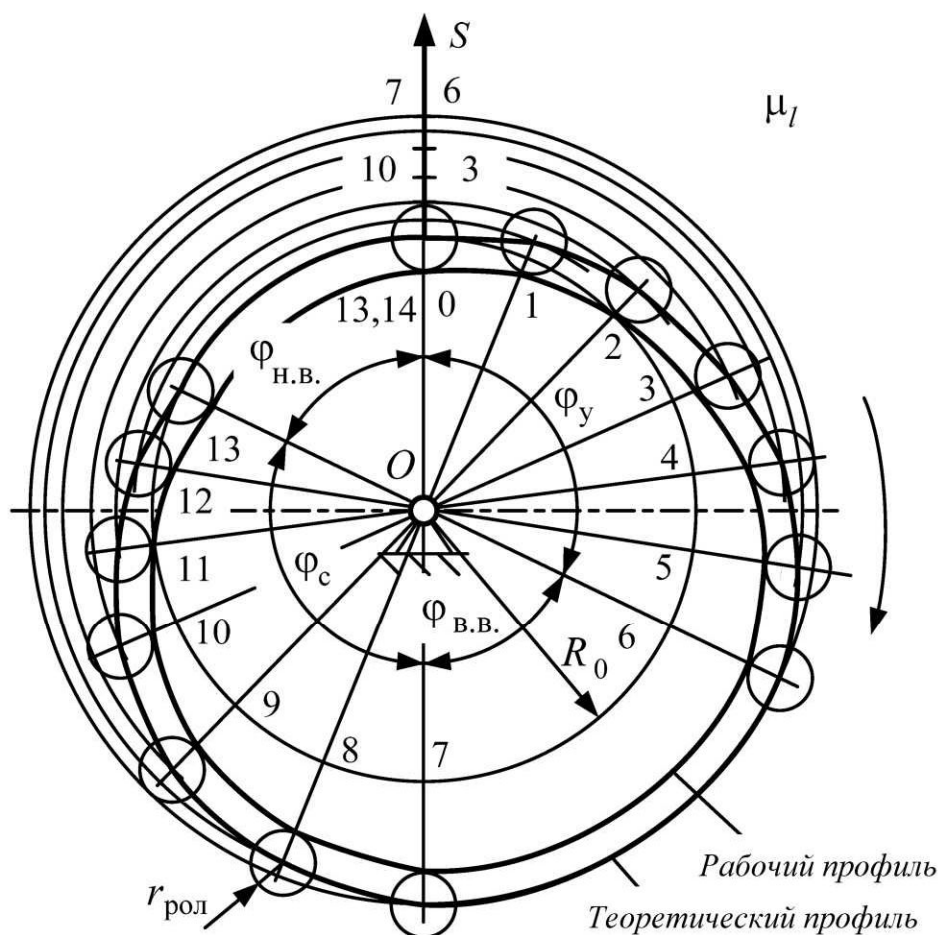


Рис. 9.21. Синтез аксиального кулачкового механизма с толкателем

4. Ось пути  $S$  совмещается с вертикальной осью симметрии окружности радиусом  $R_0$ . На пересечении оси пути  $S$  с окружностью радиусом  $R_0$  получаем начало отсчета точку  $O$ .

5. От начала отсчета на окружности радиусом  $R_0$  в направлении вращения кривошипа откладываются фазовые углы, а на оси пути в масштабном коэффициенте  $\mu_l$  – перемещения толкателя.

6. Дуги исходного контура, соответствующие фазовым углам удаления и сближения, делим на равные части, количество которых равно числу точек, входящих в состав фаз удаления и сближения. Полученные точки соединяем с точкой  $O$ , являющейся центром вращения кулачка.

7. Из точки  $O$ , являющейся центром окружности радиусом  $R_0$ , проводим окружности радиусами, равными сумме  $R_0$  и соответствующего перемещения толкателя до пересечения прямыми, соединяющими точку  $O$  с точками деления.

8. Полученные точки соединяются плавной кривой, образуя теоретический профиль кулачка, совпадающий на данном этапе с рабочим профилем.

Для синтеза аксиальных кулачковых механизмов с толкателем и роликом необходимо дополнительно выполнить следующее:

9. Исходя из заданных условий определяется радиус ролика  $r_{\text{рол}}$ .



10. Из произвольно выбранных точек теоретического профиля кулачка проводим радиусами  $r_{\text{ролл}}$  окружности, имитирующие положения ролика в составе схемы кулачкового механизма.

11. Проведя огибающую кривую относительно всех положений ролика, получаем рабочий профиль кулачка.

*Кулачковые механизмы с коромыслом.* Построение профилей кулачка проводится в такой последовательности (рис. 9.22):

1. Определяется масштабный коэффициент длин  $\mu_l$ .

2. На свободном месте выбирается произвольная точка  $O$ , являющаяся центром исходного контура кулачка.

3. Со схемы для определения радиуса исходного контура в зависимости от заданных условий переносим треугольники  $\Delta OEO_4$  (рис. 9.18, а) или  $\Delta OEO_7$  (рис. 9.18, б).

4. Из точки  $E$  радиусом  $R = OE$  проводим дугу, соответствующую оси пути  $S$ .

5. От начала отсчета на окружности радиусом  $R_0$  в направлении вращения кривошипа откладываются фазовые углы, а на оси пути в масштабном коэффициенте  $\mu_l$  – перемещения коромысла.

6. Дуги исходного контура, соответствующие фазовым углам удаления и сближения, делим на равные части, количество которых равно числу точек, входящих в состав фаз удаления и сближения. Полученные точки соединяем с точкой  $O$ , являющейся центром вращения кулачка.

7. Из точки  $O$ , являющейся центром окружности радиусом  $R_0$ , проводим окружности радиусами, равными сумме  $R_0$  и соответствующего перемещения толкателя до пересечения прямыми, соединяющими точку  $O$  с точками деления.

8. Полученные точки соединяются плавной кривой, образуя теоретический профиль кулачка, совпадающий на данном этапе с рабочим профилем.

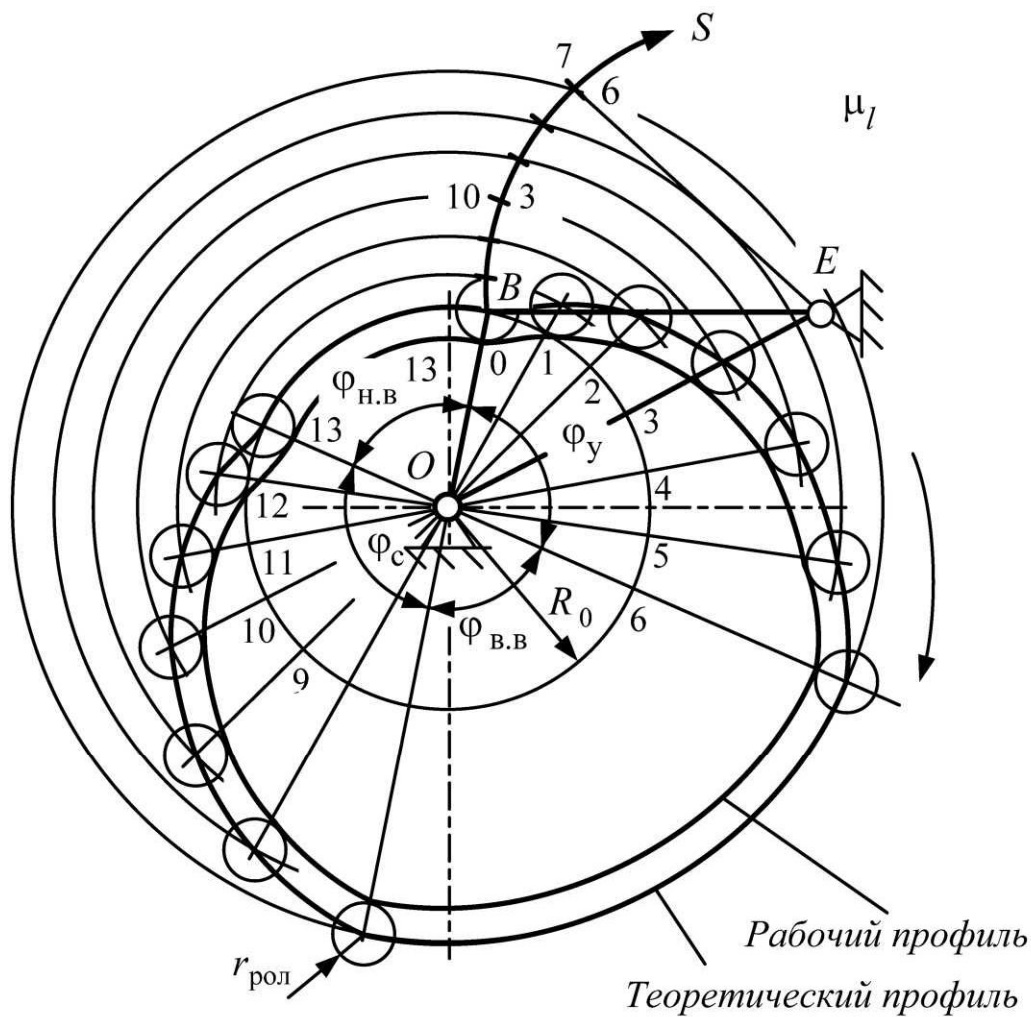


Рис. 9.22. Синтез кулачкового механизма с коромыслом

Для синтеза кулачковых механизмов с коромыслом и роликом необходимо дополнительно выполнить следующее:

9. Исходя из заданных условий определяется радиус ролика  $r_{\text{ролл}}$ .
10. Из произвольно выбранных точек теоретического профиля кулачка проводим радиусами  $r_{\text{ролл}}$  окружности, имитирующие положения ролика в составе схемы кулачкового механизма.
11. Проведя огибающую кривую относительно всех положений ролика, получаем рабочий профиль кулачка.



## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Автору учебной книги : учеб.-метод. пособие / сост. Л. И. Вейсова, Н. Н. Вохман, Л. И. Злобина; ред. В. М. Журавлев. – Красноярск : ИПЦ КГТУ, 2006. – 52 с.
2. Антоவில், А. М. Теория механизмов и машин / А. М. Антоவில். – М. : Наука, 1961. – 254 с.
3. Артоболовский, И. И. Теория механизмов / И. И. Артоболовский. – М. : Наука, 1969. – 639 с.
4. Артоболовский, И. И. Теория механизмов и машин / И. И. Артоболовский. – М. : Наука, 1988. – 639 с.
5. Баранов, Г. Г. Курс теории механизмов и машин / Г. Г. Баранов. – М. : Машиностроение, 1975. – 494 с.
6. Болотовский, И. А. Справочник по геометрическому расчету эвольвентных зубчатых передач и червячных передач / И. А. Болотовский, Т. П. Болотовская. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Машиностроение, 1986. – 448 с.
7. Гавриленко, В. А. Теория механизмов / В. А. Гавриленко. – М. : Высш. шк., 1973. – 210 с.
8. ГОСТ 2.703-68 Правила выполнения кинематических схем. – Переиз. окт. 1986 с изм. 1 (ИУС. 1981 № 3) – Введен 01.01.71 // ГОСТ 2.701-84 и др. Правила выполнения схем. – М., 1987. – С. 49–55.
9. Заблонский, К. И. Проектирование механизмов и приборов / К. И. Заблонский, М. С. Беляев, И. Я. Телис, С. И. Филиппович, Н. А. Цецорин. – Киев : Вища шк., 1971. – 520 с.
10. Зиновьев, В. А. Курс теории механизмов и машин / В. А. Зиновьев. – М. : Наука, 1979. – 384 с.
11. Крайнев, А. Ф. Словарь-справочник по механизмам / А. Ф. Крайнев. – М. : Машиностроение, 1987. – 560 с.
12. Крайнев, А. Ф. Словарь-справочник по механизмам / А. Ф. Крайнев. – М. : Машиностроение, 1981. – 438 с.
13. Красковский, Е. Я. Расчет и конструирование механизмов приборов и вычислительных систем : учеб. пособие для студентов вузов / Е. Я. Красковский, Ю. А. Дружинин, Е. М. Филатов – М. : Высш. шк., 1983. – 431 с.
14. Кожевников, С. Н. Теория механизмов и машин / С. Н. Кожевников. – М. : Высш. шк., 1969. – 583 с.
15. Кореняко, А. С. Теория механизмов и машин / А. С. Кореняко. – Киев : Вища шк., 1976. – 443 с.
16. Левитский, Н. И. Теория механизмов и машин / Н. И. Левитский. – М. : Наука, 1990. – 592 с.
17. Левитская, О. Н. Курс теории механизмов и машин / О. Н. Левитская, Н. И. Левитский. – М. : Наука, 1978. – 215 с.

18. Механика : практикум по решению задач / Е. В. Брюховецкая, М. А. Мерко, В. В. Нестеренко, А. В. Колотов. – Красноярск : ИПЦ КГТУ, 2004. – 202 с.

19. Смелягин, А. И. Структура механизмов и машин : учеб. пособие / А. И. Смелягин. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2002. – 298 с.

20. Смелягин, А. И. Теория механизмов и машин : лаб. практикум / А. И. Смелягин. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2003. – 116 с.

21. Теория механизмов и машин. Терминология : учеб. пособие / Н. И. Левитский, Ю. Я. Гуревич, В. Д. Плахин [и др.]; под ред. К. В. Фролова. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. – 80 с.

22. Фролов, К. В. Теория механизмов и машин / К. В. Фролов, С. А. Попов, А. К. Мусатов [и др.]. – М. : Высш. шк., 1987. – 496 с.

23. Фролов, К. В. Теория механизмов и машин / К. В. Фролов. – М. : Высш. шк., 2003. – 496 с.