

ОПД.Ф.02.03 ТЕОРИЯ МАШИН И МЕХАНИЗМОВ

Учебное пособие для студентов всех форм обучения

В пособии излагается основное содержание курса теории механизмов и машин, включающее структуру, кинематический, кинетостатический и динамический анализ и синтез механизмов, геометрия, свойства и элементы синтеза зубчатых зацеплений и плоских кулачковых механизмов.

Предназначено для студентов всех форм обучения.

Предисловие

Теория механизмов и машин (ТММ) изучает научные основы создания машин и механизмов, методы их построения и теоретического и экспериментального исследования. Поэтому основная цель преподавания ТММ в настоящее время – дать необходимый объём знаний для того, чтобы студент-машиностроитель понимал и успешно усваивал материал специальных предметов, которые ему придётся изучать на последующих курсах университета.

В основу данного пособия положен курс, который автор читал в течение многих лет на различных факультетах ОмГТУ. Объём и содержание материала пособия соответствует Государственному образовательному стандарту (ГОС) для подготовки бакалавров по направлению «Технологические машины и оборудование». Пособие может быть также использовано при изучении ТММ для подготовки специалистов. При недостаточном количестве времени, выделяемого для изучения ТММ, часть материала может быть пропущена или отнесена на самостоятельную проработку.

Для упорядочения изложения пособие разбито на разделы, внутри которых имеются главы, содержащие более мелкие рубрики (параграфы), которые имеют двойную нумерацию – первая цифра обозначает номер главы, а вторая – номер рубрики внутри главы. Внутри рубрик имеются ещё более мелкие подразделения. Такого порядка автор придерживается и при чтении курса.

Формулировки определений и впервые встречающаяся терминология, требующие запоминания, выделены в тексте курсивом для привлечения особого внимания студента.

В конце каждого раздела приводится перечень вопросов для самопроверки. Это должно помочь студенту проверить, насколько глубоко он усвоил материал, и не требуется ли его повторить, а может быть повторить не один раз. В случае непонимания каких-либо моментов студент может обратиться за консультацией к преподавателю.

Введение

Теория механизмов и машин (ТММ) изучает общие методы исследования и проектирования механизмов и машин.

Место ТММ, в цикле всех дисциплин, изучаемых при подготовке специалиста, определяется задачами и логической последовательностью создания новой машины. Функционирование любой машины и взаимодействие всех её элементов происходит на основе законов природы. Поэтому в техническом университете изучаются в первую очередь те дисциплины, которые описывают законы природы, т. е. общенаучные дисциплины: математика, начертательная геометрия, физика, химия, теоретическая механика и др. Затем изучаются общетехнические дисциплины, устанавливающие связи между общенаучными и специальными дисциплинами. К ним относится и теория механизмов и машин, которая даёт знания будущему специалисту в области машиностроения и необходимые методики для создания новых более совершенных машин. Задачей теории механизмов и машин является привитие студенту навыков схемного проектирования и, по существу, подготовки исходных данных для конструирования машин и, в конечном итоге, её изготовления и оценки качества. На следующем этапе изучаются приёмы и методики конструирования машин и их изготовления (курсы деталей машин и технологии машиностроения). В последнюю очередь изучаются специальные дисциплины.

Проблемы, которыми занимается ТММ, – это проблемы анализа и синтеза механизмов и машин. *Анализ* заключается в определении свойств существующих механизмов и машин и является прямой задачей механики машин. Обратная задача – *синтез механизмов*, то есть создание новых механизмов, которые должны обладать улучшенными свойствами по сравнению с существующими с точки зрения производительности, надёжности, долговечности и др. Обе задачи тесно связаны между собой, так как специалист в области эксплуатации машин должен уметь правильно оценивать качество работы машины и её эксплуатационные свойства (анализ) и давать рекомендации производителю машины по улучшению её качества (синтез). Специалист в области проектирования и производства машин должен уметь применять методы и приёмы синтеза новых механизмов и машин и уметь анализировать и давать правильную оценку созданной им машины.

Общее определение машины. Функциональная классификация машин. *Машина есть устройство, создаваемое человеком для использования законов природы с целью облегчения физического и умственного труда, увеличения его производительности путем частичной или полной замены человека в его трудовых и физиологических функциях.*

Все существующие машины можно разделить на следующие группы:

I. *Энергетические.* В них происходит преобразование энергии из одного вида в другой (например, электрогенераторы, электродвигатели, двигатели внутреннего сгорания любого типа, паровые и газовые турбины и т. д.).

II. *Технологические.* Они предназначены для изменения формы, размеров и физических свойств материалов (металлорежущие станки, деревообрабатываю-

шие, дорожные, строительные, полиграфические машины, машины пищевых производств, машины текстильной и лёгкой промышленности и др.). Эти машины составляют самую многочисленную группу.

III. *Транспортные*. Эти машины служат для перемещения всевозможных изделий, материалов и людей (автомобили, самолёты, локомотивы, суда, подъёмные краны, конвейеры, манипуляторы).

IV. *Логические (информационные)*. Машины, составляющие эту группу, служат для хранения, переработки и передачи информации (различные вычислительные устройства, ЭВМ, компьютеры, в том числе ПК).

V. *Кибернетические*. Для замены человека в его трудовых и физиологических функциях (аппараты: искусственное сердце, искусственные почки, робот-домохозяйка и др.).

ТММ изучает те машины и механизмы, которые функционируют на основе законов механики, отсюда другое название ТММ – *механика машин*.

Узкое определение машины. *Машина есть устройство, действующее на основе законов механики и предназначенное для преобразования энергии, материалов и информации и перемещения изделий.*

Машина, как правило, состоит из одного или нескольких *механизмов*, основное назначение которых – преобразование движения (с одновременным преобразованием сил). *Механизмом называется искусственно созданная система тел, предназначенная для преобразования движения одного или нескольких тел в требуемые движения других тел.*

Механизм называется *плоским*, если все его звенья движутся параллельно одной плоскости и траектории всех его точек – плоские кривые. В противном случае механизм *пространственный*.

Твёрдые тела в составе механизма – *звенья*. Неподвижное звено механизма называется *стойкой*. *Подвижное соединение двух звеньев, допускающее их относительное движение, называется кинематической парой.*

Раздел 1. СТРУКТУРА, КИНЕМАТИКА И ЭЛЕМЕНТЫ СИНТЕЗА МЕХАНИЗМОВ

1. Структура механизмов

1.1. Классификация кинематических пар

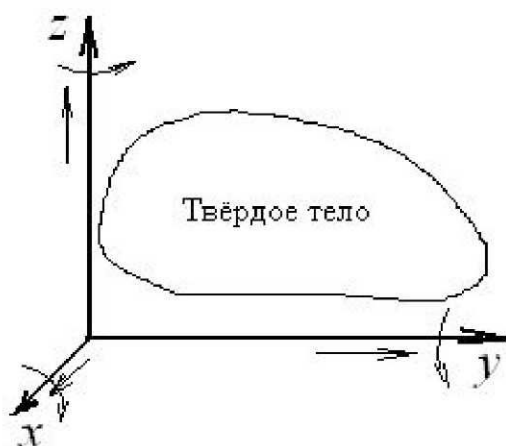


Рисунок 1.1

Классификация по числу условий связей. Из курса теоретической механики известно, что свободное твердое тело в пространстве имеет шесть степеней свободы (рис. 1.1). Это – три поступательных движения вдоль трёх осей координат и три вращательных движения вокруг этих осей. Можно также сказать, что на свободное твёрдое тело не наложено ни одной связи. Если обозначить число степеней свободы буквой H , а число связей буквой S , то для свободного твёрдого тела можно записать: $H = 6$, $S = 0$.

Неподвижное твёрдое тело имеет $H = 0$, $S = 6$.

Ограничения, наложенные на относительное движение звеньев в кинематической паре, называются условиями связей.

В кинематических парах количества степеней свободы и условий связей могут быть от единицы до пяти, однако в сумме это количество во всех парах может быть равным только шести. *Класс кинематической пары определяется количеством в ней условий связей.* В соответствии с количеством возможных движений кинематическая пара называется одноподвижной, двухподвижной и так далее. Всё сказанное отражено в таблице.

S	H	$S + H$	Класс кинематической пары	Название пары по количеству движений (степ. свободы)
0	6	6	Свободное твёрдое тело	
1	5	6	1	Пятиподвижная
2	4	6	2	Четырёхподвижная
3	3	6	3	Трёхподвижная
4	2	6	4	Двухподвижная
5	1	6	5	Одноподвижная
6	0	6	Неподвижное соединение твёрдых тел	

Некоторые примеры кинематических пар различных классов приведены на рис. 1.2. На этом рисунке пространственная система координат связана с одним

из звеньев, в качестве которого может быть принята плоскость. Возможные относительные движения на рисунке указаны стрелками. На рис. 1.2, а вторым звеном пары является шар, который относительно плоскости не может двигаться вдоль координатной оси z ($S = 1, H = 5$), что соответствует паре *первого класса* или *пятиподвижной*. На рис. 1.2, б представлен цилиндр на плоскости, у которого нет поступательного движения вдоль оси z и вращательного движения вокруг оси x ($S = 2, H = 4$). В результате получается *четырёхподвижная кинематическая пара* или *пара второго класса*. Аналогичным образом присваиваются названия и другим кинематическим парам. На рис. 1.2, в показана кинематическая пара *третьего класса* или *трёхподвижная* (она называется *сферическим шарниром*), на рис. 1.2, г – кинематическая пара *четвёртого класса* или *двухподвижная*, называемая *цилиндрическим шарниром*, на рис. 1.2, д – кинематическая пара *пятого класса* или *одноподвижная*, называемая *вращательной парой* (она называется также просто *шарниром*) и на рис. 1.2, е – также кинематическая пара *пятого класса*, называемая *поступательной парой*. На рис. 1.2, ж изображена *винтовая кинематическая пара*, обладающая двумя движениями, однако в ней независимым является одно движение (вращательное), поэтому она относится к *пятому классу*.

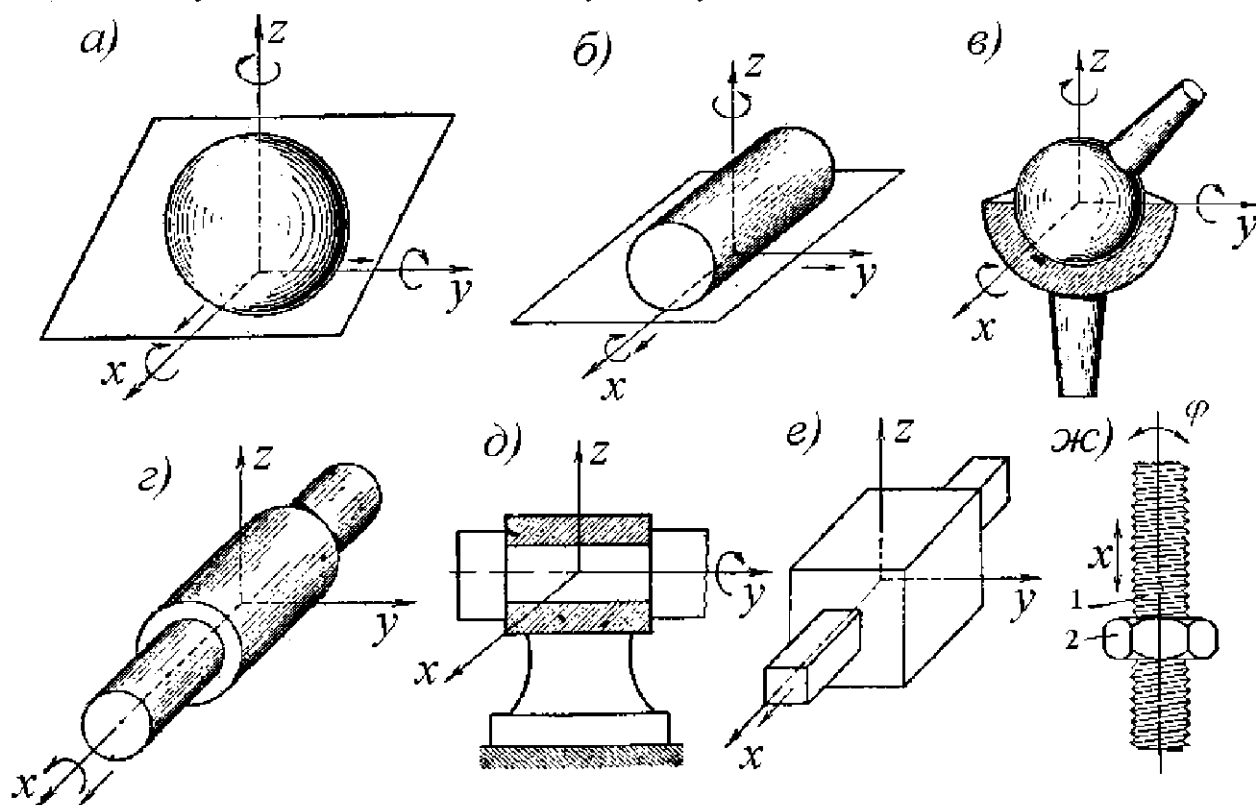


Рисунок 1.2

При переходе из пространственной системы в плоскую твёрдое тело теряет три степени свободы, что означает, что на него наложено три связи. Так что свободное твёрдое тело в плоскости имеет $H = 3$ и $S = 3$. Например, тело, находящееся в координатной плоскости xy , может двигаться поступательно вдоль этих осей и вращаться вокруг оси, перпендикулярной плоскости xy (рис. 1.3).

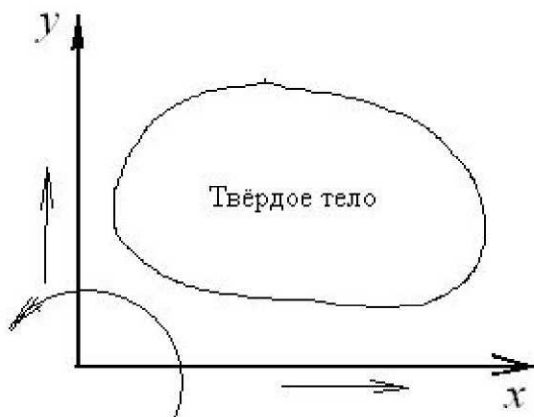


Рисунок 1.3

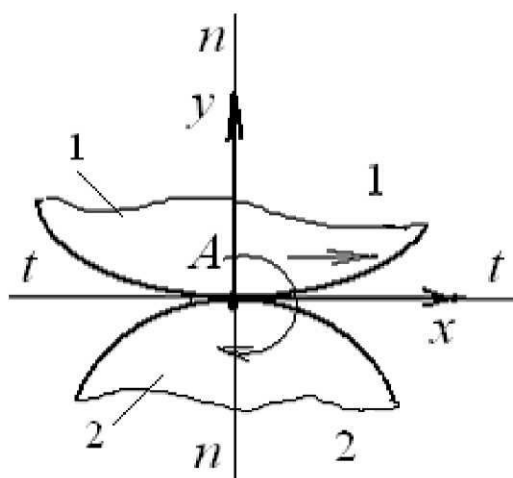


Рисунок 1.4

Поэтому в плоской кинематической паре количество ограничений в движении звена может быть или два, или одно. В первом случае общее количество условий связей вместе с тремя потерянными при переходе из пространства в плоскость составляет $S = 5$. Такая кинематическая пара в соответствии с числом S является парой 5-го класса, а так как в ней может выполняться только одно движение ($H = 1$), то эта пара называется также *одноподвижной кинематической парой*.

Во втором случае общее количество условий связей $S = 4$, и кинематическая пара является парой 4-го класса, а в соответствии с $H = 2$ она называется *двухподвижной кинематической парой* (рис. 1.4). Как видно из рисунка, пару 4-го класса в плоскости составляют две кривые 1 и 2, контактирующие друг с другом в точке A . Относительное движение звеньев этой пары возможно в направлении касательной $t - t$ (ось x) и вращение вокруг точки A . Невозможно движение вдоль нормали $n - n$ (ось y).

Классификация по характеру касания элементов.

Элемент кинематической пары – это совокупность точек, линий или поверхностей, которыми одно звено входит в касание с другим звеном при образовании кинематической пары. Если касание элементов кинематической пары происходит по линии или в точке, то кинематическая пара *высшая* (пары 1-го, 2-го классов в пространстве и пара 4-го класса в плоскости), если касание происходит по поверхности, то кинематическая пара *низшая* (пары 3-го, 4-го и 5-го классов).

Механизмы с высшей кинематической парой передают меньшие нагрузки, но имеют малые потери на трение и легко проектируются. Элементы этих пар сложны в изготовлении.

Механизмы с низшими кинематическими парами передают большие нагрузки, имеют большие потери на трение, сложнее синтезируются. Элементы низших пар имеют простые формы в виде плоскостей, цилиндрических поверхностей, поэтому более технологичны, то есть просты в изготовлении.

1.2. Кинематические цепи и их классификация

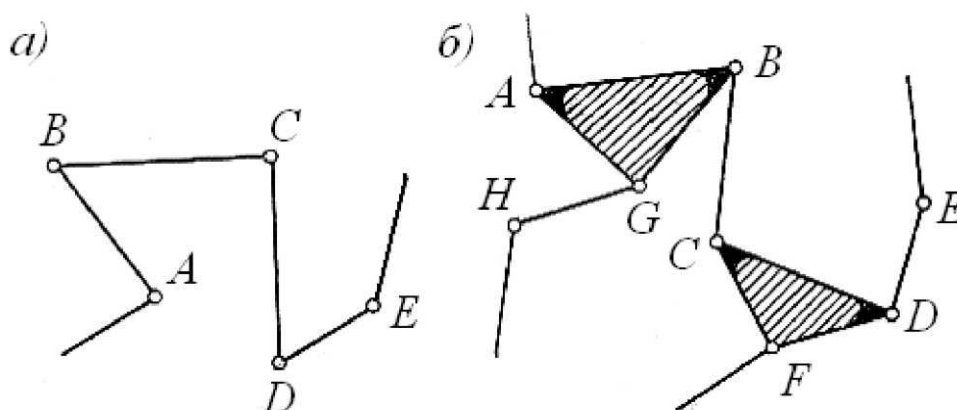


Рисунок 1.5

Кинематической цепью называется ряд звеньев, соединённых между собой кинематическими парами. Кинематические цепи бывают пространственные и плоские, простые и сложные, замкнутые и разомкнутые (закрытые и открытые).

Если звенья кинематической цепи движутся параллельно одной плоскости, то такая кинематическая цепь – плоская, в противном случае кинематическая цепь – пространственная. В простой кинематической цепи каждое звено входит не более чем в две кинематические пары. При невыполнении этого условия кинематическая цепь – сложная.

В замкнутой кинематической цепи нет звеньев, входящих только в одну кинематическую пару, в разомкнутой цепи имеются такие звенья. На рис. 1.5 показаны схемы двух плоских кинематических цепей. Из них схема *a* представляет простую кинематическую цепь, схема *b* – сложную.

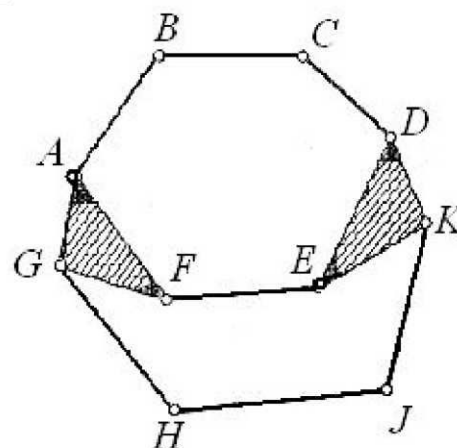


Рисунок 1.6

На рис. 1.6 показана замкнутая сложная плоская кинематическая цепь.

1.3. Расчет степени подвижности механизма

Степенью подвижности механизма (или числом степеней свободы механизма) называется количество обобщённых (независимых) координат, которое должен иметь механизм для того, чтобы все его звенья имели вполне определённые движения.

Представим себе, что нам необходимо спроектировать механизм из k звеньев.

Так как каждое звено, будучи свободным в пространстве, обладает шестью степенями свободы, то получим:

$6k$ – общее количество степеней свободы всех k звеньев.

При образовании *кинематической цепи* звенья теряют свои степени свободы.

Если в кинематической цепи

p_5 – количество кинематических пар 5-го класса, а каждая такая пара накладывает пять условий связей на относительное движение звеньев, поэтому

$5p_5$ – общее количество условий связей, наложенных всеми парами 5-го класса.

Пусть также в кинематической цепи

p_4 – количество кинематических пар 4-го класса. Так как каждая пара 4-го класса накладывает четыре условия связей, то

$4p_4$ – общее количество условий связей, наложенных на относительное движение звеньев всеми парами 4-го класса.

И далее по аналогии:

p_3 – количество кинематических пар третьего класса, $3p_3$ – общее количество условий связей, наложенных всеми парами 3-го класса.

p_2 – количество кинематических пар второго класса, $2p_2$ – общее количество условий связей, наложенных всеми парами 2-го класса.

p_1 – количество кинематических пар первого класса, $1p_1$ – общее количество условий связей, наложенных всеми парами первого класса.

Если обозначить S как общее количество условий связей в кинематической цепи, наложенное парами всех классов, то

$$S = 5p_5 + 4p_4 + 3p_3 + 2p_2 + p_1.$$

Количество степеней свободы H кинематической цепи определится разностью между числами $6k$ и S :

$$H = 6k - (5p_5 + 4p_4 + 3p_3 + 2p_2 + p_1).$$

Механизм – это кинематическая цепь с одним неподвижным звеном, совершающая целесообразные однозначно определенные движения. Поэтому при образовании механизма одно из его звеньев должно быть сделано неподвижным (*стойкой*), при этом теряется ещё шесть степеней свободы. Тогда число степеней свободы механизма будет: $W = H - 6$, или

$$W = 6(k - 1) - (5p_5 + 4p_4 + 3p_3 + 2p_2 + p_1).$$

Обозначив $k - 1 = n$ (n – количество подвижных звеньев механизма относительно стойки), имеем

$$W = 6n - (5p_5 + 4p_4 + 3p_3 + 2p_2 + p_1).$$

Эта формула была дана П. И. Сомовым в 1887 году и развита до современного вида А. П. Малышевым в 1923 году, поэтому она называется *формулой Сомова – Малышева*.

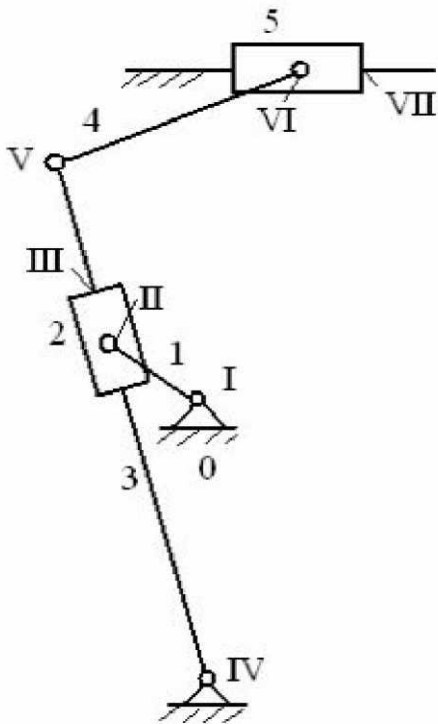


Рисунок 1.7

Фактически W означает количество независимых движений, которые должен иметь данный механизм для получения полной определенности в движениях всех его звеньев. По существу W означает чаще всего количество ведущих звеньев механизма.

В случае плоского механизма все звенья в его составе обладают не шестью степенями свободы, а только тремя. Поэтому для получения формулы степени подвижности необходимо из всех коэффициентов формулы Сомова – Малышева вычесть число 3:

$$W = (6-3)n - [(5-3)p_5 + (4-3)p_4 + (3-3)p_3 + (2-3)p_2 + (1-3)p_1].$$

Проведя соответствующие действия в скобках, находим окончательно

$$W = 3n - (2p_5 + p_4).$$

Эта формула была получена в 1869 году академиком Петербургской Академии наук П. Л. Чебышёвым и носит название *формулы Чебышёва*.

Пример. Механизм поперечно-строгального станка (рис. 1.7).

Обозначим номера подвижных звеньев данной схемы арабскими цифрами, их количество составит $n = 5$, римскими цифрами обозначим номера кинематических пар 5-го класса, получив их количество $p_5 = 7$, пары 4-го класса в этом механизме отсутствуют, т. е. $p_4 = 0$. Расчёт по формуле Чебышёва даёт

$$W = 3 \cdot 5 - (2 \cdot 7 + 1 \cdot 0) = 1.$$

Следовательно, в этом механизме одна степень свободы, что означает необходимость выбрать одно ведущее звено для его нормального функционирования.

1.4. Структурная классификация плоских механизмов

Принцип структурного образования механизмов по Л.В. Ассурю. Основы теории структуры плоских механизмов были заложены в 1914 г. профессором Петербургского технологического института Л. В. Ассуром. Согласно сформулированному им принципу, *любой плоский механизм (рис. 1.8) может быть образован путем присоединения к исходному механизму, включающему стойку и ведущее*



Рисунок 1.8

звено, кинематических цепей, имеющих нулевую подвижность. Тогда подвижность механизма запишется как сумма

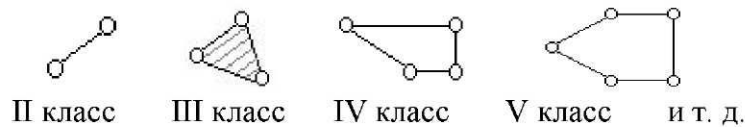
$$W_{\text{мех}} = W_{\text{исх. мех}} + 0 + 0 + 0 + \dots$$

Группы Ассура и их классификация. Кинематическая цепь, которая после присоединения её всеми свободными элементами кинематических пар к стойке получает подвижность, равную нулю, называется структурной группой или группой Ассура. Таким образом, $W_{\text{гр. Асс.}} = 0$.

В состав группы Ассура входят только кинематические пары 5-го класса, поэтому, согласно формуле Чебышёва: $W_{\text{гр. Асс.}} = 3n - 2p_5 = 0$, откуда получаем $3n = 2p_5$, или $p_5 = 3n/2$, как условие существования группы Ассура. Составим таблицу из нескольких сочетаний количества звеньев и кинематических пар в группах Ассура согласно приведённому выше соотношению

n	2	4	6	...
p_5	3	6	9	...

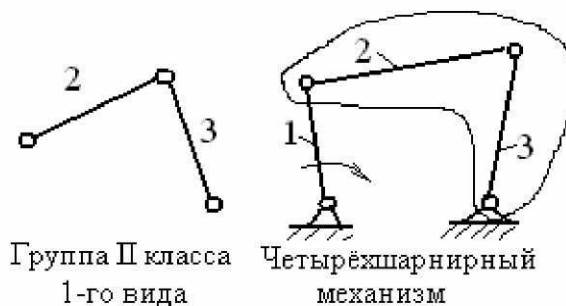
Группы Ассура делятся на классы и порядки. Класс группы определяется классом наиболее сложного замкнутого контура в составе группы:



Кинематические пары в контуре III класса могут быть расположены по одной прямой, не образуя контур, однако считается, что и в этом случае имеется контур III класса. Порядок группы Ассура определяется количеством свободных элементов кинематических пар, которыми она присоединяется к другим звеньям.

$$n = 2$$

$$p_5 = 3$$

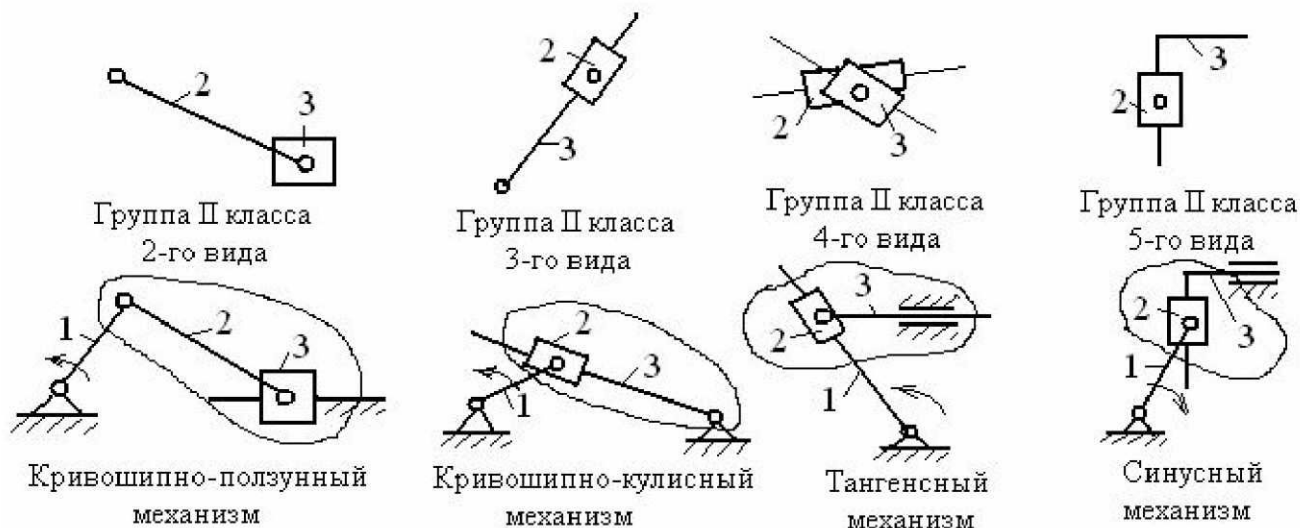


Группа II класса
1-го вида

Четырёхшарнирный
механизм

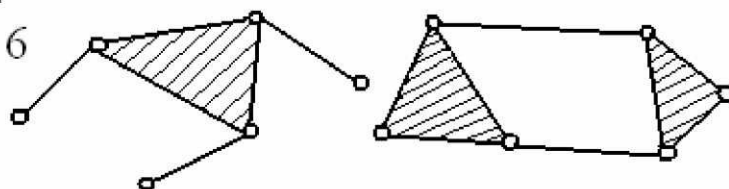
Группы II класса делятся также на виды (модификации) в зависимости от количества и расположения в них поступательных и вращательных кинематических пар. Ниже приводятся схемы групп Ассура различных видов и схемы простейших механизмов с этими группами.

Приведённая выше группа Ассура относится к *первому виду*. Простейший механизм с этой группой Ассура называется *четырёхшарнирным*. Если в этой группе один из крайних элементов вращательной пары заменить поступательным, то получится группа *второго вида*. Она содержится в *кривошипно-ползунном* механизме. Если заменить среднюю вращательную пару поступательной, то такая группа Ассура получится группой Ассура *третьего вида*.



$$n = 4$$

$$p_5 = 6$$



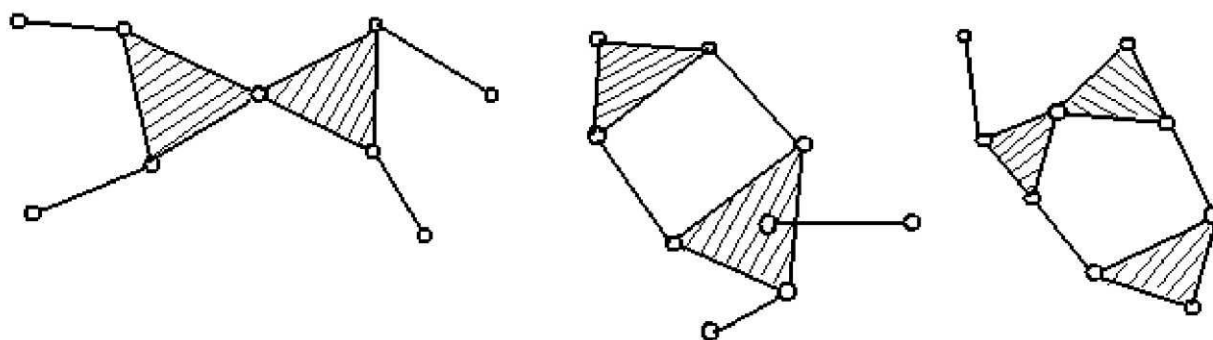
Группа Ассур III класса,
3-го порядка

Группа Ассур IV класса
2-го порядка

В группе 4-го вида крайние кинематические пары поступательные, а средняя – вращательная. Это значит, что в данной группе Ассур имеются два ползуна, соединённых друг с другом вращательной парой.

Механизм с такой группой Ассур реализует функцию тангенса, поэтому он называется тангенсным. В группе 5-го вида средняя кинематическая пара и одна из крайних – поступательные, вторая крайняя – вращательная. Механизм реализует функцию синуса и называется *синусным*.

$$n = 6 \quad p_5 = 9$$



Группа Ассур III класса
4-го порядка

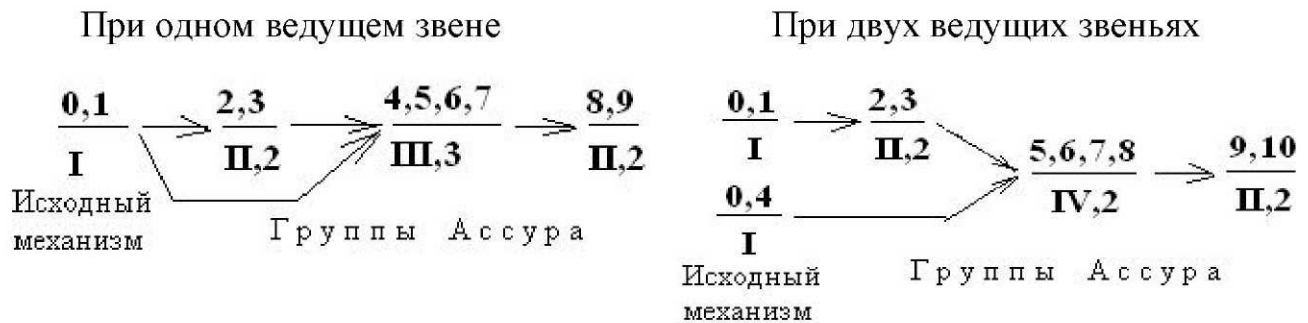
Группа Ассур IV класса
3-го порядка

Группа Ассур V класса
3-го порядка

Классификация механизмов. Формула строения.

В связи с группами Ассур, механизмы также делятся на классы. В составе механизма могут быть несколько групп Ассур разных классов, но механизму присваивается тот класс, который имеет группа Ассур наиболее высокого класса. Формула строения отражает порядок присоединения групп Ассур друг

к другу и к исходному механизму. Приведём здесь для примера вид формул строения двух механизмов безотносительно к каким-либо кинематическим схемам:



В числителе этих формул проставлены номера звеньев, в знаменателе – класс и порядок групп Ассура. Исходный механизм считается механизмом первого класса. Стрелки указывают направление передачи движения от исходного механизма. Согласно принятой классификации механизмов первая из приведённых формул относится к механизму третьего класса, вторая – к механизму четвёртого класса.

1.5. Замена высших пар в плоских механизмах

При выполнении структурного анализа механизма, если в нём присутствуют высшие пары, требуется их заменить парами низшими. При этом необходимо выполнить следующие условия:

1. Количество связей, наложенных на относительное движение звеньев высшей пары заменяющей кинематической цепью, должно остаться неизменным.
2. Мгновенное относительное движение звеньев высшей пары должно сохраниться.

Для выполнения первого условия следует иметь в виду, что одна высшая пара накладывает одно условие связи, поэтому заменяющая кинематическая цепь должна также наложить одно условие связи. Отсюда вытекает равенство:

$$1 = 2 p_5 - 3n,$$

из которого следует

$$p_5 = (3n + 1)/2,$$

что позволяет составить следующую табличку возможных сочетаний количества звеньев и пар заменяющей кинематической цепи.

n	1	3	...
p_5	2	5	...

Таким образом, в простейшем случае для замены высшей пары требуется одно дополнительное звено и две пары 5-го класса.

Для выполнения второго условия необходимо использовать следующую методику:

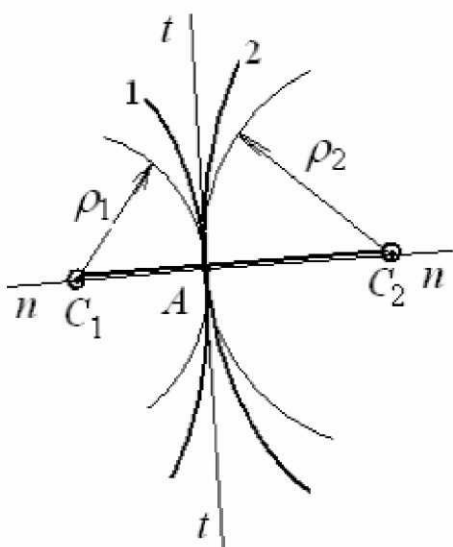


Рисунок 1.9

1. В точке A контакта элементов высшей пары провести нормаль $n - n$ (рис. 1.9).

2. На нормали $n - n$ определить положения центров кривизны C_1 элемента 1 и C_2 элемента 2.

3. В этих центрах поместить низшие пары (5-го класса), а между ними условное заменяющее звено C_1C_2 , длина которого равна сумме радиусов кривизн ρ_1 и ρ_2 .

Замечания. Если один из элементов высшей пары заканчивается остриём, то в этом острие (в точке) располагается одна из заменяющих низших (вращательных) пар. Если одно из звеньев высшей пары в зоне контакта

имеет форму прямой линии, то в этом месте пара 5-го класса должна быть поступательной.

1.6. Избыточные (повторяющиеся) связи и местные подвижности в механизмах

Наряду с движениями и условиями связей, которые в механизме влияют на закон преобразования движения, могут существовать связи и движения, которые не влияют на этот закон. Такие связи называются *избыточными*, а движения – *местными подвижностями*, или *лишними степенями свободы*. Одна избыточная связь уменьшает расчётную подвижность на единицу, а одна местная подвижность увеличивает её на единицу. Для обнаружения избыточных связей можно воспользоваться следующими рассуждениями. Количество фактических условий связей в механизме определяется суммой

$$S_{\text{факт}} = 2p_5 + p_4,$$

а количество необходимых условий связей для нормального его функционирования определяется разностью между $3n$ и количеством W степеней свободы механизма, т. е. $S_{\text{необ}} = 3n - W$. Обозначая количество избыточных связей буквой q , получаем следующую расчётную формулу $q = S_{\text{факт}} - S_{\text{необ}}$. Или окончательно $q = (2p_5 + p_4) - (3n - W)$.

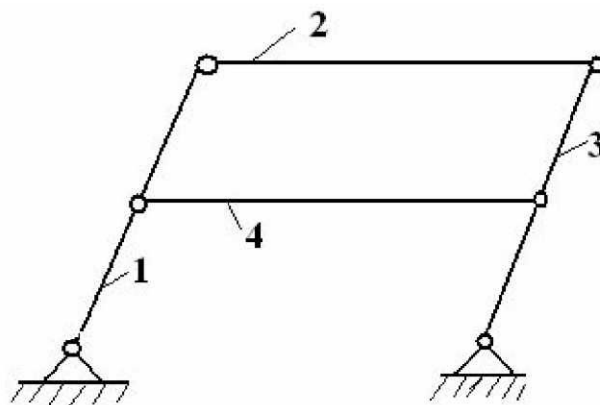


Рисунок 1.10

На рис. 1.10 показан механизм шарнирного параллелограмма, у которого противоположные стороны попарно равны и параллельны (отсюда его название). Расчёт по приведённой формуле даёт следующий результат. Количество кинематических пар 5-го класса $p_5 = 6$, количество пар 4-го класса $p_4 = 0$, количество подвижных звеньев $n = 4$. Механизм работает при одном ведущем звене, например звене 1. С учётом этих данных получаем

$$q = 2p_5 - (3n - W) = 2 \cdot 6 - (3 \cdot 4 - 1) = 1.$$

То есть в данном механизме имеется одна избыточная связь.

Звенья 2 и 4 выполняют одну и ту же функцию, передавая движение на звено 3, разделяя надвое общий силовой поток, снижая нагрузку, приходящуюся на каждое из них. С точки зрения структуры одно из этих звеньев (например, звено 4) можно считать избыточной связью.

Показательным в этом отношении является зубчатый механизм планетарного типа, изображённый на рис. 1.11. В состав механизма входит центральное колесо 1, являющееся ведущим, три параллельно работающих сателлита 2 и стержневое звено 3, образующее вращательные пары с сателлитами. Все подвижные звенья размещены внутри неподвижного колеса 0 с внутренними зубьями. Данные для расчёта таковы: количество пар 5-го класса $p_5 = 5$ (они на схеме отмечены римскими цифрами), каждый сателлит 2 образует зацепление (две кинематические пары) с колёсами 0

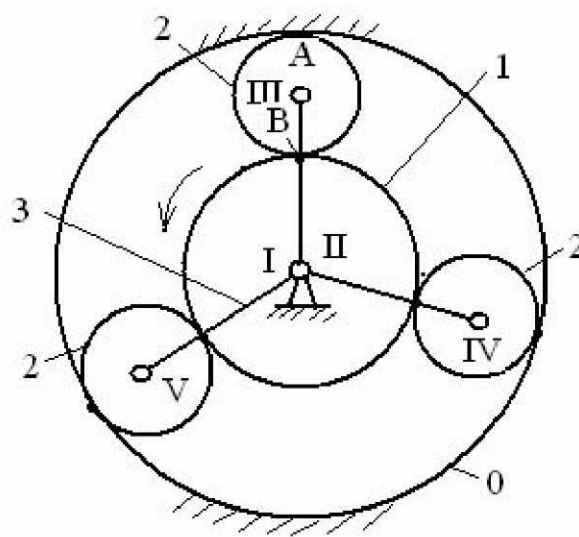


Рисунок 1.11

и 1, поэтому $p_4 = 6$, количество подвижных звеньев механизма $n = 5$, количество степеней свободы механизма $W = 1$. В результате расчёта получаем

$$q = (2 \cdot p_5 + p_4) - (3 \cdot n - W) = (2 \cdot 5 + 6) - (3 \cdot 5 - 1) = 2.$$

Таким образом, видим, что в данном механизме имеется две избыточные связи, это – два из трёх сателлитов, которые повторяют функции одного сателлита. Следует отметить, что в обоих механизмах избыточные связи играют положительную роль, разделяя общий силовой поток и уменьшая нагрузку на звенья.

Избыточные связи могут играть и отрицательную роль, когда они ограничивают движение звена в кинематической паре, уже ограниченное связью в другой кинематической паре. Рассмотрим, например, четырёхшарнирный механизм (рис. 1.12), все звенья которого образуют друг с другом только вращательные кинематические пары 5-го класса. При идеальном изготовлении звеньев оси всех шарниров должны быть параллельны друг другу (на рис. 1.12 отмечены только шарниры шатуна A и B), и механизм должен легко собираться и

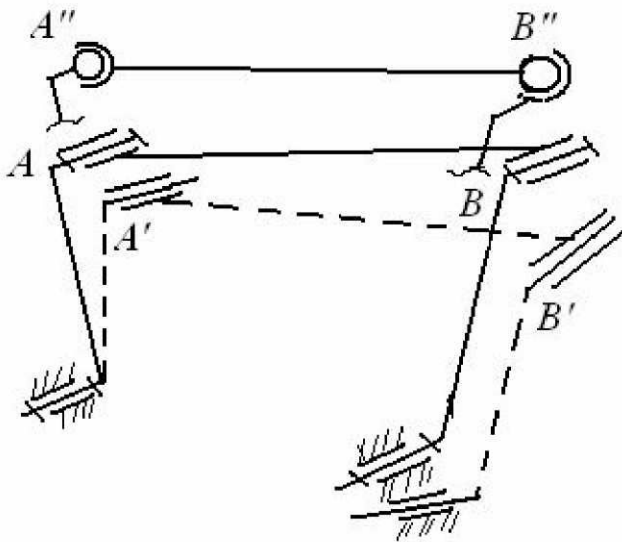


Рисунок 1.12

нормально функционировать. Так как точно изготовить звенья невозможно, то в результате ошибок оси шарниров перекашиваются, звенья уходят из одной плоскости, и механизм становится пространственным (на рис. 1.12 такой механизм изображён штриховыми линиями, и шарниры шатуна занимают положение A' и B'). Для возвращения его в плоское состояние необходимо приложить немалые усилия. Однако после такой операции звенья деформируются, в кинематических парах образуется кромочный контакт, и всё это приводит к интен-

сивному износу элементов кинематических пар и к сокращению срока службы механизма. Чтобы обнаружить такого рода избыточные связи, необходимо рассматривать механизм как пространственный. Тогда формула и расчёт количества избыточных связей будет

$$q = 5p_5 - (6n - 1) = 5 \cdot 4 - (6 \cdot 3 - 1) = 3.$$

То есть в данном механизме имеются три избыточных связи. Для приведения механизма в работоспособное состояние необходимо вместо пар пятого класса по концам шатуна расположить пары третьего класса (сферические шарниры) A'' и B'' , которые в сумме дадут четыре дополнительных движения. При необходимых трёх движениях одно из них останется неиспользованным – а именно, вращательное движение вокруг собственной оси шатуна. Это движение будет местной подвижностью и на движение механизма в целом влиять не будет.

Количество местных подвижностей в механизме можно определить вычитанием количества потерянных степеней свободы $(2p_5 + p_4)$ из того количества, которое должно быть потеряно для нормального функционирования механизма $(3n - W)$. Если обозначить количество местных подвижностей буквой f , то получается следующая формула для расчёта этого количества

$$f = (3n - W) - (2p_5 + p_4).$$

Для кулачкового механизма (рис. 1.13) получается следующий результат. Число подвижных звеньев $n = 3$, число кинематических пар

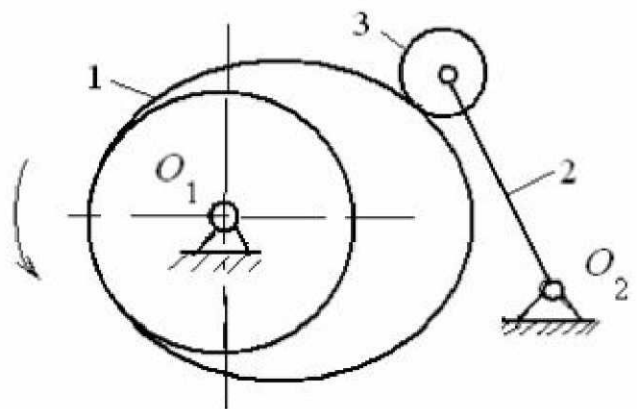


Рисунок 1.13

5-го класса $p_5 = 3$, число кинематических пар 4-го класса $p_4 = 1$ и, наконец, $W = 1$. Подставляя все эти данные в приведённую формулу, получаем

$$f = (3n - W) - (2p_5 + p_4) = (3 \cdot 3 - 1) - (2 \cdot 3 + 1) = 1.$$

Этот расчёт показывает, что в механизме имеется одна лишняя степень свободы или местная подвижность. Местной подвижностью здесь является вращение ролика 2 относительно толкателя 3, так как это движение не участвует в преобразовании движения. В данном случае это движение необходимо для замены трения скольжения трением качения, что является более выгодным с точки зрения потерь на трение (повышение КПД).

При выполнении структурного анализа механизмов избыточные связи и местные подвижности должны быть исключены.

1.7. Структурный синтез механизмов

Теория структуры, изложенная выше, позволяет решать некоторые задачи синтеза механизмов. Например, используя формулу Сомова – Малышева, можно определить, какое количество звеньев может иметь простейший пространственный механизм, в составе которого только пары пятого класса. Для такого механизма формула приобретает вид $W = 6n - 5p_5$. Из неё следует, что количество кинематических пар 5-го класса в механизме должно быть $p_5 = \frac{6n - W}{5}$.

При одном ведущем звене ($W = 1$) целое число пар получится, если $n = 6$. Таким образом, получается семизвенный механизм, состоящий из шести подвижных звеньев и стойки. Аналогично, но более трудоёмко, решается задача синтеза пространственного механизма с разными сочетаниями кинематических пар различных классов.

С привлечением формулы Чебышёва можно решать задачи в той же постановке и для плоского механизма. Выразив из этой формулы количество звеньев, получим

$$n = \frac{W + (2p_5 + p_4)}{3}.$$

Пусть в механизме $W = 1$ (одно ведущее звено), количество пар 4-го класса $p_4 = 0$. При этих данных минимальное количество пар 5-го класса для получения n целого должно быть $p_5 = 4$. Подставляя эти данные в приведённую формулу, получаем $n = 3$. Так приходим к четырёхзвенному механизму (три подвижных звена и стойка).

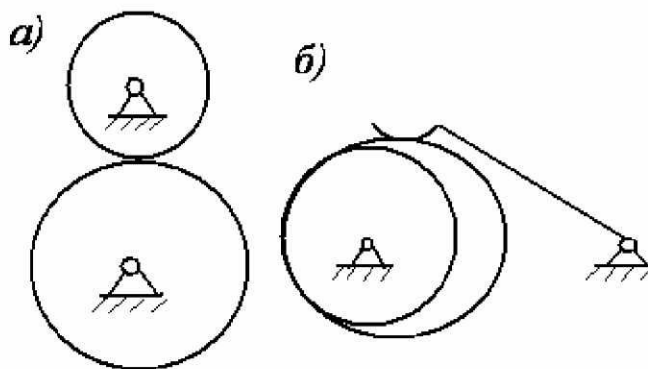


Рисунок 1.14

Если в механизм ввести одну кинематическую пару 4-го класса (высшую пару), то для целого n достаточно $p_5 = 2$, а в итоге расчёта получим $n = 2$. Такой механизм является трёхзвенным с высшей парой, примером которого служит простейший зубчатый механизм, включающий два зубчатых колеса и стойку (рис. 1.14, *а*), или кулачковый механизм (рис. 1.14, *б*). Согласно принципу образования механизмов по Л. В. Асуру, необходимо помнить, что кроме ведущего звена и стойки все звенья механизма должны быть в составе групп Асура. Это необходимо учитывать при структурном синтезе механизма. Например, требуется создать механизм для преобразования вращательного движения ведущего звена в возвратно-поступательное движение ведомого звена (рис. 1.15, *а*). Сколько звеньев необходимо установить между ними? Самый простой вариант ответа – одно звено (рис. 1.15, *б*). Если полученный механизм по его свойствам не устраивает конструктора, то как действовать дальше, сколько звеньев нужно установить между первым и последним звеньями? Ответ – три звена, которые вместе с ведомым звеном составят или две группы Асура второго класса (рис. 1.15, *в*), или одну группу третьего класса (рис. 1.15, *г*). Между первым вариантом с одним промежуточным звеном и двумя другими вариантами с тремя промежуточными звеньями решения нет*.

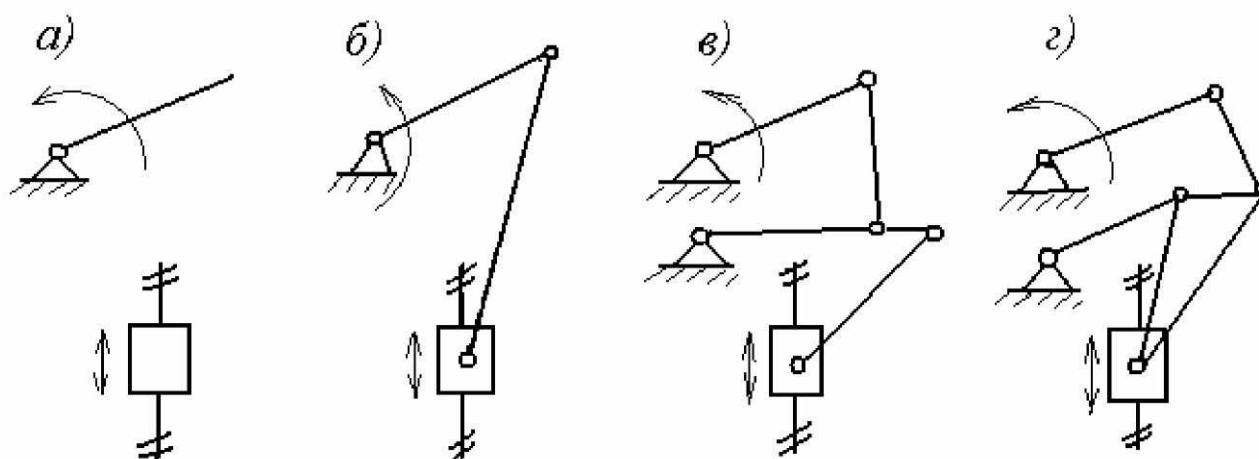


Рисунок 1.15

Вопросы для самопроверки

1. Что такое машина, механизм, в чём их различие?
2. Что называют звеном механизма?
3. Что называют кинематической парой?
4. Как классифицируются кинематические пары?

* Подробные сведения по структурному синтезу механизмов, в т. ч. механизмов без вредных избыточных связей, имеются в книге: Решетов Л. Н.. Конструирование рациональных механизмов. М., 1967.

5. Что называется кинематической цепью? Какие кинематические цепи существуют в механизмах?
6. Как рассчитать степень подвижности механизма?
7. Какой физический смысл имеет степень подвижности механизма?
8. Что собой представляют избыточные связи? Приведите примеры полезных и вредных избыточных связей.
9. Что такое местная подвижность (лишняя степень свободы)?
10. В чём состоит принцип структурного образования механизмов по Л.В. Ассуру?
11. Что такое исходный механизм?
12. Что такое группа Ассура, как классифицируются группы Ассура?
13. Что называют формулой строения механизма?
14. По каким признакам классифицируют механизмы с точки зрения их структуры?
15. Как осуществляется замена высших пар низшими?
16. Как применить формулы для расчёта степени подвижности к синтезу механизмов? Поясните на примерах.

2. Кинематика и синтез зубчатых механизмов

2.1. Разновидности зубчатых передач

Зубчатые механизмы служат для преобразования вращательного движения с одновременным преобразованием сил. Любой зубчатый механизм состоит из зацеплений пар зубчатых колёс, которые можно назвать зубчатыми передачами (рис. 2.1). Зубчатые передачи различаются по расположению осей колёс в пространстве:

с параллельными осями – рис. 2.1: *а* – цилиндрическими колёсами внешнего зацепления; *б* – цилиндрическими колёсами внутреннего зацепления; *в* – цилиндрическими косозубыми колёсами; *г* – цилиндрическими шевронными колёсами; с пересекающимися осями – рис. 2.1: *д*, *е*, *ж* – коническими колёсами; с перекрещивающимися осями – рис. 2.1: *з* – винтовыми колёсами, *и* – гипоидная передача. Особняком стоит реечная передача (рис. 2.1, *к*), в которой одно из колёс имеет радиусы окружностей, равные бесконечности, и поэтому превращается в зубчатую рейку, которая не вращается, а движется поступательно (отсюда и название передачи).

По продольной форме зубьев различают передачи прямозубыми колёсами (рис. 2.1, *а*, *б*, *д*, *к*); передачи косозубыми колёсами (рис. 2.1, *в*, *г*, *е*, *и*); передача колёсами с круговыми зубьями (рис. 2.1, *ж*) и т. д.

По форме профиля зубьев передачи бывают эвольвентные, циклоидальные, цевочные, с круговинтовой формой профиля и др.

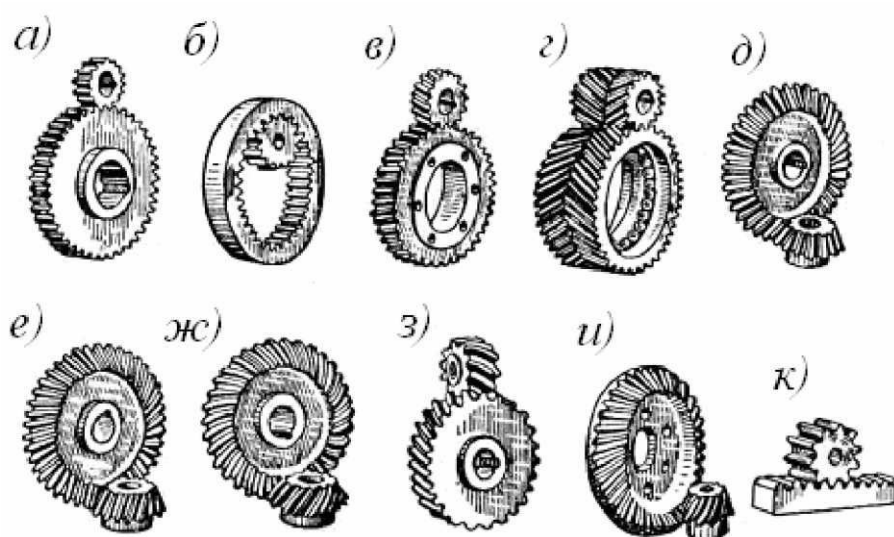


Рисунок 2.1

2.2. Понятие о передаточном отношении

Основной характеристикой преобразования вращательного движения зубчатых механизмов является *передаточное отношение* – отношение угловой скорости или частоты вращения ведущего звена механизма к угловой скорости или частоте вращения ведомого звена.

Передаточное отношение обозначается латинской буквой « i » с индексами. Индексы указывают на то, от какого колеса (1-й индекс) к какому (2-й индекс) вычисляется передаточное отношение. Например, i_{12} обозначает передаточное отношение от первого колеса ко второму. Согласно определению

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad \text{или} \quad i_{12} = \frac{n_1}{n_2}, \quad \text{так как} \quad \omega = \frac{\pi \cdot n}{30}.$$

Поскольку $i_{21} = \omega_2 / \omega_1$, то $i_{12} \cdot i_{21} = 1$, и $i_{21} = 1 / i_{12}$.

Если в механизме передаточное отношение больше единицы, то угловая скорость ведущего колеса больше, чем ведомого, и такой механизм называется *редуктором*. В противном случае механизм называется *мультипликатором*. Редукторы в машиностроении применяются в большинстве случаев из-за необходимости уменьшения скоростей движения исполнительных органов машин и увеличения на них усилий. Мультипликаторы применяются реже и не являются силовыми устройствами.

При совпадении направлений вращения ведущего и ведомого колёс передаточное отношение имеет положительный знак, т. е. $i_{12} > 0$, если направления вращений не совпадают, то $i_{12} < 0$. Заметим, что знак имеет смысл при параллельных осях колёс.

Замечание. Передаточное отношение, взятое по модулю, называется *передаточным числом* и обозначается буквой u с теми же индексами, например $u_{12} = |i_{12}|$.

2.3. Передаточное отношение простых зубчатых передач

Простой зубчатой передачей будем называть трехзвенный зубчатый механизм, состоящий из двух зубчатых колес и стойки. Рассмотрим, как можно выразить передаточное отношение в простых зубчатых передачах при различном расположении осей составляющих их колёс в пространстве.

Передача с параллельными осями колёс (цилиндрическая передача). В зубчатых передачах с параллельными осями колёс существуют окружности, которые при передаче движения перекатываются друг по другу без скольжения. Строго говоря, если иметь в виду размеры колёс в направлении их осей (ширину ободов), то на самом деле имеет место касание не окружностей, а цилиндров по их образующим. Однако в сечении этих цилиндров любой плоскостью, перпендикулярной их осям, имеет место одна и та же картина касания окружностей. Все свойства передачи определяются свойствами тех элементов, которые располагаются в указанной плоскости (поэтому такая передача называется плоской).

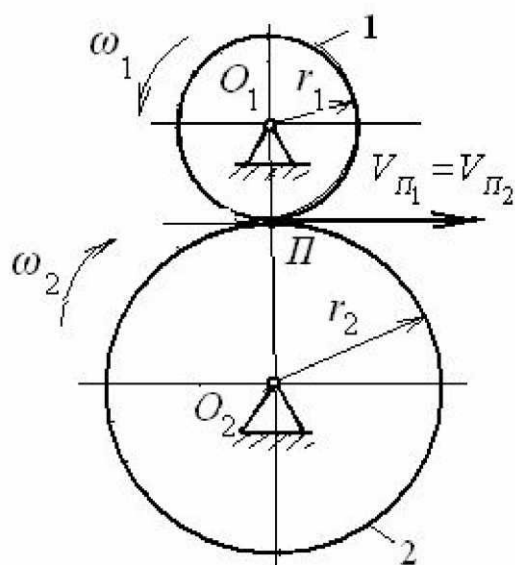


Рисунок 2.2

Касающиеся друг друга окружности называются *центроидными*, т. к. окружность одного колеса является *геометрическим местом центров мгновенного относительного вращения другого колеса*. На рис. 2.2 показана такая передача. В ней колесо 1 вращается вокруг центра O_1 , а колесо 2 – вокруг центра O_2 . Их центроидные окружности касаются друг друга в точке Π . Направления вращения колёс указаны стрелками. В точке Π окружные скорости колёс одинаковы и определяются произведением угловых скоростей колёс на радиусы центроидных окружностей r_1 и r_2 , т. е. $V_{\Pi 1} = \omega_1 \cdot r_1$ и $V_{\Pi 2} = \omega_2 \cdot r_2$ соответственно. Так как эти скорости равны, то имеет место равенство

$$\omega_1 \cdot r_1 = \omega_2 \cdot r_2,$$

из которого следует, что передаточное отношение может быть выражено через отношение радиусов центроидных окружностей, то есть

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{r_2}{r_1}.$$

Знаки «+» и «-» перед отношением радиусов появились в связи с тем, что, в отличие от угловых скоростей, радиусы не могут быть отрицательными, и знак «-» относится к данной схеме, а знак «+» имел бы место при внутреннем зацеплении колёс.

Если центроидами являются *делительные* окружности, то их радиусы можно выразить следующим образом. Длины центроидных окружностей S_1 первого колеса и S_2 второго колеса определяются выражениями соответственно: $S_1 = 2 \cdot \pi \cdot r_1 = p \cdot z_1$ и $S_2 = 2 \cdot \pi \cdot r_2 = p \cdot z_2$, где p – шаг колёс по делительной окружности, т. е. *расстояние между одноимёнными точками двух соседних зубьев, измеренное по делительной окружности*, z_1 и z_2 – числа зубьев данных колёс, (то же, что число шагов).

Решим эти выражения относительно радиусов r_1 и r_2 :

$$r_1 = p \cdot z_1 / (2 \cdot \pi), \quad r_2 = p \cdot z_2 / (2 \cdot \pi).$$

Отношение шага p по делительной окружности к числу π называется модулем зубчатого колеса, который обозначается латинской буквой m . Модуль, как и шаг, является единым для колёс, находящихся в зацеплении. Он измеряется в миллиметрах, и через него выражаются все размеры зубьев (величины модулей определяются стандартом). Подставив теперь вместо радиусов в ранее записанном выражении передаточного отношения их найденные выше значения, после сокращения на 2 и m , получим окончательно

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{r_2}{r_1} = \pm \frac{z_2}{z_1}.$$

То есть, *передаточное отношение простой зубчатой передачи с параллельными осями колёс может быть выражено как обратное отношение чисел зубьев колёс*.

Передача с пересекающимися осями колёс (коническая передача). В конической передаче зубья колёс нарезаны на усечённых конусах 1 и 2, касающихся друг друга по общей образующей OP и перекатывающихся друг по другу вокруг неё без скольжения (рис. 2.3). Колёса вращаются относительно стойки с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 вокруг осей, совпадающих с осями конусов. Половинные углы конусов отмечены буквами δ_1 и δ_2 соответственно, сумма этих углов образует *межосевой угол передачи* Σ , то есть.

$$\Sigma = \delta_1 + \delta_2.$$

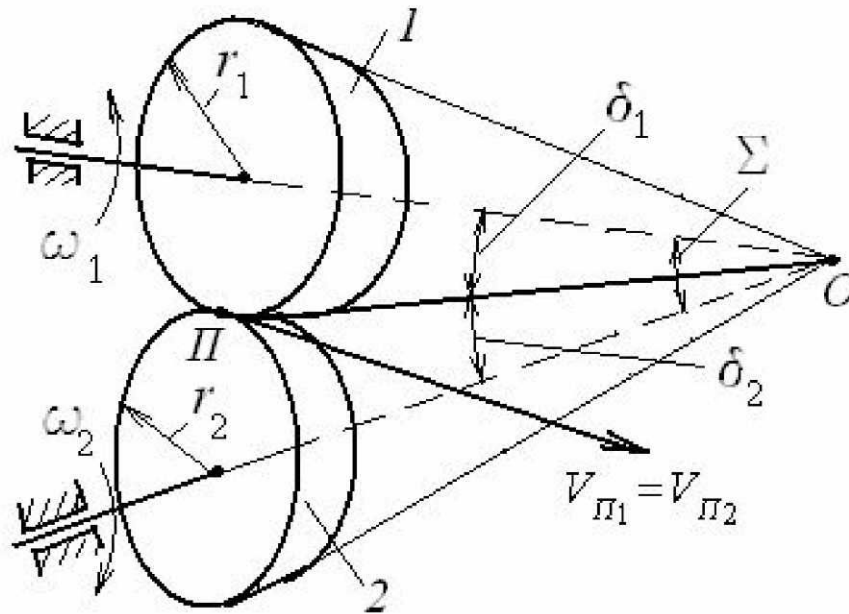


Рисунок 2.3

Основания конусов с радиусами r_1 и r_2 касаются друг друга в точке Π и имеют в ней одинаковые скорости: $V_{\Pi 1} = \omega_1 \cdot r_1$ и $V_{\Pi 2} = \omega_2 \cdot r_2$. Из равенства окружных скоростей имеем $i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}$. Так как оси конусов перпендикулярны их основаниям, то можно записать $r_1 = OP \cdot \sin \delta_1$ и $r_2 = OP \cdot \sin \delta_2$. Следовательно,

$$i_{12} = \frac{OP \cdot \sin \delta_2}{OP \cdot \sin \delta_1} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1}.$$

Длины окружностей радиусов r_1 и r_2 равны соответственно $2\pi r_1 = pz_1$ и $2\pi r_2 = pz_2$, где p – шаг зубчатых колёс, z_1 и z_2 – числа зубьев колёс. Подытоживая все выкладки, записываем окончательно все варианты выражения передаточного отношения в данной передаче: $i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1} = \frac{z_2}{z_1}$.

Передача с перекрещивающимися осями колёс (передача винтовыми колёсами). В этой передаче зубья колёс нарезаются на круглых цилиндрах, и оси колёс перекрещиваются под *межосевым углом* Σ , в общем случае не равным 90° , и отстоят друг от друга на кратчайшее расстояние a_w (рис. 2.4 а). При этом зубья образуют относительно осей колёс углы β_1 – первого колеса и β_2 – второго колеса (рис. 2.4 б), так что имеет место равенство $\Sigma = \beta_1 + \beta_2$.

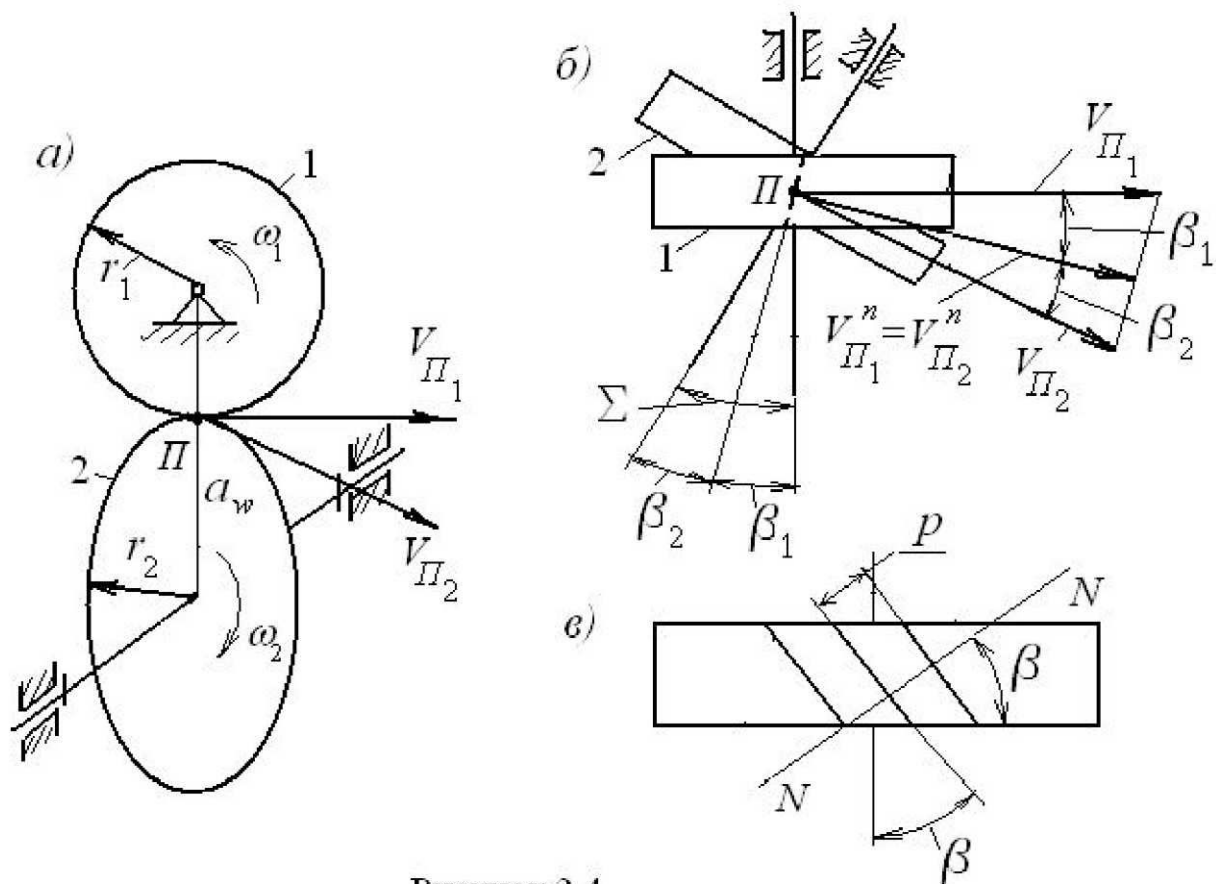


Рисунок 2.4

Окружные скорости колёс в этой передаче, разные по величине и по направлению, определяются формулами: $V_{\Pi 1} = \omega_1 \cdot r_1$ и $V_{\Pi 2} = \omega_2 \cdot r_2$. Так как межосевой угол в передаче равен Σ , а окружные скорости колёс в точке Π перпендикулярны осям колёс, то между ними угол равен также Σ , что видно на рис. 2.4 б. На этом рисунке штриховой линией показана линия контактирующих зубьев колёс. Проведём через точку Π этой линии перпендикуляр к ней и спроецируем на него скорости $V_{\Pi 1}$ и $V_{\Pi 2}$, получив их нормальные составляющие, совпадающие друг с другом по величине и направлению, то есть $V_{\Pi 1}^n = V_{\Pi 2}^n$. Так приходим к равенству $\omega_1 \cdot r_1 \cdot \cos \beta_1 = \omega_2 \cdot r_2 \cdot \cos \beta_2$, из которого следует

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2 \cos \beta_2}{r_1 \cos \beta_1}.$$

Последний член этого равенства говорит о том, что на передаточное отношение можно влиять не только радиусами цилиндров контактирующих колёс, но и углами наклона зубьев. Посмотрим, как ещё можно выразить передаточное отношение данной передачи. Для этого обратимся к рис. 2.4 в, на котором показано колесо с косыми зубьями, образующими угол β с осью колеса. Рассечём колесо плоскостью, перпендикулярной к линии зуба, след которой отмечен ли-

нией NN на рисунке. В этой плоскости шаг колеса обозначен буквой p . Он одинаков у обоих колёс, следовательно, модули m колёс в этой плоскости также одинаковы. В торцевой плоскости колеса, перпендикулярной его оси, как видно из рисунка, шаг определяется отношением $\frac{p}{\cos \beta}$. Эти выкладки и рассуждения справедливы для обоих колёс, поэтому далее можно записать выражения для радиусов цилиндров таким образом

$$r_1 = \frac{p \cdot z_1}{2\pi \cdot \cos \beta_1} \text{ и } r_2 = \frac{p \cdot z_2}{2\pi \cdot \cos \beta_2}.$$

Подставив эти выражения в предыдущее соотношение, после сокращений получаем окончательно

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2 \cdot \cos \beta_2}{r_1 \cos \beta_1} = \frac{z_2}{z_1}.$$

Таким образом, мы убедились, что в *простой зубчатой передаче, независимо от расположения осей её колёс в пространстве, передаточное отношение (или передаточное число) может быть определено как отношение числа зубьев колеса, принятого в качестве ведомого к числу зубьев колеса, принятого в качестве ведущего.*

Частным случаем зубчатой передачи винтовыми колёсами является *червячная передача*, в которой одно из колёс может иметь всего один зуб и называется *червяком*. При одном зубе – это однозаходный червяк, при двух зубьях – двухзаходный червяк и т. д. Другое колесо передачи называется *червячным колесом*. В этой передаче передаточное отношение определяется по общему правилу, изложенному выше, то есть передаточное отношение от червяка (он всегда служит ведущим) к червячному колесу равно отношению числа зубьев колеса к числу заходов червяка.

2.4. Кинематика и синтез зубчатых механизмов с неподвижными осями колес

Передаточное отношение сложного зубчатого механизма равно произведению передаточных отношений простых зубчатых передач, составляющих сложный механизм. Доказательство этого положения понятно из следующих выкладок:

$$i_{1n} = \omega_1 / \omega_n = \omega_1 / \omega_2 \cdot \omega_2 / \omega_3 \cdot \omega_3 / \omega_4 \cdots \omega_{n-1} / \omega_n.$$

Так как каждый из множителей правой части представляет собой передаточное отношение отдельных последовательно расположенных ступеней простых передач, то можно записать

$$i_{1n} = i_{12} \cdot i_{23} \cdot i_{34} \cdots i_{n-1n},$$

что и требовалось доказать.

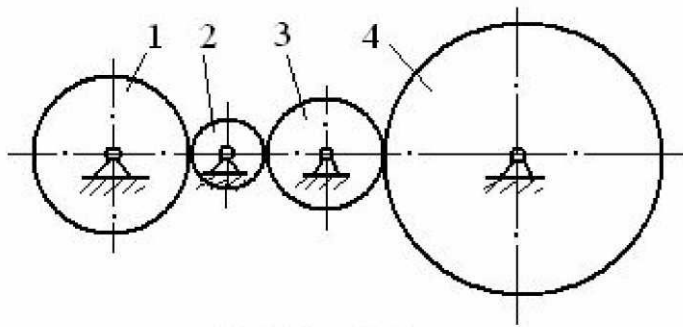


Рисунок 2.5

Механизм с рядовым соединением колёс. В этом механизме все колёса вращаются в одной плоскости, и каждое промежуточное колесо образует зацепление с двумя соседними (рис. 2.5). На схеме механизма цифрами обозначены номера колёс. Согласно доказанному выше положению общее передаточное

отношение данного механизма определяется равенством $i_{14} = i_{12} \cdot i_{23} \cdot i_{34}$. Записав передаточные отношения отдельных ступеней $i_{12} = -\frac{z_2}{z_1}$, $i_{23} = -\frac{z_3}{z_2}$ и

$i_{34} = -\frac{z_4}{z_3}$, и подставив их в правую часть полученного ранее произведения, имеем

$$i_{14} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(-\frac{z_3}{z_2}\right) \cdot \left(-\frac{z_4}{z_3}\right),$$

что после выполнения необходимых действий приводит к следующему результату

$$i_{14} = -\left(\frac{z_4}{z_1}\right).$$

Этот результат показывает, что в механизмах такого типа передаточное отношение зависит только от чисел зубьев ведущего и ведомого колёс. Промежуточные колёса, числа зубьев которых не влияют на передаточное отношение, называются *паразитными*. Они позволяют только передать движение на небольшое расстояние и изменить его знак. Для общего случая механизма с произвольным числом колёс при вычислении передаточного отношения можно руководствоваться следующим выражением

$$i_{1n} = \frac{z_n}{z_1} (-1)^k,$$

где k – число внешних зацеплений, так как только они влияют на знак результата.

Решение задачи синтеза (проектирования) механизмов данного типа заключается в подборе чисел зубьев ведущего и ведомого колёс для обеспечения заданного передаточного отношения. Что касается количества промежуточных колёс, то его выбирают исходя из расстояния между осями ведущего и ведомого колёс и необходимости экономии пространства, где размещается механизм.

Механизм со ступенчатым соединением колёс.

В этом механизме колеса вращаются в параллельных плоскостях, и каждое промежуточное колесо вступает в зацепление с одним соседним колесом. На каждом промежуточном валу имеется по два колеса. На рис. 2.6 показана схема механизма, в котором на промежуточных валах вращаются колёса 2 и 3, 4 и 5, 6 и 7, на ведущем валу находится одно колесо 1, а на ведомом – также одно колесо 8. Найдём передаточное отношение от первого колеса к восьмому i_{18} . Для этого сначала запишем

$$i_{18} = i_{12} \cdot i_{34} \cdot i_{56} \cdot i_{78}.$$

Так как $i_{12} = -\frac{z_2}{z_1}$, $i_{34} = -\frac{z_4}{z_3}$,
 $i_{56} = \frac{z_6}{z_5}$ и $i_{78} = -\frac{z_8}{z_7}$, то, подставив в произведение передаточных отношений эти дроби, получим окончательно

$$i_{18} = -\frac{z_2 \cdot z_4 \cdot z_6 \cdot z_8}{z_1 \cdot z_3 \cdot z_5 \cdot z_7}.$$

Никаких сокращений здесь нет кроме возможных общих множителей после подстановки чисел зубьев. Общий знак минус появился из-за того, что в механизме нечётное число пар внешнего зацепления (три пары). Для общего случая механизма запишем формулу

передаточного отношения в следующем виде $i_{1n} = \frac{\prod z_{\text{ВМ}}}{\prod z_{\text{ВЩ}}} \cdot (-1)^k$, где k – число

пар колёс внешнего зацепления, а символы в числителе означают произведение чисел зубьев ведомых колёс каждой пары, в знаменателе – произведение чисел зубьев ведущих колёс каждой пары.

Такие механизмы более выгодны с точки зрения преобразования движения, чем механизмы с рядовым соединением колес, так как они позволяют получить любое передаточное отношение. Задача синтеза механизма заключается в разложении заданного передаточного отношения на множители, количество которых определяет количество ступеней (или пар колёс) в механизме, а величина каждого множителя определяет передаточное отношение соответствующей ступени. При этом величина множителя обеспечивается подбором чисел зубьев. Выбор количества ступеней (пар колёс) зависит от количества множителей и знака заданного передаточного отношения.

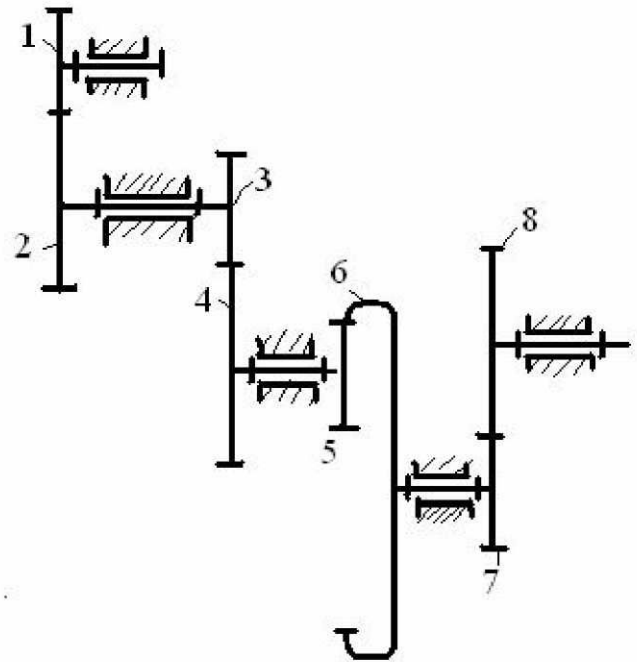


Рисунок 2.6

Пример. Задано передаточное отношение $i_{1n} = 10$. Разложим это число на множители таким образом: $i_{1n} = 10 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1,25$. Из разложения видно, что в механизме может быть четыре ступени с передаточными отношениями:

$$i_{12} = 2, \quad i_{34} = 2, \quad i_{56} = 2, \quad i_{78} = 1,25,$$

причём, все четыре ступени могут быть внешнего зацепления.

2.5. Кинематика механизмов планетарного типа

В отличие от рассмотренных схем существуют механизмы, у которых оси отдельных колес подвижны. Такие механизмы относятся к механизмам *планетарного типа или эпициклическим*. Эти механизмы по передаточному отношению выгодно отличаются от преды-

дущих, так как они могут обеспечить большое передаточное отношение при малом количестве колес (до 10 тысяч и более при четырех колесах).

Типовая схема эпициклического механизма представлена на рис. 2.7. Она включает центральное колесо 1 с внешними зубьями, называемое также *солнечным колесом*, центральное колесо 3 с внутренними зубьями и колесо 2, называемое *сателлитом*. Сателлит получил своё название из-за двух вращательных движений, в которых он участвует: вращения вокруг собственной оси и вращения вокруг общей оси механизма.

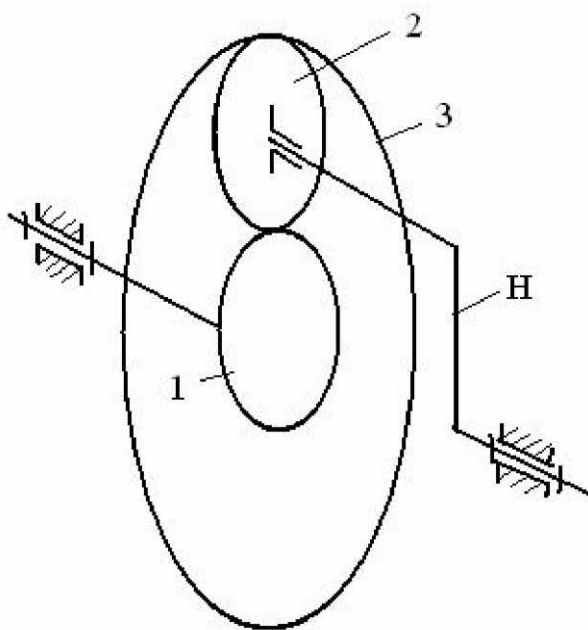


Рисунок 2.7

Такую возможность ему предоставляет звено Н стержневого типа, называемое *водилом*.

Если оба центральных колеса вращаются, то в механизме $W = 2$, и он называется *дифференциальным*.

Если одно из центральных колёс заторможено, то $W = 1$, и механизм называется *планетарным*.

Наиболее часто встречающиеся схемы механизмов планетарного типа в блочном представлении изображены на рис. 2.8. Схема А соответствует *обыкновенному планетарному механизму*, имеющему одно ведущее звено и одно ведомое при любом числе эпициклических ступеней. На схеме Б показана блок-схема *дифференциального механизма* с двумя ведущими и одним ведомым звеньями. На схеме В представлен так называемый *дифференциальный механизм с замкнутым контуром*, который составлен из одной или нескольких

эпициклических ступеней, представляющих дифференциальную часть, и дополнительной кинематической цепи, соединяющей выходной вал механизма с одним из его входных валов. В результате такой связи в механизме остаётся одно ведущее и одно ведомое звенья.

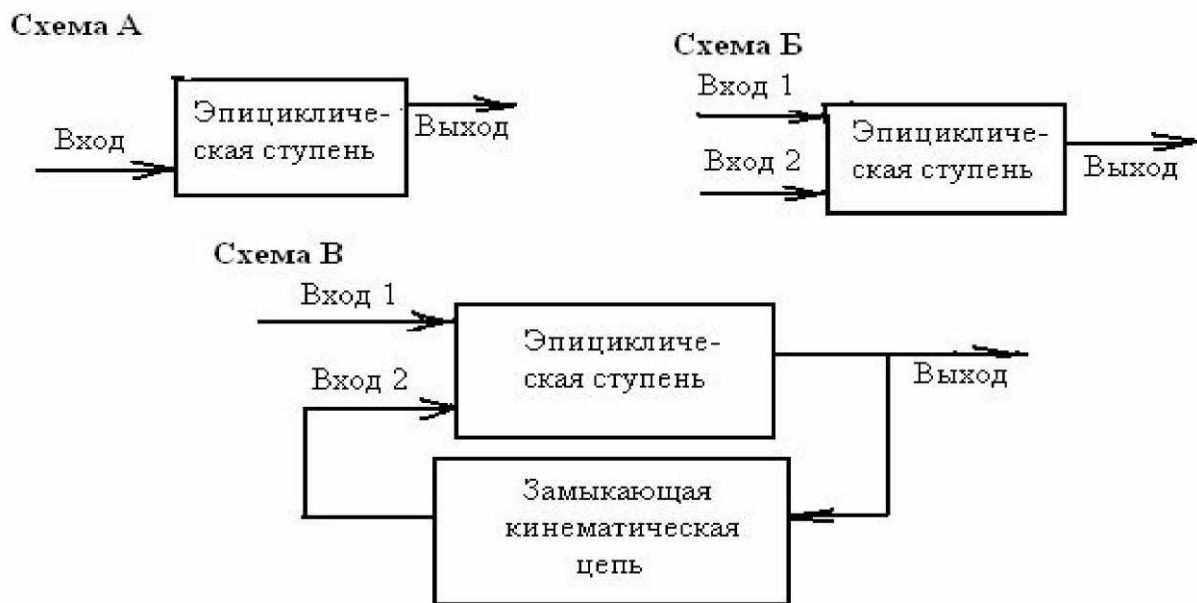


Рисунок 2.8

Аналитический расчёт кинематики. Задача аналитического расчёта кинематики заключается в определении угловой скорости ведомого звена в дифференциальном механизме, или в определении передаточного отношения в планетарном механизме. Исходными данными в первом случае служат угловые скорости (или частоты вращения) двух ведущих звеньев механизма и в обоих случаях – числа зубьев колёс. Для решения задачи применяют *метод обращения движения*, который заключается в том, что всему механизму вместе со стойкой сообщается движение с угловой скоростью, равной и противоположно направленной угловой скорости водила. Тогда при сохранении характера относительного движения звеньев водило останавливается, а все звенья получают угловые скорости, уменьшенные на угловую скорость водила. Механизм в таком случае превращается в условный механизм с неподвижными осями колес. Это позволяет составить следующую таблицу скоростей.

№ звена	Угловые скорости звеньев в реальном механизме	Угловые скорости звеньев в механизме с условно неподвижным водилом
1	ω_1	$\omega_1^{(H)} = \omega_1 - \omega_H$
2	ω_2	$\omega_2^{(H)} = \omega_2 - \omega_H$
3	ω_3	$\omega_3^{(H)} = \omega_3 - \omega_H$
H	ω_H	$\omega_H^{(H)} = \omega_H - \omega_H = 0$

Записываем передаточное отношение от первого центрального колеса к третьему $i_{13}^{(H)}$ при условно неподвижном водиле. Для схемы, представленной на рис. 2.7, запишем $i_{13}^{(H)} = \omega_1^{(H)} / \omega_3^{(H)}$, или после подстановки соответствующих разностей из таблицы получаем

$$\frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = i_{13}^{(H)}. \quad (a)$$

Всё сказанное относится и к случаю, когда задаются не угловые скорости колёс, а их частоты вращения, так как соотношение между ними подчиняется простой формуле $\omega = \frac{\pi \cdot n}{30}$, в которой n – это частота вращения, измеряемая в $\frac{\text{об}}{\text{мин}}$. Поэтому в уравнении (а) угловые скорости можно заменить частотами

вращения, что приведёт к уравнению $\frac{n_1 - n_H}{n_3 - n_H} = i_{13}^{(H)}$.

Из трех величин левой части две должны быть заданы, третья определяется решением данного уравнения.

В планетарном механизме, как сказано выше, одно из центральных колёс неподвижно. Если, например, принять колесо 3 с внутренними зубьями за неподвижное, то есть принять $\omega_3 = 0$, то уравнение (а) запишется в виде.

$$\frac{\omega_1 - \omega_H}{-\omega_H} = i_{13}^{(H)}.$$

Разделив почленно числитель на знаменатель и заменив отношения угловых скоростей обозначениями передаточных отношений, получим окончательно

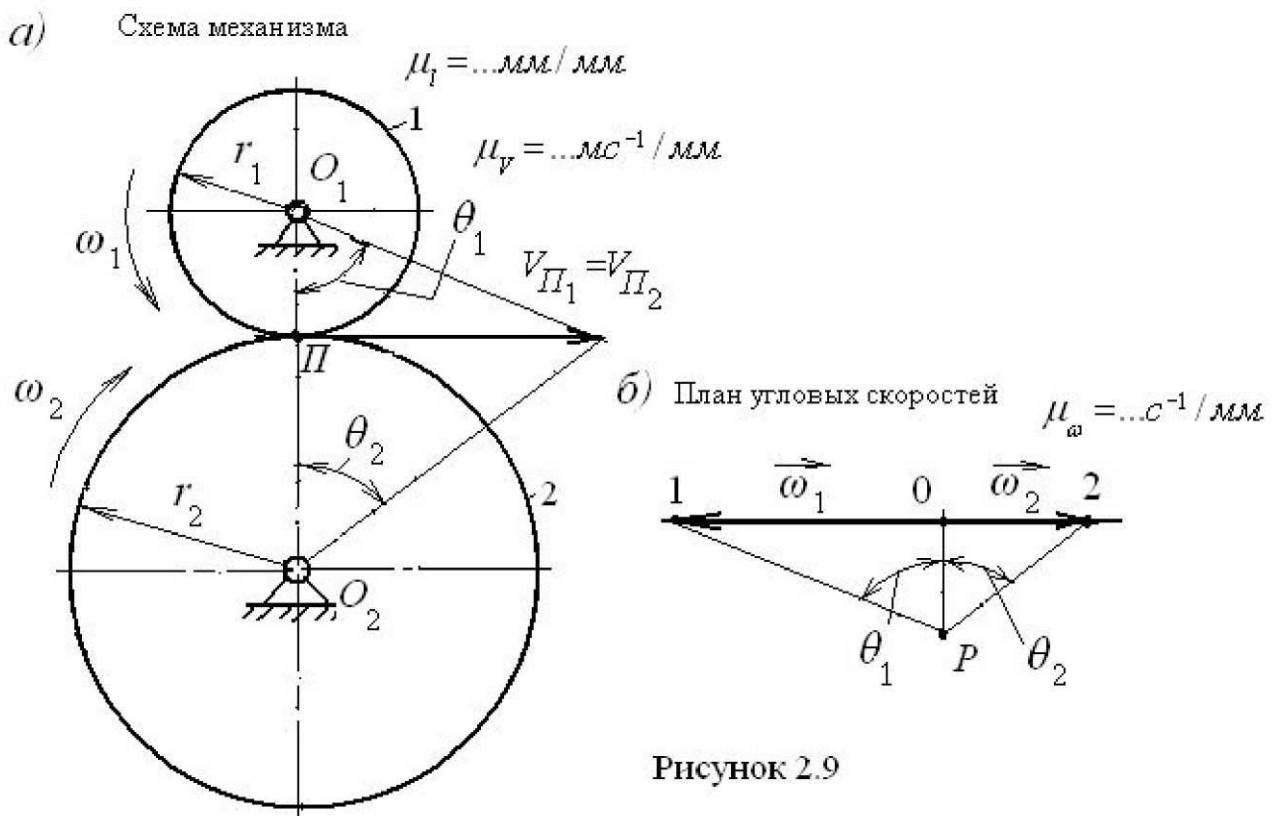
$$i_{1H} = 1 - i_{13}^{(H)}, \quad (б)$$

т. е. передаточное отношение в планетарном механизме от любого центрального колеса к водилу равно единице минус передаточное отношение от этого центрального колеса к другому центральному колесу в механизме с условно неподвижным водилом.

Замечание 1. При решении задачи кинематики одноступенчатого планетарного механизма (схема А рис. 2.8) и одноступенчатого дифференциального механизма (схема Б рис. 2.8) составляется и решается одно уравнение типа (б) или типа (а) соответственно. Если решается задача кинематики дифференциального механизма с замкнутым контуром (схема В рис. 2.8), то необходимо составить два уравнения, одно из которых относится к дифференциальной ступени, другое – к замыкающей кинематической цепи, и решать эти уравнения как систему двух уравнений с двумя неизвестными.

Замечание 2. Если в механизме имеется несколько ступеней планетарного типа, то их необходимо рассматривать по отдельности, независимо друг от друга.

Графический расчёт кинематики. Методика графического расчёта основана на том, что окружные скорости центроидных окружностей колес, находящихся в зацеплении, одинаковы, а в точке касания окружностей их направления совпадают. Кроме того, во вращательной кинематической паре скорость её центра является общей для обоих звеньев, составляющих пару. Важно также, что скорость точки, совершающей вращательное движение вокруг неподвижной точки, линейно зависит от её расстояния до последней, то есть подчиняется формуле $V = \omega \cdot r$. Зубчатые колёса, изображённые на рис. 2.9, а в некотором масштабе $\mu_l = \dots \text{мм} / \text{мм}$, вращаются навстречу друг другу так, что в точке Π касания их центроидных окружностей окружные скорости совпадающих точек Π_1 и Π_2 также совпадают. Концы векторов скоростей точек, лежащих на прямой O_1O_2 , принадлежащих колесу 1, располагаются на одной прямой (рис. 2.9, а), называемой *линией распределения скоростей* этого колеса. То же имеет место и со скоростями точек колеса 2, концы векторов которых лежат на линии распределения скоростей, соединяющей точку O_2 центра колеса 2 с концом вектора скорости V_{Π_2} . Изображение линий распределения скоростей колёс механизма называется *картиной скоростей*.



На этой картине скорости строятся в масштабе $\mu_V = \dots \text{мс}^{-1} / \text{мм}$. (Заметим в скобках, что масштабом в ТММ называется число, показывающее, сколько единиц какой-либо физической величины содержится в одном миллиметре её изображения. Изображение величины всегда производится в виде отрезка. Это могут быть векторы, ординаты и абсциссы графиков и т. д., измеряемые в миллиметрах. Масштабы, как видим, обозначаются буквой μ с индексом, обозначающим соответствующую физическую величину. Например, масштаб скоростей $\mu_V = 0,02 \text{мс}^{-1} / \text{мм}$ читается: ноль целых две сотых метра в секунду в одном миллиметре изображения (или чертежа). Масштаб угловых скоростей $\mu_\omega = 0,01 \text{с}^{-1} / \text{мм}$ читается: ноль целых одна сотая радиана в секунду в одном миллиметре).

На следующем этапе расчёта строится *план угловых скоростей* (рис. 2.9, б). Вблизи кинематической схемы проведём горизонтальную прямую и на некотором расстоянии от неё вниз возьмём произвольную точку P , из которой проведём прямые параллельно линиям распределения скоростей до пересечения с горизонталью в точках 1 и 2. Запишем цепочку равенств, имея в виду предыдущие рассуждения и подобие треугольников на картине зацепления и на плане

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{V_{A1}}{r_1} \cdot \frac{r_2}{V_{A2}} = \frac{\text{tg}\theta_1}{\text{tg}\theta_2} = \frac{\overline{01}}{\overline{0P}} \cdot \frac{\overline{0P}}{\overline{02}} = \frac{\overline{01}}{\overline{02}}.$$

Учитывая начало этого равенства и его конец, можно сделать вывод, что отрезки, полученные на горизонтали, в некотором масштабе изображают угловые скорости колёс (отсюда и название построения). Для определения масштаба угловых скоростей необходимо угловую скорость ω_1 (если, конечно, она задана) поделить на отрезок $\overline{01}$, измеренный в миллиметрах, т. е. $\mu_\omega = \frac{\omega_1}{\overline{01}}, \text{с}^{-1} / \text{мм}$.

Угловая скорость ω_2 определится умножением этого масштаба на отрезок $\overline{02}$, взятый также в миллиметрах $\omega_2 = \overline{02} \cdot \mu_\omega, \text{с}^{-1}$. План угловых скоростей даёт информацию и об их направлениях. В частности, на рис. 2.9, б видно, что угловые скорости колёс направлены в противоположные стороны.

На основе изложенной методики можно достаточно просто решить задачу кинематики любого зубчатого механизма.

Механизм со ступенчатым соединением колёс.
Изобразим механизм, состоящий из четырёх колёс 1, 2, 2' и 3, в некотором масштабе μ_l (рис. 2.10, а). Колёса вращаются вокруг центров O_1, O_2 и O_3 , причём на промежуточном валу имеется два колеса 2 и 2'. Окружности колёс 1 и 2 касаются друг друга в точке A , а 2' и 3 – в точке B . Известна угловая скорость ω_1 колеса 1. Справа от схемы механизма проведём вертикальную прямую, на которую снесём все отмеченные точки схемы, а именно: O_1, A, O_2, B и O_3 . Расстоя-

ния между этими точками равны соответствующим радиусам колёс, поэтому данная прямая носит название *оси размеров*.

Для построения картины скоростей (рис. 2.10, б) вычислим скорость точки A : $V_A = \omega_1 \cdot r_1$ и направим её вектор \overline{Aa} вправо относительно оси размеров.

Длина отрезка \overline{Aa} рассчитывается по формуле $\overline{Aa} = \frac{V_A}{\mu_V}$ с учётом предвари-

тельно выбранного масштаба μ_V . Через точку a конца этого вектора проводим линию распределения скоростей колеса 1 до точки O_1 и от этой же точки a проводим линию распределения скоростей колёс 2 и 2' через точку O_2 и далее до горизонтали, проведённой от точки B механизма. Полученная на этой горизонтали точка b определяет вектор $\overline{V_B}$ скорости точки B . Величина этой скорости вычисляется как $V_B = \overline{Bb} \cdot \mu_V$. Для получения линии распределения скоростей колеса 3 достаточно соединить точку b с точкой O_3 на оси размеров.

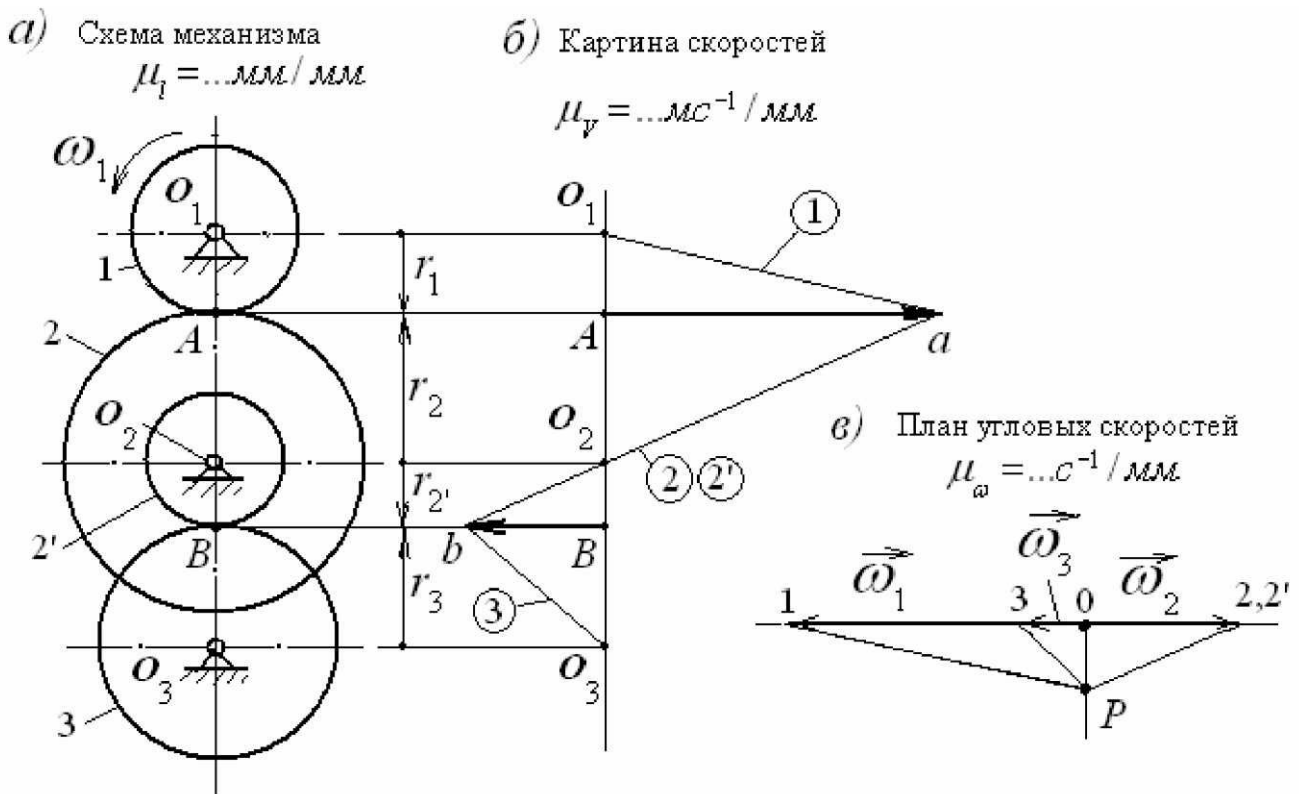


Рисунок 2.10

Построение плана угловых скоростей затруднений не вызывает (рис. 2.10, в). Найденные на горизонтальной линии плана отрезки $\overline{O_1P}$, $\overline{O_2P}$ и $\overline{O_3P}$ в масштабе μ_ω представляют векторы угловых скоростей $\overline{\omega_1}$ – колеса 1, $\overline{\omega_2}$ – колеса 2 (и 2') и $\overline{\omega_3}$ – колеса 3. Масштаб μ_ω вычисляется, как указывалось выше. На плане угловых скоростей видно, что колёса 1 и 3 вращаются в одну сторону, колесо 2(2') вращается в противоположную сторону.

Если по условию задачи требуется определить только передаточное отношение механизма, то достаточно взять просто отношение соответствующих отрезков, измеренных на плане угловых скоростей.

Механизм планетарного типа. Выберем одну из схем механизма планетарного типа и изобразим её в масштабе μ_l (рис. 2.11, а). Обозначим на схеме звенья и точки сопряжения колёс и оси колёс, отметим также радиусы колёс. Справа от схемы проведём ось размеров и снесём на неё отмеченные на схеме точки, обозначив их теми же буквами (рис. 2.11, б). Так как угловая скорость колеса 1 задана, то окружную скорость его точки A легко определим по формуле $V_A = \omega_1 \cdot r_1$. Отложим эту скорость в виде отрезка \overline{Aa} , вычисленного как $\overline{Aa} = \frac{V_A}{\mu_v}$ с учётом выбранного заранее масштаба μ_v , вправо от оси размеров. Через точку a этого отрезка проведём в точку O общей оси механизма линию распределения скоростей колеса 1, затем через эту же точку в точку B на оси размеров проведём линию распределения скоростей колёс 2 и 2'. Точка B имеет окружную скорость, равную нулю, так как колесо 3 неподвижно, а эта точка принадлежит ему. Поэтому и окружная скорость колеса 2 также равна нулю.

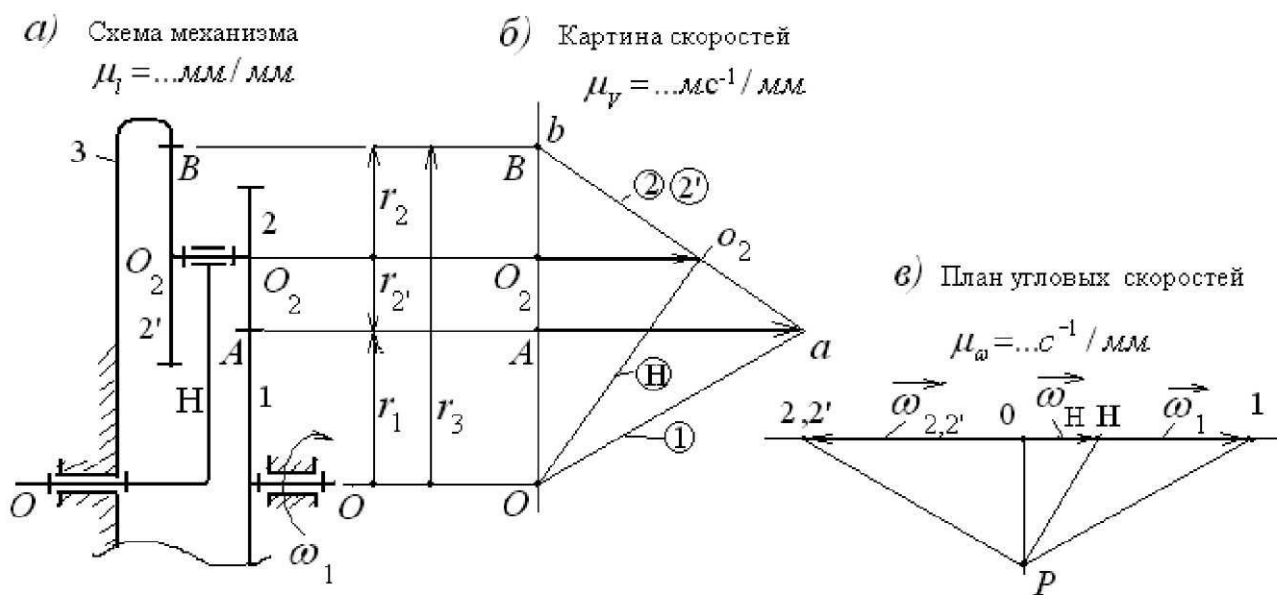


Рисунок 2.11

Проведём горизонтальную линию от точки O_2 оси размеров до её пересечения с линией распределения скоростей колеса 2 в точке o_2 . Так найдём линейную скорость точки O_2 , которая является также скоростью точки O_2 водила. Поэтому, соединив точку o_2 с точкой O общей оси механизма, получим линию распределения скоростей водила H . Построение плана угловых скоростей механизма (рис. 2.11, в) не вызывает затруднений.

Замечание. В дифференциальных механизмах с замкнутым контуром (схема В рис. 2.8), как правило, ведущим звеном является центральное колесо дифференциальной ступени, и построение картины линейных скоростей от этого колеса невозможно. Для решения задачи необходимо выбрать в качестве ведущего любое другое звено и задаться произвольно его окружной скоростью. После этого задача решается без затруднений.

2.6. Синтез механизмов планетарного типа

Задача синтеза заключается в подборе чисел зубьев колёс механизма, обеспечивающих заданное отношение угловых скоростей входа и выхода. Заданными величинами должны быть или передаточное отношение (в планетарном механизме), или угловые скорости (частоты вращения) – в дифференциальном механизме. Используя уравнения (а) и (б), подставляя в их левую часть заданные значения, получают величину $i_{13}^{(H)}$. Так как при неподвижном водиле получается механизм с неподвижными осями колёс, то для этого механизма задача подбора чисел зубьев на данном этапе ничем не отличается от ранее изложенных методик. Особенностью синтеза является необходимость учёта условий соосности, соседства и сборки.

Условие соосности заключается в том, что в механизмах планетарного типа оба центральных колеса и водило должны иметь общую неподвижную ось. В схеме рис. 2.7 это условие даёт возможность записать такое равенство

$$r_1 + 2r_2 = r_3.$$

Учитывая, что каждый радиус определяется формулой

$$r = m \cdot z / 2,$$

можно заменить величины радиусов в приведённом выше выражении и после несложных преобразований записать

$$z_1 + 2z_2 = z_3.$$

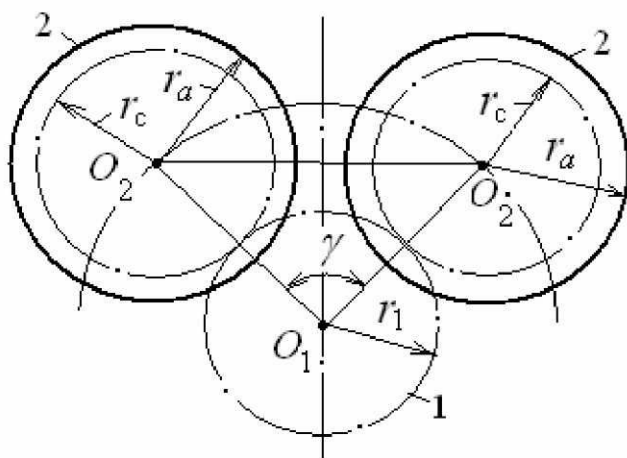


Рисунок 2.12

Таким образом, выбирая числа зубьев колёс, необходимо учитывать последнее соотношение.

Условие соседства заключается в необходимости такого подбора чисел зубьев, чтобы сателлиты, связанные с одним водилом, при их количестве больше двух, не задевали друг друга. В противном случае механизм не может быть собран. Для вывода соответствующей зависимости обратимся к рис. 2.12.

На рисунке показана центроидная окружность центрального колеса 1 радиуса r_1 , по которой перекатываются центроидные окружности сателлитов 2 радиусов $r_{\tilde{n}}$. Показаны также окружности вершин сателлитов радиусов r_a . Эти окружности по условию соседства не должны ни пересекаться, ни касаться друг друга. Сателлиты 2 находятся на угловом расстоянии γ (гамма) друг от друга. Так как сателлиты по окружности располагаются равномерно, то угол γ может быть определён из отношения $\frac{2\pi}{K}$, где K – количество сателлитов, присоединённых к одному водилу. Половина расстояния между центрами сателлитов составляет $O_1O_2 \cdot \sin \frac{\gamma}{2}$. Отрезок O_1O_2 представляет собой длину водила или межосевое расстояние центрального колеса 1 и сателлита 2: $O_1O_2 = \frac{m}{2}(z_1+z_c)$. Радиус окружности вершин $r_c + h_a = \frac{mz_c}{2} + m$. Условие соседства выполняется, если выполняется неравенство $\frac{m}{2}(z_1+z_c) \cdot \sin \frac{\pi}{K} > \frac{mz_c}{2} + m$.

После выполнения несложных преобразований получаем окончательно

$$\sin \frac{\pi}{K} > \frac{z_c+2}{z_1+z_c}.$$

Если сателлит 2 представляет собой блок из двух колёс, то в это неравенство в качестве $z_{\tilde{n}}$ необходимо подставлять большее из них.

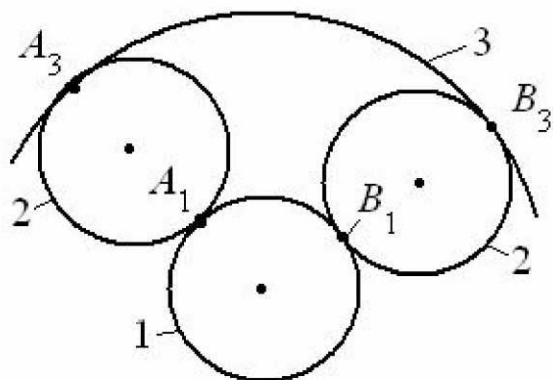


Рисунок 2.13

Условие сборки заключается в возможности собираемости механизма, то есть установки сателлитов, если их количество больше одного. Ясно, что один сателлит устанавливается между центральными колёсами беспрепятственно (если сателлитов несколько, то – первый из них). Чтобы установить второй и другие сателлиты, необходимо, чтобы их зубья вступали в зацепление с зубьями центральных колёс, а не наткнулись на них, иначе сборка невозможна. Для решения задачи обратимся к рис. 2.13, на котором показаны участок центрального колеса 3 с внутренними зубьями, центральное колесо 1 и два параллельно работающих сателлита 2 из нескольких, расположенных по всему пространству между центральными колёсами 1 и 3.

Обозначим количество сателлитов в механизме буквой K . Так как все колёса образуют одинаковые зацепления, то они имеют один модуль m и шаг

p . Все центроидные окружности, показанные на рисунке, предполагаются делительными. Длина дуги A_1B_1 окружности колеса 1 между точками касания этой окружности с окружностями сателлитов 2 составляет $(a_1 + \Delta_1)p$, то есть некоторое количество целых шагов a_1 и возможную часть Δ_1 последнего неполного шага. Если на этой дуге помещается только целое количество шагов, то $\Delta_1 = 0$. Точно так же можно записать и длину дуги A_3B_3 окружности колеса 3: $(a_3 + \Delta_3)p$. С другой стороны, ясно, что эти дуги, при условии равномерного расположения осей сателлитов по окружности, составляют длины $\frac{pz_1}{K}$ на окружности колеса 1 и $\frac{pz_3}{K}$ на окружности колеса 3. Приравнивая соответствующие выражения для колеса 1 и колеса 3, можно записать

$$\frac{pz_1}{K} = (a_1 + \Delta_1)p \quad \text{и} \quad \frac{pz_3}{K} = (a_3 + \Delta_3)p.$$

Сокращая оба выражения на p и складывая их левые и правые части, имеем

$$z_1 + z_3 = [a_1 + a_3 + (\Delta_1 + \Delta_3)] \cdot K.$$

Левая часть полученного равенства является целым числом, поэтому правая часть должна быть также целым числом. В правой части a_1 , a_3 и K являются целыми числами, следовательно, доли шага Δ_1 и Δ_3 в сумме должны составить целое число, а именно – единицу. Так как сумма в квадратных скобках является целым числом, то её можно обозначить *int* (от англ. *integer* – целое число), то есть $a_1 + a_3 + (\Delta_1 + \Delta_3) = int$, и окончательно записать

$$z_1 + z_3 = int \cdot K.$$

Выразив отсюда *int*, запишем

$$int = \frac{z_1 + z_3}{K},$$

что является математическим выражением условия сборки, то есть *частное от деления суммы чисел зубьев центральных колёс на количество сателлитов K механизма должно быть целым числом.*

Необходимо иметь в виду, что данное условие пригодно только для механизмов с одинарным сателлитом или со сдвоенным, но при одном модуле обоих колёс сателлита и сопряжённых с ними колёс. Для получения математического выражения условий сборки других схем можно обратиться к литературе.

Подытоживая рассмотренные решения, запишем все математические условия, которые необходимо учитывать при синтезе зубчатых механизмов плане-

тарного типа. Например, для схемы механизма (рис. 2.7) составляется следующая система уравнений с неравенством:

$$i_{1H} = 1 - \left(-\frac{z_3}{z_1} \right),$$

$$z_1 + 2 \cdot z_2 = z_3,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{K}\right) > \frac{z_c + 2}{z_1 + z_c},$$

$$z_1 + z_3 = int \cdot K.$$

Εξήγησι 2.1 Νείδαç ιεάιαδδδίαι ίαδαιεçία
 ία-άεύίά όñείάεý

$$z_1 := 15 \quad z_2 := 14 \quad z_3 := 48 \quad K := 5 \quad int := 17$$

Given

$$1 - \left(\frac{-z_3}{z_1} \right) = 4.0 \quad z_1 + 2 \cdot z_2 = z_3 \quad \frac{z_2 + 2}{z_1 + z_2} < \sin\left(\frac{\pi}{K}\right)$$

$$\frac{z_1 + z_3}{K} = int \quad \text{Find}(z_1, z_2, z_3, K) = \begin{pmatrix} 16.985 \\ 16.985 \\ 50.954 \\ 3.996 \end{pmatrix}$$

ίδίαάδδία ίί ίάάάάδδί-ίίό ίδδδαιεç

$$i_{1H} := 1 - \left(\frac{-51}{17} \right) \rightarrow 4$$

В заключение рассмотрим пример синтеза механизма планетарного типа, схема которого изображена на рис. 2.7. Решение приводится с привлечением компьютерного математического пакета MathCAD версии 2001i Professional (листинг 2.1). Вычислительная программа составлена в соответствии с методикой, описанной в инструкции к пакету. Так как системы уравнений решаются методом итераций, то необходимо в самом начале задать искомым переменным, в нашем случае z_1, z_2, z_3 и K , некоторые начальные значения. Они приведены ниже подзаголовка «Начальные условия». Затем идёт блок Given, в котором приведены вышеперечисленные уравнения и неравенство, связывающие между собой числа зубьев колёс и условия, которым они должны удовлетворять в механизме. Решающий блок Find содержит перечень искомых параметров и, по-

сле знака равенства, в виде матрицы автоматически выводятся найденные значения этих параметров.

В связи с тем, что числа зубьев колёс и количество сателлитов могут быть только целыми, то полученные значения необходимо округлить до целых, то есть принять $z_1 = 17$, $z_2 = 17$, $z_3 = 51$ и $K = 4$. Естественно, что при округлении чисел зубьев изменяется передаточное отношение, поэтому последним шагом расчёта является проверка его величины. Она показала, что результат округления не привёл к ошибке передаточного отношения.

Вопросы для самопроверки

1. Для чего применяются зубчатые механизмы?
2. Что такое передаточное отношение?
3. Какие зубчатые механизмы называют редукторами, мультипликаторами?
4. Как можно выразить передаточное отношение в паре зубчатых колёс?
5. Изобразите схему рядового, ступенчатого соединений зубчатых колёс.
6. Какая связь между передаточным отношением сложного зубчатого механизма и передаточными отношениями отдельных его ступеней?
7. Как определяется передаточное отношение в механизмах с рядовым и ступенчатым соединениями колёс?
8. Какие зубчатые механизмы являются механизмами планетарного типа (эпициклическими)?
9. В чём состоит основное достоинство механизмов планетарного типа?
10. Назовите элементы типовой схемы механизма планетарного типа.
11. Для чего и как применяется метод обращения движения?
12. Каковы особенности аналитического расчёта механизмов планетарного типа различных схем?
13. Как выполняется синтез (проектирование) зубчатых механизмов с неподвижными осями колёс?
14. На чём основан графический метод исследования кинематики зубчатых механизмов?
15. Какова особенность графического расчёта кинематики дифференциального механизма с замкнутым контуром?
16. В чём заключаются условия соосности и соседства в механизмах планетарного типа?
17. Сформулируйте и объясните условие сборки при синтезе механизмов планетарного типа.

3. Кинематика и синтез механизмов с низшими кинематическими парами

3.1. Задачи исследования кинематики. Исходные данные. Методы исследования

В этом разделе изучается движение звеньев механизма и их точек вне зависимости от причин, вызывающих это движение. Основной задачей раздела является определение закона преобразования движения в механизме. Эта задача распадается на следующие.

1. Определение положений звеньев и траекторий отдельных их точек.
2. Определение угловых скоростей звеньев и линейных скоростей их точек и аналогов скоростей.
3. Определение угловых ускорений звеньев и линейных ускорений их точек и аналогов ускорений.

Исходные данные.

1. Кинематическая схема механизма со всеми кинематическими размерами его звеньев.
2. Закон движения ведущего (входного) звена (как правило, $\omega = const$).

Методы исследования.

1. Аналитический метод.
2. Метод планов положений, скоростей и ускорений (графо-аналитический метод).
3. Метод кинематических диаграмм (метод графического дифференцирования).
4. Экспериментальный метод.

3.2. Кинематические и передаточные функции механизмов

Как известно, в любом механизме имеется входное звено, в технологических машинах совпадающее с ведущим звеном, и выходное звено, связанное с исполнительным органом машины. На рис. 3.1 в блочном представлении изображён произвольный механизм. Стрелками на рисунке показаны входное и выходное звенья.



Рисунок 3.1

Под стрелками указаны параметры входа: α – угол поворота ведущего звена и ω – его угловая скорость, и выхода, для наиболее часто встречающегося случая поступательного движения выходного звена: S – перемещение, V – скорость и a – ускорение.

Зависимости параметров выхода от времени являются законом движения выходного звена и называются также кинематическими функциями. Они

представляются в форме $S = S(t)$, $\dot{S} = \dot{S}(t) = \frac{d}{dt}S(t) = V(t)$, называемой скоростью, и $\ddot{S}(t) = \frac{d}{dt}\dot{S}(t) = \frac{d^2}{dt^2}S(t) = \frac{d}{dt}V(t) = a(t)$, называемой ускорением.

Зависимость параметров выхода механизма от параметров входа характеризует внутреннее свойство механизма преобразовать движение независимо от времени. Первой зависимостью такого рода является *функция положения* механизма, устанавливающая связь между перемещением выходного звена и углом поворота (то есть перемещением) входного звена, то есть $S = S(\alpha)$. Первая производная функции положения по α называется *аналогом скорости* (или *передаточной функцией скорости*)

$$S' = S'(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}S(\alpha).$$

Вторая производная функции положения по параметру α называется *аналогом ускорения* (или *передаточной функцией ускорения*)

$$S'' = S''(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}S'(\alpha) = \frac{d^2}{d\alpha^2}S(\alpha).$$

Нетрудно установить связь между кинематическими функциями и их аналогами. Для этого необходимо иметь в виду, что $\alpha = \omega t$. Тогда последние два выражения можно переписать так:

$$S'(\alpha) = \frac{dS(\alpha)}{d\alpha} \cdot \frac{dt}{dt} = \frac{dS(\alpha)}{dt} \cdot \frac{dt}{d\alpha} = \frac{V}{\omega},$$

откуда следует, что аналог скорости является отношением скорости выходного звена к угловой скорости входного, и

$$S''(\alpha) = \frac{d^2S(\alpha)}{d\alpha^2} \cdot \frac{dt^2}{dt^2} = \frac{d^2S(\alpha)}{dt^2} \cdot \frac{dt^2}{d\alpha^2} = \frac{a}{\omega^2}.$$

Из этого выражения видно, что аналог ускорения представляет собой отношение ускорения выходного звена к квадрату угловой скорости входного звена.

Поэтому можно утверждать, что *аналоги скоростей и ускорений являются внутренними характеристиками механизма, отражающими закон преобразования движения и не зависящими от времени.*

3.3. Аналитический метод

Метод заключается в определении математических выражений, описывающих функциональную связь между входными и выходными параметрами механизма. Для этого служат различные приёмы и методы, такие как метод векторных контуров, который образуется заменой кинематических размеров

звеньев векторами, с последующим проецированием этого контура на оси системы координат и получением на этой основе соответствующих уравнений, описывающих кинематику данного механизма. Этой же цели служит метод разбиения схемы механизма на прямо- или косоугольные треугольники, решая которые, получают необходимые математические выражения. Для составления некоторого первоначального представления о методе рассмотрим кинематику двух несложных механизмов.

С и н у с н ы й м е х а н и з м (рис. 3.2) состоит из кривошипа, вращающегося вокруг неподвижной точки O , конец A которого образует вращательную кинематическую пару с ползуном 2. Ползун движется по вертикальному элементу ведомого звена 3, которое движется вдоль неподвижных горизонтальных направляющих. На первом этапе определяется зависимость перемещения S ведомого звена от угла α поворота ведущего кривошипа 1. Из рис. 3.2 видно, что

$$S = OA_0 - OB = r - r \cdot \cos \alpha = r \cdot (1 - \cos \alpha).$$

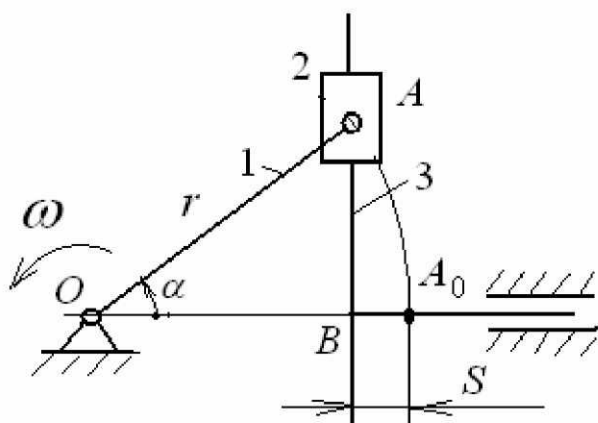


Рисунок 3.2

Дифференцируя по α в первый раз, получаем аналог скорости ведомого звена

$$S' = r \cdot \sin \alpha,$$

дифференцируя во второй раз, получаем аналог ускорения ведомого звена

$$S'' = r \cdot \cos \alpha.$$

Для расчёта скорости и ускорения ведомого звена необходимо воспользоваться выражениями $V_3 = r\omega \cdot \sin(\alpha)$,

$$a_3 = r\omega^2 \cdot \cos(\alpha).$$

К р и в о ш и п н о - п о л з у н н ы й м е х а н и з м (рис. 3.3) широко известен тем, что применяется во многих областях техники, например в качестве основного механизма двигателей внутреннего сгорания, поршневых насосов, компрессоров, в полиграфической технике – в станках для обработки стереотипов и др.

Схему механизма возьмём в наиболее общем виде, когда направляющая точки B не проходит через центр вращения кривошипа O_1 , а располагается от неё на расстоянии e , называемом *эксцентриситетом*. В данной схеме эксцентриситет принимается отрицательным, так как отложен вниз от точки O_1 . Если он отложен вверх, то считается положительным. В связи с наличием e механизм называется эксцентричным или нецентральным. Он состоит из кривошипа 1, вращающегося относительно стойки 0 вокруг точки O_1 с угловой скоростью ω_1 , так что точка A описывает окружность радиусом r . От кривошипа движение передаётся с помощью шатуна 2 длиной l на ползун 3, который дви-

жется возвратно-поступательно вдоль горизонтальных направляющих. В крайнем правом положении точка B ползуна занимает положение B_0 . При этом кривошип 1 и шатун 2 выстраиваются в одну прямую O_1B_0 , образующую угол ν (ню) с горизонталью, синус которого определяется формулой $\sin \nu = \frac{e}{r+l}$, и точка A занимает положение A_0 на линии O_1B_0 . В текущем положении кривошип 1 повернут относительно его крайнего положения на угол α в сторону вращения. При этом точка B переместилась от её крайнего положения на величину S .

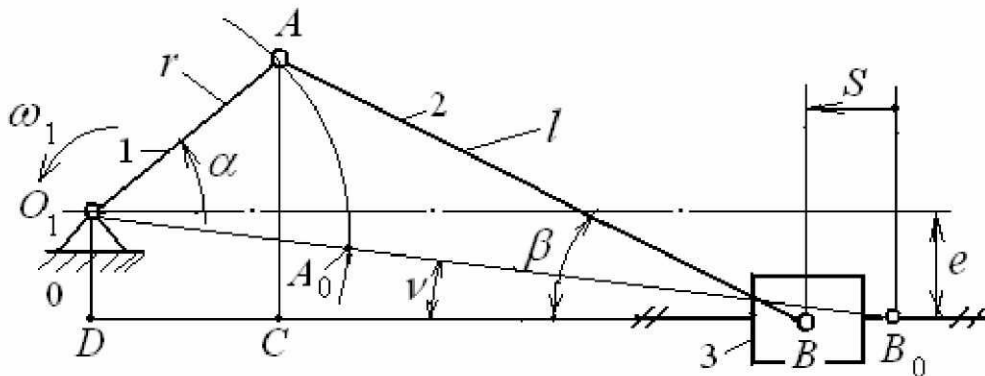


Рисунок 3.3

Задача исследования кинематики механизма состоит в определении функции положения $S = S(\alpha)$ и её первой и второй производных, то есть аналогов скоростей и ускорений.

Как видно из рис. 3.3, перемещение точки B от крайнего положения B_0 можно выразить как $S = DB_0 - DB$, причём, DB_0 , согласно теореме Пифагора, определяется как $DB_0 = \sqrt{(r+l)^2 - e^2}$, а $DB = r \cdot \cos(\alpha + \nu) + l \cdot \cos \beta$.

Для определения угла β выразим длину вертикального отрезка AC двумя путями, получая двойное равенство: имеем $AC = r \cdot \sin(\alpha + \nu) + e = l \cdot \sin \beta$, откуда $\sin \beta = \frac{r}{l} \sin(\alpha + \nu) + \frac{e}{l}$, или $\sin \beta = \lambda \sin(\alpha + \nu) + \xi \cdot \lambda$, где $\lambda = \frac{r}{l}$, является одной из геометрических характеристик механизма и находится обычно в пределах $\lambda = 0,25 \dots 0,4$, а $\xi = \frac{e}{r}$. Имея в виду соотношение между синусом и коси-

нусом, получаем $\cos \beta = \sqrt{1 - [\lambda \cdot \sin(\alpha + \nu) + \xi \cdot \lambda]^2}$. Подставляя в S все найденные выражения, получаем

$$S = S(\alpha) = \sqrt{(r+l)^2 - e^2} - r \cdot \cos(\alpha + \nu) - l \cdot \sqrt{1 - \lambda^2 \cdot [\sin(\alpha + \nu) + \xi \cdot \lambda]^2}.$$

Или

$$S(\alpha) = r \cdot \left\{ \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^2 - \xi^2} - \cos(\alpha + \nu) - \frac{1}{\lambda} \cdot \sqrt{1 - \lambda^2 \cdot [\sin(\alpha + \nu) + \xi \cdot \lambda]^2} \right\}.$$

Для перехода к аналогам скорости и ускорения необходимо это выражение продифференцировать дважды по α , то есть получить выражения вида

$$S'(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} S(\alpha) \quad \text{и} \quad S''(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} S'(\alpha).$$

С привлечением для вычислительного процесса такого математического пакета, как MathCAD, нет необходимости выводить расчётные зависимости $S'(\alpha)$ и $S''(\alpha)$, так как сама программа по соответствующей команде выведет необходимые выражения и выполнит по ним расчёт.

Пример. Рассмотрим составление программы и решение по ней задачи исследования кинематики кривошипно-ползунного механизма в математическом пакете MathCAD 2001i Professional (Листинг 3.1)

Листинг 3.1 $\frac{d}{d\alpha} \left[\sqrt{\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^2 - \xi^2} - \cos(\alpha + \nu) - \frac{1}{\lambda} \sqrt{1 - \lambda^2 \cdot (\sin(\alpha + \nu) + \xi \cdot \lambda)^2} \right]$
 $\frac{d^2}{d\alpha^2} \left[\sqrt{\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^2 - \xi^2} - \cos(\alpha + \nu) - \frac{1}{\lambda} \sqrt{1 - \lambda^2 \cdot (\sin(\alpha + \nu) + \xi \cdot \lambda)^2} \right]$

$$r := 0.075 \quad \lambda := 0.35 \quad \xi := -0.5$$

$$\nu := \operatorname{asin}\left(\frac{\xi}{1 + \frac{1}{\lambda}}\right) \rightarrow -.12999544860613225027$$

Свойства $\frac{d}{d\alpha} \left[\sqrt{\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^2 - \xi^2} - \cos(\alpha + \nu) - \frac{1}{\lambda} \sqrt{1 - \lambda^2 \cdot (\sin(\alpha + \nu) + \xi \cdot \lambda)^2} \right]$

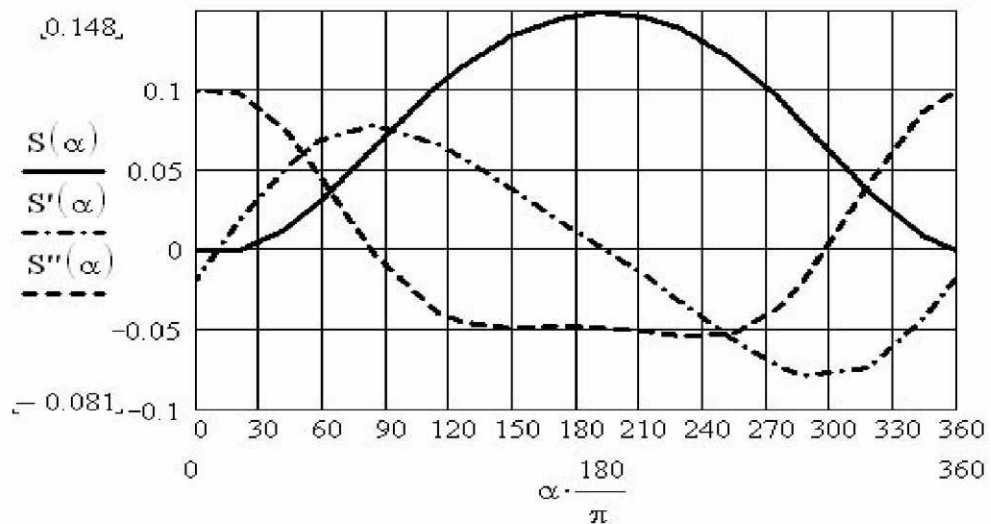
$$S(\alpha) := r \cdot \left[\sqrt{\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^2 - \xi^2} - \cos(\alpha + \nu) - \frac{1}{\lambda} \sqrt{1 - \lambda^2 \cdot (\sin(\alpha + \nu) + \xi \cdot \lambda)^2} \right]$$

Свойства

Свойства

$$S'(\alpha) := \frac{d}{d\alpha} S(\alpha)$$

$$S''(\alpha) := \frac{d}{d\alpha} S'(\alpha)$$



×ēñěáííñá çíà÷áíēý ðáçóēüüðàðîá áíàēēçà

$$n := 12 \quad i := 0, 1..n$$

$$\alpha(i) := \frac{2\pi}{n} \cdot i$$

$i =$	$\alpha(i) \frac{180}{\pi} =$	$S(\alpha(i)) =$	$S'(\alpha(i)) =$	$S''(\alpha(i)) =$
0	0	$-5.866 \cdot 10^{-4}$	-0.018	0.1
1	30	$3.866 \cdot 10^{-3}$	0.034	0.09
2	60	0.032	0.07	0.043
3	90	0.072	0.077	-0.012
4	120	0.109	0.061	-0.043
5	150	0.135	0.036	-0.049
6	180	0.147	0.011	-0.048
7	210	0.146	-0.015	-0.051
8	240	0.131	-0.043	-0.055
9	270	0.101	-0.07	-0.042
10	300	0.06	-0.081	$4.823 \cdot 10^{-3}$
11	330	0.021	-0.063	0.065
12	360	$-5.866 \cdot 10^{-4}$	-0.018	0.1

Так как угол удобнее брать в градусах, а программа MathCAD требует применения угла в радианной мере, то на графиках ось абсцисс обозначена формулой перевода угла α из радианной меры в градусную.

Для получения численных результатов анализа необходимо ввести ранжированную переменную i , которой нужно задать пределы изменения от 0 до n и шаг. Необходимо также ввести эту переменную как аргумент для изменения α , то есть представить α как функцию i в виде $\alpha(i)$.

Для расчёта скоростей и ускорений точки B ползуна достаточно воспользоваться следующими формулами перехода

$$V_B(\alpha) = S'(\alpha) \cdot \omega_1 \quad \text{и} \quad a_B(\alpha) = S''(\alpha) \cdot \omega_1^2.$$

При этом те же графики, но с другими масштабами по осям ординат будут графиками изменения указанных кинематических функций. Численные значения кинематических функций можно получить также с помощью введения ранжированной переменной.

3.4. Метод планов положений, скоростей и ускорений

Определение функции положения. При использовании графоаналитического метода определение функции положения механизма производится с помощью разметки механизма. *Разметка механизма – это ряд последовательных его положений, построенных в зависимости от положений входного звена, охватывающих весь цикл его движения* (как правило, один оборот). Каждый механизм в соответствии с его кинематической схемой имеет свои особенности в построении разметки.

Для примера на рис. 3.4 приведена разметка кривошипно-ползунного механизма. Она строится в некотором масштабе μ_l , начиная от одного из крайних положений, отмечаемого нулевым номером. Затем окружность, описываемая концом A входного звена (кривошипа), делится на двенадцать равных частей, которые обозначаются номерами в направлении угловой скорости $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{12}$. После этого строятся положения остальных звеньев механизма, и траектории заданных точек. В частности, положения точки B строятся раствором циркуля, игла которого ставится в точках A , а карандашом делаются засечки на направляющей точки B радиусом, равным длине шатуна l в масштабе построения. В результате этих действий получают точки $B_0, B_1, B_2, \dots, B_{12}$.

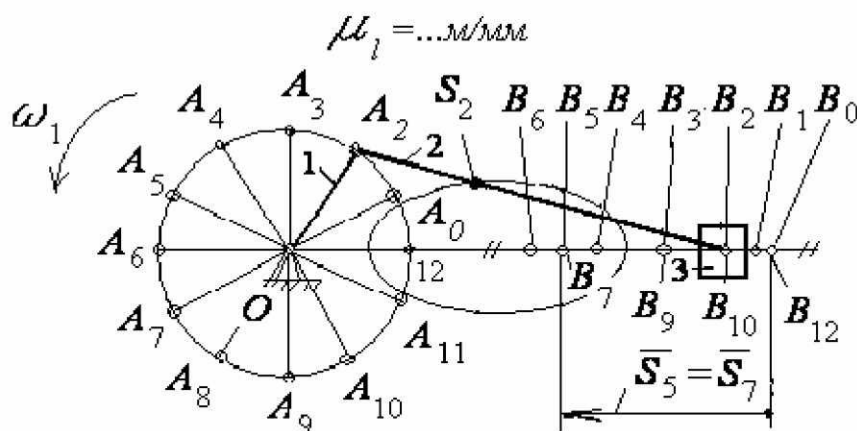


Рисунок 3.4

Для построения траектории точки S_2 шатуна необходимо взять в масштабе расстояние от точки A до точки S_2 и отложить это расстояние во всех положениях шатуна в направлении к точке B . Затем соединить последовательно полученные на шатуне точки.

С помощью разметки легко определить путём измерений перемещения точки B ведомого звена, соответствующие углам поворота кривошипа, и представить их в виде графика или таблицы. Это и будет функция положения механизма.

Необходимые действия можно представить в такой форме

$$S_i = \bar{S}_i \cdot \mu_l, \quad m \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n),$$

где n — количество положений механизма в цикле, в большинстве случаев $n=12$. S_i обозначает натуральное значение перемещения точки B , \bar{S}_i — перемещение в том же положении, но в масштабе разметки.

Основы теории метода планов скоростей и ускорений. Планом скоростей (ускорений) механизма называется пучок векторов, выходящих из одной точки (полюса плана), каждый из которых в некотором масштабе изображает вектор абсолютной скорости (абсолютного ускорения) какой-либо точки механизма, а отрезки, соединяющие их концы, изображают векторы относительных скоростей (относительных ускорений). Построение планов скоростей и ускорений всегда начинается от ведущего звена механизма и выполняется в порядке присоединения групп Ассур к исходному механизму, то есть следует порядку записи формулы строения механизма. В последнюю очередь определяются кинематические характеристики ведомого звена (исполнительного органа машины).

Построение плана скоростей сводится к реализации известного положения теоретической механики, согласно которому при плоско-параллельном (или сложном) движении твёрдого тела (звена) абсолютная скорость любой его точки равна векторной сумме скорости в переносном движении вместе с другой точкой, принятой в качестве полюса, и скорости её в относительном движении относительно этого полюса, то есть $\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r$, где \vec{V}_a — вектор абсолютной скорости точки, то есть её скорости относительно стойки; \vec{V}_e — вектор скорости точки в переносном движении вместе с полюсом; \vec{V}_r — вектор её скорости относительно полюса. Рассуждая формально, можно заключить, что согласно приведённому векторному равенству, план скоростей представляет собой некий треугольник, который необходимо построить. Построение треугольника возможно в следующих случаях: если известны все три его стороны, если известны две стороны и угол между ними и, наконец, если известна одна сторона и направления двух других сторон. Последний случай чаще всего и встречается в практике построения планов скоростей. Причём известной стороной искомого треугольника (плана скоростей) является вектор \vec{V}_e , который определяется предварительно или по исходным данным, или в результате расчё-

та предыдущей группы Ассур в составе механизма. Так как каждый вектор характеризуется двумя параметрами – модулем (величиной) и направлением, то приведённое выше векторное равенство содержит шесть параметров. Для построения плана скоростей четыре из них должны быть известны, а два оставшихся определяются в результате построения плана. Если количество известных параметров меньше четырёх, то должна быть возможность составления второго уравнения с таким же количеством известных и неизвестных, которое вместе с первым составит систему двух уравнений с четырьмя неизвестными. Решением такой системы станет план скоростей в виде векторного многоугольника.

С ускорениями задача более сложна. Здесь приходится учитывать, какое по характеру движение относится к переносному и какое – к относительному. В механизмах со стержневыми звеньями (с низшими кинематическими парами) наиболее часто встречаются три случая.

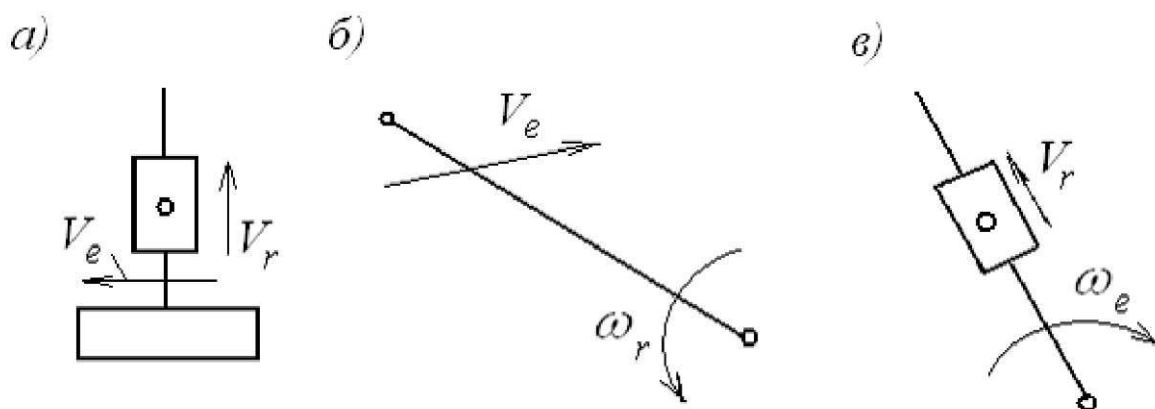


Рисунок 3.5

В первом случае и переносным, и относительным движениями является поступательное (рис. 3.5, а). При этом составляется векторное уравнение на основе упомянутого выше положения вида $\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r$, в котором \vec{a}_a – вектор абсолютного ускорения данной точки; \vec{a}_e – вектор переносного ускорения; \vec{a}_r – вектор относительного ускорения. Вектор \vec{a}_e определяется предварительно и к построению плана ускорений известен по величине и направлению. Абсолютное и относительное ускорения должны иметь известные направления, поэтому задача сводится к построению треугольника ускорений, как и при построении плана скоростей.

Во втором случае переносным движением является поступательное, а относительным – вращательное (рис. 3.5, б). Первое векторное уравнение требуется в виде $\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r$, где вектор \vec{a}_e переносного ускорения определяется предварительно и по величине, и по направлению. Вектор \vec{a}_r относительного ускорения представляется как векторная сумма $\vec{a}_r = \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^\tau$, в которой \vec{a}_r^n есть

вектор нормальной составляющей полного относительного ускорения и по величине определяется через скорость V_r точки в её относительном вращательном движении на радиусе вращения r_r , или через угловую скорость ω_r этого вращения по формулам

$$a_r^n = \frac{V_r^2}{r_r} = \omega_r^2 \cdot r_r. \text{ Этот вектор направлен к центру относительного вращения точки по радиусу } r_r.$$

Вектор $\overline{a_r^t}$ тангенциальной составляющей полного относительного ускорения направляется перпендикулярно радиусу относительно вращения r_r . Таким образом, уравнение ускорений может быть переписано в таком виде

$$\overline{a_a} = \underline{\underline{\overline{a_e}}} + \underline{\underline{\overline{a_r^n}}} + \underline{\underline{\overline{a_r^t}}},$$

где двумя чертами подчеркнуты векторы, известные по величине и по направлению, одной – только по направлению. Вектор левой части уравнения может быть известен по направлению, и тогда план ускорений строится без затруднений. Если его направление неизвестно, то должна быть возможность составления второго аналогичного уравнения, которое совместно с первым составит систему двух уравнений с четырьмя неизвестными, которая решается путём построения плана ускорений.

В третьем случае переносным движением является вращательное, а относительным – поступательное (рис. 3.5, в). Векторное уравнение для построения плана ускорений записывается в таком виде $\overline{a_a} = \underline{\underline{\overline{a_e}}} + \underline{\underline{\overline{a^k}}} + \underline{\underline{\overline{a_r}}}$. В этом уравнении второе слагаемое правой части представляет собой *Кориолисово ускорение*. Его величина находится по формуле $a^k = 2\omega_e \cdot V_r$, в которой ω_e – угловая скорость переносного движения, V_r – скорость относительного движения. Направление этого ускорения назначается по следующему правилу: *вектор Кориолисова ускорения повернут на 90° относительно вектора относительной скорости $\overline{V_r}$ в сторону переносной угловой скорости $\overline{\omega_e}$* . Третий вектор правой части $\underline{\underline{\overline{a_r}}}$ имеет неизвестную величину, а направлен параллельно вектору относительной скорости $\overline{V_r}$. Как видим, векторное уравнение содержит три неизвестных, поэтому не может быть решено. Необходимо добавить ещё одно уравнение, которое имеет вид $\overline{a_a} = \underline{\underline{\overline{a_r^n}}} + \underline{\underline{\overline{a_r^t}}}$. В правой части этого уравнения вектор $\underline{\underline{\overline{a_r^n}}}$ определяется как и все нормальные составляющие ускорений и, таким образом, известен и по величине, и по направлению (подчеркнут двумя чертами), а вектор $\underline{\underline{\overline{a_r^t}}}$ известен по направлению линии действия (подчеркнут одной чертой). Эти уравнения и составляют систему, которая позволяет определить $\overline{a_a}$ с помощью построения плана ускорений.

Рассмотрим построение планов скоростей и ускорений механизмов с группами Ассура второго класса в порядке их усложнения.

Механизм с группой Ассура 2-го класса 5-го вида.

Примером механизма, содержащим группу Ассура 2-го класса 5-го вида в простейшем её виде, является ранее рассмотренный синусный механизм (рис. 3.6).

3.6). Изобразим его снова в некотором масштабе $\mu_l = \dots \frac{M}{MM}$ в произвольном

положении (рис. 3.6, а). На рисунке буквой O_1 отмечен центр вращения кривошипа 1, вращающегося с угловой скоростью ω_1 в направлении, указанном стрелкой. В данный момент его положение определяется произвольным углом α . Геометрический центр вращательной кинематической пары A обозначен в скобках A_1 и A_2 , так как эта точка принадлежит одновременно и звену 1, и звену 2. Кулисный камень 2 движется относительно вертикального участка звена 3 (кулисы), которое движется относительно неподвижных направляющих в горизонтальном направлении. Буквой A_3 обозначена точка кулисы 3, совпадающая в данный момент с точкой A . Задача исследования кинематики механизма заключается в определении скорости и ускорения кулисы 3, т. е. её точки A_3 . Что касается положения кулисы, то оно полностью определяется углом поворота кривошипа α .



Рисунок 3.6

Точка A движется вместе с кулисой в переносном поступательном движении и относительно кулисы в относительном движении. Свяжем движение точки A с движением точки A_3 и запишем уравнение $\overrightarrow{V_A} = \overrightarrow{V_{A_3}} + \overrightarrow{V_{AA_3}}$. В результате сложения этих двух прямолинейных движений получается абсолютная скорость точки A . Так как требуется определить $\overrightarrow{V_{A_3}}$, то это уравнение удобнее

представить в виде $\overrightarrow{V_{A_3}} = \overrightarrow{V_A} - \overrightarrow{V_{AA_3}}$. Но $-\overrightarrow{V_{AA_3}} = \overrightarrow{V_{A_3A}}$, поэтому $\overrightarrow{V_{A_3}} = \overrightarrow{V_A} + \overrightarrow{V_{A_3A}}$.

В последнем уравнении $\overrightarrow{V_{A_3}}$ – вектор абсолютной скорости точки A_3 (следовательно, и самой кулисы), направленный по горизонтали и подчёркнутый одной чертой, как известный по направлению; $\overrightarrow{V_A}$ – вектор абсолютной скорости точки A , определяемой формулой $V_A = \omega \cdot r$. Направлена она перпендикулярно кривошипу в данном его положении, как скорость точки, вращающейся относительно другой, неподвижной точки (O_1). Так как об этом векторе известно всё, то он подчёркнут в уравнении двумя чертами. Второе слагаемое правой части $\overrightarrow{V_{A_3A}}$ является, по существу, вектором относительной скорости точки A_3 относительно точки A . Он направлен вдоль вертикального элемента кулисы 3 и подчёркнут одной чертой, так как известен один его параметр (направление).

Построение плана скоростей начинается с выбора масштаба μ_V и произвольной точки Π (прописная греческая буква «пи»), принимаемой в качестве полюса плана (рис. 3.6 б). Из этой точки строится отрезок $\overline{\Pi a} = \frac{V_A}{\mu_V}$, выражающий скорость точки A конца кривошипа и направленный перпендикулярно кривошипу. Из его конца, согласно правилу сложения векторов, проводится линия действия вектора относительной скорости $\overrightarrow{V_{A_3A}}$ в соответствующем направлении. Затем из полюса Π проводится линия действия вектора $\overrightarrow{V_{A_3}}$ до пересечения с предыдущей вертикальной прямой. Точка пересечения a_3 даёт величины и направления скоростей $\overrightarrow{V_{A_3}}$ и $\overrightarrow{V_{A_3A}}$ в масштабе μ_V .

Переходим к построению плана ускорений. Векторное уравнение ускорений записывается аналогично соответствующему уравнению скоростей $\overline{a_{A_3}} = \overline{a_A} + \overline{a_{A_3A}}$, в котором $\overline{a_{A_3}}$ является вектором абсолютного ускорения точки A_3 кулисы, а следовательно, и самой кулисы. Это ускорение направлено вдоль горизонтальной направляющей, т. е. известно по направлению линии действия, поэтому подчёркнуто одной чертой. Первое слагаемое правой части $\overline{a_A}$ есть ускорение точки A конца кривошипа, по величине равное $a_A = a_A^n = \omega^2 \cdot r$ (оно представляет собой нормальную составляющую ускорения точки A , в то время как тангенциальная составляющая ускорения этой точки равна нулю в силу постоянства угловой скорости кривошипа). Это ускорение направлено от точки A к центру O_1 вращения кривошипа. Таким образом, это слагаемое полностью известно и подчёркнуто в уравнении двумя чертами. Второе слагаемое правой части $\overline{a_{A_3A}}$ представляет собой вектор относительного ускорения точки A_3 относительно точки A . Он пока неизвестен по величине, а что касается направления, то о нём можно сказать, что оно известно положе-

нию линии действия, направленной параллельно вертикальному элементу кулисы 3. Поэтому данный вектор в уравнении ускорений подчеркнут одной чертой.

Выбираем произвольную точку π (рис. 3.6 в) в качестве полюса и масштаб μ_a . Из полюса параллельно кривошипу, в направлении от его точки A к центру

вращения кривошипа O_1 направляем вектор $\overrightarrow{a_A}$ в виде отрезка $\overline{\pi a} = \frac{a_A}{\mu_a}$. Из его

конца a проводим вертикальную прямую, имея в виду, что на ней должен лежать вектор $\overrightarrow{a_{A_3A}}$. Затем снова из полюса π проводим горизонтальную прямую

до пересечения с только что проведённой вертикальной прямой. Точка пересечения a_3 определяет величины и направления искомых векторов $\overrightarrow{a_{A_3A}}$ и $\overrightarrow{a_{A_3}}$.

В заключение в соответствии с масштабами планов вычисляем величины искомых скоростей и ускорений:

– абсолютная скорость кулисы $V_{A_3} = \overline{\pi a_3} \cdot \mu_V$;

– скорость кулисы относительно камня $V_{A_3A} = \overline{aa_3} \cdot \mu_V$ ($\overline{aa_3}$ – отрезок плана скоростей);

– абсолютное ускорение кулисы $a_{A_3} = \overline{\pi a_3} \cdot \mu_a$;

– ускорение кулисы относительно камня $a_{A_3A} = \overline{aa_3} \cdot \mu_a$ ($\overline{aa_3}$ – отрезок плана ускорений).

Механизм с группой Ассура 2-го класса 2-го вида.

Рассмотрим построение планов скоростей и ускорений на примере кривошипно-ползунного механизма, в составе которого имеется одна группа Ассура, а именно, группа Ассура 2-го класса 2-го вида (рис. 3.7, а). Схема механизма

должна быть изображена в масштабе $\mu_l = \dots \frac{M}{MM}$ в исследуемом положении.

Прежде необходимо определить параметры движения точки A .

Её скорость по величине равна произведению угловой скорости ω_1 кривошипа 1 на его радиус r , т. е. $V_A = \omega_1 \cdot r$ и направлена перпендикулярно кривошипу в сторону движения точки A . Ускорение точки A по величине равно произведению квадрата угловой скорости кривошипа также на его радиус, то есть $a_A = \omega_1^2 \cdot r$ и направлено от точки A к точке O_1 , так как совпадает с нормальной составляющей полного ускорения точки A из-за равенства нулю тангенциальной составляющей ускорения (угловое ускорение кривошипа принимается равным нулю). Точка A принадлежит не только кривошипу, но и шатуну 2 и принимается в качестве полюса относительного вращения точки B . Так что в данном механизме переносным движением точки B является её поступательное движение вместе с точкой A , а относительным движением – её вращательное движение относительно этой точки.

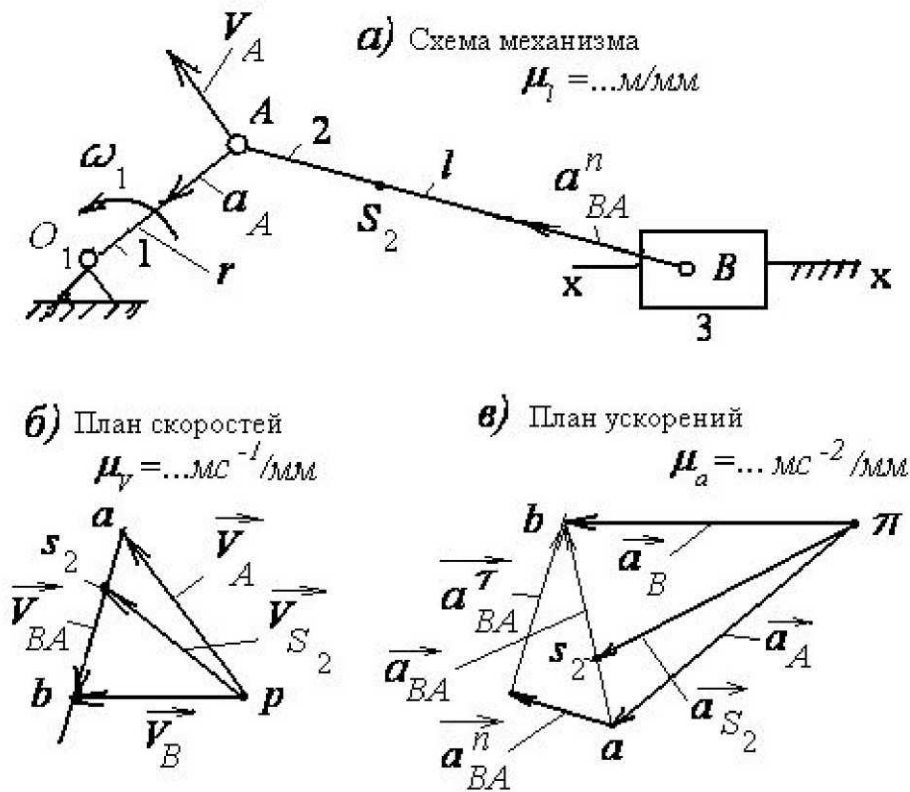


Рисунок 3.7

Скорость точки B определяется векторным равенством $\overline{V_B} = \overline{V_A} + \overline{V_{BA}}$, то есть скорость точки B равна скорости точки A плюс скорость точки B относительно точки A . В этом равенстве первое слагаемое правой части известно по величине и направлению (подчёркнуто двумя чертами), второе слагаемое направлено перпендикулярно шатуну 2 в данном положении, то есть известно только по направлению (подчёркнуто одной чертой), и, наконец, вектор левой части направлен параллельно направляющим ползуна (также подчёркнут одной чертой). При этих условиях треугольник скоростей легко строится в предварительно выбранном масштабе $\mu_V = \dots \frac{MC^{-1}}{MM}$ (рис. 3.7, б) по правилу сложения векторов.

Построение вектора скорости центра масс шатуна $\overline{V_{S_2}}$ выполняется следующим образом. Согласно *теореме подобия*, фигура, образованная векторами относительных скоростей звена на плане скоростей, подобна фигуре звена на плане механизма. Исходя из этого, можно записать пропорцию

$$\frac{\overline{as_2}}{\overline{ab}} = \frac{\overline{AS_2}}{\overline{AB}},$$

в которой все члены записаны в виде отрезков. Из этой пропорции следует, что отрезок $\overline{as_2} = \frac{\overline{AS_2}}{\overline{AB}} \cdot \overline{ab}$. Построив этот отрезок на плане скоростей, получим

точку S_2 , соединив которую с полюсом плана, находим вектор $\overrightarrow{V_{S_2}}$ скорости точки S_2 .

Построение плана ускорений производится в той же последовательности, что и плана скоростей. При этом используется векторное равенство $\underline{a_B} = \underline{a_A} + \underline{a_{BA}}$, в котором первый вектор правой части известен полностью, второй неизвестен ни по величине, ни по направлению. Вектор левой части известен по направлению – он направлен параллельно направляющим ползуна. В этих условиях треугольник ускорений не строится. Разложим вектор относительного ускорения на две составляющих, согласно равенству $\overrightarrow{a_{BA}} = \overrightarrow{a_{BA}^n} + \overrightarrow{a_{BA}^\tau}$. Первое слагаемое представляет собой относительное нормальное ускорение, направленное от точки B к точке A и равное по величине частному от деления квадрата относительной скорости на длину шатуна, то есть $a_{BA}^n = \frac{V_{BA}^2}{l_2}$. Второе слагаемое, относительное тангенциальное ускорение направлено перпендикулярно шатуну 2 и неизвестно по величине. Теперь план ускорений строится без затруднений с применением заранее выбранного масштаба $\mu_a = \dots \frac{m\text{c}^{-2}}{mm}$. План ускорений данного механизма представлен на рис. 3.7, в.

Определение ускорения центра масс S_2 производится точно так же, как это делалось для определения его скорости согласно теореме подобия.

Используя планы, легко найти физические величины скоростей и ускорений, для чего необходимо измерить отрезки в миллиметрах, выражающие скорости и ускорения, и умножить их на соответствующий масштаб:

- абсолютная скорость ползуна 3 (точки B): $V_B = \overline{Pb} \cdot \mu_V, \text{йй}^{-1}$;
- относительная скорость точки B : $V_{BA} = \overline{ab} \cdot \mu_V, m\text{c}^{-1}$;
- абсолютная скорость центра масс S_2 шатуна 2: $V_{S_2} = \overline{Ps_2} \cdot \mu_V, m\text{c}^{-1}$;
- угловая скорость шатуна 2: $\omega_2 = \frac{V_{BA}}{l}, c^{-1}$;
- абсолютное ускорение ползуна 3 (точки B): $a_3 = a_B = \overline{\pi b} \cdot \mu_a, m \cdot c^{-2}$;
- тангенциальное ускорение точки B относительно точки A :

$$a_{BA}^\tau = \overline{nb} \cdot \mu_a, m\text{c}^{-2};$$

- полное относительное ускорение точки B : $a_{BA} = \overline{ab} \cdot \mu_a, m\text{c}^{-2}$;
- абсолютное ускорение центра масс S_2 шатуна 2: $a_{S_2} = \overline{\pi s_2} \cdot \mu_a, m\text{c}^{-2}$;
- угловое ускорение шатуна 2: $\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^\tau}{l}, c^{-2}$.

Механизм с группой Ассура 2-го класса 1-го вида.

Как было отмечено в разделе структуры механизмов, группа Ассура 1-го вида состоит из двух звеньев и трёх вращательных кинематических пар. Механизм с такой группой является четырёхшарнирным механизмом (рис. 3.8, а).

Векторное уравнение для построения плана скоростей составляется так же, как и в предыдущем механизме, и записывается $\underline{V_B} = \underline{V_A} + \underline{V_{BA}}$. Треугольник скоростей строится так же, как и ранее для группы второго вида, но вектор скорости точки B направляется перпендикулярно звену 3 (рис. 3.8, б). Векторы скоростей центров масс S_2 шатуна 2 и S_3 коромысла 3 находятся по теореме подобия, как описано выше.

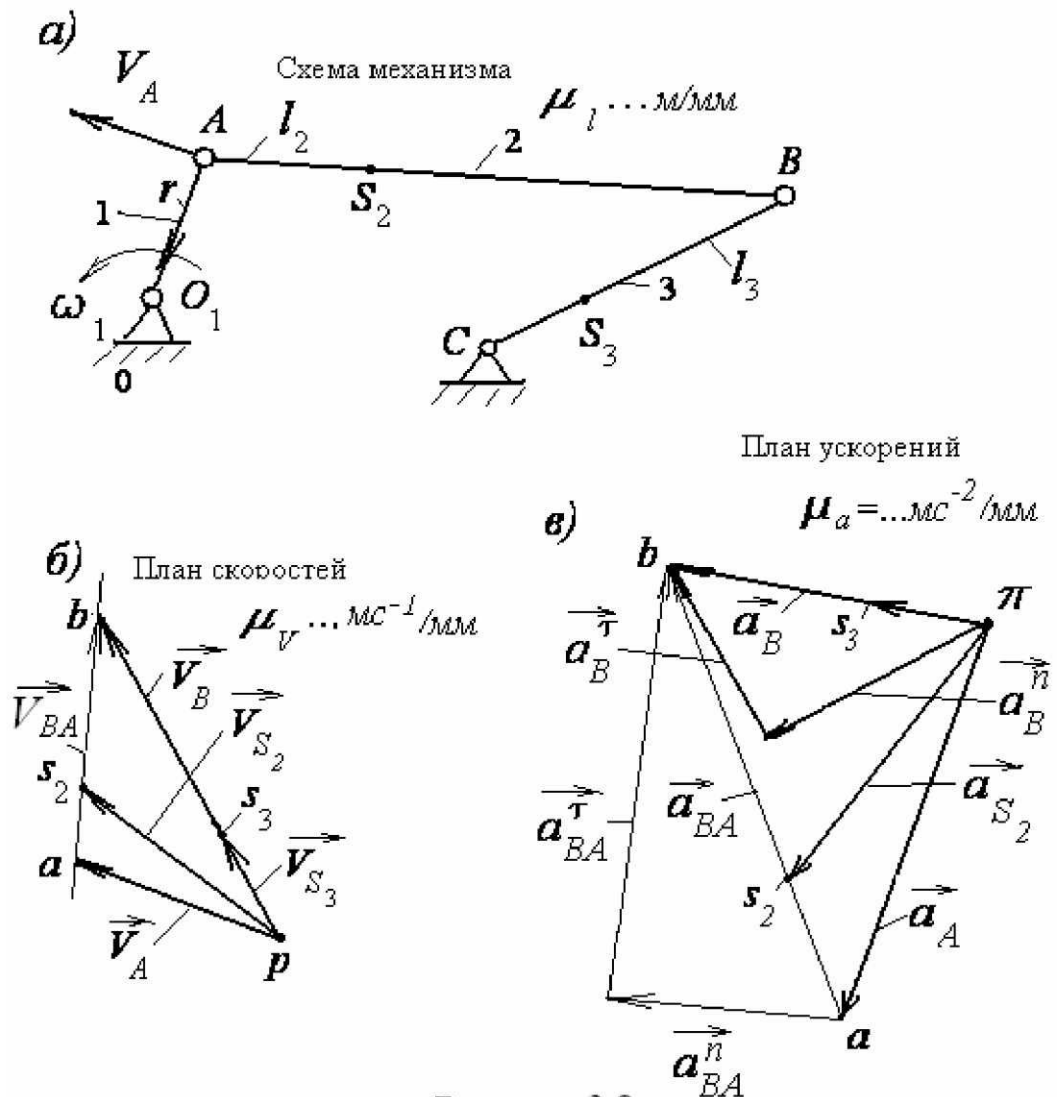


Рисунок 3.8

План ускорений строится согласно векторному уравнению

$$\underline{a_B} = \underline{a_A} + \underline{a_{BA}^n} + \underline{a_{BA}^{\tau}},$$

к которому необходимо добавить ещё одно в силу недостаточности количества известных величин $\underline{a_B} = \underline{a_B^n} + \underline{a_B^{\tau}}$. В результате получается система двух урав-

нений с четырьмя неизвестными, которая легко решается графическим путём. Величины, подчёркнутые двумя чертами, вычисляются следующим образом:

$$a_A = a_A^n = \omega_1^2 \cdot r, \quad a_{BA}^n = \frac{V_{BA}^2}{l_2}, \quad a_B^n = \frac{V_B^2}{l_3}.$$

Их направления отображены на плане ускорений. Тангенциальные составляющие направлены: $\overrightarrow{a_{BA}^t}$ перпендикулярно AB , $\overrightarrow{a_B^t}$ перпендикулярно BC . План ускорений представлен на рис. 3.8, в. Для нахождения векторов ускорений центров масс S_2 шатуна 2 и S_3 коромысла 3 необходимо найти векторы полных относительного ускорения $\overrightarrow{a_{BA}}$ и абсолютного $\overrightarrow{a_B}$. После этого задача решается так же, как описанное выше нахождение векторов скоростей этих точек.

На последнем этапе расчёта измеряются векторы скоростей и ускорений всех интересующих расчётчика точек механизма и с учётом масштабов вычисляются их физические величины:

- абсолютная скорость точки B : $V_B = \overline{\Pi b} \cdot \mu_V, \text{ мс}^{-1}$;
- скорость точки B относительно точки A : $V_{BA} = \overline{ab} \cdot \mu_V, \text{ мс}^{-1}$;
- абсолютная скорость центра масс S_2 шатуна 2: $V_{S_2} = \overline{\Pi s_2} \cdot \mu_V, \text{ мс}^{-1}$;
- абсолютная скорость центра масс S_3 коромысла 3: $V_{S_3} = \overline{\Pi s_3} \cdot \mu_V, \text{ мс}^{-1}$;
- угловая скорость шатуна 2: $\omega_2 = \frac{V_{BA}}{l_2}, \text{ с}^{-1}$;
- угловая скорость коромысла 3: $\omega_3 = \frac{V_B}{l_3}, \text{ с}^{-1}$;
- абсолютное ускорение точки B : $a_B = \overline{\pi b} \cdot \mu_a, \text{ мс}^{-2}$;
- тангенциальное ускорение точки B : $a_B^t = \overline{n_2 b} \cdot \mu_a, \text{ мс}^{-2}$;
- тангенциальное ускорение точки B относительно точки A :
 $a_{BA}^t = \overline{nb} \cdot \mu_a, \text{ мс}^{-2}$;
- полное ускорение точки B относительно точки A : $a_{BA} = \overline{ab} \cdot \mu_a, \text{ мс}^{-2}$;
- абсолютное ускорение центра масс S_2 шатуна 2: $a_{S_2} = \overline{\pi s_2} \cdot \mu_a, \text{ мс}^{-2}$;
- абсолютное ускорение центра масс S_3 коромысла 3: $a_{S_3} = \overline{\pi s_3} \cdot \mu_a, \text{ мс}^{-2}$;
- угловое ускорение шатуна 2: $\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^t}{l_2}, \text{ с}^{-2}$;
- угловое ускорение коромысла 3: $\varepsilon_3 = \frac{a_B^t}{l_3}, \text{ с}^{-2}$.

Механизм с группой Ассура 2-го класса 3-го вида.

Как отмечено в разделе структуры, механизм, содержащий группу Ассура 3-го вида, называется кривошипно-кулисным. На рис. 3.9, а этот механизм изображён в произвольном положении в некотором масштабе $\mu_l = \dots м/мм$. Группа Ассура здесь состоит из кулисного камня 2 и кулисы 3, вращающейся вокруг неподвижной точки C . Обозначим буквой A центр шарнира, образованного звеньями 1 и 2. Так что точка A принадлежит одновременно и звену 1, и звену 2, поэтому на схеме она обозначена как $A(A_1, A_2)$. С точкой A совпадает в данный момент точка A_3 , принадлежащая кулисе 3. Точка A вращается вокруг точки O_1 против часовой стрелки вместе с кривошипом 1 с его угловой скоростью ω_1 . Поэтому окружная скорость точки A определяется формулой $V_A = \omega_1 \cdot r$ (в которой r – радиус кривошипа O_1A , м). Эта скорость направлена перпендикулярно кривошипу в сторону его вращения, как показано на рис. 3.9, а.

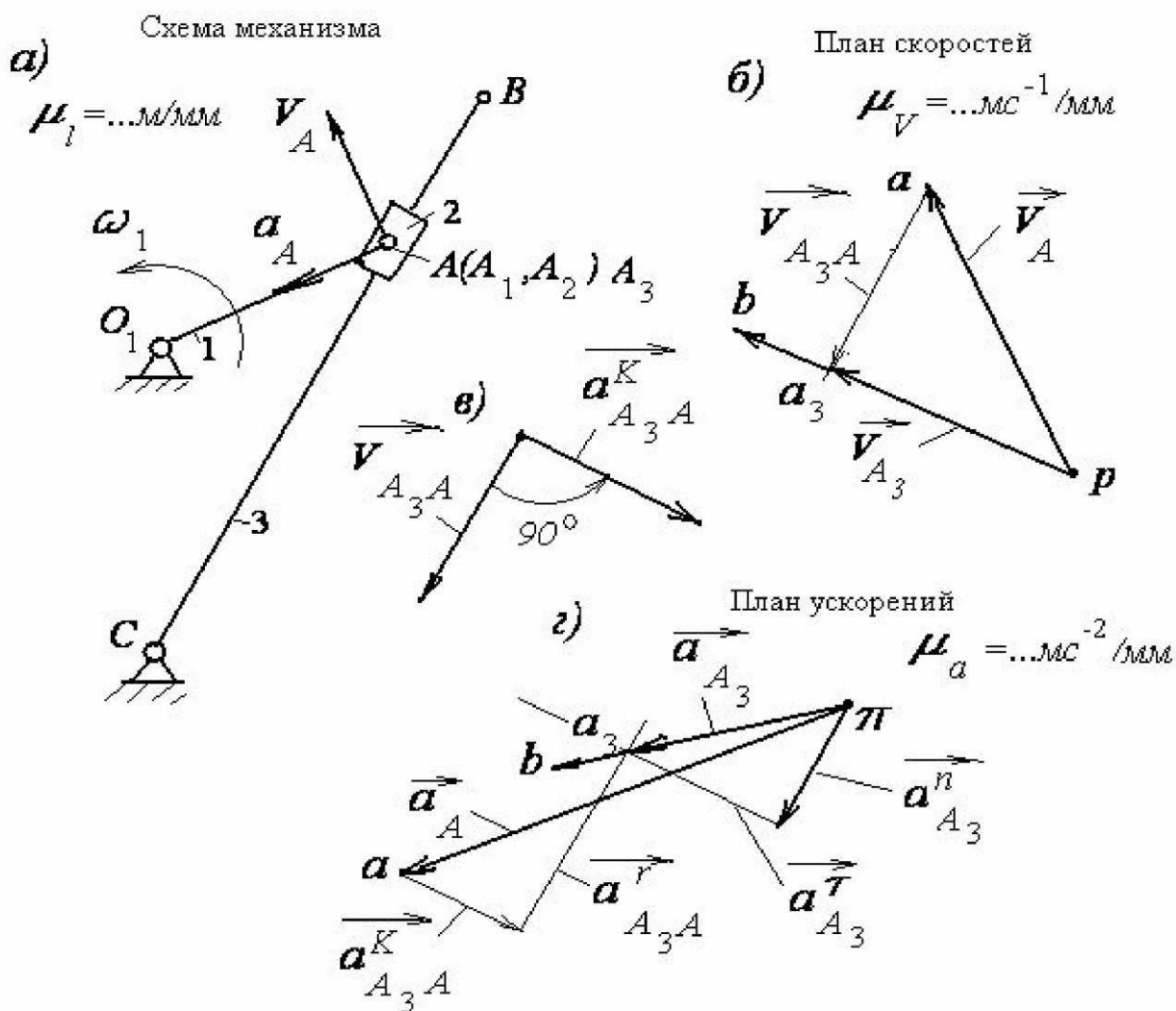


Рисунок 3.9

Особенностью данной группы Ассура является то, что в ней переносным движением является вращательное движение, а относительным – поступательное. Поэтому векторное уравнение, определяющее скорость точки A , участвующей

щей в этом сложном движении, запишется так: $\overline{V_A} = \overline{V_{A_3}} + \overline{V_{AA_3}}$. Как было отмечено выше, вектор левой части уравнения известен по величине и направлению, поэтому подчеркнут дважды. Векторы правой части имеют известные направления, поэтому подчеркнуты одной чертой. Для удобства построения плана скоростей данное уравнение целесообразно переписать в форме $\overline{V_{A_3}} = \overline{V_A} - \overline{V_{AA_3}}$. Но, так как имеет место равенство $-\overline{V_{AA_3}} = \overline{V_{A_3A}}$, то окончательно уравнение скоростей примет вид: $\overline{V_{A_3}} = \overline{V_A} + \overline{V_{A_3A}}$.

Вектор левой части известен также по положению линии действия – она перпендикулярна кулисе (подчеркнута также одной чертой). В данных условиях треугольник скоростей легко строится согласно правилам сложения векторов в предварительно выбранном масштабе $\mu_V = \dots \text{мс}^{-1} / \text{мм}$. План скоростей показан на рис. 3.10, б. Для определения скорости точки B конца кулисы необходимо воспользоваться теоремой подобия, как пояснялось выше. Конец вектора скорости точки B на плане скоростей обозначен b .

Для построения плана ускорений необходимо воспользоваться уравнением

$$\overline{a_A} = \overline{a_{A_3}} + \overline{a_{AA_3}^K} + \overline{a_{AA_3}^r}$$

Так как требуется определить ускорение точки A_3 , то уравнение ускорений целесообразно переписать в виде $\overline{a_{A_3}} = \overline{a_A} - \overline{a_{AA_3}^K} - \overline{a_{AA_3}^r}$, решив предыдущее уравнение относительно $\overline{a_{A_3}}$. Имея в виду равенства $-\overline{a_{AA_3}^K} = \overline{a_{A_3A}^K}$ и $-\overline{a_{AA_3}^r} = \overline{a_{A_3A}^r}$, запишем окончательно $\overline{a_{A_3}} = \overline{a_A} + \overline{a_{A_3A}^K} + \overline{a_{A_3A}^r}$.

Ускорение точки A по величине определяется формулой $a_A = \omega_1^2 \cdot r$ и направлено к центру вращения кривошипа O_1 , поэтому подчеркнута дважды.

Второе слагаемое представляет собой Кориолисово ускорение, возникающее в результате вращательного переносного и поступательного относительного движений. Оно определяется формулой $a_{A_3A}^K = 2 \cdot \omega_3 \cdot V_{A_3A}$, где V_{A_3A} является относительной скоростью, имеющейся на плане скоростей. Направление Кориолисова ускорения следует правилу: его вектор должен быть повернут на 90° в сторону переносной угловой скорости ω_3 относительно вектора относительной скорости $\overline{V_{A_3A}}$ (рис. 3.9, в). Таким образом, Кориолисово ускорение известно по величине и направлению, поэтому также подчеркнута дважды.

Третье слагаемое является вектором относительного ускорения в движении точки A_3 относительно точки A . Оно направлено параллельно кулисе, его величина неизвестна; оно подчеркнута одной чертой. В таком виде данное уравне-

ние не может быть решено, поэтому необходимо добавить ещё одно $\overrightarrow{a_{A_3}} = \overrightarrow{a_{A_3}^n} + \overrightarrow{a_{A_3}^\tau}$, представляющее собой разложение полного ускорения точки

A_3 на две составляющих, одна из которых $a_{A_3}^n = \omega_3^2 \cdot AC$ направлена от A к C , другая $\overrightarrow{a_{A_3}^\tau}$ направлена перпендикулярно AC . Таким образом, два уравнения ускорений составляют систему

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a_{A_3}} &= \overrightarrow{a_A} + \overrightarrow{a_{A_3A}^K} + \overrightarrow{a_{A_3A}^r}, \\ \overrightarrow{a_{A_3}} &= \overrightarrow{a_{A_3}^n} + \overrightarrow{a_{A_3}^\tau},\end{aligned}$$

графическое решение которой, называемое планом ускорений, представлено на рис. 3.9, z в масштабе μ_a . Чтобы определить вектор ускорения точки B , необходимо поступить так же, как и при определении вектора скорости этой точки. Конец вектора ускорения точки B на плане ускорений отмечен буквой b .

После построения планов скоростей и ускорений необходимо измерить все искомые отрезки и, воспользовавшись масштабами планов, определить физические величины скоростей и ускорений точек и угловых скоростей и угловых ускорений звеньев так, как это сделано при анализе предыдущих механизмов.

Механизм с группой Ассура 2-го класса 4-го вида. Как указано в разделе структуры механизмов, группа Ассура 2-го класса 4-го вида образована двумя внешними поступательными парами и внутренней вращательной парой. Механизм, содержащий такую группу Ассура, изображён в масштабе $\mu_l = \dots \text{м/мм}$ на рис. 3.10, a . Ведущее звено 1 механизма (кулиса) вращается в указанном направлении с угловой скоростью ω и через кулисный камень 2 передаёт движение на ведомый ползун 3. Центр шарнира, образованного звеньями 2 и 3, обозначен A (в скобках отмечены точки этих звеньев, совпадающие друг с другом в шарнире). Буквой A_1 обозначена точка кулисы 1, совпадающая в данный момент с точкой A . На схеме механизма также указаны направления скорости V_{A_1} точки A_1 и её ускорения a_{A_1} .

План скоростей механизма, показанный на рис. 3.10, b , строится так же, как и ранее по уравнению, полученному на основе общей теории $\overrightarrow{V_A} = \overrightarrow{V_{A_1}} + \overrightarrow{V_{AA_1}}$.

В этом уравнении первое слагаемое правой части определяется по величине формулой $V_{A_1} = \omega \cdot OA$ и направляется перпендикулярно линии OA . Так как этот вектор известен по величине и направлению, то в уравнении он подчёркнут дважды. Второе слагаемое правой части, то есть относительная скорость $\overrightarrow{V_{AA_1}}$ известна только по направлению – она параллельна линии OA , поэтому её вектор подчёркнут одной чертой. Вектор левой части $\overrightarrow{V_A}$, являющийся векто-

ром абсолютной скорости (скорости относительно стойки) точки A , принадлежащей звену 3, движущемуся вдоль горизонтальных направляющих, имеет также известное направление. Он направлен горизонтально и подчеркнут одной чертой. Построение треугольника скоростей в предварительно выбранном масштабе μ_V не представляет затруднений.

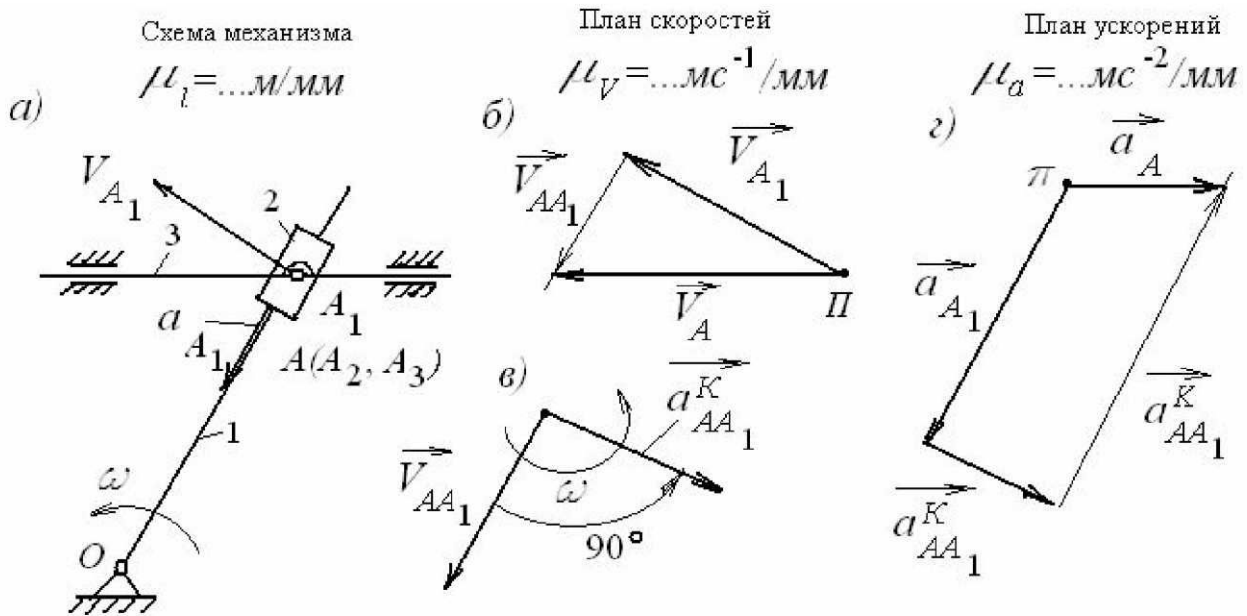


Рисунок 3.10

Для построения плана ускорений (рис. 3.10, ε) необходимо записать векторное уравнение с учётом того обстоятельства, что здесь переносным движением является вращательное, а относительным – поступательное: $\underline{\underline{a}}_A = \underline{\underline{a}}_{A_1} + \underline{\underline{a}}_{AA_1}^K + \underline{\underline{a}}_{AA_1}^r$. Первое слагаемое правой части $\underline{\underline{a}}_{A_1}$ является ускорением точки A_1 первого звена, состоящим только из нормальной составляющей (в предположении, конечно, постоянства ω). Поэтому оно направлено от A_1 к O и имеет величину, определяемую формулой $a_{A_1} = a_{A_1}^n = \omega^2 \cdot OA_1$. В уравнении вектор этого ускорения подчеркнут двумя чертами. Второе слагаемое правой части $\underline{\underline{a}}_{AA_1}^K$ представляет собой вектор Кориолисова ускорения, имеющий величину, вычисляемую по формуле $a_{AA_1}^K = 2 \cdot \omega \cdot V_{AA_1}$. Направление Кориолисова ускорения определяется по правилу: его вектор повернут на 90° относительно вектора относительной скорости V_{AA_1} в сторону переносной угловой скорости ω (рис. 3.10, в). Этот вектор также подчеркнут двумя чертами. Третье слагаемое $\underline{\underline{a}}_{AA_1}^r$ – вектор ускорения точки A относительно точки A_1 известен только по направлению (направлен параллельно OA), поэтому подчеркнут одной чертой. Вектор $\underline{\underline{a}}_A$ левой части уравнения направлен вдоль горизонтальных

направляющих. Его величина неизвестна, поэтому он подчеркнут одной чертой. При этих данных четырёхугольник ускорений в некотором масштабе μ_a строится без затруднений.

На последнем этапе расчётов вычисляются величины линейных скоростей и ускорений точек механизма и угловых скоростей и угловых ускорений звеньев.

3.5. Метод кинематических диаграмм (метод графического дифференцирования)

Основой метода служит известное положение математики, согласно которому *производная функции, заданной в виде графика, в какой-либо её точке численно равна тангенсу угла наклона касательной, проведённой в этой точке к графику функции, то есть*

$$y'_i = \left(\frac{dy}{dx} \right)_i = \operatorname{tg} \theta_i.$$

Так как теория механизмов и машин имеет дело с именованными числами, то при определении величины тангенса необходимо учитывать масштабы по осям координат графика функции (рис. 3.11)

$$y'_i = \operatorname{tg} \theta_i \cdot \frac{\mu_y}{\mu_x}.$$

Выберем горизонтальный отрезок произвольной длины и проведём из его левого конца наклонную прямую, параллельную касательной, а из правого конца – вертикальную прямую до пересечения с наклонной. Вычислим длину отрезка, полученного на вертикали и обозначенного на рис. 3.11

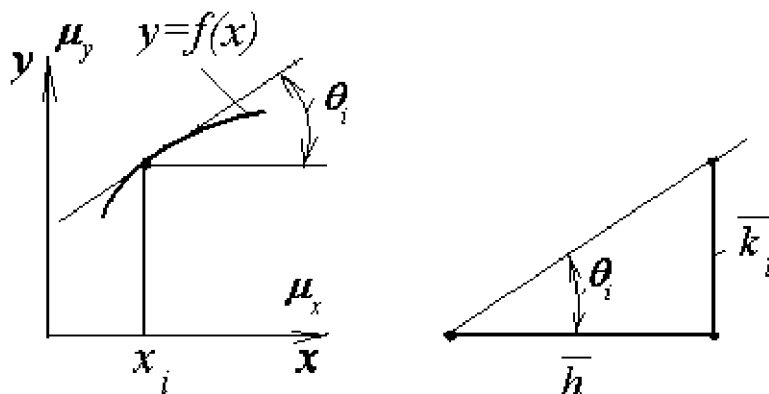


Рисунок 3.11

буквой \bar{k}_i . Построенный треугольник является прямоугольным с углом против вертикального катета, равным θ_i . Поэтому, записав из треугольника $\operatorname{tg} \theta_i = \frac{\bar{k}_i}{\bar{h}}$ и

подставив это отношение в предыдущее выражение, получаем $y'_i = \frac{\bar{k}_i}{\bar{h}} \cdot \frac{\mu_y}{\mu_x}$.

В правой части этого выражения переменной величиной является только \overline{k}_i , остальные образуют постоянное число, которое можно считать масштабом, то есть

$$\mu_{y'} = \frac{\mu_y}{h \cdot \mu_x}.$$

Таким образом, мы убедились, что отрезок \overline{k}_i в масштабе $\mu_{y'}$ выражает производную в данной точке графика.

Для применения рассмотренной методики необходимо предварительно построить график или функции положения механизма, или график аналога скорости. Чтобы построить график производной, необходимо на продолжении оси абсцисс этого графика в левую сторону от оси ординат выбрать произвольный отрезок \overline{h} и на нём строить все треугольники, необходимые для определения отрезков \overline{k}_i . Все эти отрезки получаются на оси ординат, но каждый из них необходимо разместить на ординатной прямой соответствующего номера, а их концы соединить плавной кривой. Эта процедура даст искомый график.

Замечание. Кроме рассмотренного способа графического дифференцирования существуют способ приращений и способ хорд. Они излагаются в пособиях по курсовому проектированию по ТММ, поэтому здесь не рассматриваются.

3.6. Синтез рычажных механизмов

Задачи синтеза рычажных механизмов. В зависимости от назначения механизма, точки ведомых звеньев должны иметь определённые траектории, перемещения, скорости и ускорения. Эти характеристики зависят от закона движения ведущего звена и *параметров кинематической схемы, то есть от размеров звеньев механизма, которые определяют его кинематическую схему.* В плоских механизмах с низшими парами параметрами кинематической схемы являются расстояния между центрами шарниров, размеры, определяющие положения поступательных пар, расстояния от точек, описывающих траектории и т. п. *Определение параметров кинематической схемы механизма по заданным геометрическим и кинематическим условиям движения ведомого звена составляет основную задачу проектирования (синтеза) механизмов.* Эти условия достаточно разнообразны и поэтому разнообразны задачи, связанные с синтезом механизмов. Однако можно из всего разнообразия задач выделить две основные: *воспроизведение заданного закона движения и воспроизведение заданной траектории.*

Задача о воспроизведении заданного закона движения состоит в определении параметров кинематической схемы, которые обеспечивают точное или приближённое движение ведомого звена по заданному закону при определённом законе движения ведущего звена. В качестве примеров можно назвать в машиностроении – механизм поперечно-строгального станка, в котором суппорт в рабочем ходе движется с приблизительно постоянной скоростью, в приборных

передаточных механизмах – устройства, обеспечивающие получение равномерной шкалы и др.

Задача о воспроизведении заданной траектории решается при синтезе механизмов, в которых ведомое звено совершает сложное движение, но существует необходимость воспроизведения определённой траектории одной точки этого звена. Например, стрела портального крана, являющаяся шатуном четырёхшарнирного механизма, должна двигаться так, чтобы конец стрелы, к которому подвешивается груз (то есть точка шатуна) описывал приблизительно прямую линию.

Задача о положениях. Формулировку задачи о воспроизведении заданного закона движения можно показать на примере четырёхшарнирного механизма (рис. 3.12, а) приблизительно в таком виде, в каком это было предложено профессором Н. И. Левитским.

Механизм имеет стойку O_1C и подвижные звенья 1, 2 и 3, причём звено 1 является ведущим кривошипом, звено 3 – ведомым коромыслом. Положение ведущего звена определяется углом α , положение ведомого – углом ψ . Оба угла отсчитываются от горизонтали. Запишем в самом общем виде функцию положения механизма, то есть связь между углом ψ поворота коромысла и углом α поворота кривошипа $\psi = \psi(\alpha)$. В качестве примера на рис. 3.12, б показан возможный график этой функции.

В функцию положения входят размеры звеньев механизма, которые ранее были названы *параметрами кинематической схемы механизма*, или *параметрами механизма*. Но они пока неизвестны, поэтому по приведённой зависимости рассчитать функцию положения невозможно. Данный механизм имеет следующие шесть независимых параметров, подлежащих определению: длины звеньев r, l_2, l_3, d , положение стойки d относительно оси O_1x , задаваемое углом α_0 , и начальное значение α_0 угла α .

Для определения всех шести параметров необходимо записать систему уравнений на основе функции положения, в левые части уравнений которой ввести значения ψ (пси), а в правые части – в качестве аргумента – соответствующие каждому положению значения α . Количество уравнений системы равно количеству неизвестных

$$\psi_1 = \psi(\alpha_1),$$

$$\psi_2 = \psi(\alpha_2),$$

$$\psi_3 = \psi(\alpha_3),$$

.....

$$\psi_n = \psi(\alpha_n).$$

В данном случае количество уравнений равно шести ($n = 6$).

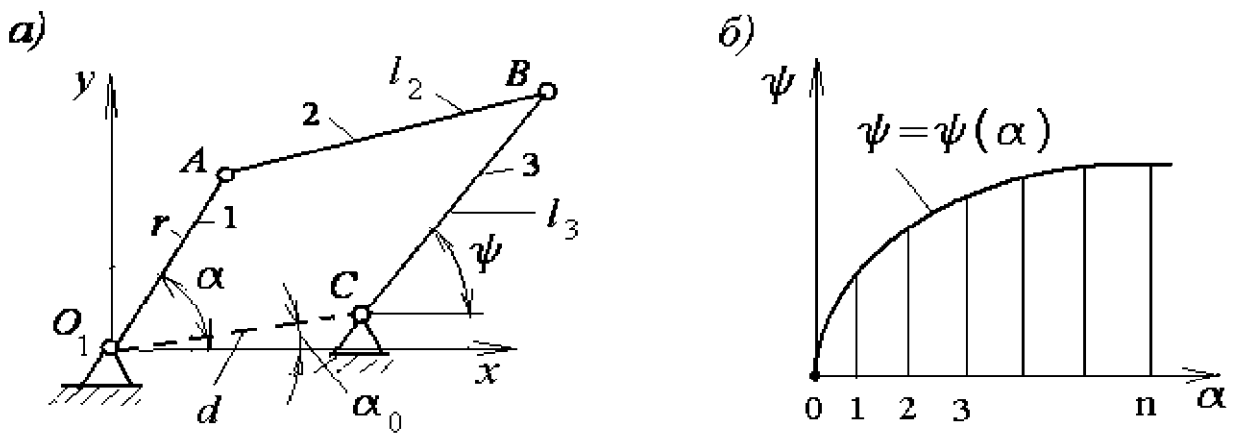


Рисунок 3.12

Если число уравнений равно числу параметров, подлежащих определению, то теоретически задача может быть полностью решена. Практически же уравнения могут получиться довольно громоздкими, тогда решение системы может быть затруднительным. В этом случае некоторыми параметрами целесообразно задаться, тогда число уравнений сокращается на количество заданных параметров, и решение задачи упрощается. В рассмотренной постановке задача о воспроизведении заданного закона движения называется *задачей о положениях*.

Пример. Решим задачу синтеза кривошипно-ползунного механизма, то есть определим величины радиуса кривошипа r , коэффициента λ и коэффициента ξ , используя ранее полученное выражение функции положения механизма (см. стр. 45), то есть

$$S(\alpha) = r \cdot \left\{ \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^2 - \xi^2} - \cos(\alpha + \nu) - \frac{1}{\lambda} \sqrt{1 - \lambda^2 \cdot [\sin(\alpha + \nu) + \xi \cdot \lambda]^2} \right\}.$$

Далее имеется в виду, что функция, которая должна быть реализована механизмом, известна, но неизвестны кинематические параметры механизма: ни радиус кривошипа r , ни его отношение λ к длине шатуна, ни отношение ξ величины эксцентриситета к радиусу r .

Так как в данной задаче три неизвестных, то количество уравнений, необходимых для их нахождения, должно быть также три. Возьмём три значения функции положения, соответствующие трём углам поворота кривошипа:

$$\alpha_1 = 30^\circ = \frac{\pi}{6}, \quad S(\alpha_1) = 0,004; \quad \alpha_2 = 120^\circ = \frac{2}{3} \cdot \pi, \quad S(\alpha_2) = 0,109;$$

$$\alpha_3 = 150^\circ = \frac{5}{6} \cdot \pi, \quad S(\alpha_3) = 0,135.$$

Вставляя эти пары значений в приведённое выше уравнение функции положения, получим систему трёх уравнений с тремя неизвестными, решение которой позволяет найти эти неизвестные. Здесь также воспользуемся программой MathCAD, в которой имеется блок, предназначенный для этой цели. Программа и решение приведены ниже (Листинг 3.2).

$$r := 0.065 \quad \lambda := 0.32 \quad \xi := -0.45 \quad v := \operatorname{asin}\left(\frac{\xi}{1 + \frac{1}{\lambda}}\right)$$

Given

$$r \cdot \left[\sqrt{\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^2 - \xi^2} - \cos\left(\frac{\pi}{6} + v\right) - \frac{\sqrt{1 - \lambda^2 \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi}{6} + v\right) + \xi \cdot \lambda\right)^2}}{\lambda} \right] = 0.004$$

$$r \cdot \left[\sqrt{\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^2 - \xi^2} - \cos\left(\frac{2}{3} \cdot \pi + v\right) - \frac{\sqrt{1 - \lambda^2 \cdot \left(\sin\left(\frac{2}{3} \cdot \pi + v\right) + \xi \cdot \lambda\right)^2}}{\lambda} \right] = 0.109$$

$$r \cdot \left[\sqrt{\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^2 - \xi^2} - \cos\left(\frac{5}{6} \cdot \pi + v\right) - \frac{\sqrt{1 - \lambda^2 \cdot \left(\sin\left(\frac{5}{6} \cdot \pi + v\right) + \xi \cdot \lambda\right)^2}}{\lambda} \right] = 0.147$$

Ἐὰς ῥῶσιν ὁ ἀὸ δὰ ῥῶσιν, ὁ ἀ

$$\operatorname{Find}(r, \lambda, \xi) = \begin{pmatrix} 0.075 \\ 0.337 \\ -0.555 \end{pmatrix}$$

Так как решение системы в пакете MathCAD производится итерационным методом, то предварительно должны быть заданы некоторые произвольные значения неизвестным величинам. Они приведены в программе ниже заголовка. Там же приведено и вычисление угла V . Затем в блоке Given (задано) записываются уравнения, составляющие систему, и вводится решающий блок командой Find (найти) с указанием искомым параметров. После знака равенства автоматически выводятся результаты решения системы в виде столбцовой матрицы из трёх чисел.

Как видим, решение этой системы уравнений даёт следующие результаты: первое число матрицы результата 0,075 равно радиусу кривошипа r , что точно соответствует принятому ранее его значению, второе число 0,337 соответствует величине λ и отличается от ранее принятого на -4% , что вполне допустимо, третье число даёт $\xi = -0,555$, отличающееся от принятого ранее при анализе кинематики на 11% . Если формировать исходные данные по другим трём значениям функции положения, то могут быть получены более точные результаты.

Синтез четырёхшарнирного механизма по двум и трём положениям шатуна. В случае задания двух положений шатуна A_1B_1 и A_2B_2 (рис. 3.13, а) четырёхшарнирного механизма проектирование осуществляется следующим образом. Соединяются отрезками прямых попарно точки A_1 и A_2 , затем B_1 и B_2 . На этих отрезках находятся средние точки и через них проводятся перпендикуляры к ним. В четырёхшарнирном механизме точки A и B движутся по окружностям, поэтому необходимо найти центры этих окружностей, которые должны располагаться на данных перпендикулярах. Известно, что через две точки можно провести сколько угодно окружностей, так что задача имеет бесчисленное множество решений. Выбор какого-либо решения из этого множества остаётся за конструктором. На рис. 3.13, а возможные положения центров вращения отмечены тёмными точками. В выбранных положениях центров вращения помещаются кинематические пары вращающихся звеньев механизма со стойкой. На рисунке они отмечены буквами O и C .

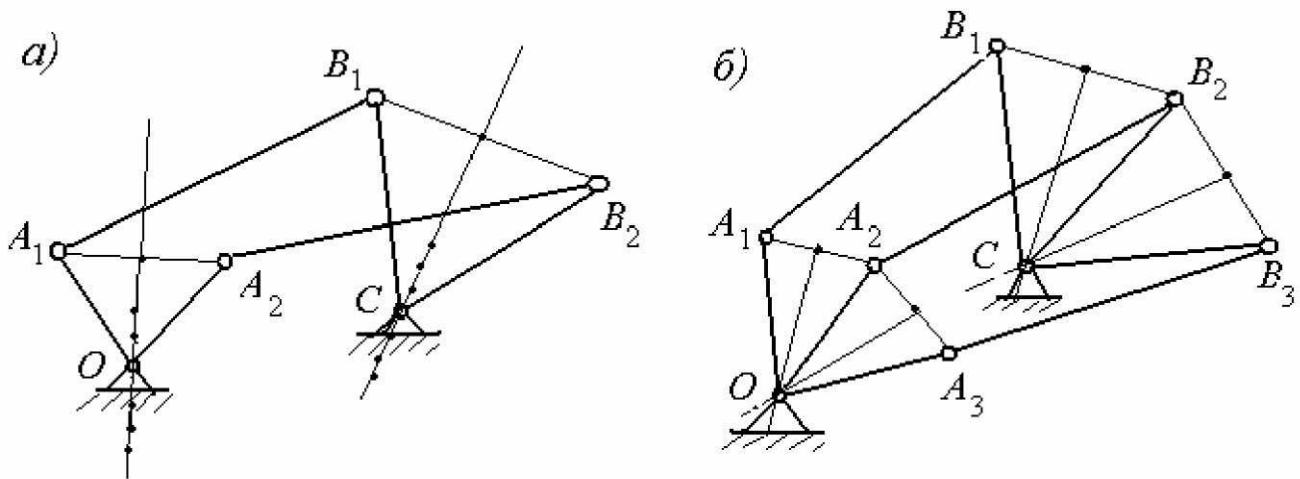


Рисунок 3.13

При трёх заданных положениях шатуна, которые на рис. 3.13, б обозначены A_1B_1 , A_2B_2 , A_3B_3 , решение задачи сводится к определению радиуса и центра окружности, проходящей через три точки. Соединим отрезками прямых точку A_2 с точками A_1 и A_3 и через середины этих отрезков проведём к ним перпендикуляры до пересечения их друг с другом. Точка пересечения O будет центром окружности, проходящей через точки A_1 , A_2 и A_3 и одновременно центром вращения звена OA . Точно так же определяется положение центра вращения звена BC . Здесь, как видим, задача имеет однозначное решение.

Коэффициент увеличения скорости обратного хода. В механизмах циклического действия ведомое звено совершает возвратно-поступательное или возвратно-вращательное движение между двумя крайними его положениями. Примерами таких механизмов могут служить синусный механизм (рис. 3.2) и кривошипно-ползунный механизм (рис. 3.3). При этом механизм выполняет технологическую операцию в течение движения ведомого звена только в одну сторону. Это движение называется *прямым* или *рабочим ходом*. Движение же в обратную сторону происходит без выполнения полезного

действия, поэтому оно называется *обратным*, или *холостым ходом*. Конечно, целесообразно, чтобы холостой ход происходил быстрее, то есть, по возможности, на него тратилось бы меньше времени. Отсюда и появился *коэффициент увеличения скорости обратного хода*, обозначаемый по традиции буквой k . Он показывает, во сколько раз средняя скорость $V_{x.x}^{cp}$ движения ведомого звена при обратном (холостом) ходе больше его средней скорости $V_{p.x}^{cp}$ при прямом (рабочем) ходе. Это можно математически выразить так: $k = V_{x.x}^{cp} / V_{p.x}^{cp}$, если ведомое звено совершает возвратно-поступательное движение, и $k = \omega_{x.x}^{cp} / \omega_{p.x}^{cp}$, если ведомое звено совершает возвратно-вращательное движение. Дальнейшие рассуждения будем вести для первого случая. Для лучшего понимания смысла коэффициента обратимся к рис. 3.14, на котором показан график изменения скорости ведомого звена в зависимости от времени, то есть график функции $V = V(t)$. Кривая графика делит время цикла на две неравные части. Большая часть соответствует времени рабочего хода, $t_{p.x.}$, меньшая – времени холостого хода, $t_{x.x.}$. Эти части неодинаковы, так как скорости движения ведомого звена в этих фазах движения также неодинаковы.

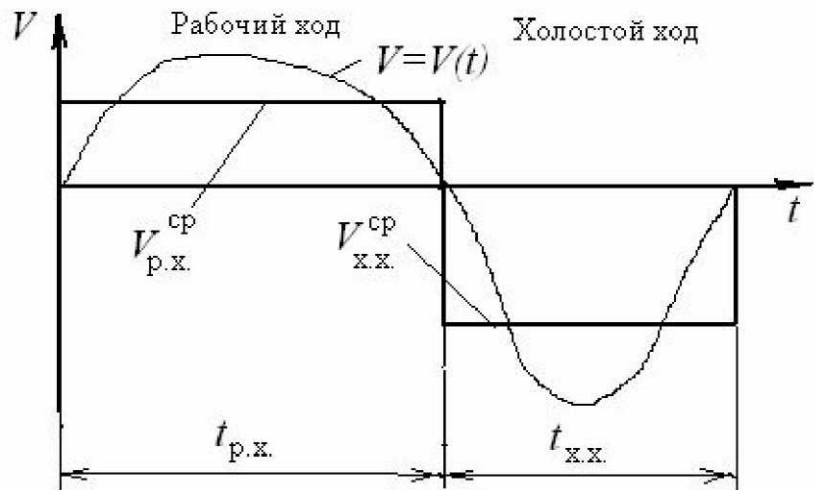


Рисунок 3.14

Однако, если проинтегрировать данную функцию по времени, то получится максимальное перемещение ведомого звена, причём за время рабочего хода при движении в одну сторону, за время холостого хода – в другую сторону. Поэтому площади графика, ограниченные кривой в положительной и отрицательной областях равны. Для определения средних значений скоростей в обеих фазах представим эти площади в форме равновеликих прямоугольников. Высоты этих прямоугольников и соответствуют средним (в данном случае средним интегральным) величинам скоростей $V_{p.x.}^{cp}$ и $V_{x.x.}^{cp}$. Отсюда видно, что коэффициент k можно представить в виде отношений $k = V_{x.x.}^{cp} / V_{p.x.}^{cp} = t_{p.x.} / t_{x.x.}$. Так как ведущее звено вращается с постоянной скоростью, то каждому из двух данных интервалов времени соответствует и свой угол поворота ведущего звена, который мы обозначаем буквой α . Для перехода к углам поворота ведущего звена, соответствующим этим фазам движения, необходимо помножить их на угловую скорость ω_1 , то есть

$\alpha_{p.x.} = \omega_1 \cdot t_{p.x.}$ и $\alpha_{x.x.} = \omega_1 \cdot t_{x.x.}$. Поэтому коэффициент k можно выразить через углы: $k = \alpha_{p.x.} / \alpha_{x.x.}$.

Синтез кривошипно-кулисного механизма. Механизм состоит из четырёх звеньев: стойки 0, кривошипа 1, вращающегося относительно стойки вокруг точки O_1 с угловой скоростью ω_1 против часовой стрелки, кулисного камня 2, образующего с кривошипом вращательную кинематическую пару A и поступательную кинематическую пару с кулисой 3. Кулиса совершает возвратно-вращательное движение относительно стойки 0 вокруг точки C . Конечная точка B кулисы может служить для присоединения к ней группы Ассура, содержащей звено, связанное с исполнительным органом машины.

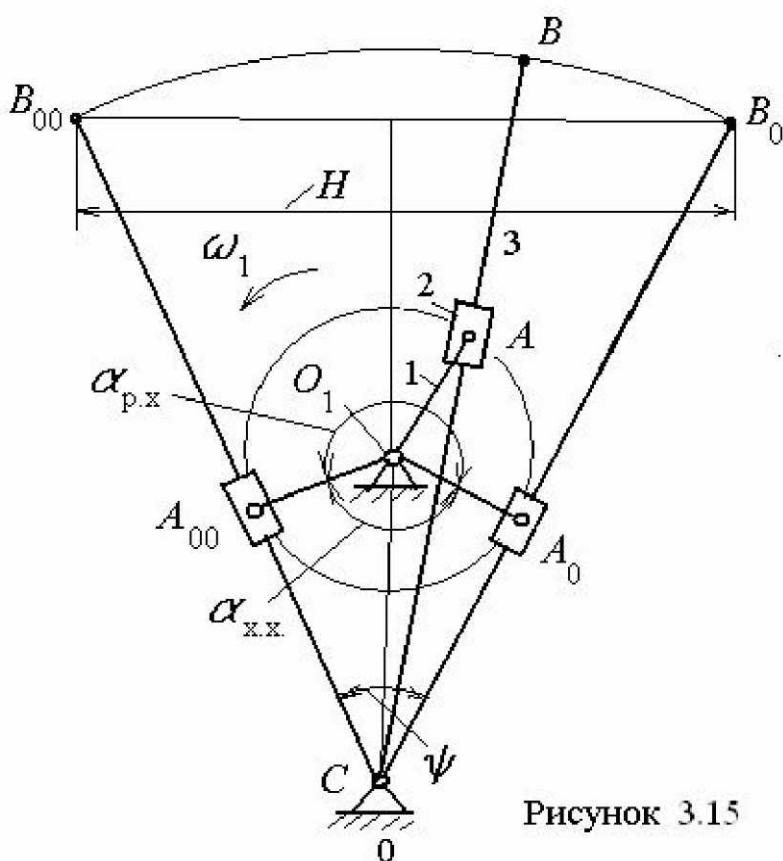


Рисунок 3.15

Изобразим механизм в двух крайних положениях, когда кривошип перпендикулярен к кулисе (рис. 3.15). В правом крайнем положении точка A занимает положение A_0 , точка B – положение B_0 , в левом крайнем положении – соответственно A_{00} и B_{00} . На рисунке видно, что полный оборот кривошипа делится между этими крайними положениями на две неравные части. Верхняя часть угла $\alpha_{\delta.\delta.}$ существенно больше нижней части $\alpha_{\delta.\delta.}$. Ясно, что при постоянной скорости вращения кривошипа время прохождения им этих углов также неодинаково.

Обычно в исходных данных на проектирование реального механизма содержится длина отрезка B_0B_{00} , т. к. она связана с технологической операцией, выполняемой механизмом. Коэффициент увеличения скорости холостого хода обычно также задан. Поэтому можно составить систему простейших уравнений

$$\frac{\alpha_{p.x.}}{\alpha_{x.x.}} = k,$$

$$\alpha_{p.x.} + \alpha_{x.x.} = 360^\circ,$$

решая которую, легко определить углы $\alpha_{\delta.\delta.}$ и $\alpha_{\delta.\delta.}$. Из прямоугольного треугольника O_1A_0C видно, что, с одной стороны, половина угла качания кулисы 3,

то есть угол $\psi/2$ определится как $\frac{\psi}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha_{\text{х.х.}}}{2}$, а из прямоугольного треугольника с гипотенузой B_0C можно определить длину гипотенузы, то есть кулисы $B_0C = \frac{H}{2 \cdot \sin \frac{\psi}{2}}$. Наконец, из прямоугольного треугольника O_1A_0C можно

записать соотношение: радиус кривошипа $O_1A_0 = O_1C \cdot \sin \frac{\psi}{2}$, где O_1C – длина стойки. Любая из двух величин (радиус кривошипа или длина стойки) может быть определена из этого соотношения, если известна другая.

Синтез кривошипно-коромыслового механизма.
 Данный механизм относится к четырёхшарнирным механизмам, в составе которых имеются только вращательные кинематические пары (рис. 3.16).

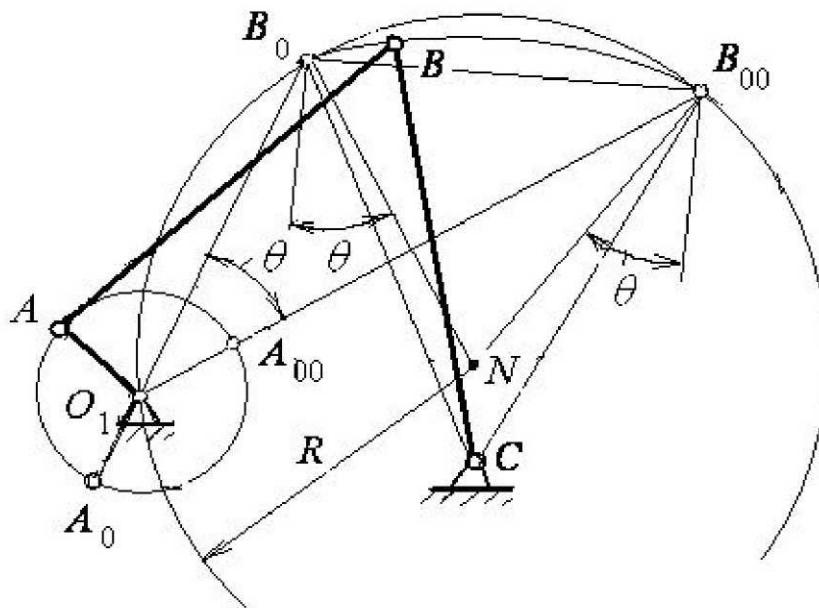


Рисунок 3.16

В этом механизме известны только длина коромысла BC и коэффициент k увеличения скорости обратного хода. Размеры остальных трёх звеньев необходимо определить в ходе синтеза механизма. Если бы размеры звеньев механизма были известны, можно было бы построить два его крайних положения, отмеченные на рис. 3.16 индексами 0 и 00. Левое крайнее положение коромысла BC , обозначенное B_0C получается, когда кривошип O_1A и шатун AB наложатся один на другой, и шатун пройдёт через точку O_1 . Точка A в этом положении обозначена A_0 .

Правое крайнее положение $B_{00}C$ коромысла получается, когда кривошип и шатун вытягиваются в одну прямую линию O_1B_{00} . Угол между двумя положениями шатуна O_1B_0 и O_1B_{00} обозначен θ . Этот угол определяется исходя из заданного коэффициента k следующим образом. Угол поворота кривошипа, стягивающий дугу A_0AA_{00} является углом рабочего хода механизма $\alpha_{\delta.\delta.}$, а угол,

дополнительный до 360° , является углом холостого хода $\alpha_{\delta.\delta.}$. На рис. 3.16,

$$\alpha_{p.x.} = 180^\circ + \theta, \text{ а } \alpha_{x.x.} = 180^\circ - \theta, \text{ поэтому } k = \frac{\alpha_{p.x.}}{\alpha_{x.x.}} = \frac{180^\circ + \theta}{180^\circ - \theta}, \text{ откуда } \theta = 180^\circ \cdot \frac{k-1}{k+1}.$$

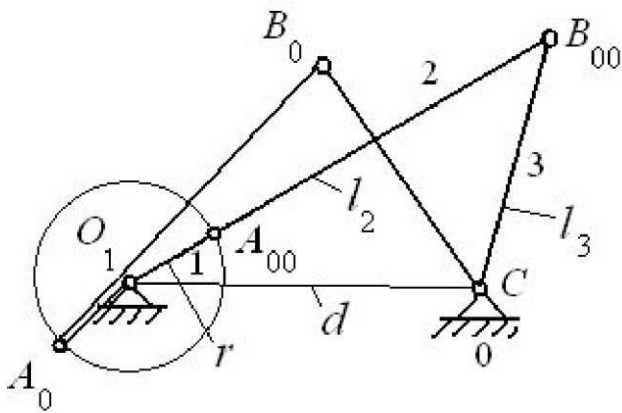


Рисунок 3.17

известно из элементарной геометрии, *вписанный угол вдвое меньше центрального угла, стягивающего ту же дугу окружности*, и при любом положении точки O_1 на окружности величина вписанного угла не меняется. После выбора положения точки O_1 можно составить два простых равенства $O_1B_0 = A_0B_0 - O_1A_0$ и $O_1B_{00} = A_{00}B_{00} + O_1A_{00}$, решая которые совместно, после отказа от использования нулевых индексов в обозначениях длин кривошипа и шатуна, получаем:

$$O_1A = \frac{O_1B_{00} - O_1B_0}{2} \text{ и } AB = \frac{O_1B_{00} + O_1B_0}{2}.$$

Замечание 1. Отрезки в правых частях последних равенств измеряются на чертеже, поэтому все построения должны быть выполнены в масштабе.

Замечание 2. Изменение положения точки O_1 на окружности радиуса R приведёт к изменению положения точек A_0 и A_{00} на их окружности и к изменению длин кривошипа и шатуна. Параметры, зависящие от исходных данных, т. е. угол θ и длина коромысла останутся неизменными.

Условия существования кривошипа в четырёхшарнирном механизме. В зависимости от соотношения размеров звеньев в четырёхшарнирном механизме может не быть ни одного кривошипа, может быть один или даже два кривошипа. Обозначим длины звеньев механизма (рис. 3.17) таким образом: r – длина кривошипа, l_2 – длина шатуна, l_3 – длина коромысла и d – длина стойки. Установим, при каком соотношении указанных длин в этом механизме звено 1 действительно будет кривошипом. Для этого изобразим механизм в двух крайних положениях, одно из которых получается, если шатун 2 и кривошип 1 накладываются друг на друга, образуя между собой угол, равный нулю градусов (на рисунке это положение отмечено нулевым индексом). Во втором крайнем положении кривошип 1 и шатун 2 вытягиваются в од-

Определив таким образом величину угла θ , построим два таких угла относительно перпендикуляров, проведённых к отрезку B_0B_{00} из его концов, как показано на рисунке. Перпендикуляры пересекутся между собой в точке N . Расстояние от точки N до точки B_0 (или B_{00}) принимается в качестве радиуса R окружности с центром в N . Проведя окружность этим радиусом, выбираем на ней положение точки O_1 , центра вращения кривошипа. Такое действие основано на том, что, как из-

ну прямую, образуя между собой угол 180° (это положение отмечено на рисунке двумя нулями). Принимая во внимание, что любая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон, запишем следующие неравенства из треугольника O_1B_0C :

$$l_3 < (l_2 - r) + d \text{ и } d < (l_2 - r) + l_3.$$

Из этих неравенств, после раскрытия в них скобок, следует

$$l_3 + r < l_2 + d \text{ и } d + r < l_2 + l_3. \quad (\text{а})$$

Сложив неравенства (а), имеем

$$l_3 + d + 2r < 2l_2 + l_3 + d,$$

откуда следует, что $r < l_2$.

Из крайнего положения механизма, отмеченного двумя нулями, можно записать

$$r + l_2 < l_3 + d. \quad (\text{б})$$

Сложив первое из неравенств (а) с неравенством (б), получаем

$$2r + l_2 + l_3 < l_3 + l_2 + 2d,$$

откуда видно, что $r < d$.

Наконец, сложив второе из неравенств (а) с неравенством (б), запишем

$$d + 2r + l_2 < l_2 + 2l_3 + d,$$

откуда ясно, что $r < l_3$.

Таким образом, полученные в результате выкладок неравенства

$$r < l_2, \quad r < l_3, \quad r < d$$

позволяют сделать важный вывод о том, что в четырёхшарнирном механизме, если в качестве ведущего принимается наименьшее звено, то оно является кривошипом.

При этом, если стойкой является звено, смежное с наименьшим, то есть l_2 или d , то механизм будет кривошипно-коромысловым.

Если стойкой сделать наименьшее звено, то оба смежных с ним звена l_2 и d окажутся кривошипами, то есть механизм получится двухкривошипным.

И, наконец, если в качестве стойки принять звено, противоположное наименьшему, то есть l_3 , то получится двухкоромысловый механизм, в котором вообще отсутствует кривошип.

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте задачи кинематического анализа механизмов с низшими парами.
2. Перечислите методы исследования кинематики механизмов.
3. Что должно быть задано для исследования кинематики механизма?
4. В чём заключается сущность аналитического метода исследования кинематики?
5. Что называется масштабом в ТММ?
6. Что такое разметка механизма?
7. Для чего строится разметка?
8. Как определяются скорость и ускорение конца кривошипа?
9. Запишите векторные уравнения для построения планов скоростей и ускорений и объясните их составляющие. Какое правило плоскопараллельного движения положено в основу этих уравнений?
10. В каком случае при определении ускорений возникает Кориолисово ускорение? Как оно определяется по величине и направлению?
11. Как определяются скорости и ускорения центра масс шатуна и любой другой точки, связанной с шатуном?
12. Как определить угловую скорость и ускорение стержневого звена?
13. Какое правило математики положено в основу графического дифференцирования функции, заданной в виде графика?
14. Приведите пример построения графика производной при заданном графике функции.
15. Как определяются масштабы по осям координат при построении графика производной?
16. Как формулируются задачи синтеза механизмов с низшими парами?
17. В чём заключается задача о положениях?
18. Как выполняется синтез четырёхшарнирного механизма по двум и трём положениям шатуна?
19. Что такое коэффициент увеличения скорости обратного хода ведомого звена механизма?
20. Как используется коэффициент увеличения скорости обратного хода для синтеза механизма?
21. Как формулируются условия существования кривошипа в четырёхшарнирном механизме?
22. Как меняются свойства четырёхшарнирного механизма при изменении звена, принимаемого в качестве стойки?

Раздел 2. КИНЕТОСТАТИКА МЕХАНИЗМОВ И ДИНАМИКА МАШИН

4. Кинетостатика механизмов

В этом разделе изучаются силы, действующие на звенья механизмов. При конструировании звеньев и элементов кинематических пар механизмов и машин приходится решать задачи обеспечения необходимой прочности, жёсткости и долговечности. Для этого необходимо знать силовую нагрузку на звенья и кинематические пары.

4.1. Характеристика сил, действующих в машинах

I. *Движущие силы $P_{д}$ или их моменты $M_{д}$.* Эти силы и моменты приложены к ведущим звеньям и приводят машины в действие. Их работа всегда имеет положительный знак, т. е. $A_{д} > 0$. Это связано с тем, что движущие силы образуют острый угол с направлением движения звена, к которому они приложены. При решении задач кинетостатики двигателей эти силы задаются в виде индикаторных или силовых диаграмм. В технологических машинах они подлежат определению. Необходимо иметь в виду, что в таких машинах, как двигатели внутреннего сгорания, такт сжатия требует затрат энергии, и в этом такте работа движущих сил не производится, а выполняемая работа является работой сил сопротивления. Однако работа движущих сил в такте расширения (*рабочего хода*) существенно больше работы сопротивления в такте сжатия. Поэтому в течение каждого цикла имеется превышение работы движущих сил над работой сил сопротивления, что позволяет двигателю быть двигателем.

II. *Силы полезного сопротивления $P_{п.с.}$, или их моменты $M_{п.с.}$* Эти силы и моменты приложены к ведомым звеньям, связанным с исполнительными органами машин, и поэтому являются силами и моментами *производственных, или технологических сопротивлений*. Их работа имеет отрицательный знак, т. е. $A_{п.с.} < 0$, так как моменты направлены против угловых скоростей звеньев, а силы образуют с направлением скоростей движения тупые углы. При решении задач кинетостатики технологических машин эти силы задаются в виде механических характеристик, или силовых диаграмм. В некоторых технологических машинах, таких как поршневые компрессоры, в такте расширения сила давления сжатого газа выполняет положительную работу, и по этой причине относится к движущей силе. Однако затем в такте сжатия выполняемая силами сопротивления работа существенно больше положительной работы в такте расширения, поэтому поршневой компрессор и относится к технологическим машинам.

III. *Силы вредного сопротивления.* К этим силам относятся *силы трения $F_{тр}$* (или *моменты сил трения $M_{тр}$*), которые возникают во всех кинематических парах в связи с наличием в них относительного движения звеньев. Они направлены всегда против движения звена в кинематической паре, поэтому совершают

отрицательную работу, т. е. $A_{\text{тр}} < 0$. В некоторых случаях силы трения выполняют положительную роль, например в тормозах или транспортных машинах в точках соприкосновения колёс с дорогой (автомобиль) или с рельсом (локомотив).

К силам вредного сопротивления относятся также силы сопротивления среды, в которой функционирует техническое устройство. Это – силы сопротивления движению в воздушной среде и силы сопротивления движению в воде и других средах. Однако изучение этих сил выходит за рамки данного курса и здесь они не рассматриваются.

IV. *Силы тяжести (или силы веса) G* . Эти силы действуют в зоне притяжения Земли согласно закону всемирного тяготения и определяются произведением $G = m \cdot g$, где m – масса звена, кг; g – ускорение свободного падения, равное $9,81 \frac{м}{с^2}$. Силы веса приложены в центре тяжести звена и направлены всегда к центру Земли, т. е. вертикально вниз. При движении звена вниз силы веса совершают положительную работу, при движении вверх – отрицательную работу. За цикл движения звена суммарная работа этих сил равна нулю.

V. *Силы инерции $P_{\dot{e}}$, или их моменты $M_{\dot{e}}$* . Эти силы возникают во всех случаях, когда имеет место неравномерное и/или непрямолинейное движение звена. Они направлены против соответствующих ускорений (линейного или углового). Работа сил инерции может быть как положительной, так и отрицательной, в зависимости от направления этих сил по отношению к скорости движения звена, однако сумма этих работ за цикл движения равна нулю.

VI. *Силы реакций связей в кинематических парах (или просто реакции в кинематических парах) R* . Реакция в кинематической паре возникает в результате того, что под действием сил, приложенных к одному из звеньев пары, это звено стремится совершить движение в направлении действия сил, однако другое звено препятствует этому. Согласно одному из основных постулатов механики, *любое действие вызывает равное и противоположно направленное противодействие*, поэтому со стороны другого звена появляется реакция, противоположная направлению равнодействующей сил, приложенных к первому звену.

В первом приближении, т. е. при неучёте сил трения в кинематической паре, *реакции направляются вдоль нормали в точке контакта элементов кинематической пары* (рис. 4.1). На указанном рисунке изображены элементы

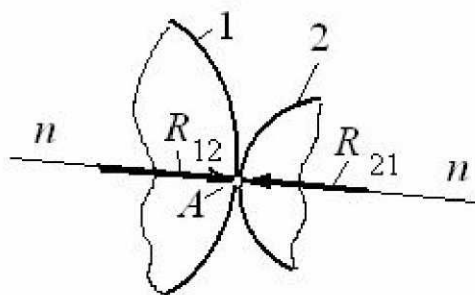


Рисунок 4.1

звеньев 1 и 2, образующих кинематическую пару с контактом в точке A . Через эту точку проведена нормаль $n - n$ к элементам кинематической пары, на которой располагаются реакции в точке A . Реакции обозначены, как отмечено выше, буквой R с подстрочными индексами, состоящими из двух чисел, указывающими, со стороны какого звена действует реакция (первый индекс) на какое звено (второй индекс) данной пары. В данном случае

R_{12} – это реакция первого звена на второе, R_{21} – это реакция второго звена на первое; естественно, что имеет место равенство $\overrightarrow{R_{21}} = -\overrightarrow{R_{12}}$.

Полезно помнить, что, несмотря на то, что эти реакции равны и противоположны, они не уравнивают друг друга, так как каждая из них приложена к своему звену. Реакции уравниваются в случае, если кинематическая пара рассматривается в сборе.

Работа реакций в кинематической паре равна нулю, т. е. $A_R = 0$, так как в направлении их действия отсутствует движение.

4.2. Задачи кинетостатики

Основными задачами раздела являются:

1) определение реакций в кинематических парах механизмов с целью их использования в дальнейшем для прочностных расчётов звеньев и элементов кинематических пар, расчёта сил трения, КПД и т. д.;

2) определение уравнивающей силы $P_{ур}$ или уравнивающего момента $M_{ур}$ на ведущем звене.

Для решения этих задач необходимо знать:

1) кинематическую схему механизма и кинематические размеры его звеньев;

2) массы и моменты инерции звеньев.

3) внешние силы, действующие в машинах (применительно к технологическим машинам должны быть известны силы полезного, то есть технологического сопротивления, применительно к машинам-двигателям необходимо знать движущие силы).

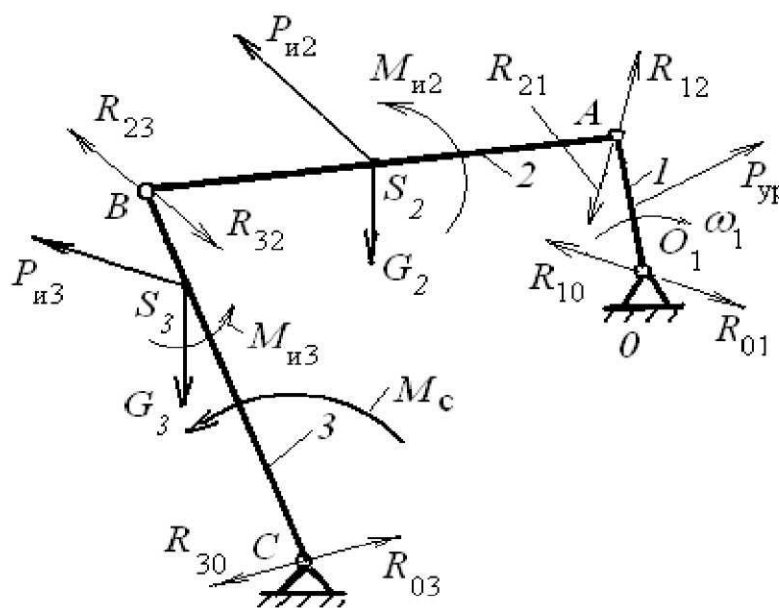


Рисунок 4.2

Для лучшего понимания задач кинетостатики и необходимых для этого исходных данных обратимся к примеру на рис. 4.2. Механизм, представленный на этом рисунке, является четырёхшарнирным кривошипно-коромысловым, к звену 3 которого присоединён исполнительный орган, например тигель плоскопечатной машины. На это звено против направления его движения действует момент сопротивления $M_{\text{н}}$, являющийся полезной нагрузкой. Движение механизма происходит в результате действия на ведущий кривошип l движущей силы, являющейся одновременно уравновешивающей силой $P_{\text{од}}$. Под её действием кривошип вращается по направлению движения часовой стрелки с угловой скоростью ω_1 . На звенья механизма действуют также силы веса звеньев, силы инерции и, конечно, реакции в кинематических парах.

По всем указанным на схеме силам и моментам после кинетостатического расчета (анализа) должна быть полная ясность как в отношении их величин, так и в отношении направлений. Решение задачи может быть представлено в виде следующих ступеней:

1. Исходные данные: схема механизма со всеми кинематическими размерами его звеньев, массовые характеристики звеньев (массы – m , кг; моменты инерции – J , кгм²): звена 1 – m_1 , J_{O_1} , звена 2 – m_2 , J_{S_2} , звена 3 – m_3 , J_{S_3} .

2. Предварительный расчёт: силы веса звеньев ($G = m \cdot g$, ускорение свободного падения $g = 9,81 \text{ мс}^{-2}$) – G_1 , G_2 , G_3 ; силы инерции и моменты сил инерции звеньев – $P_{\text{и1}}$, Н; $P_{\text{и2}}$, Н, $M_{\text{и2}}$, Нм; $P_{\text{и3}}$, Н, $M_{\text{и3}}$, Нм.

3. Основной расчёт: реакции в кинематических парах: $R_{01}(R_{10})$ – в кинематической паре O_1 , $R_{12}(R_{21})$ – в кинематической паре A , $R_{23}(R_{32})$ – в кинематической паре B , $R_{03}(R_{30})$ – в кинематической паре C . Уравновешивающая сила $P_{\text{ур}}$ на кривошипе, приводящая в действие механизм.

4.3. Расчёт сил инерции

Расчёт сил инерции относится к предварительному расчёту, предшествующему основной задаче определения реакций в кинематических парах.

Силы инерции возникают во всех случаях, когда звенья движутся непрямолинейно и/или неравномерно. Рассмотрим три вида движения звеньев.

Поступательное движение звена. Этот вид движения чаще всего относится к ползунам, движущимся относительно прямолинейных направляющих (рис. 4.3). Пусть при этом m – масса ползуна, a – его ускорение.

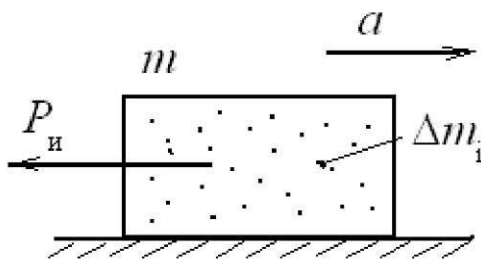


Рисунок 4.3

Сила инерции элементарной массы звена $\Delta\vec{P}_{иi} = -\Delta m_i \cdot \vec{a}$. Если просуммировать все элементарные силы инерции данного ползуна, то есть найти сумму $\sum \Delta\vec{P}_{иi} = -\sum \Delta m_i \cdot \vec{a}$, то получится главный вектор сил инерции звена, равный $\vec{P}_{и} = -m \cdot \vec{a}$. То есть главный вектор сил инерции, или *просто сила инерции звена в его поступательном движении*

равна массе звена, помноженной на его ускорение. Знак «-» в правой части формулы указывает на противоположность направления силы инерции по отношению к ускорению.

Вращательное движение звена. В этом движении находятся кривошипные, кулисы, коромысла и другие звенья механизмов. Возьмём стержневое звено OA (рис. 4.4), вращающееся вокруг неподвижной точки O . Масса звена равна m , момент инерции относительно центра масс S равен J_S . Вращение происходит с угловой скоростью ω и угловым ускорением ε . Расстояние между центром масс и центром вращения равно ρ_S .

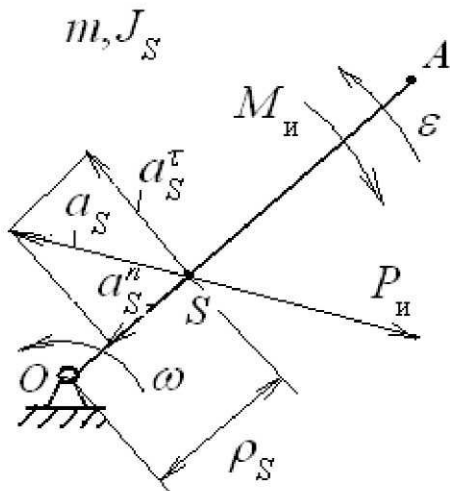


Рисунок 4.4

Вычислим ускорение, с которым движется центр масс S . Его нормальное ускорение равно $a_S^n = \rho_S \cdot \omega^2$, тангенциальное ускорение равно $a_S^\tau = \rho_S \cdot \varepsilon$. Так как эти составляющие полного ускорения перпендикулярны друг другу, то полное ускорение $a_S = \rho_S \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$. Результатом этого ускорения является сила инерции, приложенная в центре масс и направленная противоположно ускорению $\vec{P}_{и} = -m \cdot \vec{a}$.

Угловое ускорение звена вызывает появление инерционного момента (или момента сил инерции), направленного по отношению к нему в противоположную сторону $\vec{M}_{и} = -J_O \cdot \vec{\varepsilon}$.

В этой формуле момент инерции принимается относительно центра вращения и определяется как $J_O = J_S + m \cdot \rho_S^2$.

Частные случаи

1. $\rho_S = 0 \rightarrow P_{и} = 0, M_{и} \neq 0$.
2. $\varepsilon = 0 \rightarrow M_{и} = 0, P_{и} \neq 0$.
3. $\rho_S = 0, \varepsilon = 0 \rightarrow P_{и} = 0, M_{и} = 0$.

Плоско-параллельное движение звена. Такое движение совершают чаще всего шатуны механизмов. На рис. 4.5 изображён шатун, совершающий такое движение. Масса шатуна равна m , момент инерции относительно центра масс равен J_S .

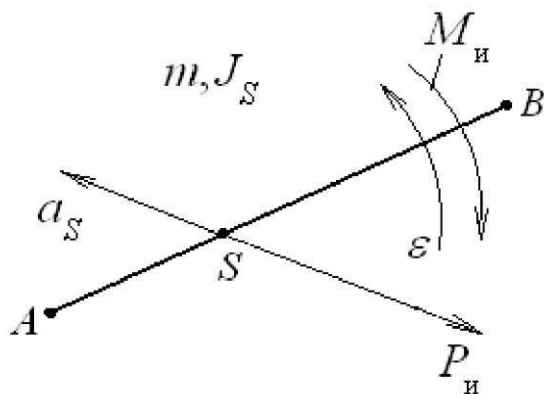


Рисунок 4.5

Звено движется, имея угловое ускорение ϵ и ускорение центра масс a_S . Аналогично вращательному движению в этом случае также будут действовать оба инерционных фактора: сила инерции $\vec{P}_u = -m \cdot \vec{a}_S$, противоположная ускорению центра масс, и момент сил инерции $\vec{M}_u = -J_S \cdot \vec{\epsilon}$, противоположный угловому ускорению.

Замечание. Как видим, для расчёта сил инерции необходимо знать ускорения, с которыми движутся звенья механизма. Поэтому кинетостатическому расчёту должен предшествовать кинематический анализ механизма.

4.4. Общие положения силового расчёта

Принцип Даламбера. Силовой расчёт механизмов выполняется на основе принципа Даламбера, позволяющего рассматривать подвижные системы, к которым относятся механизмы как неподвижные, так и находящиеся в равновесии. Принцип Даламбера можно сформулировать так: *если к системе сил, действующих на подвижную систему, добавить силы инерции, то такую систему можно рассматривать как находящуюся в равновесии, и к ней применимы законы статики.*

Принцип освобожденности. Если рассматривать механизм в целом, то имеющаяся в каждой кинематической паре, согласно принципу равенства действия и противодействия, пара сил (реакций), действующих по одной линии действия и равных по величине, уравнивается и на равновесие механизма в целом не влияет. Так что даже в простом механизме определить эти реакции невозможно – они не войдут в уравнения равновесия. Для определения реакций необходимо механизм расчленить на части, каждая из которых была бы статически определима и в которой неизвестные реакции входили бы в число внешних сил и в уравнения равновесия. *Принцип освобожденности заключается, таким образом, в выделении части механизма путём разрушения некоторых кинематических пар и заменой в них связей реакциями, подлежащими определению.*

Статическая определимость групп Ассура. В кинематических парах пятого класса, будь то поступательная или вращательная пара, реакция характеризуется тремя параметрами: величиной, направлением и положением точки приложения. Причём в поступательной паре

реакция направлена перпендикулярно направляющей, то есть известна по направлению (рис. 4.6, а). Два других параметра неизвестны – это величина реакции и точка приложения (расстояние x от точки приложения до, например, левого торца звена 2). Во вращательной паре реакция проходит через центр шарнира (рис. 4.6, б), то есть известна её точка приложения. Два других параметра – величина и направление также неизвестны. Таким образом, в любой кинематической паре пятого класса имеются два неизвестных параметра. Согласно положениям теоретической механики для твёрдого тела (в том числе и для звена механизма) можно в плоскости составить три уравнения равновесия. Для статической определимости системы звеньев необходимо равенство количества уравнений равновесия и количества неизвестных в них. Если в кинематической цепи имеется n звеньев, для каждого из которых можно составить три уравнения равновесия, то общее количество уравнений будет равно $3n$. Если в этой кинематической цепи количество кинематических пар равно p_5 , а в каждой паре имеется два подлежащих определению параметра, то их общее количество равно $2p_5$. Для статической определимости системы звеньев необходимо равенство количества уравнений равновесия и количества неизвестных в них, то есть

$$3n = 2p_5.$$

Это равенство совпадает с условием существования группы Ассур, следовательно, группа Ассур является статически определимой кинематической цепью, и силовой расчёт механизмов производится по группам Ассур.

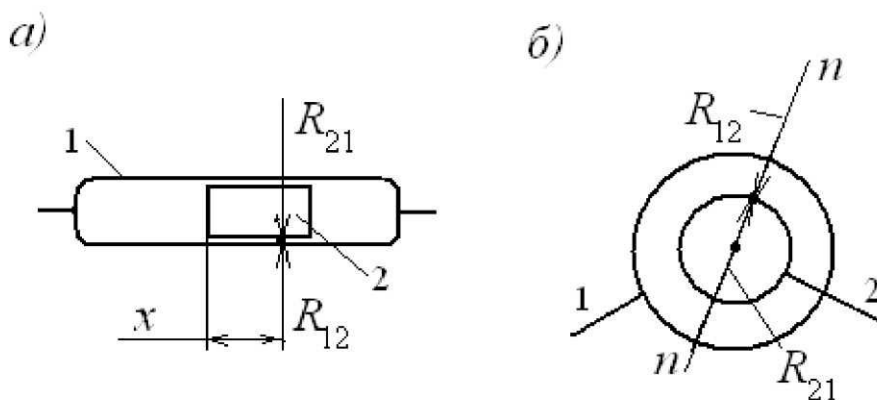


Рисунок 4.6

Последовательность силового расчёта механизма. Силовой расчёт начинается с последней группы Ассур, в состав которой входит исполнительный орган машины, на который, как известно, действуют силы полезных (производственных или технологических) сопротивлений. При расчёте технологических машин эти силы входят в число исходных данных. В последнюю очередь рассчитывается входное (ведущее) звено.

Методы силового расчёта. Здесь мы только перечислим эти методы. Итак, задачи силового расчёта решаются с применением следующих методов:

- метод планов сил;
- метод разложения сил;
- аналитический метод;
- метод «жёсткого рычага» Н. Е. Жуковского;
- экспериментальный метод.

4.5. Метод планов сил

Рассмотрим метод планов сил для групп Ассура 2-го класса. Схемы этих групп хорошо известны из разделов структуры и кинематического исследования механизмов. Начинаем изучение проблемы с простейшей группы 2-го класса – группы 5-го вида.

Группа Ассура 2-го класса 5-го вида. Согласно принципу освобождаемости, выделяем эту группу из механизма, освобождая от связей в кинематических парах и заменяя их реакциями. Схема группы представлена на рис. 4.7, а в масштабе μ_l , где отброшенные звенья изображены штриховыми линиями.

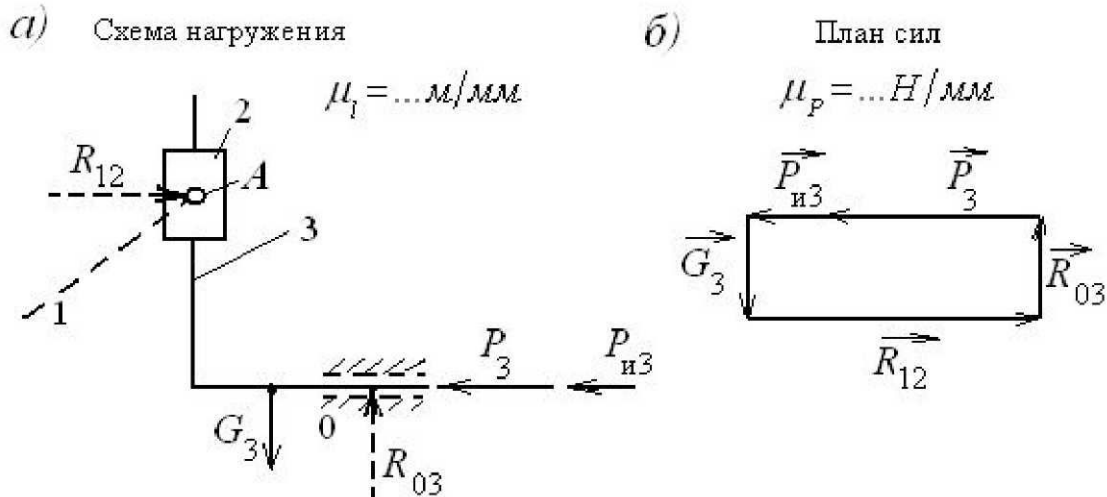


Рисунок 4.7

Сама же группа, как видим, состоит из двух ползунов 2 и 3, образующих поступательную кинематическую пару друг с другом. Ползун 2 при этом образует вращательную кинематическую пару A с отброшенным звеном 1, а звено 3 движется поступательно вдоль горизонтальных направляющих. В большинстве случаев и сила веса звена 2, и его сила инерции невелики из-за малости массы этого звена. Поэтому без ущерба для точности расчётов этими силами можно пренебречь. На ползун 3 действуют сила сопротивления \vec{P}_3 , сила веса \vec{G}_3 и сила инерции \vec{P}_{i3} .

Со стороны отброшенных звеньев действуют реакции R_{12} в паре A и R_{03} со стороны направляющих. Во внутренней поступательной паре группы дейст-

ует реакция $R_{23}(R_{32})$. Все три реакции подлежат определению. На схеме нагружения реакции показаны штриховыми линиями, так как точные направления их действия неизвестны.

Для решения задачи определения реакций запишем уравнение равновесия всей группы Ассур в векторной форме

$$\underline{\underline{\vec{P}_3}} + \underline{\underline{\vec{P}_{и3}}} + \underline{\underline{\vec{G}_3}} + \underline{\underline{\vec{R}_{12}}} + \underline{\underline{\vec{R}_{03}}} = 0,$$

в котором, согласно принципу Даламбера, учтём силу инерции звена 3. В этом уравнении первые три вектора подчёркнуты двумя чертами, как известные по величине и направлению. Другие два подчёркнуты одной чертой, так как вектор \vec{R}_{12} направлен по горизонтали в силу того, что, как было сказано выше, влиянием сил веса и сил инерции ползуна 2 мы пренебрегли из-за их малости, а вектор \vec{R}_{03} направлен перпендикулярно направляющим ползуна 3.

Выбрав масштаб плана сил μ_P и поделив на него известные значения сил, строим векторный многоугольник в порядке их записи в уравнении (рис. 4.7, б). В этом многоугольнике все векторы по обходу контура направлены в одну сторону, т. е. нет ни одного вектора, направленного навстречу остальным. Это соответствует условию равновесия системы сил, действующих на группу Ассур.

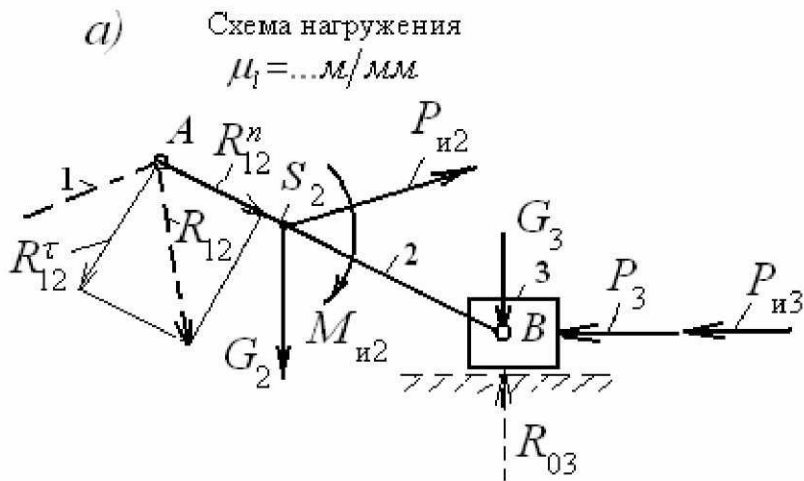
Что касается реакции $R_{23}(R_{32})$, то из-за невесомого ползуна 2 она будет равна реакции во вращательной паре A , т. е. имеют место равенства: $\overline{R_{23}} = \overline{R_{12}}$ и $\overline{R_{32}} = \overline{R_{21}}$. В заключение вычисляются физические величины сил реакций с использованием масштаба плана $R_{12} = \overline{R_{12}} \cdot \mu_P, H$ и $R_{03} = \overline{R_{03}} \cdot \mu_P, H$.

Группа Ассур 2-го класса 2-го вида. Рассмотрим группу Ассур второго класса второго вида, состоящую из шатуна 2 и ползуна 3 (рис. 4.8, а) и входящую в состав, например кривошипно-ползунного механизма, одного из самых простых и широко применяемых четырёхзвенных механизмов.

Группа изображается в масштабе $\mu_l = \dots м/мм$. На ползун 3 действует внешняя сила P_3 и сила инерции ползуна $P_{\dot{e}3}$, на шатун действуют сила инерции $P_{\dot{e}2}$, приложенная в центре масс S_2 , и момент сил инерции $M_{\dot{e}2}$. Крайними кинематическими парами группы Ассур являются вращательная пара в точке A и поступательная пара ползуна 3 со стойкой. Отбрасывая кривошип 1 и стойку 0, освобождаем группу Ассур от связей и вместо них прикладываем неизвестные реакции R_{12} в точке A и R_{03} в поступательной паре, проведя её линию действия через точку B перпендикулярно направляющей. Отброшенные звенья показаны на схеме штриховыми линиями.

Записываем уравнение равновесия всей группы в целом в векторной форме

$$\underline{\underline{\vec{P}_3}} + \underline{\underline{\vec{P}_{и3}}} + \underline{\underline{\vec{G}_3}} + \underline{\underline{\vec{P}_{и2}}} + \underline{\underline{\vec{G}_2}} + \underline{\underline{\vec{R}_{12}}} + \underline{\underline{\vec{R}_{03}}} = 0.$$



б) План сил $\mu_p = \dots \text{Н/мм}$

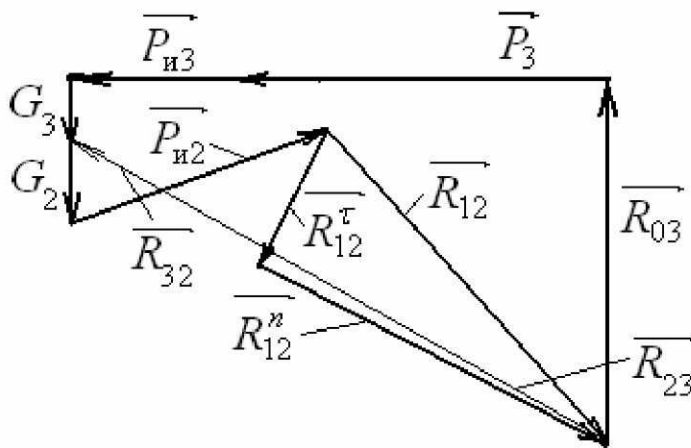


Рисунок 4.8

пендикулярно шатуну 2 и назовём тангенциальной составляющей. Вторую, $\overrightarrow{R_{12}^n}$, направим вдоль шатуна и назовём нормальной составляющей. Данная операция соответствует равенству $\overrightarrow{R_{12}} = \overrightarrow{R_{12}^tau} + \overrightarrow{R_{12}^n}$. Составляющая $\overrightarrow{R_{12}^tau}$ определяется из уравнения равновесия шатуна 2 в форме моментов сил относительно точки B: $R_{12}^tau \cdot l_2 + M_{и2} - P_2 h_2 = 0$, из которого имеем $R_{12}^tau = \frac{P_2 \cdot h_2 - M_{и2}}{l_2}$. Размеры плеч в этих выражениях измеряются в миллиметрах (мм) на схеме механизма и с помощью масштаба переводятся в натуральную величину. Причём, плечо h_2 есть кратчайшее расстояние линии действия силы $P_{и2}$ от точки B.

Если результат расчёта по приведённому выражению оказывается отрицательным, то в дальнейшем направление R_{12}^tau следует принять обратным по отношению к принятому на схеме. Составляющая R_{12}^n и реакция R_{03} определяются путём построения векторного многоугольника сил (рис. 4.8, б). Для опре-

В правой части этого уравнения стоит нуль, указывающий на равновесие. В этом уравнении первые пять векторов, подчёркнутых двумя чертами, известны по величине и направлению. Шестой вектор неизвестен полностью, поэтому не подчёркнут совсем. Последний вектор, представляющий реакцию в поступательной паре, направлен перпендикулярно направляющей и подчёркнут одной чертой. Уравнение в таком виде не может быть решено, так как в нём три неизвестных параметра, а необходимо только два. Для сокращения количества неизвестных разложим вектор $\overrightarrow{R_{12}}$ на составляющие, одну из которых, $\overrightarrow{R_{12}^tau}$, направим перпендикулярно шатуну 2 и назовём тангенциальной составляющей. Вторую, $\overrightarrow{R_{12}^n}$, направим вдоль шатуна и назовём нормальной составляющей. Данная операция соответствует равенству $\overrightarrow{R_{12}} = \overrightarrow{R_{12}^tau} + \overrightarrow{R_{12}^n}$. Составляющая $\overrightarrow{R_{12}^tau}$ определяется из уравнения равновесия шатуна 2 в форме моментов сил относительно точки B: $R_{12}^tau \cdot l_2 + M_{и2} - P_2 h_2 = 0$, из которого имеем $R_{12}^tau = \frac{P_2 \cdot h_2 - M_{и2}}{l_2}$. Размеры плеч в этих выражениях измеряются в миллиметрах (мм) на схеме механизма и с помощью масштаба переводятся в натуральную величину. Причём, плечо h_2 есть кратчайшее расстояние линии действия силы $P_{и2}$ от точки B.

деления реакции во вращательной паре B между шатуном и ползуном необходимо построить на основе уравнения равновесия план сил шатуна 2 отдельно от ползуна 3 (или ползуна 3 отдельно от шатуна 2). Например, уравнение равновесия шатуна 2 запишется так:

$$\underline{\underline{\vec{P}_{и2}}} + \underline{\underline{\vec{G}_2}} + \underline{\underline{\vec{R}_{12}}} + \underline{\underline{\vec{R}_{32}}} = 0.$$

В этом уравнении первые три вектора известны полностью, третий вектор определится построением плана сил.

Можно обойтись и без построения отдельного плана, если на предыдущем плане сил сначала построить векторы сил, действующих на звено 3, а затем на звено 2. Тогда необходимые векторы сгруппируются, как часть плана сил группы Ассура, и остаётся только соединить конец вектора \vec{R}_{12} с началом вектора \vec{G}_2 отрезком прямой, который и представит искомый вектор \vec{R}_{32} . Этот вектор направлен к началу \vec{G}_2 , но если этот же отрезок направить в обратную сторону, то получится вектор \vec{R}_{23} , который можно было бы получить построением плана сил звена 3 отдельно от звена 2.

Измерив векторы на плане сил и умножив их на масштаб плана, получим физические величины искомых реакций.

Группа Ассура 2-го класса 1-го вида. Эта группа представлена на рис. 4.9. Она состоит из двух стержневых звеньев 1 и 2 и трёх кинематических вращательных пар. С целью упрощения нагрузим звенья группы произвольной системой сил, не вдаваясь в их природу. Особенностью расчёта данной группы Ассура является то, что, в отличие от предыдущей группы, здесь приходится раскладывать на составляющие две реакции, в точках A и C .

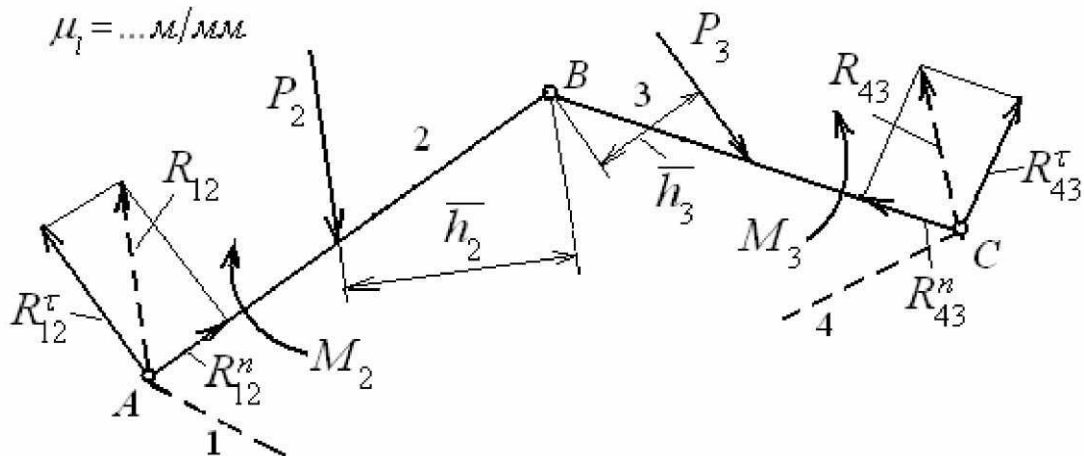


Рисунок 4.9

Сразу же разложим неизвестные реакции в крайних шарнирах на тангенциальные и нормальные составляющие согласно равенствам – в шарнире A : $\vec{R}_{12} = \vec{R}_{12}^{\tau} + \vec{R}_{12}^n$, в шарнире C : $\vec{R}_{43} = \vec{R}_{43}^{\tau} + \vec{R}_{43}^n$. При этом направляем тангенци-

альные составляющие перпендикулярно соответствующим звеньям, нормальные – вдоль звеньев. Для определения R_{12}^τ составляем уравнение равновесия звена 2 в форме моментов относительно точки B :

$P_2 \cdot h_2 - M_2 - R_{12}^\tau \cdot AB = 0$, из которого следует $R_{12}^\tau = \frac{P_2 \cdot h_2 - M_2}{AB}$. Для опреде-

ления R_{43}^τ составляем уравнение равновесия в форме моментов сил звена 3 от-

носительно точки B : $M_3 - P_3 \cdot h_3 + R_{43}^\tau \cdot BC = 0$. Из этого уравнения следует,

что $R_{43}^\tau = \frac{P_3 \cdot h_3 - M_3}{BC}$. Необходимо иметь в виду, что, если результаты расчётов

тангенциальных составляющих окажутся с отрицательным знаком, то в дальнейших расчётах их направления должны быть приняты обратными указанным на схеме.

Для определения нормальных составляющих и полных реакций составляется уравнение равновесия сил, действующих на оба звена группы, в векторной форме

$$\underline{\underline{\vec{P}_2}} + \underline{\underline{\vec{R}_{12}^\tau}} + \underline{\underline{\vec{R}_{12}^n}} + \underline{\underline{\vec{P}_3}} + \underline{\underline{\vec{R}_{43}^\tau}} + \underline{\underline{\vec{R}_{43}^n}} = 0,$$

в котором сначала записаны векторы сил, действующих на звено 2, затем векторы сил, действующих на звено 3. Известные по величине и направлению векторы подчёркнуты двумя чертами, известные только по направлению – одной чертой. Они и подлежат определению с помощью плана сил. Его построение производится без затруднений на основе и с использованием предшествующего материала, поэтому здесь не рассматривается.

Чтобы определить реакцию во внутренней кинематической паре B группы, необходимо так же, как и в предыдущей группе, построить план сил звена 2 отдельно от звена 3 по уравнению $\underline{\underline{\vec{P}_2}} + \underline{\underline{\vec{R}_{12}^\tau}} + \underline{\underline{\vec{R}_{32}}} = 0$, или план сил звена 3 отдельно от звена 2 по уравнению $\underline{\underline{\vec{P}_3}} + \underline{\underline{\vec{R}_{43}^\tau}} + \underline{\underline{\vec{R}_{23}}} = 0$. Так как имеет место равенство $\underline{\underline{\vec{R}_{32}}} = -\underline{\underline{\vec{R}_{23}}}$, то из этих двух вариантов достаточно выбрать один.

Если на плане сил группы Ассурa векторы сил, действующих на звено 2, сосредоточены в одной зоне и не перемешиваются с векторами сил, действующими на звено 3, то нетрудно найти положение отрезка, соответствующего искомой реакции $\underline{\underline{\vec{R}_{32}}}$. Тогда дополнительный план сил для её нахождения строить не нужно.

Группа Ассурa 2-го класса 3-го вида. Схема группы этого вида с действующими на её звенья силами представлена в масштабе μ_l на рис. 4.10. На звено 3 группы действуют момент M против часовой стрелки и сила P , как показано на рисунке. В большинстве практических случаев звено 2

(кулисный камень) выполнено таким образом, что его размеры и масса невелики и ими можно пренебречь. Тогда реакция R_{12} во вращательной паре A будет направлена так, как направлена реакция в поступательной паре между звеньями 2 и 3, то есть перпендикулярно направляющей (звену 3). Так что имеет место равенство $\overrightarrow{R_{12}} = \overrightarrow{R_{23}}$ ($R_{21} = R_{32}$). В связи с этим заключаем, что R_{12} известна по направлению. Что касается реакции R_{43} в паре B , то она неизвестна ни по величине, ни по направлению.

Для построения плана сил записываем уравнение равновесия всей группы в целом в векторной форме $\overrightarrow{P_2} + \overrightarrow{R_{12}} + \overrightarrow{R_{43}} = 0$, подчеркнув в нём двумя чертами первый вектор, как известный по величине и направлению, и одной чертой второй вектор, как известный только по направлению линии действия. В этих условиях план сил не строится, так как в уравнении имеется три неизвестных вместо двух. Однако в связи с тем, что R_{12} имеет известное направление линии действия и точку приложения (точка A), она может быть определена из уравнения равновесия всей группы в форме моментов сил относительно точки B : $M - P_2 \cdot h - R_{12} \cdot AB = 0$. Решая это уравнение относительно R_{12} , имеем

$R_{12} = \frac{M - P_2 \cdot h}{AB}$. Если результат расчёта получится отрицательным, то это значит, что на самом деле реакция R_{12} направлена не так, как указано на схеме (рис. 4.10), а в противоположную сторону.

Теперь уравнение для построения плана сил приобретает вид $\overrightarrow{P_2} + \overrightarrow{R_{12}} + \overrightarrow{R_{43}} = 0$ (в нём появилась вторая черта под вектором $\overrightarrow{R_{12}}$) и может быть решено графическим путём. Это решение не представляет трудностей, поэтому здесь его опустим. В заключение необходимо измерить искомые векторы сил и умножить их на масштаб плана.

Группа Ассура 2-го класса 4-го вида. Данная группа состоит из двух ползунов, связанных между собой вращательной кинематической парой. Она представлена на рис. 4.11 в масштабе μ_l . На ползун 3 действует сила P в указанном направлении, вызывающая появление реакции на ползун со стороны направляющих R_{03} , которая перпендикулярна им, и реакции R_{12} со стороны отброшенного звена 1, перпендикулярной линии этого звена. Здесь так

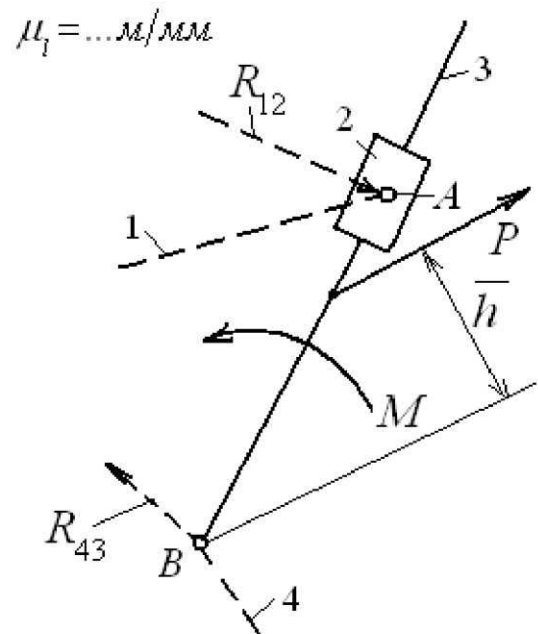


Рисунок 4.10

же, как и ранее, имеется в виду, что ползун 2 невесом, и на него не действуют никакие внешние силы. Векторное уравнение для построения плана сил с целью определения неизвестных реакций запишется так: $\underline{\underline{\vec{P}}} + \underline{\underline{\vec{R}_{12}}} + \underline{\underline{\vec{R}_{03}}} = 0$. В нём двумя чертами подчеркнута заданная, известная по величине и направлению сила, и одной чертой подчеркнуты силы, известные только по направлению. План сил (в данном случае треугольник) легко строится, и в нём также легко находятся искомые величины векторов в виде сторон треугольника. После их умножения на масштаб плана определяются физические величины реакций R_{12} и R_{03} .

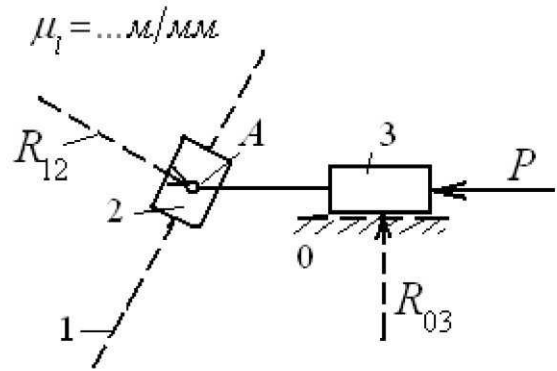


Рисунок 4.11

Силовой расчёт кривошипа. Как и в случае группы Ассура, необходимо прежде составить расчётную схему, приложив известные силы (рис. 4.12, а). В точке А прикладывается реакция R_{21} со стороны отброшенного шатуна 2, которая равна и противоположна найденной ранее реакции R_{12} . В центре масс кривошипа прикладывается сила инерции $P_{и1} = m_2 \cdot \rho_{S1} \cdot \omega_1^2$. Она направлена к точке А (это соответствует постоянству угловой скорости ω_1 кривошипа). В точке О кривошипа действует реакция R_{01} со стороны стойки, которую необходимо определить. Кроме того, к кривошипу необходимо приложить так называемый *уравновешивающий момент* $M_{\delta\delta}$, действующий на него со стороны машины-двигателя, приводящей в движение данную машину.

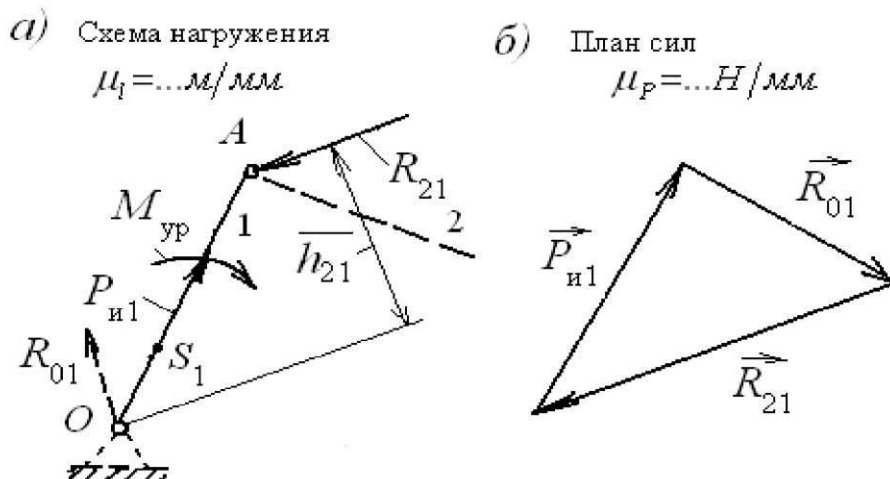


Рисунок 4.12

Вместо уравновешивающего момента можно приложить *уравновешивающую силу* $P_{\delta\delta}$, задав точку её приложения, а направление выбрав произволь-

ным. Выбор между уравновешивающим моментом и силой зависит от способа передачи движения от двигателя к технологической машине. Если этот способ в задаче не оговорен, то расчётчик (студент) делает выбор по своему усмотрению. Остановимся здесь на выборе уравновешивающего момента. Определим величину этого момента, составив уравнение равновесия кривошипа в форме моментов сил относительно точки O : $-M_{ур} + R_{21} \cdot h_{21} = 0$, из которого ясно, что $M_{ур} = R_{21} \cdot h_{21}$. Для нахождения реакции $\overrightarrow{R_{01}}$ строится план сил согласно векторному уравнению $\overrightarrow{P_{и1}} + \overrightarrow{R_{21}} + \overrightarrow{R_{01}} = 0$ (рис. 4.12, б). В этом уравнении первые два вектора подчёркнуты дважды, т. к. они известны и по величине, и по направлению. Третий вектор неизвестен, поэтому не подчёркнут. Треугольник сил, в данном случае, нетрудно построить.

Если приложить к кривошипу вместо уравновешивающего момента уравновешивающую силу, то она войдёт в векторное уравнение равновесия и повлияет на реакцию R_{01} . Но в этом случае должно быть реализовано равенство $P_{ур} \cdot h_{ур} = M_{ур}$, в котором плечо $h_{о\delta}$ уравновешивающей силы и её направление должны быть выбраны произвольно.

4.6. Метод разложения сил

Метод основан на двух известных из механики положениях, утверждающих, что, во-первых, *если твёрдое тело (звено механизма) находится в равновесии под действием трёх сил, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке*. Во-вторых, *любая сила может быть разложена по правилу параллелограмма по любым двум направлениям*. Кроме того, здесь учитывается принцип независимости действия сил. Задача, таким образом, заключается в нахождении точки пересечения трёх сил, действующих на какое-либо звено механизма, одна из которых является заданной внешней силой, а две другие – реакциями в кинематических парах этого звена. Направление одной из этих реакций выбирается вдоль стержневого звена рассматриваемой группы Ассур, смежного с тем, на которое действует данная сила P (рис. 4.13). Другая реакция направляется вдоль линии, соединяющей точку пересечения трёх сил с концевой парой звена, нагруженного данной силой. На указанном рисунке представлена

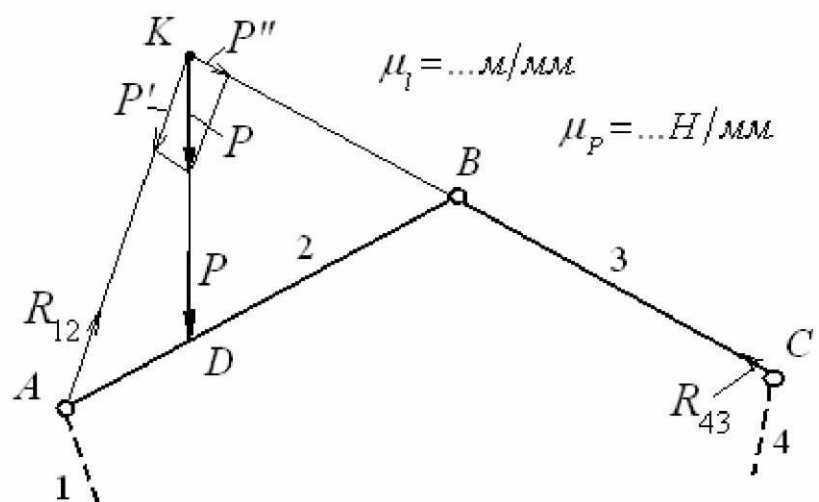


Рисунок 4.13

группа Ассур в масштабе μ_l , в состав которой входят кинематические пары A с отброшенным звеном 1, внутренняя кинематическая пара B и кинематическая пара C также с отброшенным звеном 4. Звенья группы обозначены номерами 2 и 3. На звено 2, в его точке D действует сила P , от которой требуется найти реакции в кинематических парах.

Для нахождения точки K , в которой пересекаются линии действия трёх внешних сил, находящихся в равновесии, продлим линию действия силы P , затем линию звена 3 до их пересечения друг с другом в точке K . Полученную точку соединим с точкой A . Так определены линии действия реакций в парах A и C . Далее строим параллелограмм в масштабе μ_p , имея в виду, что его диагональю является заданная сила P . Это действие выполняется в соответствии с равенством $\overline{P} = \overline{P'} + \overline{P''}$. Составляющая P' вдоль линии её действия передаётся в точку A , где встречает реакцию R_{12} со стороны звена 1. Согласно принципу равенства действия и противодействия имеет место равенство $\overline{R_{12}} = -\overline{P'}$. Составляющая P'' передаётся также вдоль линии действия в точку B и далее вдоль звена 3 в точку C , создавая реакцию R_{43} со стороны отброшенного звена 4. Здесь имеет место равенство $\overline{R_{43}} = -\overline{P''}$.

Что касается реакции в паре B , то она определяется равенством $\overline{R_{23}} = \overline{P''}$, и, естественно, $\overline{R_{32}} = -\overline{R_{23}}$.

С помощью метода разложения сил в каждой кинематической паре получается отдельная составляющая реакции от каждой из заданных внешних сил. На последнем этапе расчёта необходимо найти равнодействующую этих составляющих. Поэтому данный метод целесообразно применять при малом количестве внешних сил, иначе он потребует большого числа разложений и последующего расчёта суммарных реакций в каждой паре, что будет весьма громоздко.

4.7. Аналитический метод

Аналитический метод определения реакций основан на рассмотренных выше методе планов сил и методе разложения сил. Метод планов сил, как известно, относится к графоаналитическим методам. При реализации этого метода аналитически определяются тангенциальные составляющие реакций во вращательных парах групп Ассур. Однако можно продолжить аналитические расчёты, вычисляя и нормальные составляющие, не прибегая к построению плана сил. Для этого можно составить уравнение равновесия всей группы Ассур в целом в форме моментов всех сил относительно точки C (см. рис. 4.9), т. е. $\Sigma M_C(P) = 0$, в которое войдёт момент от составляющей R_{12}'' . Получается уравнение с одним неизвестным R_{12}'' , которое легко находится решением этого

уравнения. Аналогичным образом определяется и нормальная составляющая R_{43}^n . Для этого составляется уравнение равновесия в форме моментов, но уже относительно точки A вида $\Sigma M_A(P) = 0$. Из этого уравнения определяется R_{43}^n . Остаётся теперь, воспользовавшись теоремой Пифагора, вычислить полные реакции: $R_{12} = \sqrt{(R_{12}^t)^2 + (R_{12}^n)^2}$ и $R_{43} = \sqrt{(R_{43}^t)^2 + (R_{43}^n)^2}$.

Через соответствующие уравнения равновесия в форме моментов можно определить и составляющие реакции в паре B .

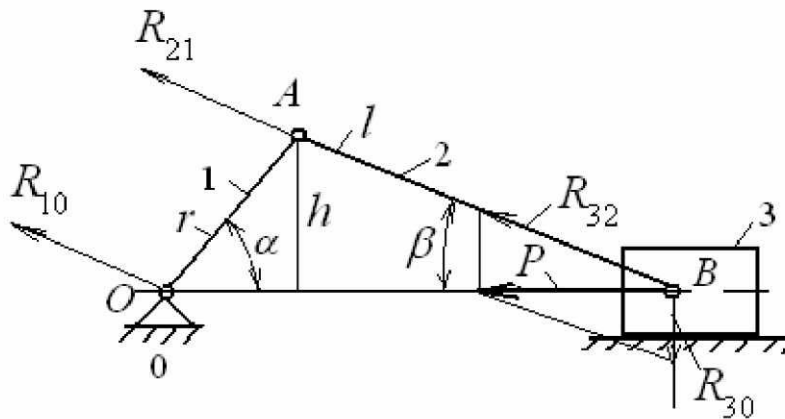


Рисунок 4.14

Применение аналитического метода к методу разложения сил можно посмотреть на примере кривошипно-ползунного механизма (рис. 4.14). Положение механизма определяется углом α поворота кривошипа 1, имеющего радиус r . Шатун 2 длиной l передаёт движение от кривошипа на ползун 3. В точке B ползуна приложена

внешняя сила P . Указанная точка является точкой пересечения трёх сил, действующих на ползун: силы P , реакции ползуна на шатун R_{32} и ползуна на стойку 0 R_{30} . Первая из указанных реакций направлена вдоль шатуна, вторая - перпендикулярно направляющим ползуна. Так что направления всех сил известны. Разложив силу P на составляющие, получаем R_{32} и R_{30} . Реакция R_{32} передаётся через шатун в точку A в виде реакции шатуна на кривошип R_{21} . Она же передаётся далее в точку O в виде реакции R_{10} . Таким образом, имеем равенство $\vec{R}_{32} = \vec{R}_{21} = \vec{R}_{10}$.

Установим аналитическую зависимость реакций от угла α . Из прямоугольного треугольника сил имеем $R_{32} = \frac{P}{\cos \beta}$ и $R_{30} = P \cdot \operatorname{tg} \beta$. Для определения угла β выразим отрезок h двояким образом: $h = r \cdot \sin \alpha = l \cdot \sin \beta$, откуда получаем $\sin \beta = \frac{r}{l} \cdot \sin \alpha$. Ранее в разделе кинематики механизмов было введено обозначение $\lambda = \frac{r}{l}$. Используя это обозначение, получаем $\sin \beta = \lambda \cdot \sin \alpha$. Имея необходимые исходные данные, можно получить результаты анализа в виде графиков или таблиц числовых значений реакций в зависимости от поло-

жения механизма, определяемого углом α . Здесь полезно использовать программный пакет MathCAD.

4.8. Определение уравновешивающей силы

Определение уравновешивающей силы на основе принципа возможных перемещений. Принцип возможных перемещений утверждает: *если система сил находится в равновесии, то сумма элементарных работ этих сил на возможных перемещениях их точек приложения равна нулю.* Можно поделить все элементарные работы на бесконечно малый отрезок времени, за который они совершаются, тогда их можно заменить мгновенными мощностями и сформулировать принцип так: *если система сил находится в равновесии, то сумма мгновенных мощностей этих сил равна нулю, то есть*

$$\Sigma N(P_i) + \Sigma N(M_j) + N(P_{\text{уп}}) = 0.$$

Под знаком суммы в первом слагаемом представлены мгновенные мощности внешних сил, второе слагаемое – мгновенные мощности внешних моментов, третье слагаемое – момент уравновешивающей силы (она тоже относится к числу внешних сил).

Мгновенная мощность силы определяется формулой $N(P_i) = P_i \cdot V_i \cos \delta_i$, где P_i – величина i -й силы, H ; V_i – скорость точки приложения силы, $i\dot{n}^{-1}$; δ_i – угол между направлениями силы и скорости.

Мгновенная мощность момента определяется формулой $N(M_j) = M_j \cdot \omega_j$, в которой M_j – момент, действующий на j -е звено механизма, \dot{H} ; ω_j – угловая скорость j -го звена.

Мгновенная мощность уравновешивающей силы определяется формулой $N(P_{\text{уп}}) = P_{\text{уп}} \cdot V_{\text{уп}} \cdot \cos \delta_{\text{уп}}$, в которой $P_{\text{уп}}$ – величина уравновешивающей силы, H ; $V_{\text{уп}}$ – скорость точки приложения уравновешивающей силы, $i\dot{n}^{-1}$; $\delta_{\text{уп}}$ – угол между направлением уравновешивающей силы и скоростью её точки приложения.

Подставляя формулы для расчёта мощностей в первое уравнение, получаем окончательно

$$\Sigma P_i \cdot V_i \cdot \cos \delta_i + \Sigma M_j \omega_j + P_{\text{уп}} \cdot V_{\text{уп}} \cdot \cos \delta_{\text{уп}} = 0..$$

При заданных внешних силах и моментах с помощью этого уравнения трудно определить уравновешивающую силу $P_{\text{уп}}$, выбрав произвольно, или учитывая заданные точку приложения силы и её скорость. Если на кривошип

действует не уравнивающая сила, а уравнивающий момент, то вместо третьего слагаемого в уравнении будет $M_{yp} \cdot \omega_1$. Так как угловая скорость ω_1 известна, то уравнение легко решается относительно $M_{\delta\delta}$.

Определение уравнивающей силы с помощью «жёсткого рычага» Н. Е. Жуковского. Пусть имеется некоторая точка i какого-либо звена механизма, движущаяся со скоростью V_i , как по-

казано на рис. 4.15. В этой точке приложена внешняя сила P_i , образующая угол δ_i с направлением скорости.

Мгновенная мощность силы P_i определяется формулой $N_i = P_i \cdot V_i \cdot \cos \delta_i$.

Повернём вектор скорости \vec{V}_i , изображённый на рисунке в масштабе $\mu_V = \dots \text{мс}^{-1}/\text{мм}$, на 90° в любую сторону и переместим вдоль линии его действия так, чтобы он своим концом упирался в точку i . Опустим перпендикуляр из начала Π повернутого вектора скорости на линию действия силы. Длина этого перпендикуляра

$\bar{h}_i = \bar{V}_i \cdot \cos \delta_i$, т. е. $\bar{h}_i = \frac{V_i}{\mu_V} \cdot \cos \delta_i$. Если помножить силу P_i на плечо \bar{h}_i , то получится момент силы P_i относительно точки Π , то есть $P_i \cdot \bar{h}_i = M_i$. Таким обра-

зом, приходим к равенству $P_i \cdot \frac{V_i}{\mu_V} \cdot \cos \delta_i = P_i \cdot \bar{h}_i$, или $\frac{N_i}{\mu_V} = M_i$, и, наконец,

$N_i = M_i \cdot \mu_V$, то есть *мгновенная мощность силы может быть представлена как её момент относительно начала повернутого на 90° вектора скорости точки приложения силы*. Причём, величина момента в μ_V раз меньше величины мощности данной силы. Такую операцию можно выполнить для любой внешней силы, действующей на механизм. В итоге получится план скоростей механизма, повернутый в любую сторону на 90° .

Из этих рассуждений вытекает следующее важное положение: *если механизм находится в равновесии, то его повернутый на 90° в любую сторону план скоростей с приложенными к нему в соответствующих точках внешними силами, как условный жёсткий рычаг, также находится в равновесии*. То есть

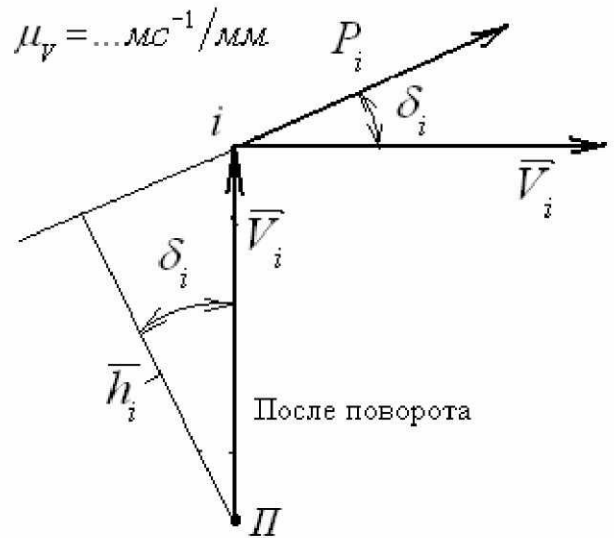


Рисунок 4.15

условие равновесия плана скоростей как условного жёсткого рычага запишется так: $\Sigma M_{\Pi}(P_i) + M_{\Pi}(P_{ур}) = 0$.

В свою очередь, жёстким рычагом Н. Е. Жуковского называется повернутый на 90° план скоростей механизма с приложенными к нему внешними силами.

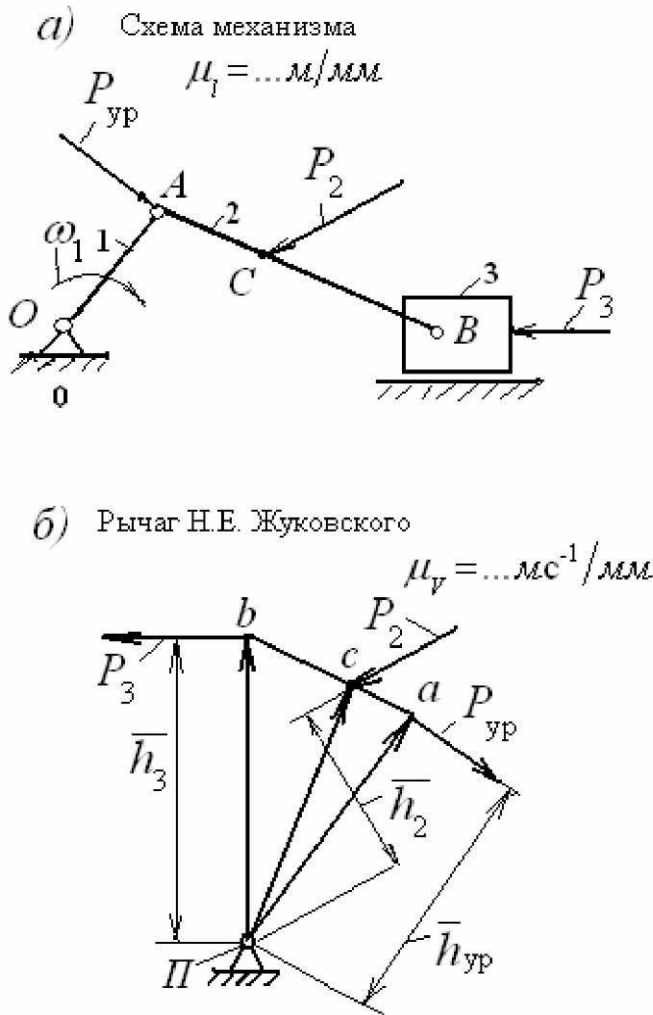


Рисунок 4.16

Для решения задачи возьмём кривошипно-ползунный механизм в произвольном положении и приложим к нему две силы, как показано на рис. 4.16 а. К концу вектора скорости точки А кривошипа приложим уравнивающую силу перпендикулярно кривошипу. Построим повернутый на 90° план скоростей и в концы векторов скоростей точек приложения сил перенесём данные силы, сохраняя их направления (рис. 4.16, б). Записав уравнение равновесия плана скоростей, как жёсткого рычага, в форме моментов относительно полюса плана Π , имеем

$$P_3 \cdot \bar{h}_3 + P_2 \cdot \bar{h}_2 - P_{ур} \cdot \bar{h}_{ур} = 0,$$

откуда $P_{ур} = P_2 \cdot \frac{\bar{h}_2}{\bar{h}_{ур}} + P_3 \cdot \frac{\bar{h}_3}{\bar{h}_{ур}}$. Чёр-

точки над обозначениями плеч указывают на то, что они берутся в виде отрезков с плана сил. Их перевод в натуральные величины не требуется, так как отношение плеч от

масштаба не зависит.

Замечание. Если среди внешних сил имеются моменты, то их целесообразно представить в виде пар сил с плечами, равными длинам соответствующих звеньев.

Вопросы для самопроверки

1. Что является основной задачей кинетостатики механизмов?
2. Какие данные должны быть известны для решения задач кинетостатики?
3. В чём заключается принцип Даламбера?
4. В чём заключается принцип освобождаемости?

5. Объясните принцип равенства действия и противодействия в кинематических парах.
6. Какие параметры сил известны и какие неизвестны в кинематических парах?
7. Какие кинематические цепи являются статически определяемыми и почему?
8. В каких случаях возникают силы инерции в механизмах?
9. К чему сводится расчёт инерционных воздействий в различных случаях движения звеньев в плоскости? Приведите необходимые формулы.
10. В какой последовательности выполняется силовой расчёт механизма?
11. Перечислите методы силового расчёта механизмов.
12. Составьте уравнение равновесия группы Ассур второго класса любого вида в векторной форме.
13. Как определяются тангенциальные составляющие реакций?
14. В чём особенность силового расчёта ведущего звена механизма?
15. Что такое уравновешивающий момент (уравновешивающая сила)? Из какого условия он (она) определяется?
16. В чём разница при определении реакции в кинематической паре кривошипа со стойкой при действии на него уравновешивающего момента или уравновешивающей силы?

5. Трение в кинематических парах и КПД

Трение в машинах играет двоякую роль. С одной стороны, оно является полезным явлением, когда способствует движению, в таких устройствах для передачи вращательного движения, как ремённая передача с плоским или клиновым ремнём, фрикционные диски, транспортные средства, где без трения колёс о дорогу движение невозможно. С другой стороны, во всех сочленениях звеньев механизма (кинематических парах) имеются потери мощности в результате трения, что можно отнести к, безусловно, вредному явлению. Даже в перечисленных выше случаях полезности трения имеют место те же отрицательные последствия – износ, потери мощности и т. д. В данном разделе мы будем рассматривать только отрицательные явления, связанные с трением, и способы расчёта и учёта трения при работе механизмов и машин.

5.1. Виды трения. Законы трения скольжения

Различают два основных принципиально отличающихся друг от друга вида трения: *трение скольжения* (трение 1-го рода) и *трение качения* (трение 2-го рода).

Трение скольжения является характерным для низших кинематических пар, хотя имеет место и в высших парах. Оно представляет собой сложный физико-химический процесс, приводящий в итоге к нагреву элементов пары, ухудшению физических (прочностных) свойств материалов, из которых они выполнены, интенсивному износу, потерям мощности на непроизводительное преодо-

ление сил трения. Самое простое объяснение причин сопротивления движению при трении заключается том, что при относительном движении твёрдых тел (звеньев) микронеровности одного из них встречают микронеровности другого, в результате чего возникает некоторая суммарная сила, направленная навстречу относительному движению. Например, твёрдое тело 2 (рис. 5.1) движется в указанном направлении с относительной скоростью $V_{\text{отн}}$ по отношению к твёрдому телу 1.

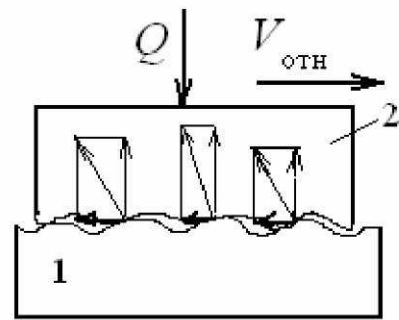


Рисунок 5.1

При этом его микронеровности наталкиваются на микронеровности тела 1, что вызывает появление нормальных реакций в точках контакта микронеровностей (эти реакции на рис. 5.1 изображены диагоналями прямоугольников). Суммарная величина вертикальных составляющих реакций равна сжимающей силе Q , а суммарная величина горизонтальных составляющих является силой трения $F_{\text{тр}}$, направленной против скорости относительного движения. Следует иметь в виду, что силы трения контактирующих тел действуют попарно, т. е. одна из них приложена к одному телу другая – к другому, причём эти силы равны и противоположны, подобно рассмотренным ранее реакциям в кинематических парах.

Трение скольжения подразделяется на несколько видов в зависимости от условий, в которых происходит работа кинематических пар.

Сухое трение, возникающее при абсолютно чистых и сухих поверхностях контакта, лишённых каких-либо следов влаги, окислов, пыли и других субстанций. В этих условиях трущиеся поверхности касаются непосредственно друг друга. Такие условия трения могут быть получены только в лабораторных условиях.

Граничное трение характерно при толщине слоя смазки между трущимися поверхностями менее 0,1 мкм.

Жидкостное трение имеет место, когда трущиеся поверхности полностью разделены слоем смазки и микронеровности совсем не касаются друг друга (рис. 5.2). Сопротивление относительному движению твёрдых тел в этом случае полностью определяется свойствами смазывающей жидкости и существенно зависит от её вязкости. Закономерности этого вида трения заметно отличаются от закономерностей других видов трения.

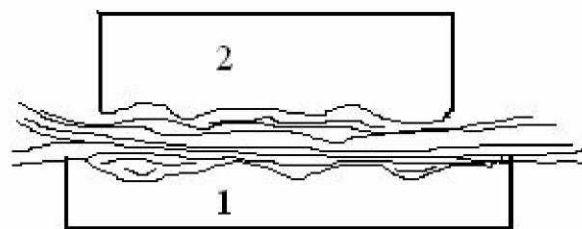


Рисунок 5.2

Полужидкостное трение возникает, когда условия чисто жидкостного трения не соблюдены, и тогда в одних местах контакта твёрдых тел имеется жидкостное трение, в других – граничное. В связи с этим данный вид трения называют *смешанным*. Этот вид трения чаще всего возникает в машинах.

Полусухое трение бывает, когда одновременно имеется и сухое трение, и граничное. Такой вид трения будет, если очищенные от влаги, окислов, пыли, аэрозолей поверхности оставить на некоторое время на воздухе, а потом ввести в соприкосновение.

Законы трения скольжения.

1. Сила трения всегда направлена против скорости относительного движения.

2. С достаточной для технических расчётов точностью силу трения можно определить по формуле Кулона – Амонтона $F_{тр} = f \cdot N$. Здесь f – коэффициент трения; N – нормальная реакция, возникающая в кинематической паре при действии сжимающего усилия.

3. Коэффициент трения f зависит от физической природы и состояния трущихся поверхностей, то есть шероховатости, наличия и сорта смазки и др.

4. Коэффициент трения f зависит от скорости относительного движения тел (рис. 5.3), однако с достаточной для практики точностью принимается, что он остаётся постоянным при любой скорости. Многочисленные исследования выявили, что при трогании с места коэффициент трения больше, чем при движении. Этот коэффициент называют *статическим коэффициентом трения*, или *коэффициентом трения покоя*. Его обозначают f_0 и считают, что $f_0 > f$, в то же время $f = const$ независимо от скорости движения.

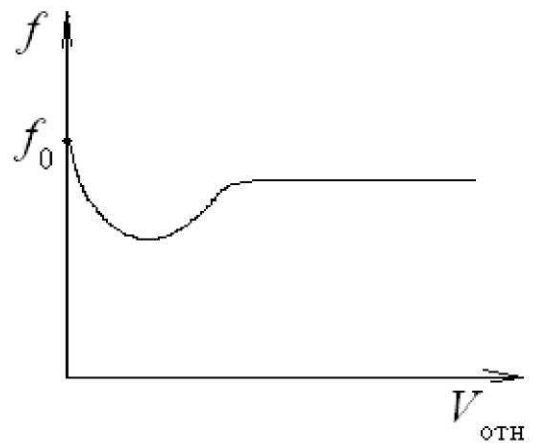


Рисунок 5.3

5. Коэффициент трения покоя зависит от времени контакта твёрдых тел в состоянии покоя, что объясняется постепенным взаимопроникновением материалов тел друг в друга. Чем дольше находятся в неподвижном контакте тела, тем глубже проникновение и тем труднее потом сдвинуть их с места.

6. Коэффициент трения зависит от удельного давления. Эта зависимость представлена на рис. 5.4. Сначала величина коэффициента резко увеличивается, затем по достижении определённого значения остаётся постоянной, а потом при достаточно больших величинах удельного давления снова резко возрастает, вследствие пластических деформаций материалов трущихся поверхностей. Однако в технических расчётах такая зависимость не учитывается, а принимается постоянным то значение f , которое не меняется в большом диапазоне изменения удельного давления.

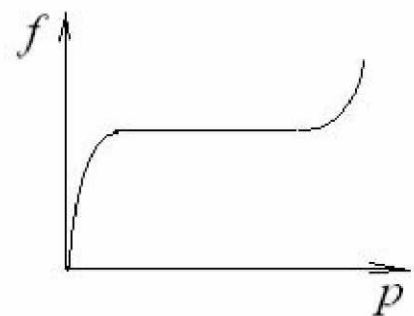


Рисунок 5.4

Значения коэффициентов трения для различных материалов и условий работы трущихся поверхностей приводятся в физических и технических справочниках.

5.2. Понятие о коэффициенте полезного действия

Коэффициентом полезного действия (КПД) называется отношение полезной работы, выполняемой в машине, ко всей затраченной. Этот коэффициент является одним из основных критериев качества работы машины или механизма. Он измеряется в процентах или в долях единицы. Если обозначить полезную работу $A_{\text{п}}$, а всю затраченную, которая является работой движущих сил, – $A_{\text{д}}$, то отношение первой ко второй, обозначаемое η , и будет коэффициентом полезного действия, то есть $\eta = \frac{A_{\text{п}}}{A_{\text{д}}}$. Поскольку работа движущих сил тратится на

выполнение и работы $A_{\text{п}}$ полезного сопротивления, и работы $A_{\text{вс}}$ вредного сопротивления, то можно записать $\eta = \frac{A_{\text{п}}}{A_{\text{п}} + A_{\text{вс}}}$. При определении КПД механизмов из всех видов работ вредного сопротивления учитывается только работа сил трения $A_{\text{тр}}$. Поэтому применительно к механизмам определяется так называемый механический коэффициент полезного действия, определяемый формулой

$\eta = \frac{A_{\text{п}}}{A_{\text{п}} + A_{\text{тр}}}$, или $\eta = \frac{A_{\text{д}} - A_{\text{тр}}}{A_{\text{д}}}$. Так как любая работа требует времени, то по этим формулам вычисляется среднее значение η за время выполнения работы. Однако во многих случаях целесообразно вычислять *мгновенное значение* η , которое получится, если вместо работ использовать *мгновенные мощности*. Тогда формула приобретает вид $\eta = \frac{N_{\text{д}} - N_{\text{тр}}}{N_{\text{д}}}$. Поделив числитель на знаменатель,

получим $\eta = 1 - \frac{N_{\text{тр}}}{N_{\text{д}}}$, где отношение $\frac{N_{\text{тр}}}{N_{\text{д}}}$ называется *коэффициентом потерь* и обозначается ψ , а формула для расчёта η представляется в виде $\eta = 1 - \psi$. Эта формула полезна в расчётах механизмов, так как мощность трения в них легко вычисляется при известных силах трения, а скорости известны из исследования кинематики.

Вычисление КПД конкретного механизма сводится к вычислению мощностей трения во всех его кинематических парах, к нахождению суммарной величины мощности трения механизма $\sum N_{\text{тр}}$, к вычислению мощности силы полезной работы $N_{\text{п}}$.

ного (технологического) сопротивления N_i и последующего расчёта

$$\eta = \frac{N_{\text{п}}}{N_{\text{п}} + \Sigma N_{\text{тр}}}$$

5.3. Трение в поступательной кинематической паре

Угол и конус трения. Угол, образованный полной реакцией в поступательной паре и её нормальной составляющей, называется углом трения. Ползун находится на плоскости и движется по ней со скоростью V (рис. 5.5). На ползун сверху вниз действует сила Q , вызывающая появление нормальной реакции N . Навстречу движению ползуна на его нижней плоскости действует сила трения $F_{\text{од}}$

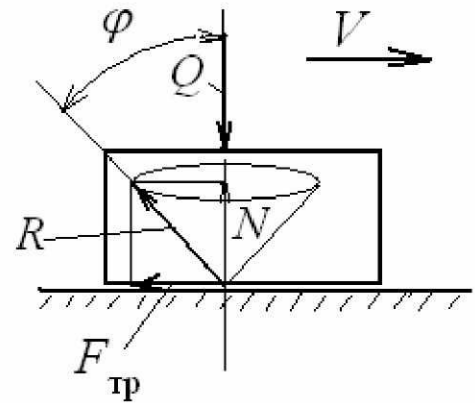


Рисунок 5.5

против относительной скорости. Геометрическая сумма нормальной составляющей реакции и силы трения равна полной реакции R в кинематической паре ползуна с плоскостью. Угол φ между этой реакцией и её нормальной составляющей N и является углом трения. Величина угла трения определяется следующей формулой, которая очевидна из рисунка,

$$\text{tg } \varphi = \frac{F_{\text{тр}}}{N} = \frac{f \cdot N}{N} = f, \text{ или } \varphi = \text{arctg } f \text{ (причём, } N = Q), \text{ то есть угол трения –}$$

это угол, тангенс которого равен коэффициенту трения. Если двигать ползун в различных направлениях, то полная реакция опишет коническую поверхность, которая называется конусом трения. В общем случае конус трения не является круглым, так как условия трения в разных направлениях могут быть различными и сила трения может быть также различной. Значение угла и конуса трения заключается в том, что если движущая сила своей линией действия проходит внутри конуса трения (угла трения), то движение под действием этой силы невозможно. Для доказательства этого положения обратимся к рис. 5.6. На нём показан ползун, движущийся вправо со скоростью V . Сила $P_{\text{аид}}$, вызывающая движение в этом направлении, является горизонтальной составляющей силы P , то есть $P_{\text{гор}} = P \cdot \sin \delta$, где δ – угол между вертикалью и линией действия силы P . Этому движению препятствует сила трения $F_{\text{тр}} = f \cdot N$, где

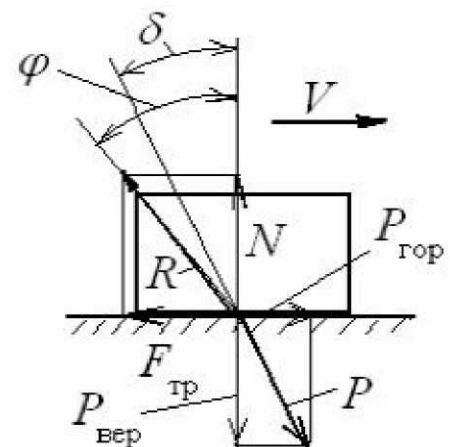


Рисунок 5.6

из условия равновесия $N = P_{\text{вер}}$, вертикальной

составляющей силы P . Так как $P_{\text{вер}} = P \cdot \cos \delta$, то сила трения $F_{\text{тр}} = f \cdot P \cdot \cos \delta$.

Возможны следующие три случая:

1. $P_{\text{гор}} = F_{\text{тр}}$, то есть $P \cdot \sin \delta = f \cdot P \cdot \cos \delta$, или $\text{tg} \delta = f$. Так как $f = \text{tg} \varphi$, то получаем $\delta = \varphi$. Это значит, что при равенстве угла наклона движущей силы и угла трения будет сохраняться равномерное движение или состояние покоя.

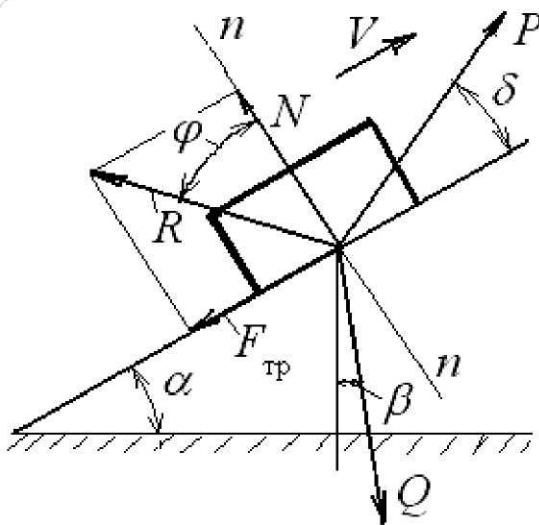
2. $P_{\text{гор}} > F_{\text{тр}}$. Согласно приведённым выше выкладкам, получим $\delta > \varphi$, в этом случае будет происходить движение с ускорением, так как движущая сила больше силы сопротивления.

3. $P_{\text{гор}} < F_{\text{тр}}$. Здесь получается соотношение, обратное предыдущему, то есть $\delta < \varphi$, при котором движение будет невозможным, какую бы силу ни удалось приложить в направлении движения.

Трение на наклонной плоскости. Рассмотрим ползун, находящийся на наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом (рис. 5.7, а). Ползун движется вверх по наклонной плоскости со скоростью V под действием движущей силы P , направленной под углом δ к плоскости. На ползун действует также сила Q под углом β к вертикали, прижимая ползун к плоскости. И, наконец, на ползун также действует реакция R наклонной плоскости, отклонённая от нормали к ней на угол трения φ .

Известными величинами здесь являются сила Q , угол α и коэффициент трения f , следовательно, угол $\varphi = \text{arctg} f$. Задача заключается в определении движущей силы P , необходимой для движения ползуна. Она решается с помощью сил, действующих на ползун, согласно уравнению $\underline{\underline{\vec{Q}}} + \underline{\underline{\vec{P}}} + \underline{\underline{\vec{R}}} = 0$, в котором первый вектор подчёркнут дважды, так как он задан, два другие подчеркнуты одной чертой, так как они известны только по направлению.

а) Схема действия сил



б) План сил

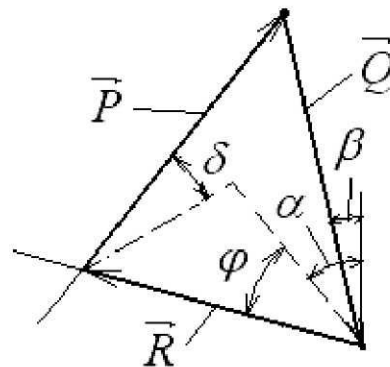


Рисунок 5.7

Построив треугольник сил (план сил) (рис. 5.7, б), приступаем к его решению. Удобнее всего здесь воспользоваться теоремой синусов, согласно которой в косоугольном треугольнике отношение сторон к синусу противолежащего угла является постоянной величиной (необходимые для решения углы указаны на плане сил)

$$\frac{P}{\sin(\alpha + \varphi - \beta)} = \frac{Q}{\sin(90^\circ - \varphi + \delta)}$$

Знаменатель правой части может быть заменён на $\cos(\varphi - \delta)$. Решая после этого данное выражение относительно P , получаем

$$P = Q \cdot \frac{\sin(\alpha - \beta + \varphi)}{\cos(\varphi - \delta)}$$

Частные случаи.

1. Сила Q действует вертикально вниз, тогда $\beta = 0$, и выражение приобретает вид

$$P = Q \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos(\varphi - \delta)}$$

2. Сила Q действует вертикально вниз, сила P горизонтальна, то есть угол $\beta = 0$, $\delta = -\alpha$, тогда

$$P = Q \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos(-\alpha - \varphi)} = Q \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varphi).$$

Самотормозящая наклонная плоскость.

Наклонная плоскость называется самотормозящейся, если движение по ней вниз под действием силы тяжести невозможно. Предельным случаем самотормозящейся наклонной плоскости является горизонтальная плоскость, у которой угол наклона $\alpha = 0$. Однако движение под действием силы тяжести становится невозможным и при некотором значении α , не равном нулю. Рассмотрим ползун на наклонной плоскости (рис. 5.8), на который вертикально вниз действует сила тяжести G . При скольжении ползуна вниз сила трения $F_{\text{тр}}$ направлена вверх по наклонной

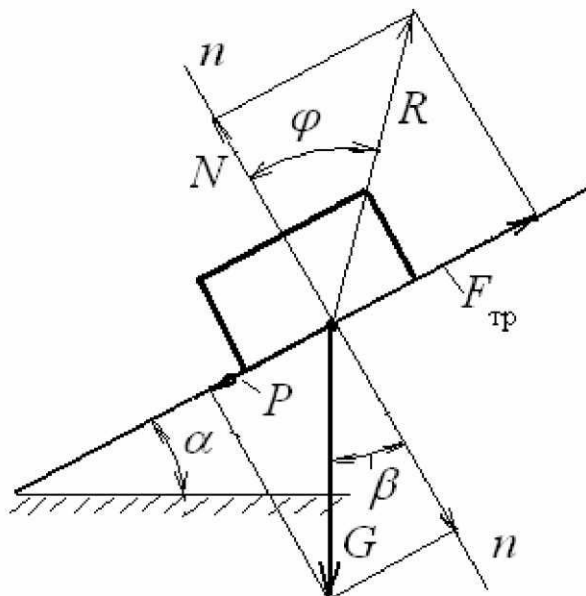


Рисунок 5.8

плоскости, а полная реакция R отклонена от нормали $n-n$ на угол трения φ . Составляющая P силы веса G , направленная вниз по наклонной плоскости, является движущей силой и составля-

ет величину $P = G \cdot \sin \beta$, а так как $\beta = \alpha$, то $P = G \cdot \sin \alpha$. Силу трения создаёт нормальная составляющая N полной реакции R , причём эта составляющая равна нормальной составляющей силы веса, т. е. $N = G \cdot \cos \alpha$. Сила трения равна $F_{\text{тр}} = f \cdot G \cdot \cos \alpha$. Если сила P меньше силы трения $F_{\text{тр}}$, то движение вниз невозможно. С учётом имеющихся выражений сил запишем это условие так: $G \cdot \sin \alpha < f \cdot G \cdot \cos \alpha$, или $\text{tg} \alpha < f$. Так как $f = \text{tg} \varphi$, то получаем $\text{tg} \alpha < \text{tg} \varphi$, или $\alpha < \varphi$. Это и есть *условие самоторможения наклонной плоскости* – угол наклона плоскости должен быть меньше угла трения.

Трение клинчатого ползуна. Клинчатый ползун часто применяется в виде направляющих металлорежущих станков и другого оборудования, где требуется перемещать вдоль направляющих некоторые устройства, например суппорт станка и др.

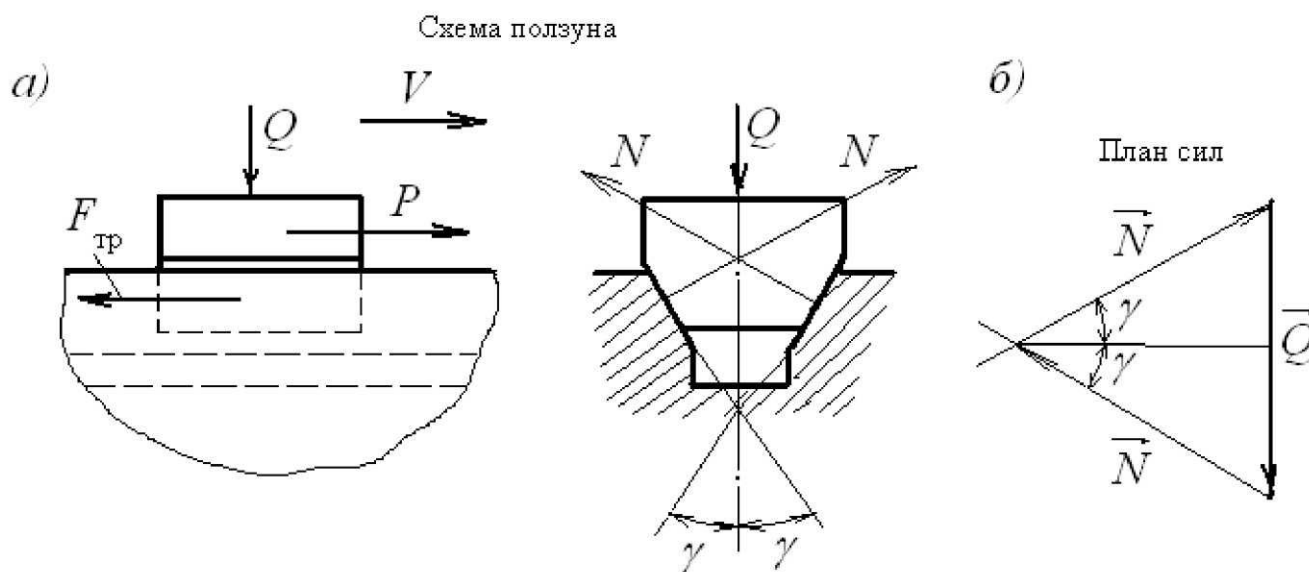


Рисунок 5.9

На рис. 5.9, а изображена схема клинчатого ползуна в двух проекциях. На него действует сверху вниз сила Q , которая на боковых наклонных стенках жёлоба вызывает появление нормальных реакций N , а от них затем появляется сила трения $F_{\text{тр}} = 2f \cdot N$. Известными являются сила Q и коэффициент трения f .

Требуется определить движущую силу P , приводящую в движение ползун в направлении скорости V . Из плана сил ползуна, который построен по уравнению равновесия $\vec{Q} + \vec{N}_{\text{п}} + \vec{N}_{\text{л}} = 0$ (рис. 5.9, б), можем определить нормальные составляющие N . Здесь мы имеем в виду, что, вследствие симметричности ползуна, модули нормальных реакций справа и слева равны друг другу, и поэтому на плане сил они обозначены одинаково. Итак, $N = \frac{Q}{2 \sin \gamma}$. Отсюда следует, что

$F_{\text{тр}} = \frac{Q}{2} \cdot \frac{f}{\sin \gamma}$. Так как движущая сила $P = 2F_{\text{тр}}$, то $P = Q \cdot \frac{f}{\sin \gamma}$. Отношение

$\frac{f}{\sin \gamma}$ зависит от условий трения в контакте ползуна с направляющими и от геометрии зоны контакта. Он называется *приведённым коэффициентом трения клинчатого ползуна* и обозначается f^* , то есть $f^* = \frac{f}{\sin \gamma}$, а движущая сила

$$P = f^* \cdot Q.$$

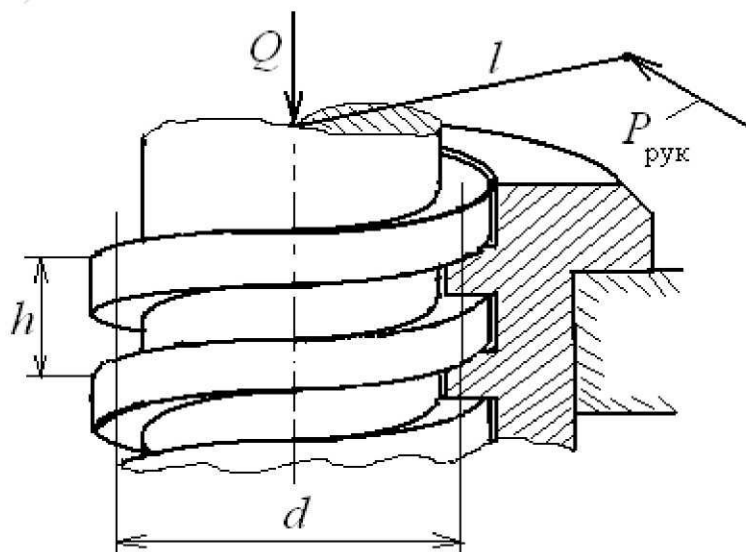
На горизонтальной плоскости угол $\gamma = 90^\circ$, поэтому $f^* = f$.

Потери мощности на трение в поступательной кинематической паре определяются формулой $N_{\text{тр}} = F_{\text{тр}} \cdot V_{\text{отн}}$, причём сила трения вычисляется через реакцию в паре, которую мы научились определять выше в силовом расчёте групп Ассура.

5.4. Трение в винтовой кинематической паре

Рассмотрим винтовую кинематическую пару с прямоугольной или трапециoidalной резьбой (рис. 5.10, а). Вдоль оси винта действует сила Q вертикально вниз, прижимая витки винта к виткам гайки. Средний диаметр винта обозначен d , шаг — h . *Шагом винта* называется расстояние между одноимёнными точками двух соседних выступов, измеренное в осевом направлении, нельзя путать шаг с *ходом винта*, который представляет собой осевое перемещение винта за один его оборот. Если имеется так называемый *однозаходный винт*, то шаг и ход совпадают, при n -заходном винте ход равен nh ($n = 1, 2, 3, \dots$) Далее рассматривается однозаходный винт.

а) Схема винта с гайкой



б) Схема действия сил

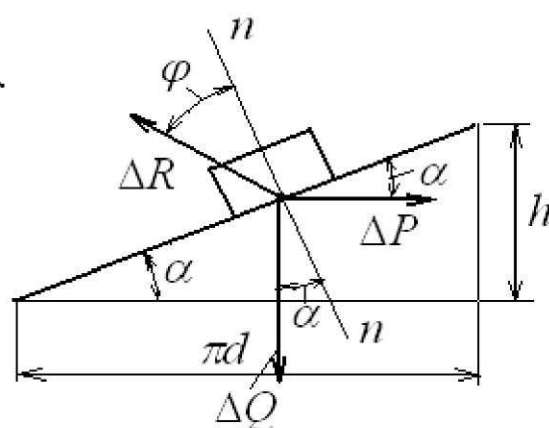


Рисунок 5.10

Развернём среднюю винтовую линию на плоскость (рис. 5.10, б), в результате чего получим прямоугольный треугольник, горизонтальный катет которого равен πd , а вертикальный – шагу h . При этом винтовая линия превратится в наклонную плоскость, рассмотренную ранее. Возьмём небольшой участок витка винта на этой наклонной плоскости и покажем действующие на него силы. Так как рассматривается не весь виток, а только его небольшая часть, то силы, приходящиеся на него, составляют только части полных сил, то есть ΔQ , ΔR и ΔP . При этом движущей силой является ΔP , действующая горизонтально. Сила ΔQ действует вертикально вниз, а ΔR отклонена от нормали $n-n$ к наклонной плоскости на угол φ .

По существу, на схеме рис. 5.10, б имеем частный случай 2 из рассмотренного выше движения ползуна по наклонной плоскости. Для этого случая сила ΔP определяется формулой $\Delta P = \Delta Q \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)$. Суммируя по всей длине витка на протяжении одного оборота, получаем полную силу на окружности диаметра d : $P = Q \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)$. Момент этой силы относительно оси винта равен произведению её на средний радиус, то есть $M = Q \frac{d}{2} \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)$. И, наконец, усилие на рукоятке для вращения винта составляет величину, равную отношению момента M к длине рукоятки l : $P_{\text{рук}} = \frac{M}{l} = Q \frac{d}{2l} \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)$.

Самотормозящийся винт получается, если, как и в случае наклонной плоскости, угол подъёма винтовой линии α меньше угла трения φ . Самотормозящийся винт не будет вращаться при любой осевой силе Q . Легко себе представить, что с увеличением количества заходов угол α увеличивается, и можно получить несамотормозящийся винт, который станет вращаться под действием осевой нагрузки.

Для вычисления КПД η винтовой пары необходимо найти работу полезной силы Q по подъёму винта за один его оборот, то есть на величину h , и работу движущего момента M за один оборот, то есть на угол 2π . Первая из них равна $A_{\text{п}} = Q \cdot h$, вторая – $A_{\text{д}} = M \cdot 2\pi = Q d \pi \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)$, поэтому

$$\eta = \frac{h}{d \pi \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}.$$

Из рис. 5.10, б видно, что отношение $\frac{h}{\pi d} = \operatorname{tg} \alpha$, поэтому окончательно имеем

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}.$$

5.5. Трение во вращательной кинематической паре

Рассмотрим вращательную кинематическую пару в наиболее часто встречающемся случае, когда сопряжение вала с отверстием осуществляется с зазором (рис. 5.11). На указанном рисунке зазор между валом и отверстием весьма преувеличен для того, чтобы лучше видеть элементы сопряжения. Вал нагружен поперечной силой Q , которая является известной величиной. При отсутствии вращения окружность вала касается окружности отверстия в точке A_0 на его вертикальном диаметре. Когда вал вращается в направлении ω , то, в результате действия силы трения $F_{\text{тр}}$, он «взбирается» на

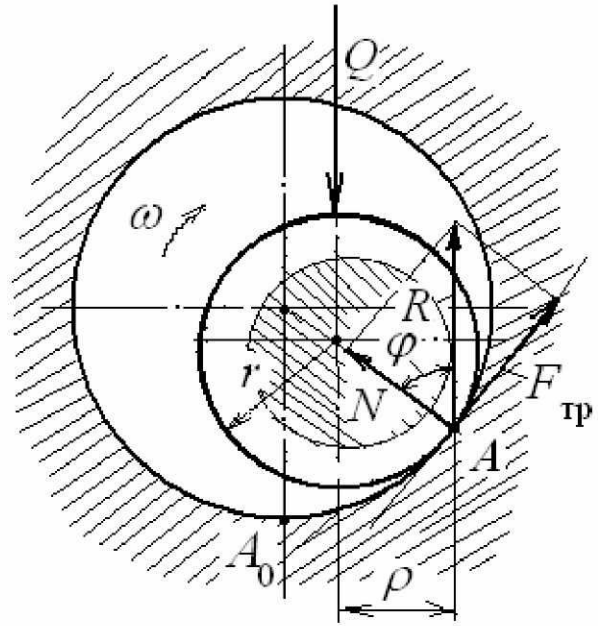


Рисунок 5.11

стенку вала и в равновесном состоянии устанавливается, касаясь окружности отверстия в точке A . При этом реакция R стенки отверстия равна и противоположна силе Q . Нормальная реакция N направлена вдоль нормали в точке касания окружностей, то есть вдоль линии, проходящей через точку касания и их центры. Сила трения направлена по касательной к окружностям, проходящей также через точку касания A , навстречу окружной скорости вала. Радиус цапфы вала обозначен r (цапфой называется участок вала, который находится внутри отверстия опоры).

Сопротивление вращению вала создается моментом трения $M_{\text{тр}}$, равным произведению силы трения на радиус цапфы, то есть $M_{\text{тр}} = F_{\text{тр}} \cdot r$. Сила трения, как известно, определяется формулой $F_{\text{тр}} = f \cdot N$. Из силового треугольника по теореме Пифагора имеем $R^2 = N^2 + F^2$, или $R^2 = N^2 + f^2 N^2 = Q^2$,

откуда $N = \frac{Q}{\sqrt{1+f^2}}$. Поэтому сила трения $F_{\text{тр}} = \frac{f \cdot Q}{\sqrt{1+f^2}}$, а момент трения

$M_{\text{тр}} = Q \cdot r \cdot \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}$. Так как коэффициент трения $f < 1$, то $f^2 \ll 1$, тогда

$\sqrt{1+f^2} \approx 1$ (например, $f = 0,15$, $f^2 = 0,0225$, а $\sqrt{1+0,0225} = 1,011$). Поэтому можно принять, что $M_{\text{тр}} = Q \cdot r \cdot f$. Произведение радиуса цапфы на коэффициент трения является для данных условий постоянной величиной, определяемой

только геометрией вала и условиями трения. Эта величина измеряется в линейных единицах, обозначается ρ и называется *кругом трения*, который описывается этим радиусом при вращении вала (круг трения на рис. 5.11 заштрихован). Так что радиус круга трения $\rho = r \cdot f$. Таким образом, при известном ρ момент трения вычисляется по формуле $M_{\text{тр}} = Q \cdot \rho$.

Значение круга трения заключается в том, что полная реакция во вращательной паре проходит по касательной к нему, никогда не пересекая его. При этом её направление таково, что момент реакции относительно центра вала направлен против скорости вращения вала.

Расчёт потерь мощности на трение во вращательной паре. Реакции в кинематических парах, вычисляемые с помощью методов планов сил и других методов, являются, по существу, нормальными реакциями, так как они определялись в предположении отсутствия трения. Это значит, что коэффициент трения предполагался равным нулю, и, соответственно угол трения φ также принимался равным нулю. Поэтому для определения мощности трения $N_{\text{отт}}$ необходимо знать момент силы трения и относительную угловую скорость одного звена пары по отношению к другому, то есть $\omega_{\text{отт}}$.

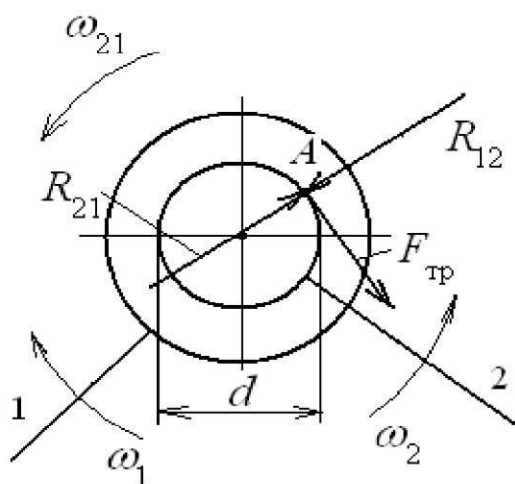


Рисунок 5.12

Представим на рис. 5.12 вращательную пару, образованную звеньями 1 и 2, с увеличенным изображением её элементов. Предположим, что касание элементов пары происходит в точке A. В этой точке действуют реакции R_{12} со стороны первого звена на второе и R_{21} со стороны второго звена на первое. В этой же точке приложена сила трения $F_{\text{отт}}$, препятствующая движению второго звена относительно первого. Сила трения определяется формулой $F_{\text{тр}} = f \cdot R_{21}$ (здесь и далее имеется

в виду, что рассматривается движение второго звена относительно первого, а не наоборот). Из рисунка видно, что момент трения $M_{\text{отт}}$ может быть определён

как $M_{\text{тр}} = F_{\text{тр}} \cdot \frac{d}{2}$, где d – диаметр цапфы вала. Относительная угловая скорость ω_{21} определяется с помощью метода обращения движения: если обоим звеньям пары сообщить движение с угловой скоростью, равной и противоположно направленной угловой скорости звена 1, то это звено остановится, а второе будет вращаться с угловой скоростью $\omega_{21} = \omega_2 + \omega_1$, которая и будет от-

носительной скоростью звена 2 относительно звена 1. Таким образом, мощность трения, равная $N_{\text{тр}} = M_{\text{тр}} \cdot \omega_{\text{отн}}$, окончательно выразится формулой

$$N_{\text{тр}} = f \cdot R_{21} \cdot \frac{d}{2} (\omega_1 + \omega_2).$$

5.6. Трение качения

Как было указано выше, трение качения относится к трению II рода и является характерным для высших кинематических пар. Происхождение сопротивления при качении можно объяснить следующим образом. Предположим, имеется каток (цилиндр) на плоскости (рис. 5.13). Если и цилиндр, и плоскость – абсолютно твёрдые тела, то в их контакте нет никаких деформаций, и они касаются друг друга в точке A . При этом, если на каток действует вертикальная сила Q (рис. 5.13, *a*), то она вызывает появление реакции N плоскости, которая равна и противоположна силе Q , то есть $\vec{N} = -\vec{Q}$.

Реакция плоскости приложена точно в точке A её касания с цилиндром. Однако, в связи с тем, что абсолютно твёрдые тела в природе не существуют, в месте касания цилиндра и плоскости образуется площадка смятия $A-B$, на которой, согласно Г. Герцу, при неподвижном цилиндре давление распределяется по закону эллипса (рис. 5.13, *б*). Равнодействующая сил этого распределения N проходит точно по вертикальному диаметру цилиндра и уравнивает силу Q . Если цилиндр катится по плоскости, то распределение сил в контакте перестаёт быть эллиптическим (рис. 5.13, *в*), и равнодействующая N этого распределения смещается с вертикального диаметра навстречу окружной скорости цилиндра, создавая относительно его центра момент на плече k . Этот момент и препятствует качению цилиндра. Смещение равнодействующей вызвано наличием упругого гистерезиса в материале цилиндра и плоскости, причиной которого является внутреннее трение в материале. В результате перед катящимся цилиндром возникает подпорная волна (*редан*), которая и смещает результирующую реакцию.

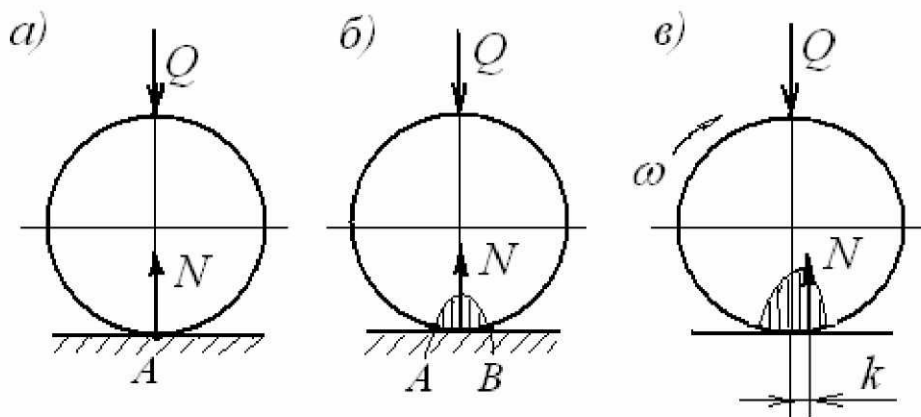


Рисунок 5.13

Расстояние k , на которое смещается реакция N , называется *коэффициентом трения качения*. Он измеряется в сантиметрах (см). Приведём в качестве примера несколько значений коэффициентов трения качения для различных сочетаний материалов:

Дерево по дереву.....	0,05 – 0,06
Дерево по стали.....	0,03 – 0,04
Сталь по стали.....	0,005
Чугун по чугуну.....	0,005
Ролики или шарики из закалённой стали по стали....	0,0005 – 0,0010

Условия перехода трения качения в трение скольжения. Из практики известно, что если к цилиндру, находящемуся на плоскости, приложить силу P достаточно высоко от плоскости, то цилиндр будет катиться. Если силу приложить очень низко, то цилиндр будет скользить по плоскости, но не катиться. Выясним, при каких условиях возможно качение, и при каких – скольжение. Для этого обратимся к рис. 5.14. На нём показан цилиндр на плоскости, на который действует сверху вниз сила Q , нормальная реакция плоскости N , равная силе Q , сила трения $F_{\text{тр}}$ со стороны плоскости и, наконец, сила P , перемещающая цилиндр по плоскости. Реакция плоскости N смещена вправо от вертикального диаметра цилиндра на величину коэффициента трения качения k . Условие качения цилиндра можно определить так: $F_{\text{тр}} > P$, скольжение требует обратного неравенства: $F_{\text{тр}} < P$. Сила трения $F_{\text{тр}} = f \cdot N = f \cdot Q$. Составим уравнение равновесия цилиндра в форме моментов: $P \cdot h = N \cdot k = Q \cdot k$. Из

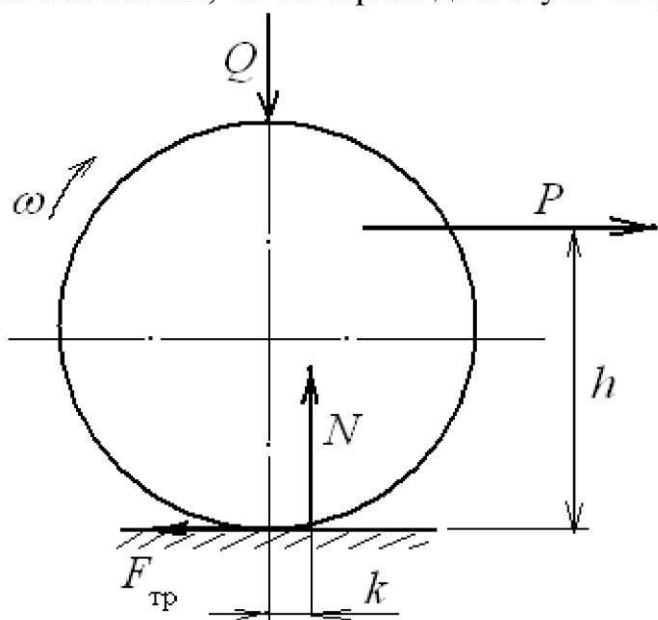


Рисунок 5.14

этого уравнения получаем $P = Q \cdot \frac{k}{h}$. Тогда условие качения получится как

$f \cdot Q > Q \cdot \frac{k}{h}$, или $f > \frac{k}{h}$. Так как k и f являются величинами постоянными, а

изменить можно только h , то условие качения целесообразно записать в виде $h > \frac{k}{f}$. Обратное неравенство соответствует условию скольжения: $h < \frac{k}{f}$.

Потери мощности на трение качения определяются произведением момента трения качения на угловую скорость качения, то есть $N_{\text{тр.кач}} = M_{\text{тр.кач}} \cdot \omega$.

Момент трения качения равен произведению $M_{\text{тр.кач}} = N \cdot k$, или $M_{\text{тр.кач}} = Q \cdot k$, поэтому окончательно $N_{\text{тр.кач}} = Q \cdot k \cdot \omega$.

Вопросы для самопроверки

1. Назовите виды трения, характерные для низших, высших кинематических пар.
2. Как объяснить наличие трения скольжения?
3. Каким закономерностям подчиняется трение скольжения?
4. Как вычисляется сила трения скольжения?
5. Что такое коэффициент трения? От чего зависит величина коэффициента трения?
6. Что такое угол трения, конус трения?
7. Какую роль играют угол и конус трения в поступательной паре?
8. При каком условии движущая сила не может осуществить движение ползуна по плоскости?
9. В каком случае наклонная плоскость является самотормозящейся?
10. Что такое КПД?
11. Что такое коэффициент потерь?
12. Что такое приведённый коэффициент трения клинчатого ползуна?
13. Как определяется мощность трения в поступательной паре?
14. Как определяется КПД винтовой пары?
15. Что такое круг трения во вращательной паре?
16. В чём значение круга трения во вращательной паре?
17. В чём существо трения качения?
18. Как определить момент трения качения?
19. Как определить мощность трения качения?
20. Как определяется КПД механизма?

6. Динамика машин

В динамике рассматривается движение машин (или механизмов) в связи с силами, действующими на их звенья. Основными задачами этого раздела являются:

1. Определение фактической угловой скорости ведущего звена механизма.
2. Определение момента инерции маховика, необходимого для поддержания изменения угловой скорости в заданных пределах.
3. Уравновешивание и балансировка вращающихся звеньев.
4. Уравновешивание механизмов.
5. Виброзащита и виброизоляция машин и устройств.

6.1. Вспомогательные задачи динамики машин

Динамическая модель машины. В связи с необходимостью упрощения расчётной схемы и большей наглядности, а также сокращения расчётов реальную машину заменяют её моделью, сохраняющей те свойства машины, которые изучаются на данном этапе исследования. Такая модель представляет собой некоторый условный диск, вращающийся с кривошипом как одно целое, то есть с его угловой скоростью (рис. 6.1), обладающий так называемым *приведённым моментом инерции*. На этой основе кривошип или другое ведущее звено, с которым связан условный диск, называется *звеном приведения*. На диск действуют *приведённый момент движущих сил*, направленный в сторону вращения, и *приведённый момент сил сопротивления*, направленный навстречу вращению.

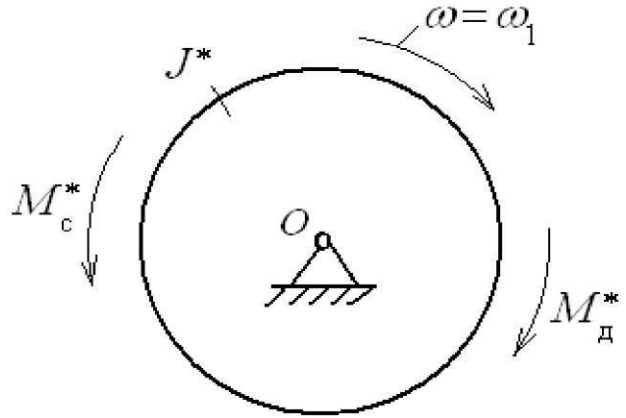


Рисунок 6.1

На схеме рис. 6.1 обозначены: J^* – приведённый момент инерции механизма, $M_{\text{д}}^*$ – приведённый момент движущих сил и $M_{\text{н}}^*$ – приведённый момент сил сопротивления.

Приведённый момент инерции механизма. *Приведённым моментом инерции механизма называется момент инерции условного диска, вращающегося с угловой скоростью ведущего звена, которым заменяется реальный механизм и который обладает кинетической энергией, равной сумме кинетических энергий всех звеньев механизма.* Кинетическая энергия условного диска $T^* = \frac{1}{2} J^* \omega^2$, где $\omega = \omega_1$, то есть угловая скорость звена приведения, равная угловой скорости ведущего звена (чаще всего, но не обязательно, кривошипа).

Кинетическая энергия звена, совершающего поступательное движение, $T_i = \frac{1}{2} m_i V_i^2$, где m_i – масса звена; V_i – скорость звена.

Кинетическая энергия звена, совершающего вращательное движение, $T_j = \frac{1}{2} J_j \omega_j^2$, где J_j – момент инерции звена; ω_j – угловая скорость звена.

Кинетическая энергия звена в плоскопараллельном движении $T_k = \frac{1}{2} m_k V_{S_k}^2 + \frac{1}{2} J_{S_k} \omega_k^2$, где m_k – масса звена; V_{S_k} – скорость центра масс зве-

на, J_{S_k} – момент инерции звена относительно его центра масс; ω_k – угловая скорость звена. Согласно определению имеем

$$T^* = \Sigma T_i + \Sigma T_j + \Sigma T_k.$$

Подставив сюда записанные выше выражения кинетических энергий и решая затем полученное равенство относительно J^* , запишем

$$J^* = \Sigma m_i \left(\frac{V_i}{\omega} \right)^2 + \Sigma J_j \left(\frac{\omega_j}{\omega} \right)^2 + \Sigma m_k \left(\frac{V_{S_k}}{\omega} \right)^2 + \Sigma J_{S_k} \left(\frac{\omega_k}{\omega} \right)^2.$$

Как видно из этой формулы, приведённый момент инерции зависит от структуры механизма, от массовых характеристик звеньев, от положения механизма и не зависит от угловой скорости ведущего звена. Некоторые механизмы имеют постоянное значение приведённого момента инерции. Машины, в основе которых механизмы с $J^* = const$, называются *ротативными*.

Приведённый момент сил сопротивления. *Приведённым моментом сил сопротивления* называется момент, приложенный к звену приведения (например, кривошипу), мгновенная мощность которого равна сумме мгновенных мощностей всех сил сопротивления, действующих в механизме.

Мгновенная мощность приведённого момента сопротивления $N_c^* = M_c^* \cdot \omega$. Мгновенная мощность i -й силы сопротивления $N_i = P_i \cdot V_i \cdot \cos \delta_i$. Согласно определению $N_c^* = \Sigma N_i$, поэтому, подставив сюда соответствующие выражения, получаем $M_c^* \cdot \omega = \Sigma P_i \cdot V_i \cdot \cos \delta_i$, откуда

$$M_c^* = \Sigma P_i \cdot \frac{V_i}{\omega} \cdot \cos \delta_i.$$

Если среди сил сопротивления имеются моменты, то их можно представить в виде пар сил с плечами, равными длинам соответствующих звеньев.

Замечание. Если во всех математических выражениях заменить силы сопротивления движущими силами, то в результате получится приведённый момент движущих сил

$$M_d^* = \Sigma P_i \cdot \frac{V_i}{\omega} \cdot \cos \delta_i.$$

Зависимость приведённых моментов сил от угла поворота ведущего звена, его скорости или времени называется *механической характеристикой машины*.

6.2. Характеристики режимов движения машин

Анализ динамики машин производится на основе *теоремы об изменении кинетической энергии системы: изменение (приращение) кинетической энергии системы на её возможном перемещении равно сумме работ всех внешних и внутренних сил на этом перемещении*, то есть

$$T_{i+1} - T_i = A_{дi,i+1} + A_{сi,i+1},$$

где T_i – кинетическая энергия системы в данный момент времени; T_{i+1} – кинетическая энергия системы в последующий момент времени; $A_{дi,i+1}$ – работа движущих сил при перемещении системы из i -го до $i+1$ -го положения системы; $A_{сi,i+1}$ – работа сил сопротивления на том же перемещении системы. Сумма работ в правой части равенства называется *избыточной работой* $A_{еца}$.

Необходимо заметить, что в правой части равенства отсутствуют работы внутренних сил (сил упругости звеньев), так как предполагается, что звенья механизма являются абсолютно жёсткими, недеформируемыми, а значит, в них нет внутренних сил.

В зависимости от соотношения величин правой части этого равенства различают следующие режимы (виды) движения машин.

I. Неустановившийся режим

А) *Пуск (разбег)*. Этот режим имеет место при соотношении работ $|A_{д}| > |A_{с}|$ или $A_{изб} > 0$. Тогда в левой части имеет место соотношение $T_{i+1} > T_i$, то есть кинетическая энергия машины возрастает, и возрастает угловая скорость ω . Графически это можно представить как на рис. 6.2. При исследовании этого режима определяется зависимость $\omega = \omega(t)$ и время пуска $t_{i \rightarrow i+1}$.

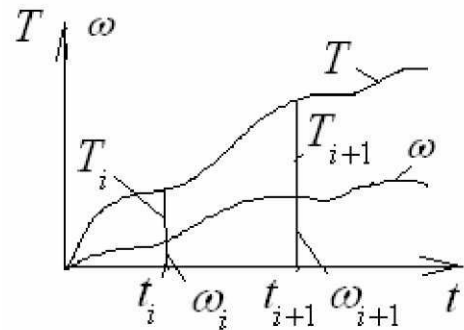


Рисунок 6.2

Б) *Остановка (выбег)* имеет место при обратном соотношении работ, то есть $|A_{д}| < |A_{с}|$ и $A_{изб} < 0$. При этом кинетическая энергия машины убывает, и угловая скорость также убывает, пока не станет равной нулю. Графически этот режим представлен на рис. 6.3. Этот режим также не является рабочим и заканчивается полной остановкой машины. При исследовании режима остановки, кроме закона изменения угловой скорости, определяется время остановки.

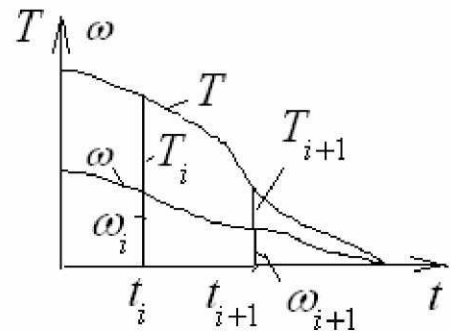


Рисунок 6.3

II. Установившийся режим

А) *Неравносесный*. Режим характеризуется тем, что работа движущих сил то больше, то меньше работы сил сопротивления, то есть в течение цикла имеют место следующие соотношения $|A_{\text{д}}| > |A_{\text{с}}|$ и $|A_{\text{д}}| < |A_{\text{с}}|$. Но за цикл работы машины эти величины одинаковы $[A_{\text{д}}]_{\text{цикл}} = [A_{\text{с}}]_{\text{цикл}}$, так что в начале и в конце цикла $A_{\text{изб}} = 0$. В результате таких соотношений работ кинетическая энергия машины и угловая скорость ведущего звена в течение цикла изменяются периодически, причём средние значения как кинетической энергии, так и угловой скорости остаются постоянными. Графически характер изменения кинетической энергии и угловой скорости представлен на рис. 6.4. Средняя угловая скорость определяется соотношением $\omega_{\text{ср}} = \frac{1}{2}(\omega_{\text{max}} + \omega_{\text{min}})$. Величина, характеризующая отклонение максимальной и минимальной угловой скорости от её среднего значения, называется *коэффициентом неравномерности* δ . Численно коэффициент $\delta = \frac{\omega_{\text{max}} - \omega_{\text{min}}}{\omega_{\text{ср}}}$. Для поддержания изменения угловой скорости в заданных пределах в машинах применяют маховики, представляющие собой колёса с массивным ободом, устанавливаемые на вал ведущего звена и вращающиеся с его угловой скоростью.

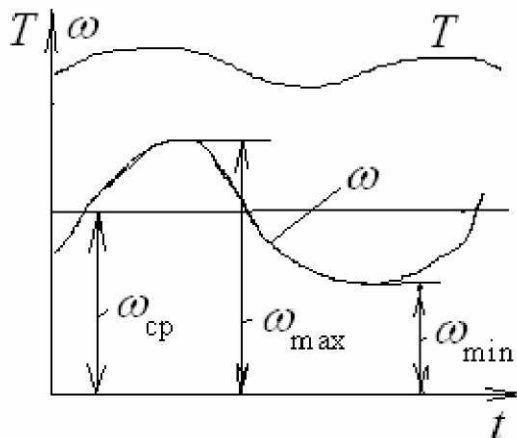


Рисунок 6.4

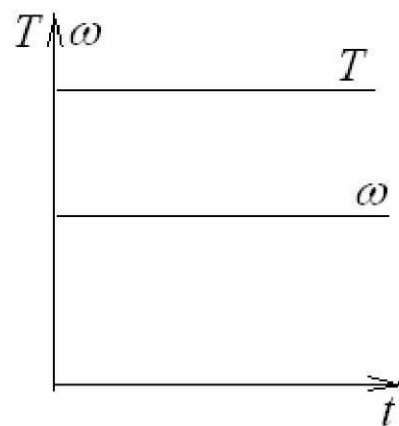


Рисунок 6.5

Данный режим является рабочим, так как может продолжаться неопределённо долго. В этом режиме работают все машины циклического действия.

При исследовании установившегося режима решаются две задачи.

Первая задача (прямая), задача динамического анализа заключается в определении фактического закона движения ведущего звена в виде $\omega = \omega(t)$, в т. ч. ω_{max} и ω_{min} , и коэффициента δ при известном моменте инерции маховика J_1 .

Вторая задача (обратная), задача динамического синтеза заключается в определении момента инерции маховика J_1 при заданных величинах $\omega_{\text{н\delta}}$ и δ .

Б) *Равновесный*. Этот режим имеет место в тех машинах, в которых работа движущих сил постоянно равна работе сил сопротивления, то есть $|A_{\text{д}}| = |A_{\text{с}}|$. Избыточная работа в течение всего цикла равна нулю, $A_{\text{изб}} = 0$. Кинетическая энергия и угловая скорость остаются постоянными (рис. 6.5).

Такой режим работы характерен для ротативных машин. При исследовании этого режима решается задача его устойчивости.

6.3. Формы уравнений движения машин

Уравнение движения в интегральной форме. Основой для вывода уравнения служит соотношение между работой и энергией, вытекающее из теоремы об изменении кинетической энергии системы $\Delta T = A_{\text{изб}}$, которое можно представить в виде равенства $T - T_0 = A_{\text{д}} - A_{\text{с}}$. В этом равенстве: T – текущее значение кинетической энергии; T_0 – начальное значение кинетической энергии; $A_{\text{д}}$ – работа движущих сил, выполненная от начального до текущего момента времени; $A_{\text{с}}$ – работа сил сопротивления, выполненная за то же время.

Величины энергий и работ определяются следующими равенствами:

$$T_0 = \frac{1}{2} J_0^* \omega_0^2, \quad T = \frac{1}{2} J^* \omega^2, \quad A_{\text{д}} = \int_{\alpha_0}^{\alpha} M_{\text{д}}^*(\alpha) d\alpha, \quad A_{\text{с}} = \int_{\alpha_0}^{\alpha} M_{\text{с}}^*(\alpha) d\alpha.$$

Подставляя эти выражения в вышезаписанное равенство, получаем окончательный вид уравнения:

$$\frac{1}{2} J^* \omega^2 - \frac{1}{2} J_0^* \omega_0^2 = \int_{\alpha_0}^{\alpha} M_{\text{д}}^*(\alpha) d\alpha + \int_{\alpha_0}^{\alpha} M_{\text{с}}^*(\alpha) d\alpha.$$

В правой части уравнения подынтегральные выражения представляют собой функции от угла поворота кривошипа, то есть перемещения. Это значит, что данные функции могут быть определены, только если внешние силы также зависят от перемещений. Данное обстоятельство определяет область применения уравнения в интегральной форме.

Так как в правой части уравнения параметры интегрирования и пределы интегрирования совпадают, то подынтегральные выражения можно записать под одним знаком интеграла, то есть

$$\frac{1}{2} J^* \omega^2 - \frac{1}{2} J_0^* \omega_0^2 = \int_{\alpha_0}^{\alpha} M_{\text{изб}}^*(\alpha) d\alpha,$$

где $M_{\text{ёсá}}^*$ – избыточный момент, определяемый суммой $M_{\text{изб}}^* = M_{\text{д}}^* + M_{\text{с}}^*$.

Необходимо иметь в виду, что во всех вычислениях приведённые моменты сил должны подставляться в формулы со своими знаками.

Уравнение движения в дифференциальной форме.
Внешние силы, действующие в машинах, могут зависеть не только от перемещений, но и от скоростей, и от времени. В этих случаях уравнение в интегральной форме неприменимо. Для исследования динамики таких машин применяют более универсальное уравнение, а именно, уравнение в дифференциальной форме. Оно может быть получено из уравнения в интегральной форме путём дифференцирования его по α .

$$\frac{1}{2} \frac{dJ^*}{d\alpha} \omega^2 + \frac{1}{2} J^* 2\omega \frac{d\omega}{d\alpha} = M_{\text{д}}^*(\alpha, \omega, t) + M_{\text{с}}^*(\alpha, \omega, t).$$

Сделав замену $\frac{d\alpha}{dt} = \omega$ и выполнив несложные преобразования, получим окончательно

$$\frac{dJ^*}{d\alpha} \cdot \frac{\omega^2}{2} + J^* \frac{d\omega}{dt} = M_{\text{д}}^*(\alpha, \omega, t) + M_{\text{с}}^*(\alpha, \omega, t).$$

Первое слагаемое левой части представляет собой момент сил инерции, как следствие изменения J^* . Второе слагаемое представляет также момент сил инерции, но как результат изменения ω .

Часто аргументы в функциях правой части опускают и записывают её так: $M_{\text{д}}^* + M_{\text{с}}^*$. Для ротативных машин, у которых, как было сказано, $J^* = \text{const}$, уравнение приобретает вид $J^* \cdot \varepsilon = M_{\text{д}}^* + M_{\text{с}}^*$, где $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}$, поэтому можно записать $J^* \cdot \dot{\omega} = M_{\text{д}}^* + M_{\text{с}}^*$.

6.4. Исследование пуска машины при силах – функциях перемещений

Для исследования задаются в форме графиков (рис. 6.6):

$M_{\text{á}}^*(\alpha)$ – приведённый момент движущих сил в функции угла поворота кривошипа (рис. 6.6, а);

$M_{\text{ñ}}^*(\alpha)$ – приведённый момент сил сопротивления в функции угла поворота кривошипа (рис. 6.6, а);

$J^*(\alpha)$ – приведённый момент инерции механизмов машины (рис. 6.6, б);

а также

$\omega_0 = 0$ – значение угловой скорости ведущего звена в начальном положении.

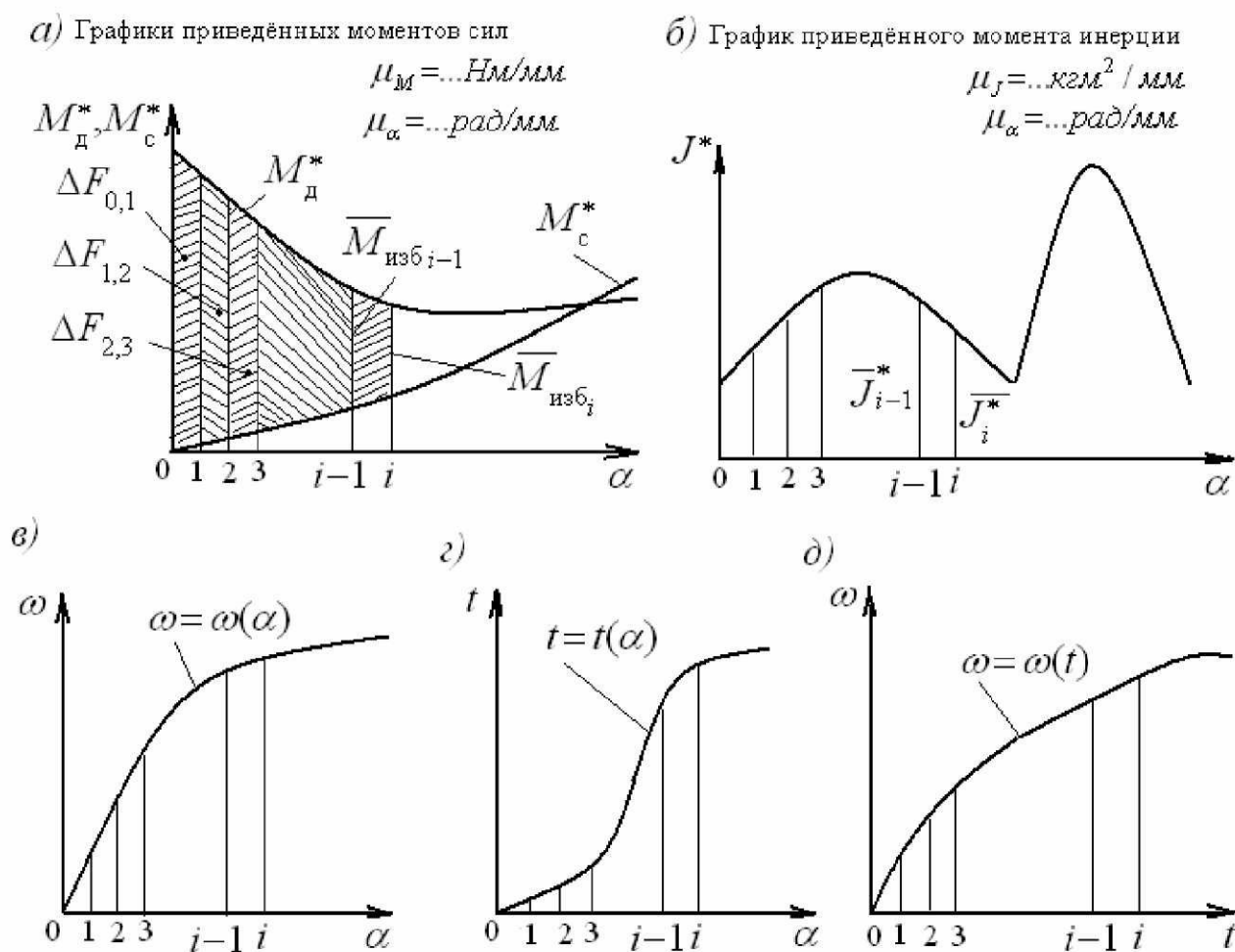


Рисунок 6.6

Для исследования используется уравнение динамики в интегральной форме в виде

$$\frac{1}{2} J^* \omega^2 = \int_0^\alpha M_{\text{изб}}^*(\alpha) d\alpha .$$

Так как правая часть уравнения является избыточной работой, то для краткости записи уравнение можно представить в форме $\frac{1}{2} J^* \omega^2 = A_{\text{изб}}$. Решим

данное уравнение относительно ω : $\omega = \sqrt{\frac{2A_{\text{изб}}}{J^*}} = \omega(\alpha)$. Обратим внимание на

то, что угловая скорость здесь получается как функция от α . Это связано с тем, что все составляющие расчётной формулы также зависят от α .

Как правило, функции приведённых моментов сил выражаются сложными зависимостями от α , а чаще эти зависимости вообще не могут быть найдены в аналитической форме, а только в форме таблиц ряда экспериментальных значений. Поэтому расчёты приходится вести в дискретной форме, введя ранжиро-

ванную переменную i : $\omega(\alpha_i) = \sqrt{\frac{2A_{изб_i}}{J_i^*}}$, где $i = 0, 1, 2, \dots, n$, причём, количество

расчётных точек n можно выбрать любым, но с таким расчётом, чтобы оно заведомо охватывало весь период пуска машины.

Изобразим графики моментов сил в положительной области системы координат (рис. 6.6, а), перенеся условно график M_{Π}^* в эту область для удобства дальнейших действий.

Согласно приведённой выше формуле, для расчёта угловой скорости необходимо вычислить избыточную работу в каждом положении механизма. Она вычисляется через площадки, ограниченные ординатами соседних значений α и кривыми моментов при этих значениях. Это соответствует действию вычисления определённого интеграла, а физически – вычислению избыточной работы, то есть

$$A_{изб_i} = A_{изб_{i-1}} + \Delta F'_{i-1,i} \cdot \mu_M \cdot \mu_\alpha, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где $A_{изб_{i-1}}$ – избыточная работа, выполненная от начального до $i - 1$ -го положения, Дж; $\Delta F'_{i-1,i}$ – добавочная площадка между $i - 1$ -м и i -м положениями.

Так как на малом участке кривую можно заменить отрезком прямой, то указанные фигуры можно рассматривать как трапеции. Поэтому формула для расчёта площадей запишется так:

$$\Delta F_{i-1,i} = \frac{1}{2} (\overline{M_{изб_{i-1}}} + \overline{M_{изб_i}}) \cdot \overline{\Delta\alpha_{i-1,i}}, \text{ мм}^2.$$

Чёрточки сверху над членами данной формулы указывают на то, что эти члены должны подставляться в виде отрезков, взятых с графика (рис. 6.6, а).

Вычисления по этим формулам дают следующие результаты: $A_{изб_0} = 0$, так как все площадки в нулевом положении равны нулю. Это соответствует моменту начала движения машины.

Далее получается:

$$A_{изб_1} = 0 + \Delta F_{0,1} \cdot \mu_M \cdot \mu_\alpha;$$

$$A_{изб_2} = A_{изб_1} + \Delta F_{1,2} \cdot \mu_M \cdot \mu_\alpha;$$

$$A_{изб_3} = A_{изб_2} + \Delta F_{2,3} \cdot \mu_M \cdot \mu_\alpha;$$

и т. д.

Подставив полученные значения избыточной работы в приведённую выше формулу и взяв в соответствующем положении с графика (рис. 6.6, б) величину J_i^* , находим значение угловой скорости в данном, i -м положении. Результаты расчётов угловой скорости представим в виде графика (рис. 6.6, в).

На следующем этапе анализа необходимо найти зависимость времени перехода машины из одного положения в соседнее от угла α . Для этого воспользу-

емя следующими обстоятельствами. Угловая скорость является производной угла поворота по времени, т. е. $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$, откуда $dt = \frac{d\alpha}{\omega}$. Проинтегрируем это

выражение в пределах каждого из интервалов $\int_{t_{i-1}}^{t_i} dt = \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} \frac{d\alpha}{\omega(\alpha)}$. Вычисление

интеграла правой части – задача непростая из-за сложности функции в знаменателе. Поэтому целесообразно воспользоваться приближённой методикой, заключающейся в замене бесконечно малого приращения угла $d\alpha$ конечной величиной $\Delta\alpha$. Если поделить её на среднюю угловую скорость на интервале, то получится искомое время, то есть

$$t_i - t_{i-1} = \Delta t_{i-1,i} = \frac{2\Delta\alpha_{i-1,i}}{\omega_{i-1} + \omega_i}.$$

В итоге получается зависимость между временем движения машины от одного положения до другого и углом поворота ведущего звена между этими положениями $t = t(\alpha)$. Эту зависимость представим в виде графика (рис. 6.6, з).

Для получения закона движения ведущего звена (звена приведения) в форме зависимости $\omega = \omega(t)$ (рис. 6.6, д) теперь достаточно из двух последних графиков (рис. 6.6, в и 6.6, з) исключить параметр α . При этом время необходимо отложить вдоль оси абсцисс с нарастающим итогом, т. е. каждый последующий интервал отложить (в некотором масштабе) из конца предыдущего по следующей схеме: $t_i = t_{i-1} + \Delta t_{i-1,i}$. Дифференцирование по времени полученной в виде

графика функции даст новую функцию $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon(t)$ – функцию зависимости углового ускорения звена приведения от времени.

6.5. Исследование установившегося неравновесного движения машины с маховиком при силах – функциях перемещений

В качестве исходных данных должны быть известны приведённые моменты движущих сил и сил сопротивления – $M_d^*(\alpha)$ и $M_c^*(\alpha)$, приведённый момент инерции механизмов машины – $J^* = J_M + J(\alpha)$, включающий момент инерции маховика J_1 и переменную часть $J(\alpha)$ – приведённый момент инерции механизмов машины. Кроме этого должно быть задано начальное положение механизма, определяемое углом α_0 поворота ведущего звена, и значение угловой скорости ведущего звена в этом положении ω_0 .

В результате анализа требуется найти максимальное ω_{\max} и минимальное ω_{\min} значения угловой скорости, её среднюю величину $\omega_{\text{пб}}$ и коэффициент δ неравномерности движения.

Аналитическое решение. На первом этапе решения определяется избыточная работа или по формуле $A_{\text{изб}} = \int_{\alpha_0}^{\alpha} M_{\text{д}}^*(\alpha) d\alpha + \int_{\alpha_0}^{\alpha} M_{\text{с}}^*(\alpha) d\alpha$, или по формуле $A_{\text{изб}} = \int_{\alpha_0}^{\alpha} M_{\text{изб}}^*(\alpha) d\alpha$, в которой $M_{\text{изб}}^*(\alpha) = M_{\text{д}}^*(\alpha) + M_{\text{с}}^*(\alpha)$.

При этом, если моменты заданы в виде графиков, что чаще всего бывает, то можно воспользоваться графическим интегрированием или способом площадей, как было описано выше, или другим известным способом.

На втором этапе решения определяется зависимость $\omega = \omega(\alpha)$. Для этого уравнение в интегральной форме записывается в виде $\frac{1}{2} [J_{\text{м}} + J(\alpha)] \cdot \omega^2 - T_0 = A_{\text{изб}}$. В этом уравнении $T_0 = \frac{1}{2} [J_{\text{м}} + J(\alpha_0)] \cdot \omega_0^2$ и представляет собой конкретное число, определяемое по исходным данным.

Таким образом, получается из уравнения в интегральной форме искомое выражение, из которого легко найти ω

$$\frac{1}{2} \omega^2 = \frac{T_0 + A_{\text{изб}}}{J_{\text{м}} + J(\alpha)}. \quad (*)$$

Рассматривая один цикл установившегося движения машины, определяют n значений угловой скорости, из которых выбирают ω_{\max} и ω_{\min} .

$$\text{По ним находят } \omega_{\text{ср}} = \frac{1}{2} (\omega_{\max} + \omega_{\min}),$$

а затем – коэффициент неравномерности движения $\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{\text{ср}}}$.

Графическое решение. Для графического решения задачи выберем прямоугольную систему координат (рис. 6.7), вдоль оси абсцисс которой в некотором масштабе $\mu_J = \dots \text{кгм}^2/\text{мм}$ отложим значения $J_{\text{м}} + J(\alpha)$, а вдоль оси ординат – значения кинетической энергии T в масштабе $\mu_T = \dots \text{Дж}/\text{мм}$.

При этом отрезок $\overline{J_1}$ оси абсцисс выражает момент инерции маховика, а отрезок $\overline{T_0}$ оси ординат выражает величину кинетической энергии в начальный момент времени. Через правый конец отрезка $\overline{J_1}$ проведём вертикальную прямую, а через верхний конец отрезка $\overline{T_0}$ – горизонтальную прямую. Точка пересечения этих прямых даст начало смещённой системы координат O' , по оси абсцисс которой будем откладывать переменную часть приведённого момента

инерции механизма $J(\alpha)$, а по оси ординат – изменение кинетической энергии ΔT , равное избыточной работе $A_{\text{эсá}}$. Для удобства дальнейших построений график избыточной работы разместим так, чтобы его ось абсцисс проходила на расстоянии $\overline{T_0}$ от оси J^* . График $J(\alpha)$ повернём по часовой стрелке на 90° и его ось абсцисс совместим с вертикальной прямой, проходящей через конец отрезка $\overline{J_1}$. Далее, исключаем параметр α из графиков $J(\alpha)$ и $A_{\text{эсá}}$ и строим в правом верхнем углу плавную кривую, соединяя последовательно точки 0, 1, 2, 3, ..., n . Полученная кривая зависимости $A_{\text{изб}} = A_{\text{изб}}[J(\alpha)]$ называется *диаграммой энергомасс*.

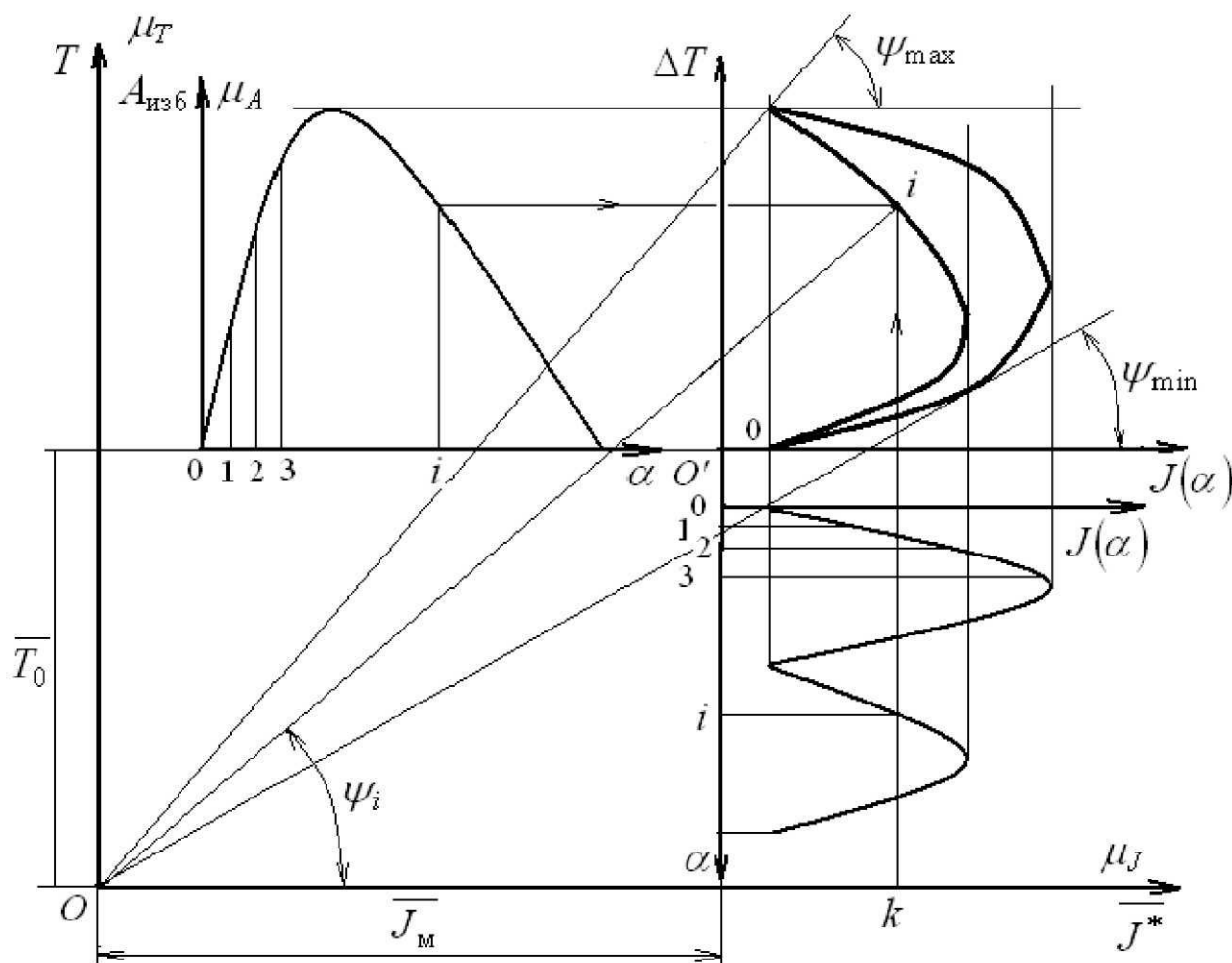


Рисунок 6.7

Возьмём на кривой диаграммы энергомасс произвольную точку i и соединим её с истинным началом O координат диаграммы. Отметим угол, образованный прямой Oi с осью абсцисс, как ψ_i . Затем опустим перпендикуляр ik из точки i на ось абсцисс. Как видим из рис. 6.7, тангенс угла ψ_i может быть определён из отношений

$$\operatorname{tg}\psi_i = \frac{\overline{ik}}{Ok} = \frac{T_0 + A_{\text{изб}}}{\mu_T} \cdot \frac{\mu_J}{J_M + J(\alpha)},$$

или

$$\frac{\mu_I}{\mu_J} \cdot \operatorname{tg} \psi_i = \frac{T_0 + A_{\text{изб}}}{J_M + J(\alpha)}$$

Правая часть этого выражения совпадает с правой частью выражения (*), поэтому их левые части также одинаковы, то есть

$$\frac{1}{2} \cdot \omega_i^2 = \frac{\mu_I}{\mu_J} \cdot \operatorname{tg} \psi_i$$

Такие же расчёты можно сделать для любой другой точки диаграммы, поэтому можно утверждать, что *прямая, соединяющая любую точку диаграммы энергомасс с истинным началом координат, образует с осью абсцисс этой диаграммы угол, тангенс которого пропорционален половине квадрата угловой скорости звена приведения (ведущего звена) в положении механизма, определяемом данной точкой.*

Сформулированное свойство диаграммы энергомасс позволяет определить угловую скорость входного звена механизма в любом его положении. Для определения ω_{\max} и ω_{\min} необходимо провести из начала координат O прямые, касающиеся кривой графика сверху и снизу. Верхняя прямая образует с осью абсцисс угол ψ_{\max} , нижняя – угол ψ_{\min} , причём на основании предыдущего имеем следующие равенства:

$$\frac{\mu_I}{\mu_J} \cdot \operatorname{tg} \psi_{\max} = \frac{1}{2} \cdot \omega_{\max}^2, \quad \frac{\mu_I}{\mu_J} \cdot \operatorname{tg} \psi_{\min} = \frac{1}{2} \cdot \omega_{\min}^2,$$

из которых находятся значения ω_{\max} и ω_{\min} , а затем определяется $\omega_{\text{н\ddot{o}}}$:

$$\omega_{\text{cp}} = \frac{1}{2} \cdot (\omega_{\max} + \omega_{\min}).$$

Наконец, последний расчёт даёт $\delta = \frac{(\omega_{\max} - \omega_{\min})}{\omega_{\text{cp}}}$.

6.6. Определение момента инерции маховика при внешних силах – функциях перемещений

Точное решение. Эта задача, как было указано выше, является обратной задачей динамики, а именно – задачей динамического синтеза. Исходными данными для решения являются приведённые моменты сил $M_{\ddot{a}}^*(\alpha)$ и $M_c^*(\alpha)$ и переменная часть приведённого момента инерции механизмов машины $J(\alpha)$. Кроме этого, задаются кинематические параметры – средняя угловая скорость $\omega_{\text{н\ddot{o}}}$ звена приведения и коэффициент неравномерности его движения δ .

Задача заключается в определении момента инерции маховика, который должен обеспечить заданную величину δ .

Любым из известных способов определяем избыточную работу $A_{\text{изб}}$ и представляем её в виде графика (рис. 6.8). В правом нижнем углу графика помещаем диаграмму приведённого момента инерции $J(\alpha)$, повернув её на 90° по направлению хода часовой стрелки.

Графическим исключением параметра α из графиков $A_{\text{изб}}(\alpha)$ и $J(\alpha)$ строим диаграмму энергомасс. Для определения момента инерции маховика J_1 необходимо найти положение фактического начала координат O диаграммы энергомасс как точку пересечения касательных к кривой графика, проведённых под углами ψ_{max} и ψ_{min} . Чтобы найти эти углы, необходимо сначала определить ω_{max} и ω_{min} , решив систему уравнений

$$\frac{\omega_{\text{max}} + \omega_{\text{min}}}{2} = \omega_{\text{ср}},$$

$$\frac{\omega_{\text{max}} - \omega_{\text{min}}}{\omega_{\text{ср}}} = \delta.$$

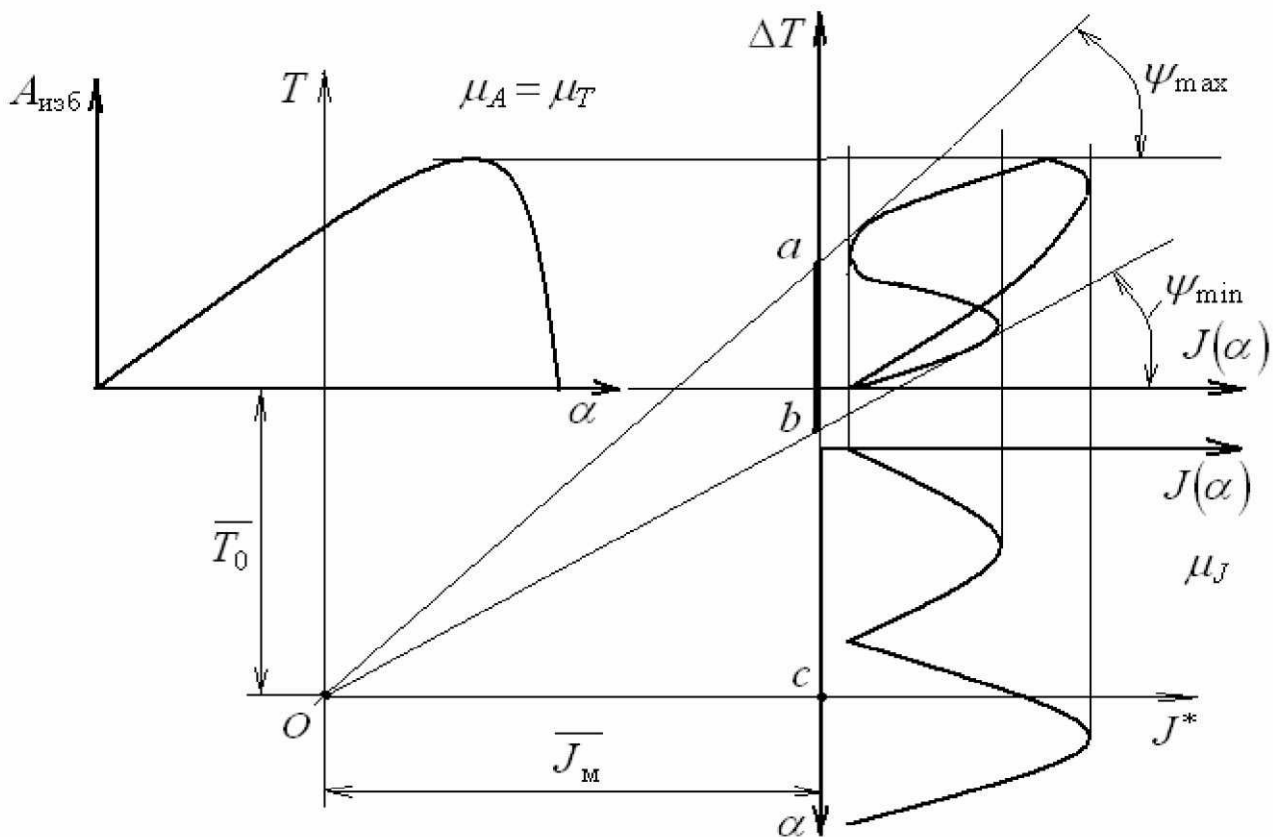


Рисунок 6.8

Решение этой системы даёт

$$\omega_{\max} = \omega_{\text{ср}} \left(1 + \frac{\delta}{2} \right) \text{ и } \omega_{\min} = \omega_{\text{ср}} \left(1 - \frac{\delta}{2} \right).$$

Из приведённых выше формул определяем углы через их тангенсы

$$\operatorname{tg}\psi_{\max} = \frac{1}{2} \omega_{\max}^2 \frac{\mu_J}{\mu_T}, \quad \operatorname{tg}\psi_{\min} = \frac{1}{2} \omega_{\min}^2 \frac{\mu_J}{\mu_T}.$$

Под углом ψ_{\max} проводим касательную к линии графика в верхней его части, а под углом ψ_{\min} – в нижней части. Касательные пересекаются друг с другом в точке O , расстояние $\overline{J_1}$ от которой до оси ΔT в масштабе μ_J выражает момент инерции маховика. Так что $J_M = \overline{J_M} \cdot \mu_J$.

Из-за малой величины δ значения ω_{\max} и ω_{\min} и, соответственно, ψ_{\max} и ψ_{\min} мало отличаются друг от друга, а потому касательные почти параллельны. В связи с этим точка O пересечения касательных находится далеко за пределами диаграммы энергомасс, и определение отрезка $\overline{J_1}$ затруднительно. Поэтому расчёт момента инерции маховика производится через отрезок \overline{ab} , который получается на оси ΔT (рис. 6.8) между точками пересечения касательных с этой осью.

Для вывода расчётной формулы выразим, согласно рис. 6.8, длину этого отрезка и затем выполним соответствующие преобразования:

$$\begin{aligned} \overline{ab} &= \overline{ak} - \overline{bk} = \overline{J_M} \cdot \operatorname{tg}\psi_{\max} - \overline{J_M} \cdot \operatorname{tg}\psi_{\min} = \\ &= \overline{J_M} \cdot (\operatorname{tg}\psi_{\max} - \operatorname{tg}\psi_{\min}) = \overline{J_M} \cdot \frac{1}{2} \frac{\mu_J}{\mu_T} (\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2). \end{aligned}$$

Разложив разность квадратов в скобках на множители и заменив последние их выражениями, полученными из приведенных выше формул для вычисления $\omega_{\text{ср}}$ и δ , запишем

$$(\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2) = (\omega_{\max} + \omega_{\min})(\omega_{\max} - \omega_{\min}) = 2\delta\omega_{\text{ср}}^2.$$

Подставив результат разложения в предыдущее выражение, находим

$$\overline{ab} = \overline{J_M} \mu_J \cdot \frac{1}{2\mu_T} 2\delta\omega_{\text{ср}}^2 = \overline{J_M} \frac{2\delta\omega_{\text{ср}}^2}{\mu_T}.$$

Решив это выражение относительно $\overline{J_1}$, получаем искомую формулу

$$\overline{J_M} = \frac{\overline{ab} \cdot \mu_T}{\delta\omega_{\text{ср}}^2}.$$

Приближённое решение. В тяжело нагруженных тихоходных машинах, имеющих большие значения избыточных работ, углы наклона касательных к диаграмме энерго масс часто бывают невелики, или даже близкими к нулю. Для расчёта момента инерции маховика такой машины в некоторых случаях целесообразно принять допущение, что разность между максимальным и минимальным значениями кинетической энергии машины, численно равная максимальному перепаду избыточной работы, полностью поглощается маховиком. Для иллюстрации этого служит рис. 6.9. Допущение здесь заключается в том, что мы пренебрегаем той частью кинетической энергии, которая поглощается звеньями механизма.

Обозначим перепад избыточной работы $\Delta A_{\text{изб}} = A_{\text{изб}}^{\text{max}} - A_{\text{изб}}^{\text{min}}$, который вычисляется с учётом знаков слагаемых. Согласно принятому допущению, эта величина составляет разность между максимальным и минимальным значениями кинетической энергии маховика $\Delta T_{\text{м}} = T_{\text{м}}^{\text{max}} - T_{\text{м}}^{\text{min}}$, то есть $\Delta A_{\text{изб}} = \Delta T_{\text{м}}$.

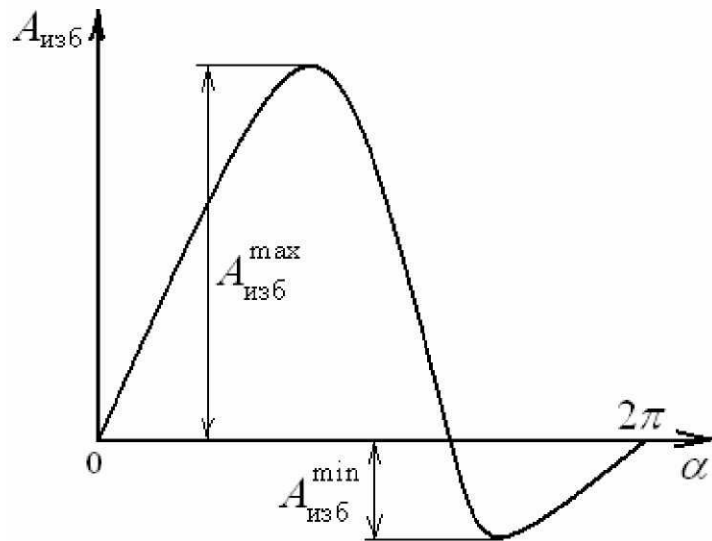


Рисунок 6.9

Максимальная величина кинетической энергии маховика вычисляется по формуле

$$T_{\text{м}}^{\text{max}} = \frac{1}{2} J_{\text{м}} \omega_{\text{max}}^2,$$

минимальная величина вычисляется по формуле

$$T_{\text{м}}^{\text{min}} = \frac{1}{2} J_{\text{м}} \omega_{\text{min}}^2.$$

Поэтому разность этих величин даёт выражение

$$\Delta T_{\text{м}} = \frac{1}{2} J_{\text{м}} (\omega_{\text{max}}^2 - \omega_{\text{min}}^2).$$

Объединяя результаты выкладок, имеем $\Delta T_{\text{м}} = J_{\text{м}} \delta \omega_{\text{ср}}^2$, а значит, и $\Delta A_{\text{изб}} = J_{\text{м}} \delta \omega_{\text{ср}}^2$, откуда окончательно получаем

$$J_{\text{м}} = \frac{\Delta A_{\text{изб}}}{\delta \omega_{\text{ср}}^2}.$$

Как видно из формул расчёта момента инерции маховика, достичь полного постоянства угловой скорости невозможно, так как для этого необходимо иметь бесконечно большой маховик (в знаменателе требуется $\delta = 0$). Ясно также, что увеличение скорости вращения маховика ведёт к уменьшению его массы и размеров, поэтому целесообразно маховик устанавливать на более быстроходный вал.

6.7. Назначение маховика в машине

Маховик служит для уменьшения колебаний величины угловой скорости ведущего звена, уменьшения угловых ускорений и, в конечном итоге, инерционных воздействий. Этот эффект, называемый *кинематическим*, тем больше, чем больше момент инерции маховика. Кинематический эффект легко обнаруживается, если выразить δ из последней формулы $\delta = \frac{\Delta A_{\text{изб}}}{J_M \cdot \omega_{\text{ср}}^2}$, откуда видно,

что, при прочих равных условиях, чем больше J_1 , тем меньше δ , то есть тем меньше разность между ω_{max} и ω_{min} . Это значит, что действительно, при более массивном маховике более плавно изменяется угловая скорость входного звена.

Кинематический эффект маховика тесно связан с *динамическим эффектом*, который заключается в том, что маховик выступает как *аккумулятор кинетической энергии*. Он накапливает кинетическую энергию, принимая на себя часть избыточной работы, в те промежутки времени, когда возрастает его угловая скорость. Иначе эта энергия тратилась бы на разгон машины. При уменьшении угловой скорости маховик отдаёт часть накопленной энергии, помогая движущим силам выполнять полезную работу и препятствуя существенному уменьшению угловой скорости.

В качестве примера рассмотрим функционирование машины ударного действия в течение одного цикла установившегося движения (рис. 6.10). На главный вал машины (входное звено) действуют постоянный по величине приведённый момент движущих сил $M_{\text{д}}^*$, показанный на графике горизонтальной прямой в положительной области, и переменный приведённый момент сил сопротивления

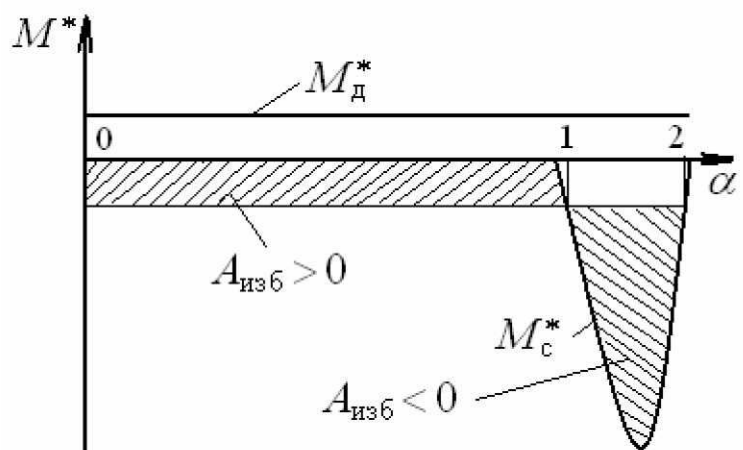


Рисунок 6.10

сопротивления $M_{\text{н}}^*$, показанный в отрицательной области. Для удобства рассуждений перенесем условно $M_{\text{д}}^*$ в отрицательную область графика.

На участке 0 – 1 цикла движения момент сопротивления не действует, а движущий момент выполняет положительную работу, которая целиком переходит в избыточную, причём, здесь $A_{изб} > 0$ (на графике она показана в виде заштрихованной области). Эта работа переходит в кинетическую энергию машины, увеличивая скорости движения её элементов, в том числе и маховика. На участке 1 – 2 движущий момент продолжает действовать, но к нему добавляется момент сопротивления, который в несколько раз превышает движущий. В результате одновременного действия моментов совершается избыточная работа, которая из-за превосходства момента сопротивления над движущим имеет отрицательный знак, то есть $A_{еца} < 0$. Естественно, что при таком соотношении моментов машина не могла бы преодолеть силы сопротивления, или пришлось бы устанавливать такой приводной электродвигатель, который развивал бы движущий момент, равный максимальному моменту сопротивления. Причём, большую часть цикла двигатель бы работал вхолостую. Однако с помощью маховика, за счёт кинетической энергии, накопленной им на участке положительной избыточной работы, машина легко преодолевает силы сопротивления на участке 1 – 2, имея двигатель небольшой мощности. Без маховика такая машина не могла бы работать.

Кроме рассмотренной функции, маховик выполняет также задачу *вывода механизма машины из неопределённых (мёртвых) положений*, когда за счёт своей энергии вращения он вынуждает главный вал машины вращаться в ту же сторону, в которую он вращался до этого положения.

6.8. Исследование пуска машины при силах – функциях скоростей

Этот случай является типичным для машин ротативного типа, имеющих $J^* = const$, с приводом от электродвигателя. Движущий момент определяется механической характеристикой $M_d = M_d(\omega)$, а момент сил сопротивления часто является постоянной величиной (вентиляторы, мешалки, центрифуги, осевые или центробежные насосы и т. д.).

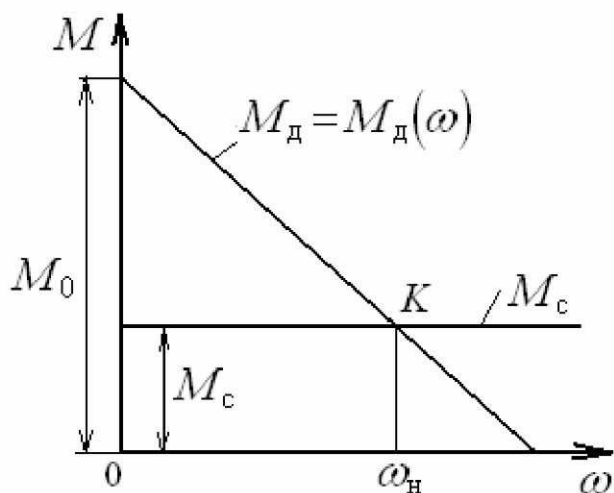


Рисунок 6.11

Предположим, что двигателем является электромотор постоянного тока, характеристика которого приблизительно прямолинейна: $M_d = M_0 - b\omega$, где M_0 – пусковой момент (рис. 6.11). Приведённые к валу мотора силы сопротивления дают постоянный приведённый момент $M_c = const$. Приведённый момент инерции также постоянен, то есть $J^* = J = const$. Когда машина достигнет установившегося режима

движения, скорость её вала станет $\omega = \omega_H$. Это произойдёт при равенстве моментов $M_D = M_C = M_0 - b\omega_H$ в точке K , в которой пересекаются характеристики $M_{\dot{a}}$ и $M_{\dot{n}}$. Из этого равенства определится коэффициент b , то есть $b = \frac{M_0 - M_C}{\omega_H}$.

Уравнение динамики для данных условий запишется так:

$$J \cdot \frac{d\omega}{dt} = M_D - M_C = M_0 - \frac{M_0 - M_C}{\omega_H} \omega - M_C,$$

или, после выполнения действий в правой части,

$$J \cdot \frac{d\omega}{dt} = M_0 \cdot \left(1 - \frac{\omega}{\omega_H}\right) - M_C \cdot \left(1 - \frac{\omega}{\omega_H}\right).$$

Множители в скобках в правой части уравнения одинаковы, поэтому можно записать

$$J \cdot \frac{d\omega}{dt} = (M_0 - M_C) \cdot \left(1 - \frac{\omega}{\omega_H}\right).$$

Поскольку $M_0 > 0$, т. к. это движущий момент, а $M_C < 0$, так как это момент сопротивления, то разность моментов в скобках уравнения, по существу, представляет их сумму с учётом знаков и является избыточным моментом в самом начале пуска, то есть $M_0 - M_C = M_{изб_0}$. Таким образом, окончательно дифференциальное уравнение движения машины запишется так

$$J \cdot \frac{d\omega}{dt} = M_{изб_0} \cdot \left(1 - \frac{\omega}{\omega_H}\right).$$

В качестве примера воспользуемся полученным уравнением для анализа пуска машины с конкретными данными. Пусть в момент пуска величина избыточного момента $M_{изб_0} = 0,5 \text{ Нм}$, приведённый момент инерции $J = 0,01 \text{ кгм}^2$, номинальная угловая скорость в конце пуска $\omega_H = 100 \text{ рад/с}$. Под номинальной понимается угловая скорость установившегося движения. Для решения дифференциального уравнения необходимо задаться также временем пуска, поэтому примем его произвольное значение $T_H = 12 \text{ с}$. Эти исходные данные приведены в программе решения с помощью математического пакета MathCAD (Листинг 6.1). Обозначения величин в листинге несколько изменены в соответствии с необходимостью их представления в пакете.

Εξήγησις 6.1

Διαγράμματα αλγόριθμου επίλυσης διαφορικών εξισώσεων

Επιμέτρηση παραμέτρων

$$M\epsilon\acute{\sigma}\acute{\alpha}_0 := 0.51 \hat{H} \quad J := 0.01 \epsilon\acute{\alpha}\tilde{\iota}^2 \quad \omega\acute{\iota} := 100 \tilde{n}^{-1} \quad T := 12$$

Προσδιορισμός διαφορικών

Given

$$\frac{d}{dt}\omega(t) = \frac{M\epsilon\acute{\sigma}\acute{\alpha}_0}{J} \left(1 - \frac{\omega(t)}{\omega\acute{\iota}} \right) \quad \omega(0) = 0 \quad \omega := \text{Odesolve}(t, T)$$

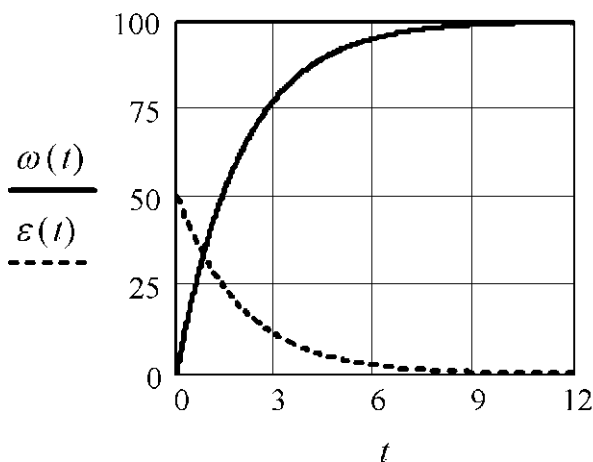
Διαφορική εξίσωση

$$\epsilon(t) := \frac{d}{dt}\omega(t)$$

$$n := 12$$

$$i := 0, 1 \dots n$$

$$t(i) := \frac{T}{n} \cdot i$$



$i =$	$t(i) =$	$\omega((i)) =$
0	0	0
1	1	39.95
2	2	63.941
3	3	78.346
4	4	86.997
5	5	92.192
6	6	95.311
7	7	97.184
8	8	98.309
9	9	98.985
10	10	99.39
11	11	99.634
12	12	99.78

Программа составляется согласно методике, разработанной для решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) в указанном пакете. Сначала вводится ключевое слово Given, за которым следуют: решаемое ОДУ, начальное условие, согласно задаче Коши, и затем – встроенная функция Odesolve с указанием аргумента (в данном случае t) и принятого конечного значения T его изменения.

Результат решения представляется в виде графика искомой функции $\omega = \omega(t)$ и таблицы числовых значений угловой скорости для выбранного коли-

чества точек в пределах изменения времени $0 < t < T$. Из графика и таблицы видно, что процесс пуска заканчивается приблизительно к девятой секунде после начала, так как в дальнейшем изменение скорости ω практически отсутствует. Это подтверждается и графиком функции углового ускорения $\varepsilon = \varepsilon(t)$, который выведен также в качестве результата анализа процесса пуска. На этом графике видно, что после точки $t = 9$ угловое ускорение практически равно нулю. Так что можно принять $t_{\text{пуска}} = 9$ с. К этому времени угловая скорость машины не достигает своего номинального значения всего на один процент.

6.9. Исследование устойчивости установившегося равновесного движения

Во многих случаях работы агрегатов (машин, составляющих комплекс из машины-двигателя, передаточного механизма и машины-орудия) из-за внешних причин могут изменяться приложенные к нему силы сопротивления. Например, в энергетическом агрегате может уменьшиться нагрузка на генератор при отключении ряда потребителей. В прокатном стане могут увеличиться сопротивления из-за повышения твёрдости прокатываемого металла и т. д. При этом существует опасность в первом случае бесконечного увеличения скорости вращения главного вала (говорят, «двигатель пошёл в разнос») (участок I после точки K на рис. 6.12, а), во втором случае – опасность полной остановки прокатного стана (участок II после точки K на рис. 6.12, а). В обоих случаях можно говорить о *неустойчивой работе агрегатов*, когда *небольшое изменение нагрузки вызывает большое изменение скорости*.

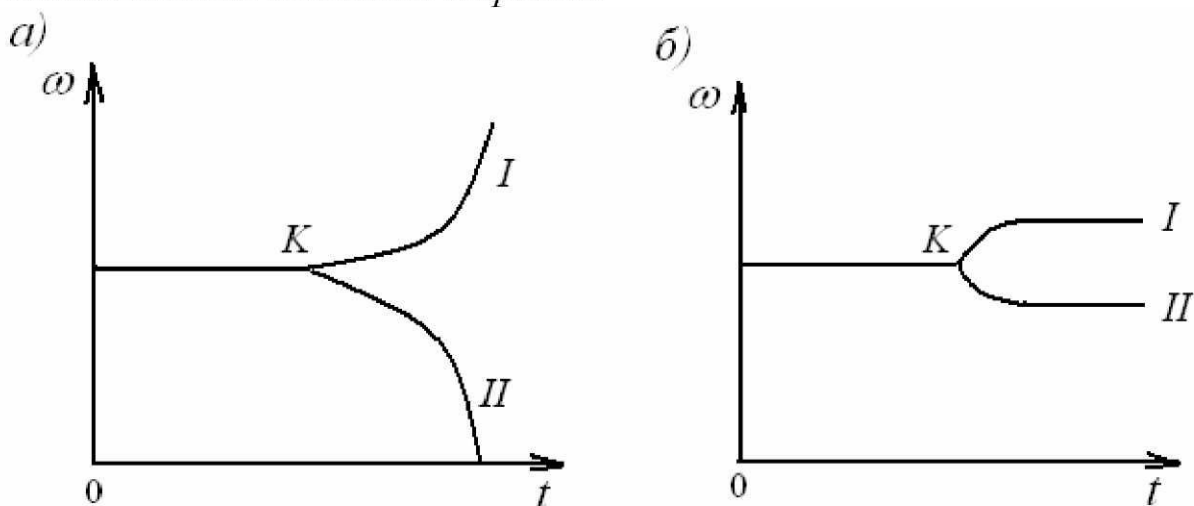


Рисунок 6.12

Устойчивым является такое движение, при котором изменению внешней нагрузки соответствует конечное (небольшое) изменение скорости движения машины (рис. 6.12, б). При этом с уменьшением нагрузки кривая угловой скорости переходит в участок I после точки K, с увеличением нагрузки – в участок II. Задача исследования на устойчивость решается с помощью механических характеристик движущих сил и сил сопротивления.

Представим, что в машинном агрегате движущий момент возрастает с увеличением угловой скорости главного вала (рис. 6.13, а), а момент сил сопротивления, наоборот, уменьшается. Кривые моментов пересекаются в точке, абсцисса которой соответствует угловой скорости установившегося движения $\omega_{\text{устан}}$. При внезапном увеличении момента сопротивления форма его характеристики не меняется, но она переходит из положения $M_{\text{н}}$ в положение $M'_{\text{н}}$. Избыточный момент, определяемый суммой $M_{\text{а}}$ и $M_{\text{н}}$, в данном случае равен разности их модулей, то есть $|M_{\text{изб}}| = |M_{\text{д}}| - |M'_{\text{с}}|$, причём имеет отрицательный знак, так как $|M'_{\text{с}}| < |M_{\text{д}}|$. Вследствие этого, согласно уравнению динамики в дифференциальной форме, происходит уменьшение угловой скорости главного вала. Так как это приводит к возрастанию модуля избыточного момента, то процесс продолжается до полной остановки агрегата (кривая ω' на рис. 6.13, б).

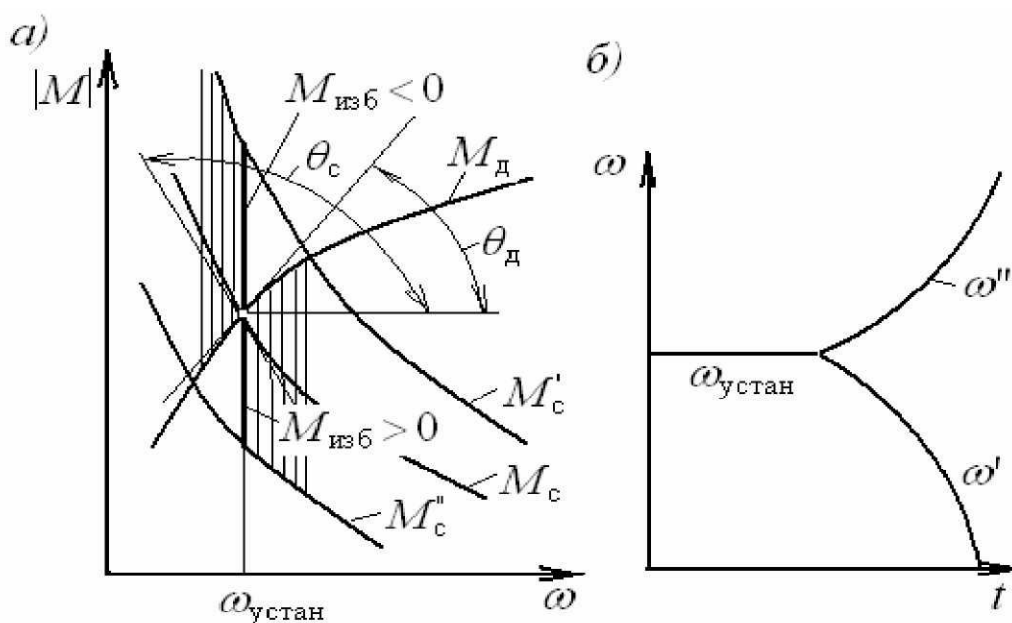


Рисунок 6.13

При внезапном уменьшении нагрузки, то есть снижении величины момента сопротивления, его кривая переходит в положение $M''_{\text{н}}$. Модуль момента сопротивления становится меньше модуля движущего момента, угловая скорость возрастает за счет положительного избыточного момента. По мере его роста угловая скорость всё увеличивается до теоретически беспредельной величины. Её график ω'' показан на рис. 6.13, б. Естественно, что в этих условиях работа агрегата неустойчива.

Проведём на рис. 6.13, а в исходной точке пересечения характеристик, соответствующей $\omega_{\text{устан}}$, касательные к кривым моментов. Они образуют с осью абсцисс углы $\theta_{\text{а}}$ – касательная к кривой момента $M_{\text{а}}$, и $\theta_{\text{н}}$ – касательная к

кривой момента $M_{\text{н}}$. Так как угол $\theta_{\text{д}}$ располагается в первой четверти, а угол $\theta_{\text{н}}$ – во второй, то имеет место соотношение $\text{tg}\theta_{\text{д}} > \text{tg}\theta_{\text{н}}$. Имея в виду, что тангенс угла наклона касательной к кривой в данной точке численно равен производной, то можно записать $\frac{dM_{\text{д}}}{d\omega} > \frac{dM_{\text{с}}}{d\omega}$, что соответствует неустойчивости движения.

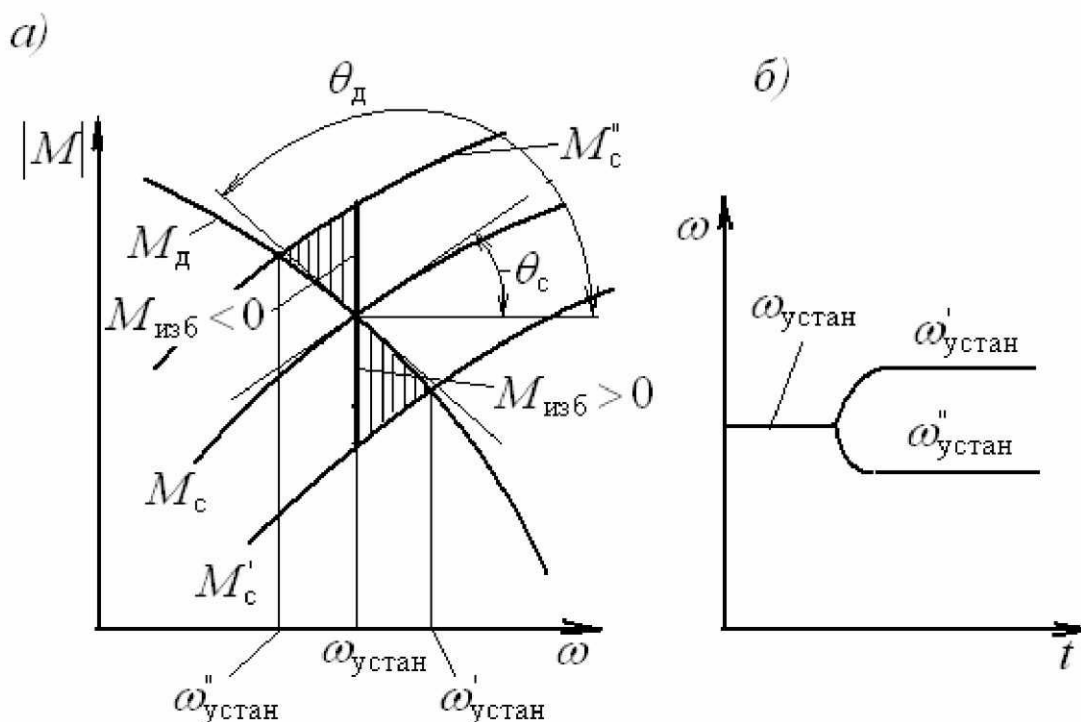


Рисунок 6.14

Рассмотрим ситуацию, показанную на рис. 6.14, а. На этом рисунке также показаны механические характеристики машинного агрегата в виде зависимостей моментов движущих сил и сил сопротивления от угловой скорости. Однако момент движущих сил уменьшается с увеличением угловой скорости, а момент сопротивления увеличивается. При внезапном уменьшении нагрузки момент сопротивления переходит в положение $M'_{\text{н}}$, а избыточный момент $M_{\text{изб}} > 0$. Это приводит к возрастанию угловой скорости, но не безгранично, как было в предыдущем случае, а на некоторую величину. Моменты движущих сил и сил сопротивления снова становятся одинаковыми, и угловая скорость перестаёт увеличиваться, приняв новое значение угловой скорости установившегося движения $\omega'_{\text{устан}}$. При увеличении нагрузки момент сопротивления изменяется по кривой $M''_{\text{н}}$, и избыточный момент становится меньше нуля, то есть $M_{\text{изб}} < 0$. Это значит, что имеет место соотношение $|M_{\text{с}}| > |M_{\text{д}}|$, что приводит к уменьшению угловой скорости до величины, при которой сравниваются значе-

ния моментов сил. Угловая скорость установившегося движения в этом случае получает значение $\omega''_{\text{опòàí}}$.

Проведя касательные к кривым моментов, видим, что $\text{tg}\theta_{\text{д}} < \text{tg}\theta_{\text{с}}$, то есть

$$\frac{dM_{\text{д}}}{d\omega} < \frac{dM_{\text{с}}}{d\omega},$$

что соответствует устойчивому движению. Следовательно, данное соотношение производных может быть принято в качестве *критерия устойчивости, который утверждает, что если производная движущего момента по угловой скорости меньше производной момента сопротивления по тому же параметру, то движение машинного агрегата устойчиво*. В противном случае оно неустойчиво.

Рассмотренная задача обеспечения устойчивости установившегося движения предполагает изменение угловой скорости. Для того чтобы при изменении внешних нагрузок восстановить расчётное значение угловой скорости, надо изменить (уменьшить или увеличить) мощность движущих сил, подводимых к машине.

Для этого надо, чтобы специальное устройство отметило изменение скорости и привело в действие исполнительные органы, регулирующие физические параметры, определяющие уровень мощности, развиваемой двигателем. Такие устройства называют *регуляторами скорости*. В период работы регулятора машина приобретает дополнительные степени свободы, а её движение описывается несколькими дифференциальными уравнениями, составляющими систему. Теорию и методы регулирования изучает специальная дисциплина – основы автоматического регулирования.

Вопросы для самопроверки

1. Какие задачи решаются при исследовании динамики машин?
2. Что представляет собой динамическая модель машины? Какие характеристики имеет динамическая модель машины?
3. Что называется приведённым моментом инерции механизма?
4. Что называется приведённым моментом сил сопротивления, движущих сил?
5. Какая теорема механики положена в основу уравнений динамики машин? Дайте её формулировку.
6. Как записать кратчайшую форму уравнения динамики?
7. Что такое избыточная работа?
8. Какие виды (режимы) движения существуют в машинах?
9. Чем характеризуются пуск, остановка и установившиеся режимы работы машин? Назовите установившиеся режимы работы.
10. Что такое коэффициент неравномерности движения машины?
11. Какие существуют формы уравнений движения машин и каковы области их применения? Запишите уравнения движения машин.

12. Как определяется средняя величина угловой скорости ведущего звена?
13. Что такое диаграмма энергомасс?
14. В чём заключается основное свойство диаграммы энергомасс?
15. Как определяется момент инерции маховика с использованием диаграммы энергомасс?
16. Как влияют на момент инерции маховика средняя угловая скорость и коэффициент неравномерности движения?
17. Какое допущение принято для приближённого определения момента инерции маховика?
18. Для чего предназначен маховик в машине?
19. В чём заключаются кинематический и динамический эффекты действия маховика?
20. Как выбрать целесообразное место установки маховика в машине?
21. Объясните, что значит устойчивый и неустойчивый характер работы машины. Что называют критерием устойчивости?

7. Проблемы уравнивания и балансировки звеньев и механизмов

7.1. Значение проблемы уравнивания и балансировки в машинах

Звенья, механизмы, различные устройства, функционирующие в составе машин, во многих случаях имеют такие формы и размеры, которые вызывают появление сил инерции переменных направлений и величин. Иногда причинами возникновения сил инерции могут служить непостоянства плотности материалов, из которых выполнены элементы машин. В процессе работы машины такие силы вызывают в направлении их действия дополнительные реакции в кинематических парах, динамические напряжения в звеньях, увеличивают потери на трение, тем самым снижая КПД машины. Если в этих направлениях имеется возможность движения (степень свободы), то возникают вынужденные колебания, влияющие на выполнение технологической операции и часто приводящие к существенным ошибкам при изготовлении продукции.

Во вращающихся звеньях можно так расположить массы по отношению к опоре, чтобы элементарные силы инерции были попарно равны и направлены в противоположные стороны. Тогда все эти силы звена взаимно уравниваются, и кинематические пары звеньев с опорами не будут испытывать динамических давлений. Такое звено называют *уравновешенным*.

Эффект неуравновешенности в жёстких механических системах. Жёсткой можно назвать такую механическую систему, в которой *отношение силы к деформации, происходящей под её воздействием, называемое жёсткостью*, имеет заведомо большую величину. Пусть для примера имеется ротор с массой $m = 3 \text{ кг}$, вращающийся с частотой $n = 10000 \text{ об/мин}$ (такая частота встречается, например, в бытовых пылесосах). Центр масс ротора

смещён от оси вращения на величину $e = 1 \text{ мм} = 0,001 \text{ м}$. Центробежная сила инерции ротора в этих условиях составляет

$$P_{\text{и}} = m \cdot e \cdot \left(\frac{\pi \cdot n}{30} \right)^2 = 3 \cdot 0,001 \cdot \left(\frac{\pi \cdot 10000}{30} \right)^2 = 3307,5 \text{ Н}.$$

Как видим, сила инерции даже в жёсткой механической системе является весьма внушительной величиной. Вращаясь вместе с ротором, эта сила вызовет появление динамических давлений переменного направления в подшипниках, которые в 112 раз больше силы веса самого ротора ($G = m \cdot g = 3 \cdot 9,81 = 29,43 \text{ Н}$).

Так как центробежные силы инерции пропорциональны квадрату угловой скорости, то с увеличением скоростей машин задача об уравнивании вращающихся звеньев приобретает всё большее значение.

Э ф ф е к т н е у р а в н о в е ш е н н о с т и в н е ж ё с т к и х м е х а н и ч е с к и х с и с т е м а х. Для примера рассмотрим вращение круглого диска, насаженного на нежёсткий вал, вращающийся в опорах (рис. 7.1). Для упрощения задачи ось вала расположим вертикально, чтобы исключить действие силы

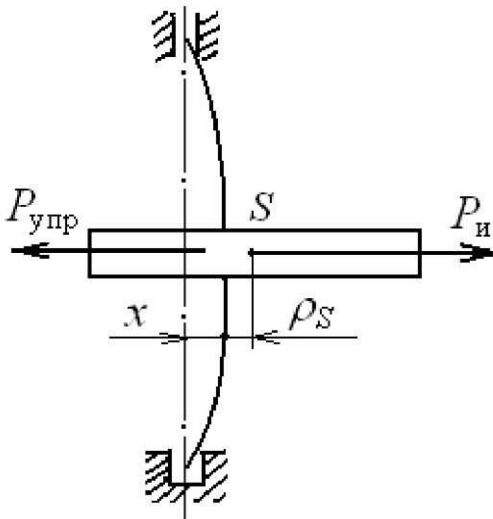


Рисунок 7.1

веса диска, а вал будем считать невесомым. Когда диск неподвижен, ось вала прямолинейна, и в этом положении видно смещение центра масс S диска относительно оси вала на величину ρ_S . Когда диск вращается, возникает центробежная сила инерции, определяемая равенством $P_{\text{и}} = m(x + \rho_S)\omega^2$, где m – масса диска, кг, x – прогиб вала в месте расположения диска, м. Система удерживается в равновесном состоянии за счёт силы упругости вала $P_{\text{упр}} = cx$, где c – коэффициент жёсткости вала, $\text{Н} / \text{м}$. То есть имеет место равенство $P_{\text{и}} = P_{\text{упр}}$. Подставляя сюда полу-

ченные ранее выражения, имеем $m(x + \rho_S)\omega^2 = cx$. Находим x из этого урав-

$$\text{нения } x = \frac{m\rho_S\omega^2}{c - m\omega^2}, \text{ тогда } P_{\text{и}} = m \left(\frac{m\rho_S\omega^2}{c - m\omega^2} + \rho_S \right) \omega^2, \text{ или } P_{\text{и}} = \frac{m\rho_S\omega^2}{1 - \frac{m}{c}\omega^2}.$$

Отношение жёсткости системы к её массе является квадратом частоты её собственных колебаний и обозначается V^2 , то есть $\frac{c}{m} = V^2$ (V – греческая бу-

ква «ню»). Поэтому $P_{\text{и}} = m\rho_S \frac{\omega^2}{1 - \frac{\omega^2}{v^2}}$. В знаменателе выражения вынесем за

скобки отношение $\frac{\omega^2}{v^2}$. Тогда получим в окончательном виде

$$P_{\text{и}} = m\rho_S \frac{v^2}{\frac{v^2}{\omega^2} - 1}$$

Проанализируем полученное выражение с одновременным построением графика зависимости модуля $P_{\text{и}}$ от ω^2 .

1. При $\omega^2 = 0$ $|P_{\text{и}}| = 0$.

2. При $\omega^2 < v^2$ с увеличением ω^2 уменьшается отношение $\frac{v^2}{\omega^2}$ и одновре-

менно уменьшается по модулю разность $\frac{v^2}{\omega^2} - 1$, оставаясь меньше единицы, но с отрицательным знаком. Поэтому на графике (рис. 7.2) по оси ординат откладывается модуль силы инерции. На этом участке сила инерции возрастает.

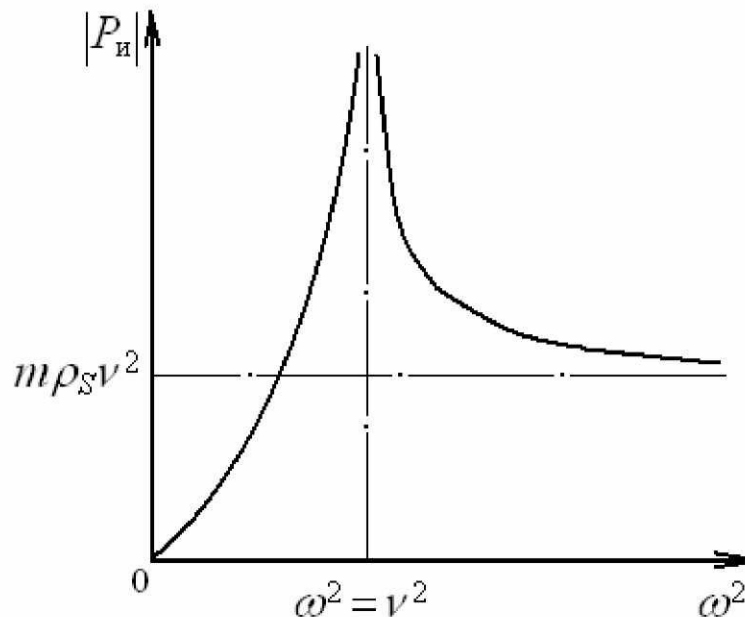


Рисунок 7.2

3. При $\omega^2 = v^2$ наступает *резонанс*, при котором амплитуда $|P_{\text{и}}|$ возрастает неограниченно, так как знаменатель формулы равен нулю.

4. При $\omega^2 > v^2$ отношение $\frac{v^2}{\omega^2}$ становится меньше единицы и продолжает

уменьшаться. Это ведёт к уменьшению $|P_e|$, так как знаменатель в целом, оставаясь меньше единицы, увеличивается (ниспадающая ветвь графика на рис. 7.2).

5. При дальнейшем возрастании ω^2 она становится всё больше, чем v^2 , стремясь к бесконечности, то есть $\omega^2 \gg v^2$, $\omega^2 \rightarrow \infty$. В этом случае знаменатель приближается к единице, а сила инерции – асимптотически к величине $P_{и} = m\rho_S v^2$.

Рассмотрим подробнее резонансное состояние. Это – самое опасное состояние системы, так как сила инерции может достичь такой величины, что произойдёт разрушение. Поэтому при разгоне необходимо стремиться к тому, чтобы как можно быстрее миновать опасную зону и чтобы рабочая частота (угловая скорость) располагалась как можно дальше от резонансной.

В качестве примера можно привести бытовую стиральную машину с центрифугой. Если бельё для отжима в центрифуге разложено не достаточно аккуратно, то при разгоне центрифуги в зоне резонанса будет заметно её дрожание. И если режим отжима находится дальше этой зоны, то, раскрутившись до необходимой частоты, центрифуга будет работать спокойно. Во время остановки центрифуга медленно теряет скорость вращения и в зоне резонанса находится продолжительное время. Тогда в этой зоне наблюдаются весьма сильные колебания. Если же рабочая частота центрифуги располагается в зоне резонанса, то, при неправильной загрузке, колебания центрифуги будут настолько сильны, что машину невозможно удержать на месте.

Таким образом, можно утверждать, что *неуравновешенные центробежные силы инерции вращающихся звеньев являются активно действующим источником колебаний в машине.*

Неуравновешенности звеньев возникают обычно в процессе их изготовления. При правильных размерах и геометрических формах звено может оказаться неуравновешенным из-за неравномерной плотности металла, наличия раковин и пустот, смещения и перекоса осей посадочных отверстий в результате неточной его установки при обработке, неточной сборки и т. д.

Воздействие неуравновешенных сил инерции на основание машины. Силы инерции звеньев, имеющих поступательное или сложное движение, не могут быть уравновешены в системе самого звена. Поэтому они создают динамические давления в кинематических парах и, как результат этого, вызывают колебания рамы (фундамента) машины. Эти колебания можно уменьшить установкой в машине специальных дополнительных масс (противовесов) или соответствующим выбором масс звеньев, а возможно, и дополнительных кинематических цепей с противовесами на их звеньях.

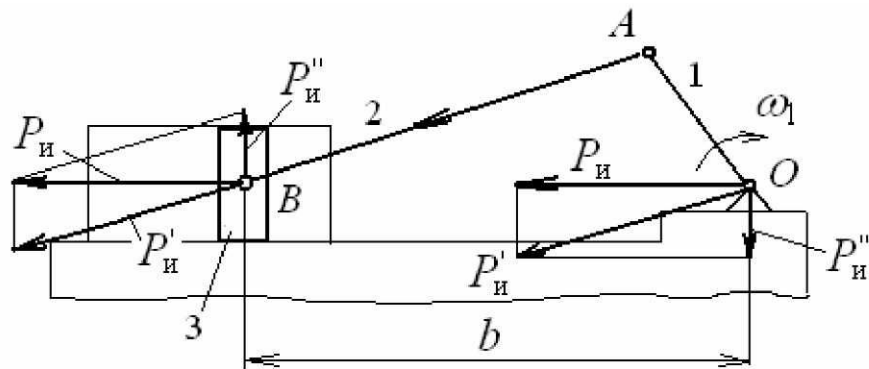


Рисунок 7.3

Рассмотрим схему кривошипно-ползунного механизма поршневой машины (рис. 7.3). Этот механизм может быть основой двигателя транспортной машины, тогда его корпус (стойка) крепится к раме машины. Если он является основой стационарной поршневой машины, то его стойка крепится к фундаменту. В положении, изображённом на рисунке, сила инерции P_{ϵ} ползуна 3 (поршня) приложена в точке B и, действуя навстречу ускорению, направлена влево. Как известно, силу можно разложить по любым двум направлениям. Поэтому разложим P_{ϵ} по правилу параллелограмма по направлению шатуна 2 и перпендикулярно направляющим, то есть по вертикали. Составляющая P'_{ϵ} , направленная вдоль шатуна, переходит без изменений в точку A , а затем – в точку O кривошипа 1. Здесь её также можно разложить по двум направлениям: вдоль горизонтали и вдоль вертикали. Горизонтальная составляющая будет равна исходной силе P_{ϵ} , но здесь она будет приложена к стойке, то есть будет действовать на основание машины, или, соответственно, на фундамент. Так как ускорения ползуна переменны по величине и направлению, то и эта сила, как следствие ускорения, также переменна. Под её воздействием возникают вынужденные колебания машины и основания (фундамента), что, как правило, недопустимо. При совпадении частот вынужденных и собственных колебаний наступает резонанс и возможно разрушение машины.

Вертикальная составляющая P''_{ϵ} силы в точке B вместе с вертикальной составляющей в точке O , которую также можно обозначить P''_{ϵ} , так как она равна вертикальной силе в точке B , образует момент в вертикальной плоскости, равный произведению $M'' = P''_{\epsilon} \cdot b$, где b – расстояние между точками O и B . Этот момент также является переменным по величине и направлению и вместе с силой P_{ϵ} воздействует на фундамент, вызывая его колебания.

Таково же воздействие на основание (фундамент) сил инерции звеньев, совершающих сложное движение.

Проблема уравнивания и балансировки звеньев и механизмов в связи с последствиями действия на них переменных сил и моментов сил инерции распадается на три аспекта:

1. Устранение источников колебаний в машинах путём уравнивания и балансировки звеньев и механизмов.

2. Динамическое гашение колебаний в тех устройствах, в которых невозможно уравнивание и балансировка.

3. Виброизоляция устройств, с одной стороны, как источников колебаний для предотвращения передачи этих колебаний на другие устройства. С другой стороны, виброизоляция тех устройств, которые могут воспринимать колебания извне и, в связи с этим, ухудшать условия своего функционирования.

7.2. Виды неуравновешенности вращающихся звеньев и их устранение

Виды неуравновешенности. На рис. 7.4. представлен диск с центром масс в точке S . Через центр масс проходят три взаимно перпендикулярные оси I-I, II-II и III-III, называемые *центральными главными осями инерции*.

Центральных осей инерции в твёрдом теле можно провести сколько угодно, лишь бы они проходили через центр масс. Кроме этих осей в твёрдом теле, при существовании в нём плоскостей симметрии, имеются оси, перпендикулярные этим плоскостям. Они называются *главными осями инерции* тела. Их количество также бесконечно велико. Однако оси инерции могут быть одновременно и центральными, и главными. Такие оси и показаны на рис. 7.4.

Если ось вращения диска совпадает с любой из этих осей инерции, то диск полностью уравновешен. Если ось вращения совпадает с одной из главных осей инерции, но не является центральной (не проходит через центр масс), то имеет место *статическая неуравновешенность*. Этот вид неуравновешенности легко обнаруживается в статическом состоянии (отсюда его название). Если оставить звено свободно вращаться в опорах, то оно будет поворачиваться до тех пор, пока его центр масс не займёт наинизшее положение.

Статическая неуравновешенность характерна для звеньев типа дисков, имеющих небольшие размеры вдоль оси вращения и большие поперечные размеры: маховики, шкивы ремённых передач, колёса, шлифовальные круги и т. д.

Для приведения в состояние уравновешенности в этом случае требуется установка одного противовеса, который должен переместить ось вращения в центр масс S .

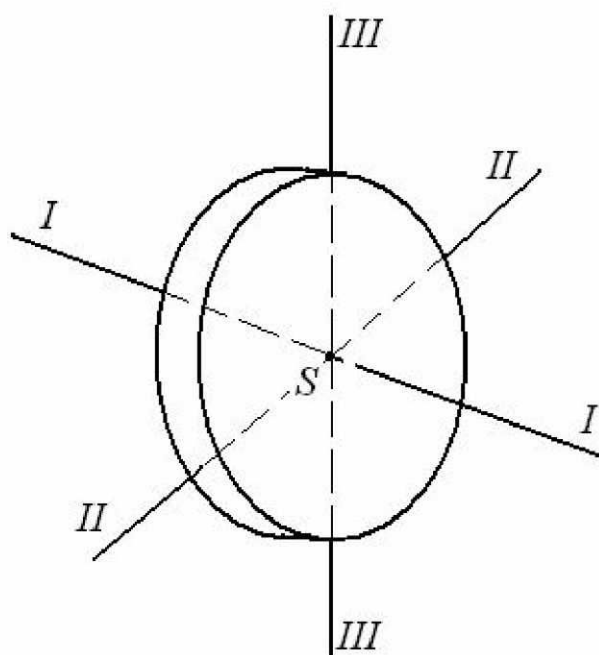


Рисунок 7.4

Если ось вращения диска проходит через центр масс (является центральной осью инерции), но не совпадает ни с одной из главных осей, то имеет место *динамическая неуравновешенность*. В статике её обнаружить невозможно, но если привести диск во вращение, то возникающая пара центробежных сил инерции, создающая неуравновешенный момент, проявит себя в полной мере. В связи с тем, что эта неуравновешенность выявляется в движении (в динамике), она называется *динамической*. Динамическая неуравновешенность является характерной для звеньев типа роторов с небольшими поперечными размерами и большими осевыми размерами: многодисковые роторы газовых и паровых турбин, коленчатые валы двигателей внутреннего сгорания, валики и печатные цилиндры плоскопечатных машин и др. Для динамического уравнивания требуется установка двух противовесов, создающих момент, противоположный неуравновешенному.

Существует и так называемый *общий случай неуравновешенности*, объединяющий первые два. Он возникает, если ось вращения звена не является центральной осью инерции и не совпадает ни с одной из его главных осей. Чтобы устранить такую неуравновешенность, требуется три противовеса: один – для статического уравнивания и два – для динамического.

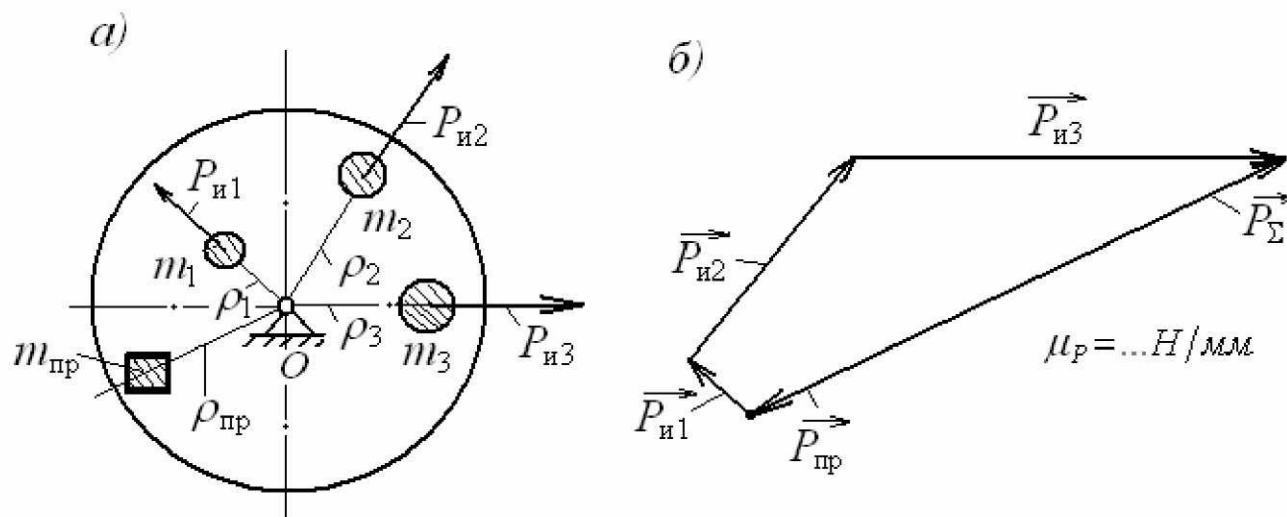


Рисунок 7.5

Устранение статической неуравновешенности. Пусть конструкция вращающегося звена такова, что оно имеет три неуравновешенные массы m_1 , m_2 и m_3 , вращающиеся вокруг неподвижной точки O на радиусах ρ_1 , ρ_2 и ρ_3 соответственно (рис. 7.5, а). Центробежные силы инерции данных масс определяются формулами: $P_{и1} = m_1 \cdot \rho_1 \cdot \omega^2$, $P_{и2} = m_2 \cdot \rho_2 \cdot \omega^2$, $P_{и3} = m_3 \cdot \rho_3 \cdot \omega^2$. Так как достигнутое уравнивание действует при любой угловой скорости, то в дальнейшем принимаем $\omega^2 = 1$. Тогда $P_{и1} = m_1 \cdot \rho_1$, $P_{и2} = m_2 \cdot \rho_2$ и $P_{и3} = m_3 \cdot \rho_3$. Определим равнодействующую сил инерции, ко-

тору обозначим P_{Σ} . Она равна векторной сумме $\vec{P}_{\Sigma} = \vec{P}_{и1} + \vec{P}_{и2} + \vec{P}_{и3}$. Построив в масштабе μ_P многоугольник сил инерции (рис. 7.5, б), находим P_{Σ} . Условие статической уравновешенности звена запишется здесь так: $\vec{P}_{пр} = -\vec{P}_{\Sigma}$, то есть необходимо установить на звене такой противовес, который бы создавал силу инерции, равную и противоположно направленную равнодействующей сил инерции. Поэтому измеряем вектор $\vec{P}_{и\delta}$ и, умножая его на масштаб μ_P , находим величину силы инерции противовеса. План сил даёт также ответ на вопрос: где должен располагаться противовес на звене: линия его расположения определяется направлением вектора $\vec{P}_{и\delta}$ на плане сил. Перенеся эту линию на звено, выбираем радиус установки $\rho_{и\delta}$, не выходящий за габариты звена, и находим массу противовеса: $m_{пр} = \frac{P_{пр}}{\rho_{пр}}$. На рис. 7.5, а противовес изображён в виде прямоугольника.

Статическая балансировка. Балансировка является технологической операцией и осуществляется на практике, когда неизвестно расположение неуравновешенных масс. Для процесса балансировки применяется простейшее приспособление в виде строго горизонтально расположенных линеек, на которые на оправке укладывается неуравновешенное звено (рис. 7.6, а). Звену предоставляется возможность свободно катиться по линейкам. Качение продолжается до тех пор, пока центр масс не займёт наинизшее положение. В связи с влиянием трения качения между оправкой и линейками звено не докатится до этого положения на некоторый угол. Но когда оно остановится, на его торце проводится вертикальная линия 1 (рис. 7.6, б). Затем звену предоставляется возможность вращения в обратную сторону. И снова произойдёт недоворот на тот же угол, что и в первом случае. И опять проводится вертикальная линия (линия 2). Между вертикалями, проведёнными в обоих случаях, образуется некоторый угол. Биссектриса этого угла определит линию установки противовеса. Масса противовеса определяется подбором до тех пор, пока звено с противовесом не перестанет катиться по линейкам. Это будет означать, что балансировка завершена.

Вместо линеек могут применяться ролики (рис. 7.7), вращающиеся в подшипниках качения, по паре роликов с каждой стороны звена. На них уклады-

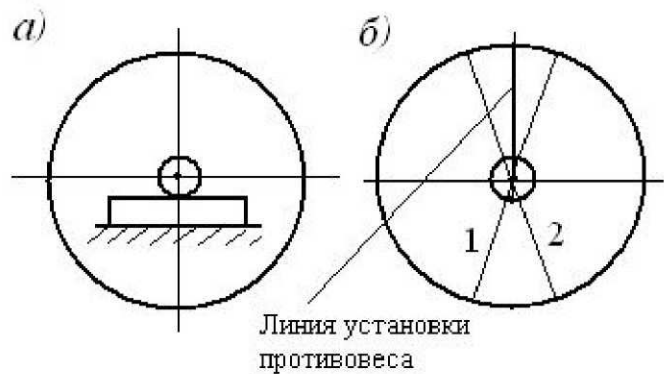


Рисунок 7.6

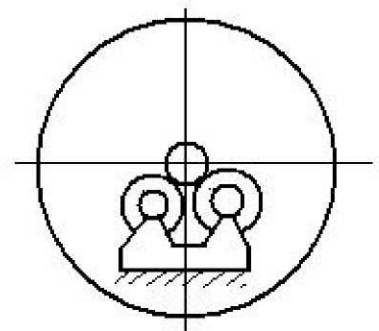


Рисунок 7.7

вается оправка с балансируемым звеном, и процесс идёт аналогично описанному выше.

В крупносерийном и массовом производстве однотипных звеньев (дисков) используют *балансирующие весы* (рис. 7.8, а). Они представляют собой двухплечий рычаг 1, опирающийся на призму 2. На коротком плече рычага предусмотрено устройство для установки балансируемого диска 3 массой m . На длинном плече имеется шкала, по которой перемещается гиря 4 для уравнивания весов. Положение равновесия фиксируется индикатором 5. В процессе балансировки диск поворачивается последовательно на некоторый угол, начиная от его произвольного положения, в котором он оказался при установке на весы. Так как центр масс диска смещён от его геометрического центра, то в процессе поворота диска равновесие весов нарушается, и каждый раз требуется его восстанавливать с помощью гири и индикатора. Каждый раз фиксируется положение гири на рычаге и определяется величина $m\rho$. Затем строится график зависимости $m\rho$ от положения диска (рис. 7.8, б). После построения графика наглядно представляется картина неуравновешенности диска. На графике проводится горизонтальная линия, соответствующая средней величине $(m\rho)_{\text{ср}}$,

вычисляемой по выражению $(m\rho)_{\text{ср}} = \frac{1}{2} \cdot [(m\rho)_{\text{max}} + (m\rho)_{\text{min}}]$. После этого

находится величина дисбаланса $(m\rho)^* = \frac{1}{2} \cdot [(m\rho)_{\text{max}} - (m\rho)_{\text{min}}]$. По графику видно, что вблизи положения 2 можно установить противовес, так как здесь находится точка с $(m\rho)_{\text{min}}$, или в положении диска, где расположена точка $(m\rho)_{\text{max}}$ (положение 6) можно убрать материал в необходимом количестве, например с помощью высверливания.

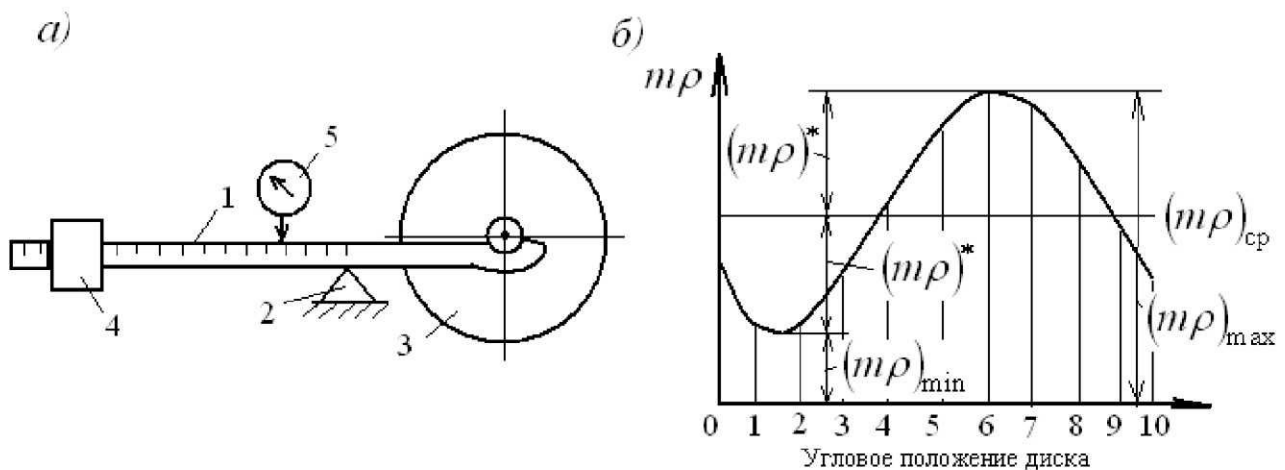


Рисунок 7.8

Устранение динамической неуравновешенности. Пусть вращающееся звено имеет форму коленчатого вала поршневой машины (рис. 7.9, а). Центры масс колен вала отмечены буквами S_1 и S_2 . Общий центр

масс вала S располагается на его геометрической оси, совпадающей с осью вращения. Поэтому вал статически уравновешен. Однако при вращении шатунные шейки испытывают действие центробежных сил инерции $P_{и1} = m_1 \cdot \rho_1 \cdot \omega^2$ и $P_{и2} = m_2 \cdot \rho_2 \cdot \omega^2$, где m_1 и m_2 – неуравновешенные массы шатунных шеек вала, причём $m_1 = m_2$, ρ_1 и ρ_2 – расстояния между центрами масс шеек и осью вращения вала, здесь также $\rho_1 = \rho_2$. Эти силы, равные по величине и направленные противоположно друг другу, образуют пару сил с моментом $M_{и} = P_{и1} \cdot l = P_{и2} \cdot l$, где l – кратчайшее расстояние (плечо) между силами пары.

Задача уравновешивания в данном случае заключается в создании дополнительного момента $M_{и\delta}$ за счет противовесов, который должен быть равным и противоположно направленным моменту $M_{и}$.

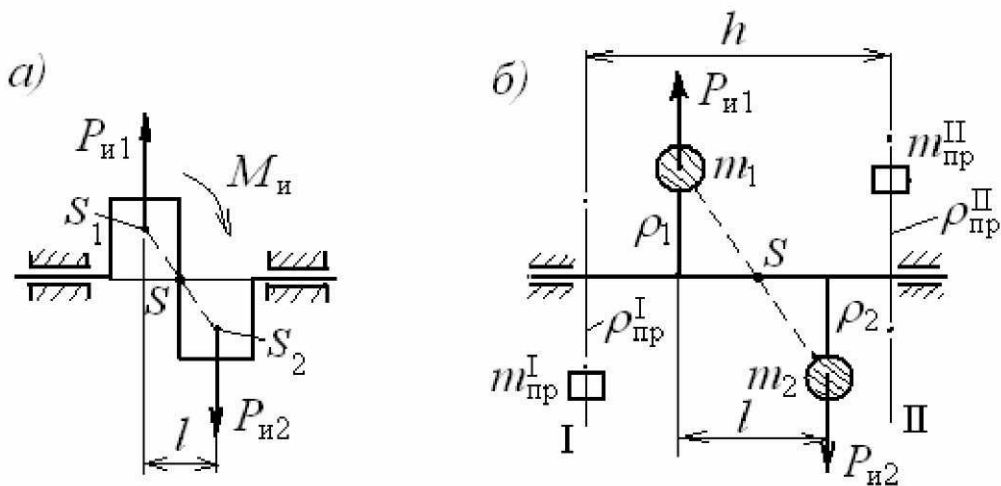


Рисунок 7.9

Таким образом, условием уравновешенности вала является равенство $M_{пр} = -M_{и}$. Противовесы располагаются в *плоскостях исправления* I и II (рис. 7.9, б), как правило, совпадающих с торцами звена (детали). Пусть при этом расстояние между торцевыми поверхностями составляет величину h . Тогда можно записать

$$M_{пр} = m_{пр}^I \cdot \rho_{пр}^I \cdot \omega^2 \cdot h = m_{пр}^{II} \cdot \rho_{пр}^{II} \cdot \omega^2 \cdot h.$$

Здесь также имеют место равенства $m_{пр}^I = m_{пр}^{II}$ и $\rho_{пр}^I = \rho_{пр}^{II}$, поэтому можно применить одно обозначение для масс противовесов – $m_{и\delta}$ и одно обозначение для радиусов – $\rho_{и\delta}$. Исходя из условия уравновешенности, имеем равенств

ва модулей произведений $m_1 \cdot \rho_1 \cdot \omega^2 \cdot l = m_2 \cdot \rho_2 \cdot \omega^2 \cdot l = m_{\text{пр}} \cdot \rho_{\text{пр}} \cdot \omega^2 \cdot h$, откуда находим

$$m_{\text{пр}} = \frac{m_1 \cdot \rho_1 \cdot l}{\rho_{\text{пр}} \cdot h} = \frac{m_2 \cdot \rho_2 \cdot l}{\rho_{\text{пр}} \cdot h}.$$

Из этой формулы следует, что, имея h , необходимо задаться радиусами ρ_{I} и ρ_{II} установки противовесов и рассчитать их массу. Далее следует установить оба противовеса в плоскостях исправления I и II, как показано на рис. 7.9, б).

Динамическая балансировка. Эта технологическая операция, как указывалось выше, применяется в тех случаях, когда неизвестно расположение неуравновешенных масс и их величина. Для балансировки используются различные *балансировочные установки*, в т. ч. так называемого люльчатого типа (рис. 7.10, а).

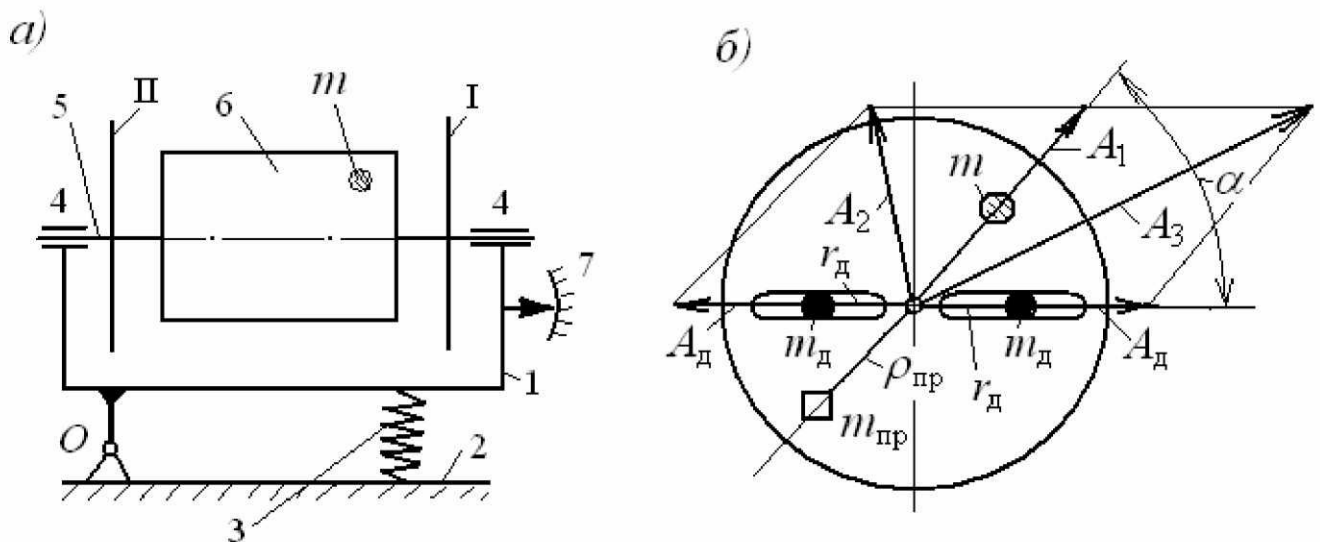


Рисунок 7.10

Основным элементом установки является рама (люлька) 1, имеющая возможность совершать колебательные движения в вертикальной плоскости, вращаясь относительно оси O , прикреплённой к станине 2. Упругим элементом в колебательном процессе служит пружина 3. На люльке имеются подшипниковые опоры 4, в которых установлен вал 5 с неуравновешенным ротором 6. На этом же валу имеются две плоскости исправления I и II в виде дисков, имеющих возможность поворота на любой угол вокруг оси вала. Причём, плоскость диска II проходит через ось вращения люльки, точнее содержит её ось вращения. Если посмотреть на установку с правой стороны, то можно увидеть диск I так, как он показан на рис. 7.10, б). Диск имеет две радиальные прорези, позволяющие устанавливать в них добавочные грузы или противовесы. Диск II полностью идентичен диску I. Угловое положение диска может меняться за счёт его поворота относительно вала, на котором он установлен.

С помощью электродвигателя (на рис. 7.10 он не показан) ротор разгоняется до частоты вращения, заведомо большей резонансной. Затем электродвига-

тель отключается, и ротор переходит в состояние выбега (остановки). Неуравновешенная масса m вызывает появление центробежной силы инерции, вращающейся вместе с ротором, и заставляет люльку колебаться в вертикальной плоскости (в направлении имеющейся степени свободы). Эти колебания являются затухающими и происходят с частотой возмущающей силы, равной проекции центробежной силы инерции на вертикальную плоскость. Когда частота этих колебаний совпадёт с частотой собственных колебаний системы, наступит резонанс, при котором амплитуда колебаний станет максимальной. Максимальная амплитуда измеряется с помощью измерительного устройства 7.

Процедура балансировки заключается в следующем. Сначала измеряется резонансная амплитуда A_1 неуравновешенного ротора. Затем в одну из прорезей диска I вставляется добавочный грузик массой m_a на произвольный радиус r_a , и измеряется новая резонансная амплитуда. Если бы отсутствовала неуравновешенная масса m , то амплитуда от массы добавочного грузика была бы направлена вдоль прорези. Однако при наличии обеих масс получается амплитуда A_2 . После этого добавочный грузик вставляется в противоположную прорезь на тот же радиус r_a и измеряется резонансная амплитуда A_3 . После всех измерений получается два равных друг другу параллелограмма амплитуд (рис. 7.10, б), в которых известными являются одна сторона – A_1 и обе диагонали – A_2 и A_3 . На основании свойства сторон и диагоналей параллелограмма записывается равенство $2A_1^2 + 2A_d^2 = A_2^2 + A_3^2$, из которого вычисляется амплитуда A_d

$$A_d = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{A_2^2 + A_3^2 - 2A_1^2}.$$

Определяется статический момент добавочного груза как произведение $m_d \cdot r_d$, затем рассчитывается коэффициент пропорциональности между статическим моментом и амплитудой добавочного грузика, являющийся *характеристикой* данной установки: $\mu = \frac{m_d \cdot r_d}{A_d}$. Физически коэффициент μ означает величину статического момента, приходящуюся на единицу амплитуды колебаний люльки.

Имея μ , нетрудно определить тот статический момент, который соответствует амплитуде A_1 неуравновешенного ротора: $mr = \mu \cdot A_1$.

Дальнейшее решение заключается в подборе такой массы противовеса, которая должна на соответствующем радиусе противовеса уравновесить найденный статический момент ротора. Для этого, задаваясь массой противовеса $m_{пв}$,

вычисляем $\rho_{пв}$, то есть $\rho_{пв} = \frac{\mu \cdot A_1}{m_{пв}}$. Необходимо следить за тем, чтобы величина

$\rho_{пв}$ не вышла за пределы прорези диска.

И последнее, что необходимо определить, – это угол α , на который надо повернуть диск вместе с противовесом для того, чтобы он оказался как раз напротив неуравновешенной массы m . Для этого нужно воспользоваться теоремой косинусов в косоугольном треугольнике (рис. 7.10, б), на основании которой получаем

$$\alpha = \arccos \frac{A_1^2 + A_{\text{д}}^2 - A_2^2}{2A_1A_{\text{д}}}.$$

Для полной балансировки ротора необходимо его переставить в опоры, поменяв местами диски I и II, и повторить все описанные выше действия с диском II.

7.3. Начальные сведения об уравнивании механизмов

Задача уравнивания механизма может быть сформулирована следующим образом: для уравнивания сил инерции механизма надо так подобрать массы его звеньев, чтобы их общий центр масс (центр тяжести) во время движения механизма оставался неподвижным (статическое уравнивание), а суммарный момент сил относительно центра масс был равен нулю (динамическое уравнивание).

Статическая замена массы стержневого звена двумя точечными массами. Эта задача является вспомогательной в проблеме уравнивания механизмов. Для статической замены массы m реального звена AB двумя точечными (сосредоточенными) массами m_A и m_B (рис. 7.11) учитываются следующие условия: во-первых, сумма точечных масс должна быть равна массе звена; во-вторых, сумма статических моментов точечных масс относительно центра масс звена должна быть равна нулю.

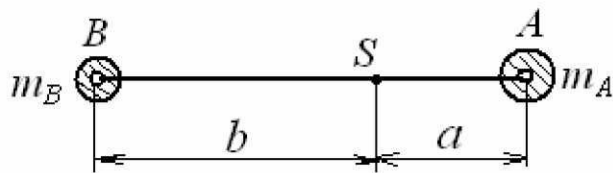


Рисунок 7.11

Для статической замены массы m реального звена AB двумя точечными (сосредоточенными) массами m_A и m_B (рис. 7.11) учитываются следующие условия: во-первых, сумма точечных масс должна быть равна массе звена; во-вторых, сумма статических моментов точечных масс относительно центра масс звена должна быть равна нулю.

Первое условие даёт следующее уравнение: $m_A + m_B = m$. Второе условие означает, что центр масс S реального звена после статической замены его массы остаётся в той же точке, тогда $m_A \cdot a - m_B \cdot b = 0$, или $m_A \cdot a = m_B \cdot b$.

Решая совместно оба уравнения, составляющие систему

$$m_A + m_B = m,$$

$$m_A \cdot a = m_B \cdot b,$$

находим $m_A = \frac{m \cdot b}{a+b}$ и $m_B = \frac{m \cdot a}{a+b}$.

Статическое уравнивание четырёхшарнирного механизма. Пусть в четырёхшарнирном механизме $OABC$ (рис. 7.12) известны массы подвижных звеньев: m_1 – масса кривошипа 1, m_2 – масса шатуна 2 и m_3 – масса коромысла 3. Известны также длины звеньев: r – длина кривошипа, l_2 – длина шатуна и l_3 – длина коромысла. Положения центров масс подвижных звеньев определены их расстояниями: ρ_{S_1} – от точки O до центра масс S_1 кривошипа, ρ_{S_2} – от точки A до центра масс S_2 шатуна и, наконец, ρ_{S_3} – от точки C до центра масс S_3 коромысла.

Заменим массы кривошипа, шатуна и коромысла двумя точечными массами каждое и определим величины этих масс.

Согласно приведённым выше уравнениям получим следующие выражения для их расчёта: $m_1^O = m_1 \frac{r - \rho_{S_1}}{r}$, $m_1^A = m_1 \frac{\rho_{S_1}}{r}$, $m_2^A = m_2 \frac{l_2 - \rho_{S_2}}{l_2}$, $m_2^B = m_2 \frac{\rho_{S_2}}{l_2}$,

$$m_3^B = m_3 \frac{\rho_{S_3}}{l_3} \text{ и } m_3^C = m_3 \frac{l_3 - \rho_{S_3}}{l_3}.$$

Первый вариант уравнивания (рис. 7.12). Точечные массы, расположенные в точках O и C , неподвижны, поэтому не требуют каких-либо действий. Точечную массу в точке A величиной $m^A = m_1^A + m_2^A$ следует уравновесить противовесом $m_1^{\text{ид}}$, расположив его за точкой O . При этом общий центр массы m^A и $m_1^{\text{ид}}$ должен располагаться в точке O . Тогда можно записать уравнение

$$m^A \cdot r = m_1^{\text{пр}} \cdot \rho_1^{\text{пр}}, \text{ откуда, приняв произвольно радиус } \rho_1^{\text{ид}}$$

установки противовеса, найдём его массу: $m_1^{\text{пр}} = m^A \frac{r}{\rho_1^{\text{пр}}}$.

Аналогичным образом поступаем с массой в точке B , определяемой суммой $m^B = m_2^B + m_3^B$.

Из условия равенства статических моментов масс m^B и $m_3^{\text{ид}}$ относительно точки C имеем $m_3^{\text{пр}} \cdot \rho_3^{\text{пр}} = m^B \cdot l_3$, откуда

$$m_3^{\text{пр}} = m^B \frac{l_3}{\rho_3^{\text{пр}}} \quad (\rho_3^{\text{ид}} \text{ выбирается произвольно}).$$

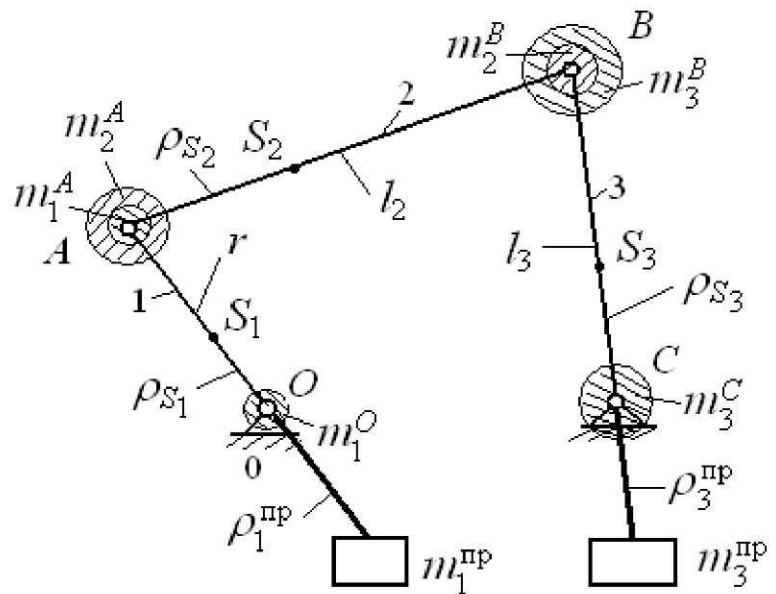


Рисунок 7.12

Второй вариант уравновешивания (рис. 7.13). Разнесём массы звеньев 1, 2 и 3 в точки O , A , B и C по методике, изложенной выше, и обозначим суммарную массу в точке A как m^A и суммарную массу в точке B как m^B . Массы, сосредоточенные в точках O и C , остаются неподвижными. На продолжении шатуна влево от точки A поместим противовес массой $m_2^{\text{пр}}$ на некотором радиусе $\rho_2^{\text{пр}}$ для смещения общего центра масс, связанных с шатуном, в точку A . Для этого необходимо выполнить следующее условие: $m_2^{\text{пр}} \cdot \rho_2^{\text{пр}} = m^B \cdot l_2$, откуда найдем $m_2^{\text{пр}} = m^B \frac{l_2}{\rho_2^{\text{пр}}}$. Теперь на продолжении кривошипа за точку O устанавли-

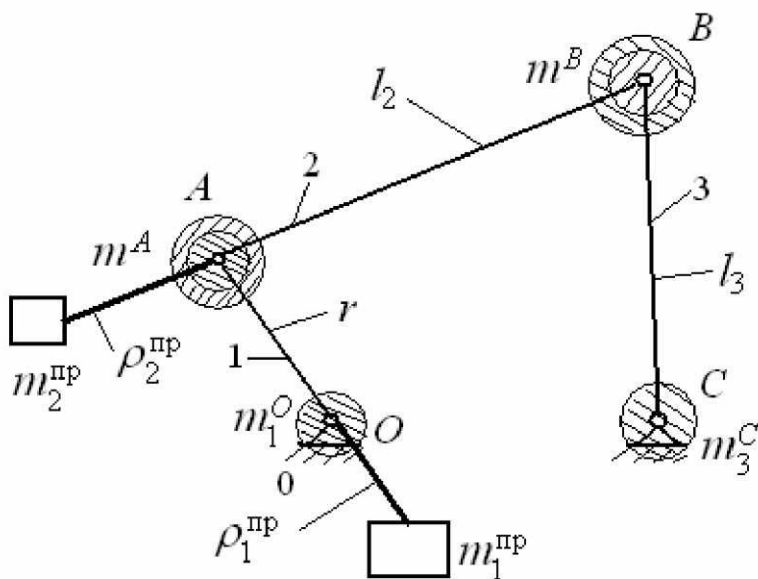


Рисунок 7.13

вается противовес $m_1^{\text{пр}}$ на радиусе $\rho_1^{\text{пр}}$ при условии выполнения следующего равенства:

$$m_1^{\text{пр}} \cdot \rho_1^{\text{пр}} = (m_2^{\text{пр}} + m^A + m^B) \cdot r.$$

Решая это равенство относительно $m_1^{\text{пр}}$, находим

$$m_1^{\text{пр}} = (m_2^{\text{пр}} + m^A + m^B) \frac{r}{\rho_1^{\text{пр}}}.$$

Радиусы установки противовесов $\rho_1^{\text{пр}}$ и $\rho_2^{\text{пр}}$ выбираются произвольно.

Можно установить противовес на продолжении шатуна вправо от точки B . Тогда, вместо противовеса на кривошипе, необходимо установить противовес на коромысле 3 за точкой C . Необходимые расчёты аналогичны предыдущим.

Способы статического уравновешивания кривошипно-ползунного механизма. Способ противовесов аналогичен тому, который применяется для уравновешивания четырёхшарнирного механизма во втором варианте (рис. 7.14). Сначала уравновешиваются сосредоточенная масса шатуна m_2^B и масса ползуна 3 с помощью противовеса $m_2^{\text{пр}}$, устанавливаемого на продолжении шатуна 2 за точку A . В результате такой операции общий центр масс шатуна и ползуна сместится в точку A . Величина массы противовеса определится из уравнения $m_2^{\text{пр}} \cdot \rho_2^{\text{пр}} = (m_2^B + m_3) \cdot l$, решая которое относительно $m_2^{\text{пр}}$, находим $m_2^{\text{пр}} = (m_2^B + m_3) \frac{l}{\rho_2^{\text{пр}}}$.

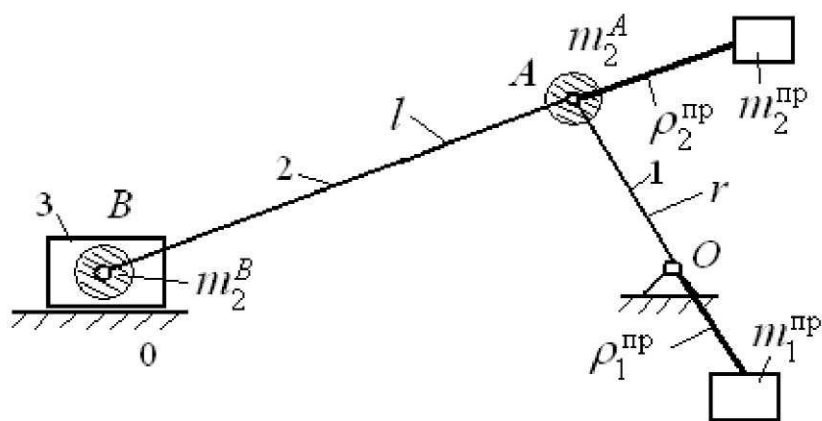


Рисунок 7.14

Теперь общую массу шатуна, ползуна и противовеса $m_2^{\text{ид}}$ необходимо уравновесить противовесом $m_1^{\text{ид}}$, устанавливаемым на продолжении кривошипа за точку O . Для этого составляется уравнение $(m_2^{\text{пр}} + m_2^A + m_2^B + m_3) \cdot r = m_1^{\text{пр}} \cdot \rho_1^{\text{пр}}$, из которого определяем $m_1^{\text{пр}} = (m_2^{\text{пр}} + m_2^A + m_2^B + m_3) \cdot \frac{r}{\rho_1^{\text{пр}}}$. Радиусы установки противовесов выбираются произвольно.

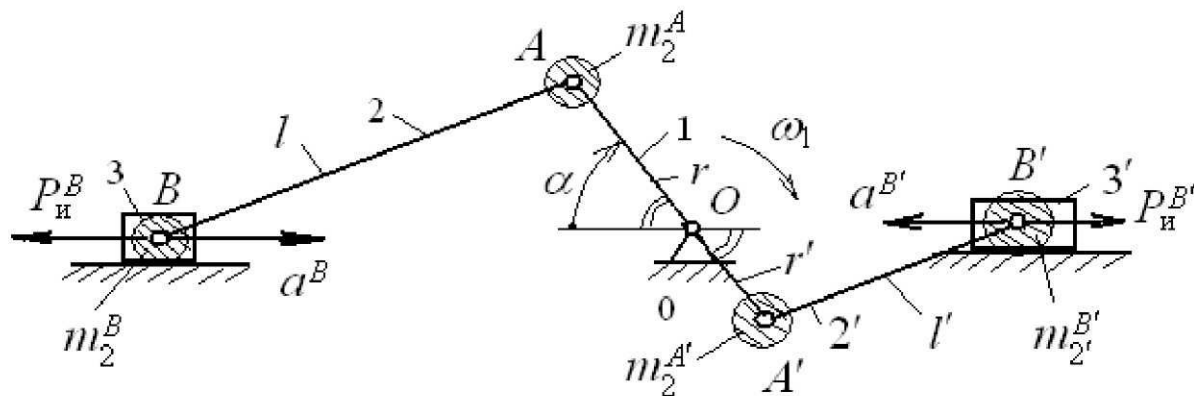


Рисунок 7.15

Способ дополнительных кинематических цепей. Пусть имеется кривошипно-ползунный механизм OAB (рис. 7.15) с длиной кривошипа 1, равной r , и длиной шатуна 2, равной l и массой m_2 . К шатуну в точке B присоединён ползун 3 массой m_3 . С помощью статического разнеса массы шатуна 2 по двум точкам получаем в точке A массу m_2^A , в точке B – массу m_2^B . После этого в точке B появится суммарная масса $m^B = m_2^B + m_3$.

Ускорение точки B приближённо определяется уравнением $a^B = r \cdot \omega_1^2 (\cos \alpha + \lambda \cos 2\alpha)$, где λ – это отношение длины кривошипа к длине шатуна, то есть $\lambda = \frac{r}{l}$, α – угол поворота кривошипа, ω_1 – его угловая скорость. Поэтому сила инерции массы точки B определится уравнением $P_{\text{и}}^B = m^B \cdot a^B$, или $P_{\text{и}}^B = m^B \cdot r \cdot \omega_1^2 (\cos \alpha + \lambda \cos 2\alpha)$. Направление силы инерции $P_{\text{и}}^B$ противоположно ускорению a^B точки B .

Продлим кривошип 1 за точку O и на некотором расстоянии r' от неё возьмём точку A' , в которой к кривошипу 1 присоединим шатун 2' длиной l' , а к его концу B' присоединим ползун 3'. При выборе длин r' и l' сохраним их отношение $\lambda = \frac{r'}{l'}$ таким же, как и в основной части механизма. В результате справа от точки O получится кривошипно-ползунный механизм, подобный данному, но с другими размерами. Распределив массу шатуна 2' по его концевым точкам, получим в точке B' массу $m^{B'} = m_{2'}^{B'} + m_{3'}$. Во всех положениях механизма точки B и B' движутся навстречу друг другу, и их ускорения направлены постоянно навстречу друг другу. При этом ускорение точки B' определяется таким же уравнением как и точки B , то есть $a^{B'} = r' \cdot \omega_1'^2 \cdot (\cos \alpha + \lambda \cos 2\alpha)$. Сила инерции массы точки B' определяется как $P_{\text{и}}^{B'} = m^{B'} \cdot a^{B'} = m^{B'} \cdot r' \cdot \omega_1'^2 \cdot (\cos \alpha + \lambda \cos 2\alpha)$.

Так как силы инерции, противоположные соответствующим ускорениям, направлены навстречу друг другу, то они могут и уравновесить друг друга при условии равенства их величин, то есть чтобы $P_{\text{и}}^{B'} = P_{\text{и}}^B$. Приравнявая правые части выражений этих сил и сокращая на одинаковые множители, имеем $m^{B'} \cdot r' = m^B \cdot r$, откуда получаем необходимое соотношение масс: $m^{B'} = m^B \cdot \frac{r}{r'}$.

Это соотношение показывает, что для уравнивания поступательно движущихся масс кривошипно-ползунного механизма, при использовании уравнивающего механизма аналогичной схемы, необходимо, чтобы поступательно движущаяся масса уравнивающего механизма была обратно пропорциональной отношению длин кривошипов.

Что касается уравнивания самих кривошипов и связанных с ними масс шатунов, то эта задача относится к ранее рассмотренной задаче статического уравнивания вращающихся звеньев и затруднений не вызывает.

На основе рассмотренной задачи в практике (например, в некоторых поршневых машинах) применяются механизмы кривошипно-ползунной схемы, у которых имеют место равенства $r' = r$ и $l' = l$. Тогда оба механизма становятся симметричными относительно точки O , и каких-либо мероприятий по уравниванию для них не требуется. Такие механизмы называются *самоуравновешенными*.

Частичное уравнивание сил инерции поступательно движущихся масс кривошипно-ползунного механизма. Как указывалось выше, сила инерции поступательно движущихся масс кривошипно-ползунного механизма определяется уравнением $P_{и}^B = m^B \cdot r \cdot \omega_1^2 \cdot (\cos\alpha + \lambda \cos 2\alpha)$, в котором m^B – масса, сосредоточенная в точке B и равная $m^B = m_2^B + m_3$. Силу инерции $P_{и}^B$ можно представить в виде суммы $P_{и}^B = m^B \cdot r \cdot \omega_1^2 \cdot \cos\alpha + \lambda \cdot m^B \cdot r \cdot \omega_1^2 \cdot \cos 2\alpha$, в которой первое слагаемое правой части называется силой инерции первого порядка $P_{и}^I$, второе слагаемое – силой инерции второго порядка $P_{и}^{II}$. Таким образом, $P_{и}^I = m^B \cdot r \cdot \omega_1^2 \cdot \cos\alpha$ а $P_{и}^{II} = \lambda \cdot m^B \cdot r \cdot \omega_1^2 \cdot \cos 2\alpha$. Так как $\lambda \ll 1$, то $P_{и}^{II} \ll P_{и}^I$, поэтому часто ограничиваются уравниванием силы инерции первого порядка.

Противовес массой $m_{и\delta}$ устанавливается на продолжении кривошипа за точку O на радиусе $\rho_{и\delta}$ (рис. 7.16). Он должен быть подобран таким образом, чтобы его горизонтальная составляющая $P_{и\delta}^{\tilde{\tilde{\delta}}}$ силы инерции $P_{и\delta}$ была равна силе инерции первого порядка, то есть $P_{пр}^{гор} = P_{и}^I$.

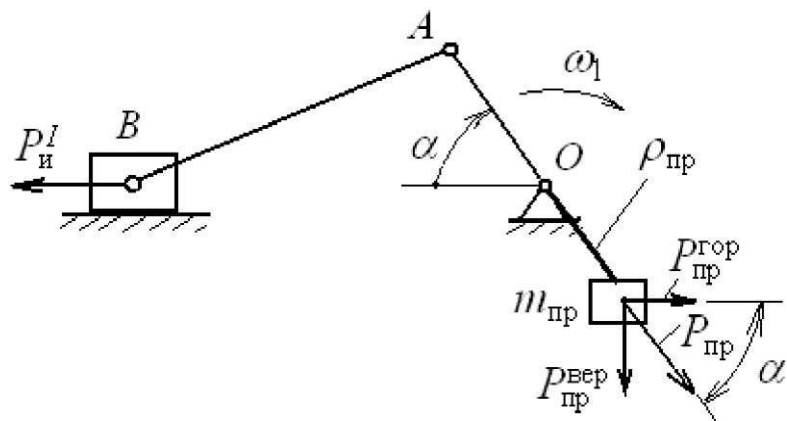


Рисунок 7.16

Как видно из рис. 7.16, горизонтальная составляющая силы инерции противовеса $P_{пр}^{гор} = m_{пр} \cdot \rho_{пр} \cdot \omega_1^2 \cdot \cos\alpha$. Таким образом, имеем равенство $m_{пр} \cdot \rho_{пр} \cdot \omega_1^2 \cdot \cos\alpha = m^B \cdot r \cdot \omega_1^2 \cdot \cos\alpha$, сократив которое на одинаковые множители, получаем $m_{пр} \cdot \rho_{пр} = m^B \cdot r$. Отсюда находим массу противовеса

$$m_{пр} = m^B \cdot \frac{r}{\rho_{пр}}$$

С помощью горизонтальной составляющей силы инерции данного противовеса уравнивается сила инерции первого порядка поступательно движущихся масс механизма. Однако появляется неуравновешенная вертикальная составляющая $P_{и\delta}^{\tilde{\tilde{\delta}}}$ этой силы инерции. Чтобы её уравновесить, вместо одного противовеса на кривошипе используют два одинаковых по массе противовеса, которые устанавливают на равных радиусах на двух зубчатых колёсах, обра-

зующих внешнее зацепление (рис. 7.17). Одно из колёс жёстко связывают с кривошипом, и тогда оно вращается с ним как одно целое. Второе вращается в противоположную сторону. Массы противовесов подбираются так, чтобы сила инерции каждого из них была равна половине той силы инерции, которая создаётся одним противовесом в предыдущей задаче. В любом положении механизма горизонтальные составляющие этих двух сил в сумме дадут силу инерции $P_{i\delta}$, которая уравновешивает силу инерции $P_{и}^I$. Вертикальные же составляющие получаются равными друг другу и противоположно направленными, поэтому уравновешивают друг друга.

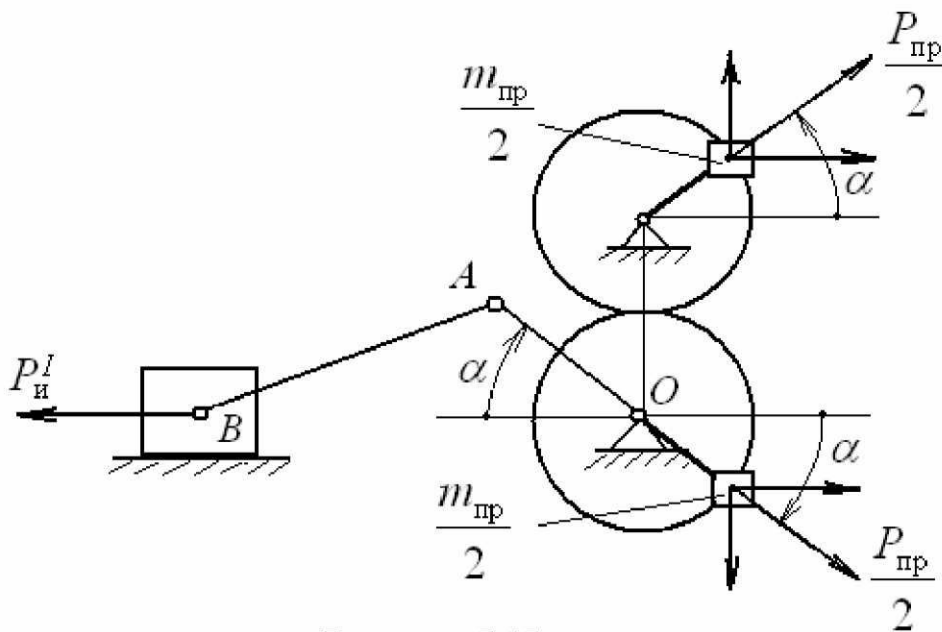


Рисунок 7.17

Замечание. Для уравновешивания силы инерции второго порядка необходимо применить дополнительную систему зубчатых колёс с вдвое меньшим количеством зубьев, чтобы они вращались вдвое быстрее, чем данные. Это требование объясняется тем, что в выражении силы инерции второго порядка аргументом косинуса является 2α . Значит, этот аргумент изменяется вдвое быстрее, чем α . Противовесы должны быть установлены на этих колёсах. Подробное решение задачи здесь не рассматривается.

7.4. Виброгашение и виброизоляция

В и б р о г а ш е н и е. *Виброгашение представляет собой процесс устранения колебаний объекта без устранения источников этих колебаний.* В некоторых технических устройствах устранение источников колебаний, например с помощью противовесов, по разным причинам невозможно. Вместе с тем существует необходимость гашения колебаний самого устройства в целом. Чтобы решить эту задачу, можно применить так называемое *активное виброгашение*, элементы которого функционируют на основе принципов работы систем авто-

матического управления (САУ). Другим вариантом решения является использование *пассивного виброгашения*, которое осуществляется с помощью так называемых *динамических виброгасителей*, или *динамических гасителей колебаний*, присоединяемых к устройству снаружи с помощью упругой связи.

Рассмотрим кратко теорию динамического гасителя колебаний. Представим себе, что имеется некоторое устройство 1 (рис. 7.18), имеющее массу m_1 и присоединённое к основанию с помощью упругой связи с коэффициентом жёсткости c_1 . Положение этого устройства относительно основания определяется координатой x_1 , измеряемой от некоторого начала отсчёта. На устройство действует вынуждающая сила P , изменяющаяся по гармоническому закону $P = P_0 \sin \omega t$, где P_0 – амплитудное значение вынуждающей силы, ω – круговая частота, t – время.

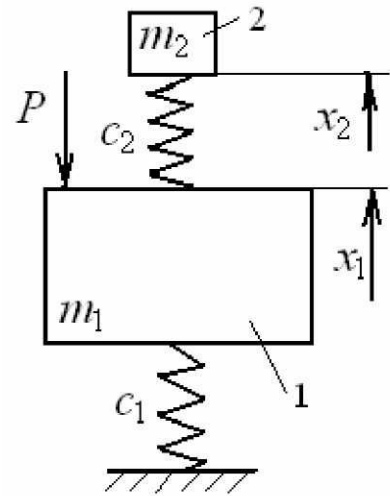


Рисунок 7.18

Присоединим к данному устройству дополнительную массу 2 величиной m_2 с помощью упругой связи с коэффициентом жёсткости c_2 . Положение массы m_2 определяется координатой x_2 .

Для вывода дифференциальных уравнений движения масс 1 и 2 воспользуемся уравнением Лагранжа II рода:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} = P_i,$$

где T – кинетическая энергия системы масс, Π – потенциальная энергия системы, x_i – обобщённая координата, \dot{x}_i – обобщённая скорость (производная обобщённой координаты по времени), P_i – обобщённая сила. Данная система имеет две степени свободы, поэтому i может принимать только два значения: $i = 1, 2$.

Кинетическая энергия системы определяется суммой кинетических энергий масс m_1 и m_2 : $T = \frac{1}{2} m_1 \cdot \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot \dot{x}_2^2$.

Потенциальная энергия определяется следующим выражением $\Pi = \frac{1}{2} c_1 \cdot x_1^2 + \frac{1}{2} c_2 \cdot (x_1 - x_2)^2$.

Определим слагаемые уравнения Лагранжа

$$\text{при } i = 1: \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \cdot \dot{x}_1, \quad \frac{d}{dt} m_1 \cdot \dot{x}_1 = m_1 \cdot \ddot{x}_1, \quad \frac{\partial T}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} = c_1 \cdot x_1 + c_2 (x_1 - x_2),$$

$$\text{при } i = 2: \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \cdot \dot{x}_2, \quad \frac{d}{dt} m_2 \cdot \dot{x}_2 = m_2 \cdot \ddot{x}_2, \quad \frac{\partial T}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} = -c_2 (x_1 - x_2).$$

Обобщённая сила действует только на массу m_1 .

Найденные слагаемые позволяют получить следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}m_1 \cdot \ddot{x}_1 + c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot (x_1 - x_2) &= P_0 \cdot \sin \omega t, \\m_2 \cdot \ddot{x}_2 - c_2 \cdot (x_1 - x_2) &= 0.\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}m_1 \cdot \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \cdot x_1 - c_2 \cdot x_2 &= P_0 \cdot \sin \omega t, \\m_2 \cdot \ddot{x}_2 - c_2 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 &= 0.\end{aligned}$$

Эти уравнения описывают колебательные движения объекта 1 и гасителя 2. Так как колебания объекта с массой m_1 являются вынужденными, то они происходят с частотой вынуждающей силы P и описываются тем же уравнением, то есть

$$\begin{aligned}x_1 &= A_1 \cdot \sin \omega t, \\x_2 &= A_2 \cdot \sin \omega t.\end{aligned}$$

Дифференцируя дважды эти выражения, получаем

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= -A_1 \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t, \\ \ddot{x}_2 &= -A_2 \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t.\end{aligned}$$

Подставив в дифференциальные уравнения вместо координат и их вторых производных полученные выражения, после соответствующих сокращений можем записать

$$\begin{aligned}(c_1 + c_2 - m_1 \cdot \omega^2) \cdot A_1 - c_2 \cdot A_2 &= P_0, \\ -c_2 \cdot A_1 + (c_2 - m_2 \cdot \omega^2) \cdot A_2 &= 0.\end{aligned}$$

Решением данной системы двух алгебраических уравнений является определение амплитуд A_1 и A_2 . Выразим из второго уравнения A_2

$$A_2 = \frac{c_2 \cdot A_1}{c_2 - m_2 \cdot \omega^2}$$

и подставим результат в первое уравнение системы. После этого получается уравнение, содержащее только одно неизвестное A_1 :

$$(c_1 + c_2 - m_1 \cdot \omega^2) \cdot A_1 - \frac{c_2^2 \cdot A_1}{c_2 - m_2 \cdot \omega^2} = P_0,$$

откуда находим
$$A_1 = \frac{P_0 \cdot (c_2 - m_2 \cdot \omega^2)}{(c_1 + c_2 - m_1 \cdot \omega^2) \cdot (c_2 - m_2 \cdot \omega^2) - c_2^2}.$$

Если знаменатель полученного выражения приравнять к нулю, то такое равенство называется частотным уравнением и его корни будут равны тем частотам, при которых амплитуда A_1 объекта стремится к бесконечности. Это состояние системы соответствует *резонансу*.

Равенство нулю амплитуды A_1 имеет место при равенстве нулю выражения в скобках в числителе, то есть $c_2 - m_2 \cdot \omega^2 = 0$. Если это явление наступает, то дополнительная масса m_2 (масса гасителя) колеблется в резонансном режиме, так как частота вынуждающей силы совпадает с частотой его собственных колебаний. В то же время масса самого объекта m_1 остаётся неподвижной ($A_1 = 0$). Такое явление называется *антирезонансом*. Оно используется для гашения колебаний объекта при стабильной частоте вынуждающей силы путём подбора соответствующей массы гасителя m_2 и коэффициента жёсткости его упругого элемента c_2 .

В и б р о и з о л я ц и я. *Виброизолирующей* называется процесс предотвращения передачи колебаний от основания к объекту (или наоборот), который установлен на этом основании. Виброизоляция осуществляется с помощью так называемых *виброизоляторов*, или *амортизаторов*. Зачастую такая задача возникает, когда некоторый объект устанавливается на колеблющемся фундаменте (рис. 7.19). Таким объектом может быть также автомобиль, движущийся по неровной дороге, когда его колёса совершают колебания в вертикальной плоскости и передаются кузову и сидящим в нём пассажирам. Задача амортизации здесь состоит в уменьшении динамической составляющей реакции со стороны основания на амортизируемый объект. Обозначим массу защищаемого объекта буквой m , коэффициент жёсткости упругой связи его с основанием обозначим c , коэффициент демпфирования амортизатора – буквой β .

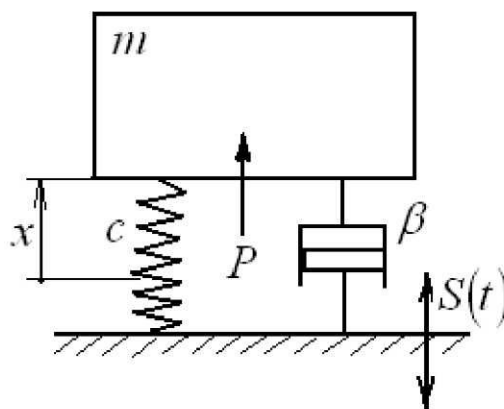


Рисунок 7.19

Основание совершает колебания в вертикальной плоскости по некоторому закону $S(t)$. При этом на объект действует переменная сила P , зависящая от перемещения объекта x и его скорости \dot{x} .

Уравнение движения объекта при вибрации основания имеет вид

$$m [\ddot{x} + \ddot{S}(t)] = P(x, \dot{x}).$$

Данное уравнение по форме соответствует известному в теоретической механике основному уравнению динамики, где функция в правой части является суммой сил, действующих в системе. Эту сумму можно представить, как $P(x, \dot{x}) = -c \cdot x - \beta \cdot \dot{x}$, где первое слагаемое является силой упругости пружины, второе – силой сопротивления (силой трения) амортизатора. Отрицательные знаки в правой части указывают на противоположность действия этих сил по отношению к направлению движения объекта.

Подставив полученную сумму в правую часть уравнения, после деления его на m и несложных преобразований имеем

$$\ddot{x} + \frac{\beta}{m} \dot{x} + \frac{c}{m} \cdot x = -\ddot{S}(t).$$

В этом уравнении $\frac{\beta}{m} = 2n$, измеряется в c^{-1} , $\frac{c}{m} = \nu^2$ – квадрат частоты собственных колебаний объекта, измеряется в c^{-2} . Правая часть уравнения является второй производной функции кинематического возбуждения колебаний объекта со стороны основания. Её можно заменить отношением $\frac{\tilde{F}(t)}{m}$, где $\tilde{F}(t)$ – внешняя сила, изменяющаяся по гармоническому закону, то есть $\tilde{F}(t) = F_0 \cdot \sin \omega t$. Тогда предыдущее уравнение примет вид

$$\ddot{x} + 2 \cdot n \cdot \dot{x} + \nu^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t.$$

Данное уравнение является неоднородным дифференциальным уравнением, решение которого, как известно, равно сумме решения однородного уравнения (без правой части) и частного решения данного уравнения. Общее решение однородного уравнения можно опустить в силу того, что оно определяет собственные колебания объекта, которые быстро затухают. Частное решение для установившихся вынужденных колебаний получаем в виде

$$x = \frac{F_0}{m \sqrt{(\nu^2 - \omega^2)^2 + 4 \cdot n^2 \cdot \omega^2}} \cdot \sin(\omega t - \psi),$$

где ψ – сдвиг фаз силы и перемещения, определяемый выражением

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2n \cdot \omega}{\nu^2 - \omega^2}.$$

Дифференцирование выражения x по времени даёт

$$\dot{x} = \frac{F_0 \omega}{m \sqrt{(\nu^2 - \omega^2)^2 + 4 \cdot n^2 \cdot \omega^2}} \cdot \cos(\omega t - \psi).$$

Теперь определяем силу, передаваемую со стороны основания на объект

$$P(x, \dot{x}) = -(cx + \beta \dot{x}) = -\frac{F_0 \cdot c}{m\sqrt{(v^2 - \omega^2)^2 + 4 \cdot n^2 \cdot \omega^2}} \cdot \left[\sin(\omega t - \psi) + \frac{\omega \cdot \beta}{c} \cdot \cos(\omega t - \psi) \right].$$

Множитель перед квадратными скобками можно разделить и умножить на F_0 , тогда его можно представить как отношение амплитуды вынужденных колебаний перемещения X к максимальному перемещению, вызываемому статическим действием силы, равному $\frac{F_0}{c} = \frac{F_0}{m \cdot v^2}$. Это отношение называется *коэффициентом динамичности* $K_{\text{дин}}$ и определяется формулой

$$K_{\text{дин}} = \frac{v^2}{\sqrt{(v^2 - \omega^2)^2 + 4 \cdot n^2 \cdot \omega^2}}.$$

Коэффициент перед косинусом в квадратных скобках можно представить в виде $\frac{\omega \cdot \beta}{c} = \frac{\omega \cdot \beta}{m \cdot v^2} = \frac{2n\omega}{v^2}$ и обозначить тангенсом некоторого угла ε , то есть $\text{tg} \varepsilon = \frac{2n\omega}{v^2}$. Тогда этот коэффициент можно заменить тангенсом, а после соответствующих преобразований выражение в квадратных скобках поменяется на синус суммы углов, то есть $\sin(\omega t - \psi + \varepsilon)$.

Получившийся в виде множителя $\text{COS} \varepsilon$ в выражении силы P заменяем через $\text{tg} \varepsilon$ и находим окончательное выражение для расчёта силы P

$$P = -K_{\text{дин}} \cdot F_0 \sqrt{1 + \frac{4 \cdot n^2 \cdot \omega^2}{v^4}} \sin(\omega t - \psi + \varepsilon).$$

Максимальное (амплитудное) значение силы P равно выражению перед синусом, то есть

$$P_{\text{max}} = K_{\text{дин}} \cdot F_0 \sqrt{1 + \frac{4 \cdot n^2 \cdot \omega^2}{v^4}}.$$

Отношение наибольшей силы, передаваемой на объект со стороны основания, к амплитуде вынуждающей силы называется *коэффициентом передачи силы* $K_{\text{пер}}$. В данном случае $K_{\text{пер}} = \frac{P_{\text{max}}}{F_0} = K_{\text{дин}} \sqrt{1 + \frac{4 \cdot n^2 \cdot \omega^2}{v^4}}$.

Из последней формулы видно, что равенство $K_{\text{пер}} = K_{\text{дин}}$ имеет место только при $n = 0$, то есть при отсутствии демпфирования.

Коэффициент передачи силы характеризует качество виброзащитной системы. При жёстком соединении амортизируемого объекта и основания

$K_{\text{пер}} = 1$. При $K_{\text{пер}} < 1$ виброзащитная система эффективна, так как $P_{\text{max}} < F_0$, при $K_{\text{пер}} > 1$ применение амортизатора нецелесообразно, так как приводит к увеличению передаваемого усилия.

Исследования показывают, что, для того чтобы величина силы P была меньше амплитуды вынуждающей силы, должно быть выполнено условие $\frac{\omega}{\nu} > \sqrt{2}$. Обычно принимают $\frac{\omega}{\nu} \geq 4$. Это означает, что для эффективной защиты объекта от колебаний основания (эффективной амортизации объекта) необходимо, чтобы собственная частота колебаний системы была существенно меньше частоты колебаний основания.

Вопросы для самопроверки

1. Каков эффект неуравновешенности вращающихся масс в жёстких и нежёстких механических системах?
2. Каковы причины неуравновешенности вращающихся звеньев?
3. Каково воздействие неуравновешенных сил на фундамент машины?
4. Назовите и охарактеризуйте виды неуравновешенности вращающихся звеньев?
5. Как устраняется статическая неуравновешенность и статическая балансировка, динамическая неуравновешенность и балансировка?
6. Сколько противовесов требуется для статического уравновешивания, для динамического уравновешивания и почему?
7. Как осуществляется замена массы стержневого звена двумя точечными массами?
8. Как осуществляется статическое уравновешивание четырёхшарнирного механизма?
9. Какими способами осуществляется уравновешивание кривошипно-ползунного механизма?
10. Что такое самоуравновешенный механизм?
11. Как осуществляется частичное уравновешивание поступательно движущихся масс кривошипно-ползунного механизма?
12. Что такое виброгашение? В чём заключается принцип работы динамического гасителя колебаний?
13. Что такое виброизоляция? Как осуществляется защита объекта от колебаний основания?
14. Что такое коэффициент динамичности, коэффициент передачи силы?
15. При каком условии получается эффективной защита объекта от колебаний основания?

Раздел 3. СИНТЕЗ ЭЛЕМЕНТОВ ВЫСШИХ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАР

8. Теория и геометрия зубчатых зацеплений

В этой главе изучаются: 1. Теория образования рабочих поверхностей зубьев колес, обеспечивающих постоянство передаточного отношения. 2. Свойства зубчатых зацеплений. 3. Расчёт геометрических элементов зубьев колёс.

8.1. Элементы относительного движения звеньев высшей пары

Центроиды в относительном движении колёс. *Центроидой в движении одного колеса относительно другого, находящегося с ним в зацеплении, называется геометрическое место точек его мгновенного поворота относительно этого колеса.*

Возьмём два зубчатых колеса, вращающихся вокруг центров O_1 и O_2 с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 соответственно (рис. 8.1). В начальный момент окружности колёс касаются друг друга в точке Π (греческая буква «пи»). Придадим обоим колёсам вращение с угловой скоростью $-\omega_2$, противоположной угловой скорости колеса 2 и равной ей по величине. Тогда колесо 2 станет неподвижным, а колесо 1 будет перекашиваться по нему, и его центр будет занимать последовательно положения O_1, O'_1, O''_1, \dots , а точка касания окружностей будет перемещаться по окружности колеса 2, занимая положения Π, Π', Π'', \dots , описывая, по существу, эту окружность. Причём окружность колеса 1 во всех своих положениях будет

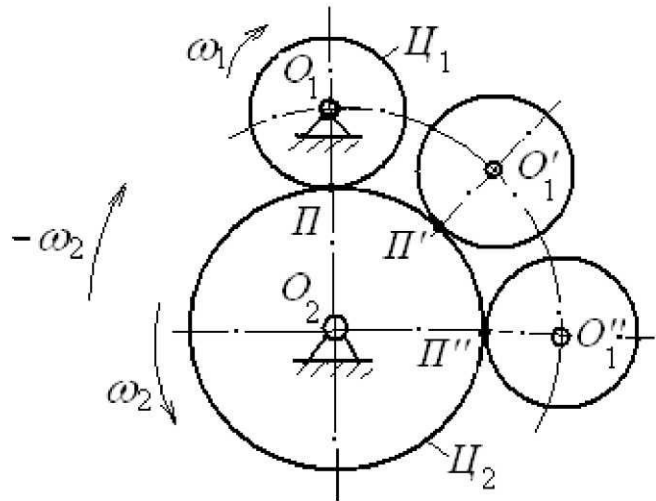


Рисунок 8.1

иметь мгновенным центром своего поворота точку Π . Поэтому окружность Π_2 колеса 2 называется *центроидой колеса 1 в его движении относительно колеса 2*. Рассуждая точно так же, сделаем вывод, что и окружность Π_1 колеса 1 является *центроидой колеса 2 в его движении относительно колеса 1*. Индексы в обозначениях центроид указывают, в системе какого колеса находится центроид. Точка касания центроид в зацеплении называется *полюсом зацепления Π* (пи).

Основной закон зацепления (теорема Виллиса). Этот закон устанавливает связь между геометрией профилей зубьев и условиями передачи движения в зубчатом зацеплении (в более широком смысле – между геометрией элементов высшей пары и условиями передачи движения в механизме с высшей парой).

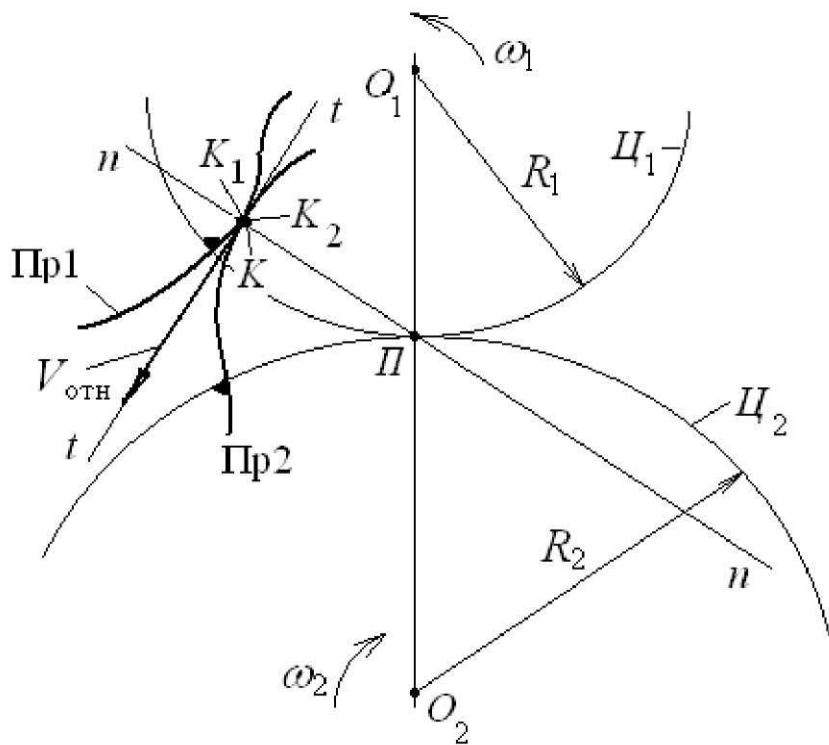


Рисунок 8.2

Возьмём две центроиды Π_1 и Π_2 , принадлежащие колёсам 1 и 2 (рис. 8.2). Эти центроиды касаются друг друга в точке Π , называемой *полосом зацепления*.

Свяжем с центроидами профили Пр_1 и Пр_2 так, чтобы они касались друг друга в точке K . Относительная скорость точки K_1 профиля Пр_1 по отношению к совпадающей с ней точке K_2 профиля Пр_2 , (в данный момент обе точки находятся на нормали $n-n$ в точке K)

обозначена на рис. 8.2 как $V_{\text{отн}}$. Примем во внимание следующие два положения:

1. Вектор $\overrightarrow{V_{\text{отн}}} = \overrightarrow{V_{K_1K_2}}$ перпендикулярен нормали, в противном случае появится составляющая относительной скорости, направленная вдоль неё. Если эта составляющая будет направлена в сторону Пр_2 , то произойдёт внедрение профиля Пр_1 в профиль Пр_2 , если она будет направлена в обратную сторону, то произойдёт отрыв профилей друг от друга. В обоих случаях высшая пара будет разрушена. Так что данное положение можно считать доказанным от противного.

2. Вектор $\overrightarrow{V_{\text{отн}}} = \overrightarrow{V_{K_1K_2}}$ перпендикулярен отрезку $K\Pi$. Так как полюс Π является мгновенным центром поворота центроиды Π_1 относительно центроиды Π_2 , то, согласно положению теоретической механики, все точки, связанные с центроидой Π_1 , имеют скорости, направленные перпендикулярно отрезку, соединяющему данную точку с центром (полюсом) поворота. Это и служит доказательством перпендикулярности вектора скорости и отрезка $K\Pi$. Отсюда следует, что *полюс зацепления* – это не только точка касания центроид, но и *точка пересечения контактной нормали профилей с линией центров колёс*.

Доказанные положения позволяют сделать следующий вывод. *Нормаль к профилям, проведённая в точке их касания, пересекает линию центров колёс в точке, совпадающей с полюсом зацепления, и таким образом делит межосевое расстояние центроид колёс на отрезки, обратно пропорциональные их угловым скоростям,*

$$i_{12} = \pm \frac{O_2\Pi}{O_1\Pi}.$$

Другими словами, для правильной передачи движения с помощью высшей кинематической пары необходимо обеспечить такую форму её элементов, при которой нормаль к ним в точке контакта (контактная нормаль) проходила бы через полюс зацепления.

Профили, подчиняющиеся основному закону зацепления, называются сопряжёнными.

Следствие 1. Если полюс P занимает неизменное положение на линии центров колёс, то передаточное отношение постоянно, и радиусы центроид также постоянны. Это соответствует круглым зубчатым колёсам. В противном случае колёса некруглые.

Следствие 2. Если полюс P находится между центрами колёс, то они вращаются в противоположные стороны (внешнее зацепление колёс), и передаточное отношение имеет отрицательный знак.

Следствие 3. Если полюс P находится вне отрезка O_1O_2 , (выше или ниже этих центров), то колёса вращаются в одну сторону (внутреннее зацепление колёс).

Следствие 4. Относительная скорость в точке касания профилей по существу является скоростью скольжения профилей зубьев. Чем дальше от полюса находится точка касания профилей, тем больше в ней скорость скольжения. Если в процессе передачи движения точка контакта профилей совпадёт с полюсом, то в этот момент скорость скольжения будет равна нулю.

Существует большое количество профилей зубьев, удовлетворяющих этому закону. При выборе формы профилей руководствуются их технологичностью (простотой изготовления), простотой инструмента и расчетов.

Профили зубьев как взаимоогibaемые кривые.
Центроиды и один из профилей полностью определяют второй профиль. Если взять центроиды колёс ζ_1 и ζ_2 (рис. 8.3), и с центроидой ζ_1 связать профиль $\text{Пр}1$, то, покатав эту центроиду с данным профилем по центроиде ζ_2 , получим второй профиль $\text{Пр}2$, принадлежащий второму колесу. На рис. 8.3 последовательное положение центроиды ζ_1 отмечено цифрами 1, 2, 3, 4, 5, а её точки касания с центроидой ζ_2 отмечены буквами $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$ и Π_5 . В результате такого движения профиль $\text{Пр}2$ получается как огибающая ряда последовательных положений профиля $\text{Пр}1$.

Если поменять местами центроиды, то таким же образом можно получить и профиль зуба колеса 1 с помощью заданного профиля $\text{Пр}2$.

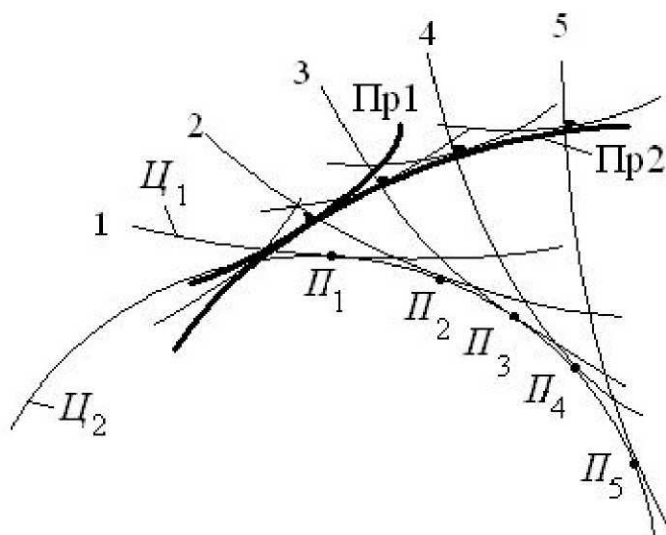


Рисунок 8.3

На рассмотренном положении основан один из методов изготовления зубьев колёс, причём Π_1 является центроидой инструмента, а Π_2 служит так называемым *производящим исходным контуром*.

8.2. Элементы зубчатых зацеплений, обусловленные их кинематикой

Полус зацепления, как отмечалось выше, – это точка касания центроид звеньев, образующих высшую пару.

Линия зацепления – это геометрическое место точек касания профилей (элементов высшей пары), отмеченное на неподвижной плоскости, т. е. связанной со стойкой. На рис. 8.4 показаны центроиды Π_1 и Π_2 , касающиеся друг друга в полусе зацепления Π , и связанные с ними профили Π_1 и Π_2 . При перекачивании центроид друг по другу профили поворачиваются вместе с ними, оставаясь постоянно в контакте друг с другом. Последовательные положения точки контакта профилей в направлении её перемещения по неподвижной плоскости отмечены цифрами от 1 до 5. Траектория этой точки, показанная на рис. 8.4 жирной линией, называется *линией зацепления*. По мере вращения центроид точка контакта в системе каждого из звеньев описывает его профиль, перемещаясь по нему. Таким образом, можно утверждать, что линией зацепления в системе каждого из звеньев является его профиль.

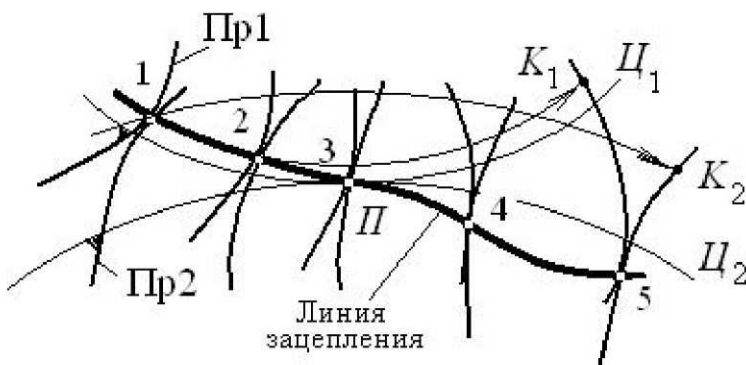


Рисунок 8.4

Активная линия зацепления – это часть линии зацепления, в пределах которой фактически происходит контакт профилей. Это связано с тем, что зубья ограничены определёнными размерами в радиальном направлении, что и лимитирует зону контакта на линии зацепления.

Сопряжённые точки – это точки профилей, вступающие в контакт на линии зацепления. С геометрической точки зрения – это те точки, траектории которых в системе каждого из звеньев пересекаются на линии зацепления. На рис. 8.4 сопряжённые точки K_1 и K_2 , встретившиеся на линии зацепления в положении 1, перенесены на профили в положение 5, где они лучше видны. Необходимо понимать, что только эти сопряжённые точки встречаются друг с другом в точке 1 линии зацепления. По мере вращения центроид точка контакта в системе каждого из звеньев описывает его профиль, перемещаясь по нему. Таким образом, каждой точке линии зацепления соответствует строго определённая пара точек профилей.

Рабочие участки профилей зубьев – это те участки профилей, которыми профили касаются друг друга в процессе передачи движения.

Дуга зацепления – это дуга центроиды, заключённая между точкой пересечения её с профилем в начале его контакта и точкой пересечения в конце

контакта. На рис. 8.5 показаны центры Π_1 и Π_2 с принадлежащими им профилями $\text{Пр}1$ и $\text{Пр}2$ соответственно. Профили показаны в начале контакта (слева) и в конце контакта (справа). Направление движения звеньев указано стрелками. Линия зацепления отмечена как N_1N_2 . Дуги зацепления на рисунке показаны жирными стрелками.

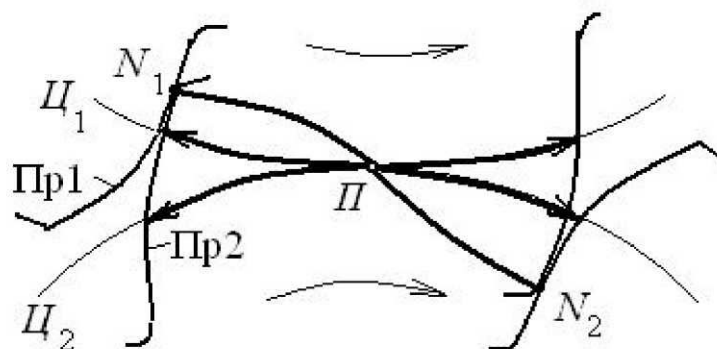


Рисунок 8.5

8.3. Основные качественные характеристики зацеплений

Рассмотрим основные характеристики, относящиеся к качеству работы зубчатых зацеплений. Эти характеристики могут быть разделены на три группы: 1) геометрические и эксплуатационные; 2) конструктивные; 3) технологические.

Геометрические и эксплуатационные.

1. *Форма линии зацепления* – прямая, дуги окружностей, и другие, в общем случае, произвольные кривые.

2. *Характер контакта зубьев* – точечный (рис. 8.6, а), линейный (рис. 8.6, б) или поверхностный (рис. 8.6, в).

Точечный контакт получается, например, при так называемых бочкообразных зубьях, когда их рабочие поверхности имеют двояковыпуклую форму, как показано на рис. 8.6, а. При этом в точке контакта имеется единственная нормаль к профилям зубьев. Зубья колёс при точечном контакте образуют кинематическую пару 1-го класса. Пять имеющихся движений в этой паре позволяют легко компенсировать погрешности монтажа передачи, например, при перекосе осей колёс.

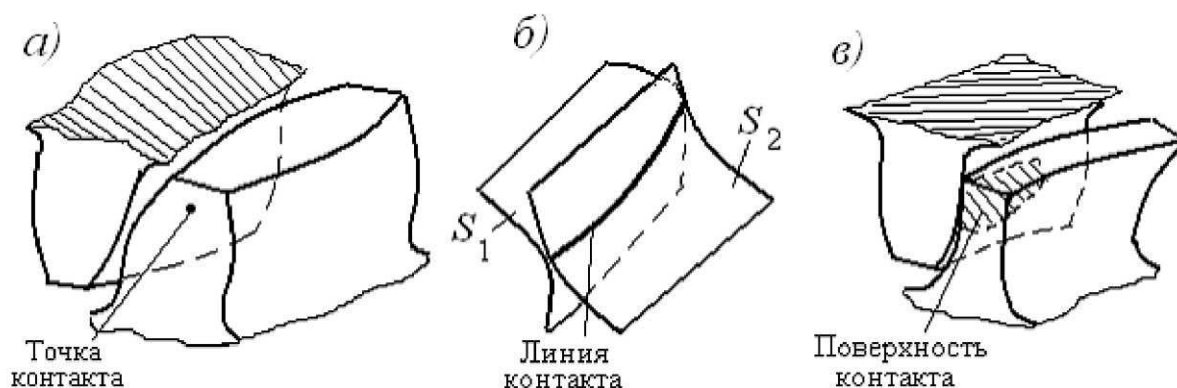


Рисунок 8.6

Линейный контакт получается, если рабочие поверхности зубьев являются, например, участками цилиндров (в подавляющем большинстве случаев – некруглыми), и их касание происходит по образующим.

Поверхностный контакт имеет место, если в зоне соприкосновения рабочих поверхностей зубьев имеется область (рис. 8.6, в), в которой совпадают кривизны этих поверхностей. Эта форма контакта не позволяет осуществить перекатывание профилей в процессе зацепления. Другими словами, здесь возможен только мгновенный контакт. Причём необходимость получения постоянного полюса зацепления требует, чтобы в сечении плоскостью, перпендикулярной осям колёс, все нормали к профилю зуба пересекались в одной точке, то есть в полюсе. В результате приходим к профилям зубьев в виде дуг окружностей с центром в полюсе. Так образовано зацепление с круговинтовой формой профиля, так называемое *зацепление М. Л. Новикова*.

При линейном или поверхностном контакте погрешности монтажа в виде неточного расположения осей колёс не допускаются, так как при их наличии имеет место кромочный контакт, исключающий правильную работу зацепления.

С точки зрения передачи усилий наиболее выгодным является поверхностный контакт, наименее выгодным – точечный, так как при одинаковых передаваемых усилиях в первом случае получается наименьшее удельное давление, во втором – наибольшее.

3. Приведённый радиус кривизны в точках контакта зубьев.

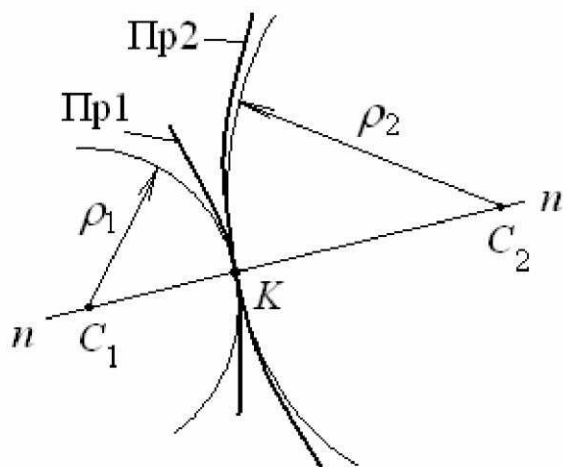


Рисунок 8.7

Возьмём профили Пр1 и Пр2, контактирующие между собой в точке К (рис. 8.7). Проведём к ним нормаль $n - n$, на которой определим положение их центров кривизны C_1 и C_2 в точке контакта. Радиусы кривизны обозначим ρ_1 и ρ_2 . Известно, что приведённая кривизна $k_{i\delta}$ контактирующих кривых (в данном случае профилей) равна сумме кривизн этих кривых в точке контакта, то есть $k_{пр} = k_1 + k_2$, где k_1 – кривизна профиля Пр1, k_2 – кривизна профиля Пр2. Так как кривизны и радиусы кривизн являются взаимнообратными величинами, то можно записать

$\frac{1}{\rho_{пр}} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \cdot \rho_2}$, откуда находим

$\rho_{пр} = \frac{\rho_1 \cdot \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$. Приведённый радиус кривизны имеет значение при расчёте зубьев на контактную прочность. Весьма желательно, чтобы он был как можно больше, так как чем больше радиус кривизны, тем меньше удельные давления при одинаковых усилиях в контакте.

4. Характер расположения контактных линий по отношению к направлению скорости скольжения рабочих поверхностей.

Для благоприятных условий смазки контакта рабочих поверхностей имеет значение угол δ между направлением линии контакта или касательной $t - t$ к ней и направлением скорости скольжения $V_{\text{н\acute{e}}}$ поверхностей (рис. 8.8). Самые благоприятные условия будут, если этот угол равен 90° или близок к этому значению. Если этот угол равен 0° , то условия для смазки будут неблагоприятны.

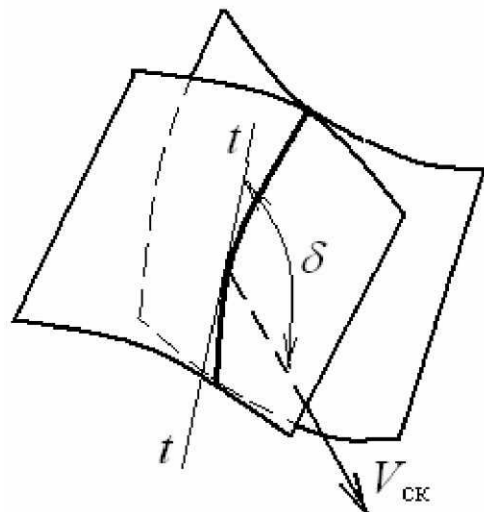


Рисунок 8.8

5. *Плавность работы передачи.* Плавность работы передачи зацеплением характеризуется коэффициентом перекрытия ε , который равен отношению дуги зацепления центроидной окружности к шагу зацепления, измеренному по той же окружности, то есть

$$\varepsilon = \frac{\text{Дуга зацепления}}{\text{Шаг зацепления}}$$

Эта формула отражает условие, которое должно выполняться для непрерывной передачи движения с помощью зубьев, а именно, передача движения между колёсами будет осуществляться непрерывно, если последующая пара зубьев вступит в контакт до того, как выйдет из контакта предыдущая пара. Это возможно в том случае, если дуга зацепления будет больше шага. Тогда их отношение $\varepsilon > 1$. При $\varepsilon < 1$ передача движения невозможна. В случае равенства $\varepsilon = 1$ получается предельный случай, при котором, в связи с погрешностями изготовления зубьев, может оказаться $\varepsilon < 1$, что недопустимо. Поэтому при проектировании зубчатой передачи придерживаются условия, чтобы $\varepsilon_{\text{min}} = 1,1$. В целом же, очевидно, что чем больше величина коэффициента перекрытия, тем плавнее работает передача.

6. *Удельное скольжение профилей зубьев.* В процессе контактирования профилей зубьев происходит их перекатывание друг по другу с одновременным скольжением. Скольжение обусловлено тем, что точка контакта находится на некотором (переменном) расстоянии от полюса зацепления, являющегося мгновенным полюсом поворота одного колеса относительно другого. Если бы это расстояние было равным нулю, то скольжение бы отсутствовало. Наличие скольжения обуславливает износ профилей в результате трения. Характеристикой скольжения профилей является *удельное скольжение*, определяемое как *отношение скорости скольжения одного профиля относительно другого к скорости перемещения точки контакта по профилю*. Точки K_1 и K_2 (рис. 8.9) профилей Пр1 и Пр2 совпадают в дан-

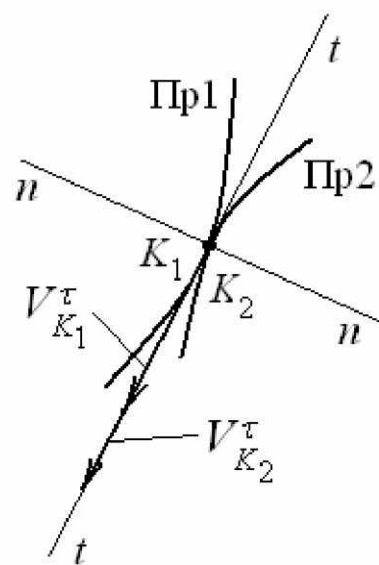


Рисунок 8.9

ный момент и движутся каждая по своему профилю в направлении касательной $t-t$ со скоростями $V_{K_1}^\tau$ и $V_{K_2}^\tau$ соответственно. Эти скорости имеют разные величины, а иногда и направления, что и является причиной скольжения. Удельное скольжение, как было сказано выше, определяется отношениями $\vartheta_1 = \frac{V_{K_1K_2}^\tau}{V_{K_1}^\tau}$ и

$$\vartheta_2 = \frac{V_{K_2K_1}^\tau}{V_{K_2}^\tau},$$

где буквами ϑ_1 (греческая буква «тэта») и ϑ_2 обозначены удель-

ные скольжения, $V_{K_1K_2}^\tau$ – скорость скольжения точки K_1 относительно точки K_2 , $V_{K_2K_1}^\tau$ – скорость скольжения точки K_2 относительно точки K_1 . Скорости скольжения определяются разностью тангенциальных скоростей $V_{K_1K_2}^\tau = V_{K_1}^\tau - V_{K_2}^\tau$, $V_{K_2K_1}^\tau = V_{K_2}^\tau - V_{K_1}^\tau$, поэтому

$$\vartheta_1 = \frac{V_{K_1}^\tau - V_{K_2}^\tau}{V_{K_1}^\tau} = 1 - \frac{V_{K_2}^\tau}{V_{K_1}^\tau}, \quad \vartheta_2 = \frac{V_{K_2}^\tau - V_{K_1}^\tau}{V_{K_2}^\tau} = 1 - \frac{V_{K_1}^\tau}{V_{K_2}^\tau}.$$

Полученные формулы не являются расчётными, так как включают скорости, требующие определения. Расчётные формулы выводятся на основе данных для каждой передачи по-своему.

Составляющие скоростей данных точек в направлении нормали $n-n$ равны друг другу и на рис. 8.9 не показаны, так как не имеют отношения к данному расчёту.

7. Нечувствительность к погрешностям монтажа. Это свойство заключается в независимости передаточного отношения от ошибок в межосевом расстоянии и в угле между осями колёс. Нечувствительность к погрешностям межосевого расстояния характеризуется тем, что при раздвижке или сближении колёс полюс зацепления, благодаря соответствующей форме профилей зубьев, остаётся на месте. Примером тому может служить *эвольвентное зацепление*. Другие виды зацеплений могут не обладать таким свойством, например *циклоидальное зацепление*.

Что касается погрешностей в угле расположения осей колёс, то нечувствительными к таким погрешностям, как указывалось выше, являются передачи с бочкообразными зубьями, имеющие точечный контакт рабочих поверхностей.

В конечном итоге, чем выше эксплуатационные показатели передачи, тем выше её надёжность и долговечность.

К о н с т р у к т и в н ы е:

1. *Расположение осей колёс в пространстве* –
оси параллельны – внешнее и внутреннее зацепление цилиндрических колёс;

оси пересекаются – зацепление конических колёс;

оси перекрещиваются – зацепление гиперблоидных, гипоидных, винтовых колёс, червячное зацепление.

2. Продольные формы зубьев – прямые, косые (винтовые), круговые, шевронные, эвольвентные, спиральные и др.

3. Расположение валов колёс – консольное, неконсольное.

Технологические:

1. Геометрия исходного контура, лежащего в основе инструмента, применяемого для изготовления зубчатых колёс.

2. Способы образования рабочих поверхностей зубьев.

3. Технологическое оборудование для изготовления зубчатых колёс.

8.4. Эвольвента зуба колеса, её свойства и уравнение

Образование рабочей эвольвентной поверхности зуба колеса можно представить таким образом. Пусть имеется круглый цилиндр (рис. 8.10, а) с радиусом r_b и осью OO , который называется *основным цилиндром*. Введём в касание с ним плоскость P , содержащую прямую AB , расположенную параллельно образующей цилиндра.

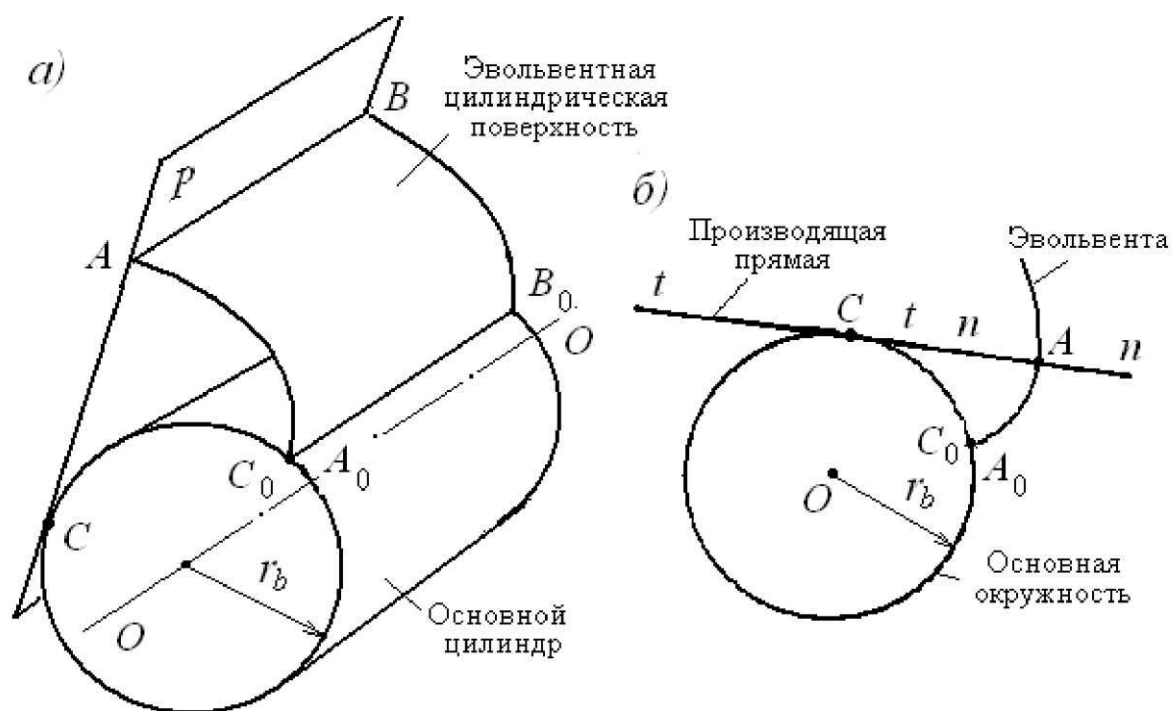


Рисунок 8.10

Если покатить без скольжения плоскость P по цилиндру, то прямая AB опишет *эвольвентную цилиндрическую поверхность*, начинающуюся от линии A_0B_0 касания данной плоскости с цилиндром в начальный момент. В любом сечении эвольвентной поверхности плоскостью, перпендикулярной оси основного цилиндра, получается окружность основания цилиндра с радиусом r_b и эвольвента этой окружности (рис. 8.10, б). Все свойства зацепления эвольвентных ко-

лѐс определяются свойствами эвольвенты окружности, поэтому далее будем рассматривать именно эту эвольвенту как профиль зубьев таких колѐс.

Образование эвольвенты окружности можно представить как траекторию, описываемую остриѐм карандаша, привязанного к концу нити, сматываемой с катушки, установленной своей осью перпендикулярно плоскости листа бумаги. Более строго можно сказать, что *эвольвента получается как траектория точки прямой линии (производящей прямой), перекатывающейся без скольжения по выпуклой кривой, например окружности*. На основании способа образования эвольвенты можно так сформулировать её свойства.

С в о й с т в а э в о л ь в е н т ы.

1. Нормаль к эвольвенте является касательной к основной окружности.
 2. Центры кривизны эвольвенты лежат на основной окружности, так что основная окружность представляет собой *эволюту*, то есть геометрическое место центров кривизны эвольвенты.

3. Радиус кривизны эвольвенты в данной точке равен отрезку производящей прямой, заключѐнному между данной точкой эвольвенты и точкой касания производящей прямой с основной окружностью, $\rho_A = AC$. В точке начала эвольвенты её радиус кривизны равен нулю, $\rho_{A_0} = 0$.

4. Радиус кривизны эвольвенты в данной точке равен дуге основной окружности, заключѐнной между точкой начала эвольвенты и точкой касания этой прямой с основной окружностью, $\rho_A = \cup C_0C$.

5. Правая и левая ветви эвольвенты симметричны.

6. Все точки эвольвенты лежат снаружи от основной окружности.

У р а в н е н и е э в о л ь в е н т ы. Для получения уравнения эвольвенты обратимся к рис. 8.11. Положение произвольной точки A_y эвольвенты в полярной системе координат определяется двумя координатами относительно её начального радиуса-вектора OA_0 (или OC_0): длиной радиуса-вектора R_y и углом θ_y . Радиус-вектор R_y определим из прямоугольного треугольника OA_yC_y :

$$R_y = \frac{r_b}{\cos \alpha_y}.$$

Для определения полярного угла θ_y сначала выразим длину дуги основной окружности через её радиус и центральный угол:

$$\cup C_0C_y = r_b (\alpha_y + \theta_y).$$

Выразим теперь противолежащий углу α_y катет A_yC_y в $\triangle OA_yC_y$:

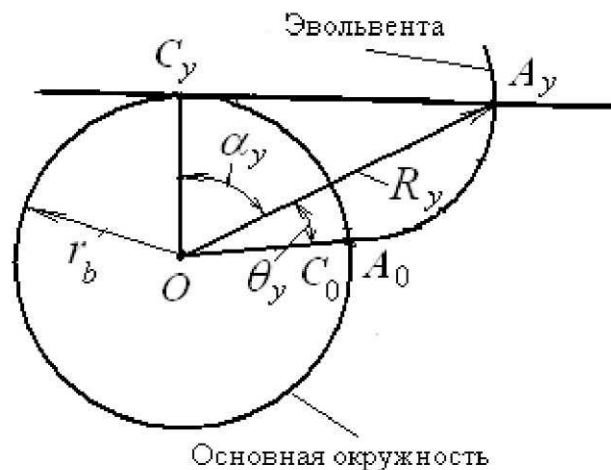


Рисунок 8.11

$$A_y C_y = r_b \cdot \operatorname{tg} \alpha_y.$$

На основании четвертого свойства эвольвенты имеем

$$A_y C_y = \cup \tilde{N}_0 \tilde{N}_y.$$

Подставляя в это равенство соответствующие выражения и решая его относительно θ_y , получаем

$$\theta_y = \operatorname{tg} \alpha_y - \alpha_y.$$

В этих математических выражениях и на рис. 8.11 угол α_y называется *профильным углом эвольвенты*. Разность между тангенсом какого-либо угла и самим углом называется *эвольвентной функцией* и обозначается тремя первыми буквами латинского названия эвольвенты *involute*, то есть *inv*, так что окончательно уравнение имеет вид:

$$\theta_y = \operatorname{inv} \alpha_y.$$

В математических справочниках приводятся таблицы эвольвентной функции, в которых аргумент α_y изменяется от нуля до нескольких десятков градусов.

8.5. Элементы зубчатого колеса

Здесь рассматриваются те элементы колеса, которые относятся к его ободу, где располагаются зубья (рис. 8.12).

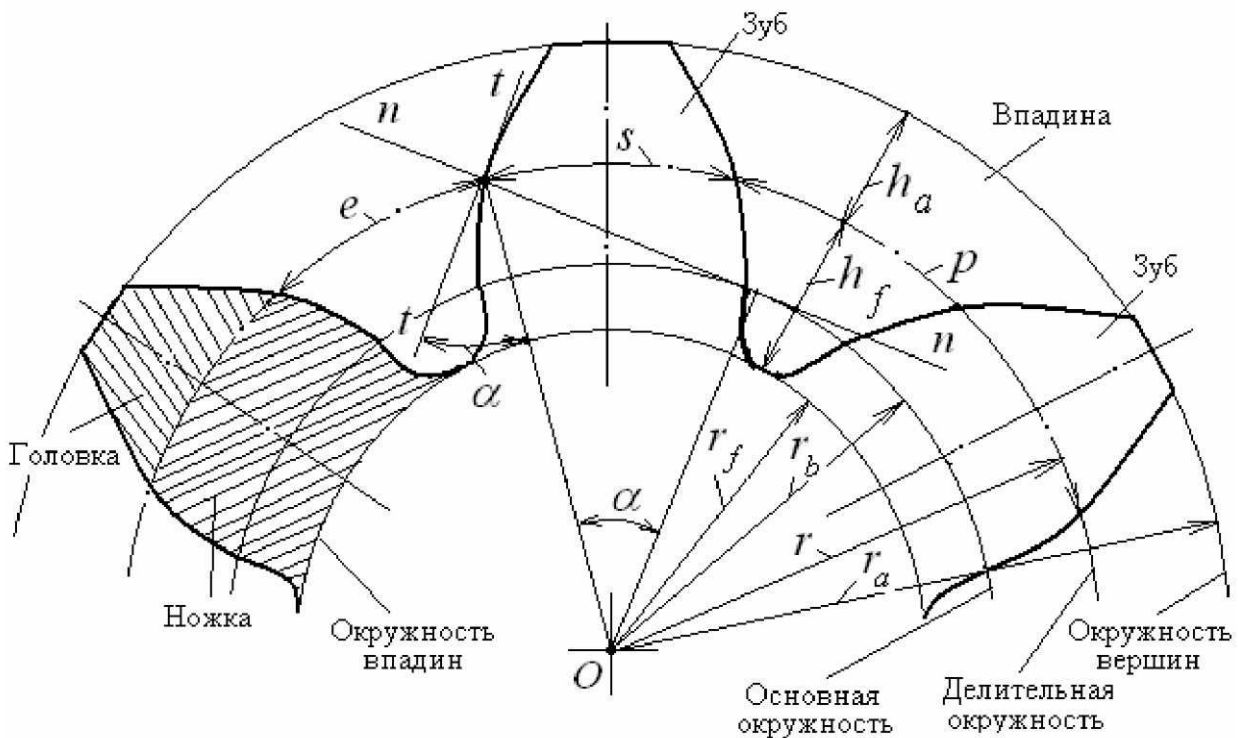


Рисунок 8.12

Шаг колеса p – это расстояние по делительной окружности между одноимёнными профилями двух соседних зубьев, $p = \pi \cdot m$. Шаг включает два параметра – толщину зуба s и ширину впадины e . Если $s = e$, то имеем колесо с равноделённым шагом, в противном случае имеем колесо с неравноделённым шагом.

Делительная окружность (её радиус r ; в зацеплении двух колёс имеет индекс номера колеса):

- делит зуб на головку и ножку;
- модуль m на этой окружности имеет стандартное значение;
- радиус окружности имеет величину $r = \frac{m \cdot z}{2}$;
- в точке на делительной окружности профильный угол эвольвенты $\alpha_y = 20^\circ$

и обозначается буквой α без индекса.

Основная окружность является базовой для образования эвольвенты (от неё начинается эвольвентная часть зуба). Радиус этой окружности получается из рассмотрения прямоугольного треугольника с углом при вершине O , равным α , и одним из катетов, равным r_b , и гипотенузой, равной r : $r_b = r \cdot \cos \alpha$.

Окружность вершин является габаритной окружностью колеса, её радиус определяется формулой

$$r_a = r + h_a,$$

где h_a – высота головки зуба, причём $h_a = h_a^* \cdot m$. Множитель перед модулем называется коэффициентом высоты головки зуба и равен по величине 1, то есть $h_a^* = 1$.

Диаметр окружности вершин является диаметром заготовки для изготовления зубчатого колеса.

Окружность впадин ограничивает зуб у основания. Её радиус определяется разностью $r_f = r - h_f$, где h_f – высота ножки зуба, определяемая равенством $h_f = (h_a^* + c^*) \cdot m$, число c^* в скобках называется коэффициентом радиального зазора и имеет величину $c^* = 0,25$.

Полная высота зуба, включающая головку и ножку, составляет $h = h_a + h_f = (2h_a^* + c^*) \cdot m$.

Контур зуба от основной окружности до окружности вершин очерчен эвольвентой, которая сопрягается с окружностью впадин переходной кривой (для сведения: эквидистантой удлинённой эвольвенты).

8.6. Элементы и свойства эвольвентного зацепления

Элементы зацепления пары колёс. Отметим прежде всего, что здесь рассматриваются те элементы, которые имеются именно в зацеплении колёс, а у отдельного колеса их нет (рис. 8.13). К этим элементам относятся следующие.

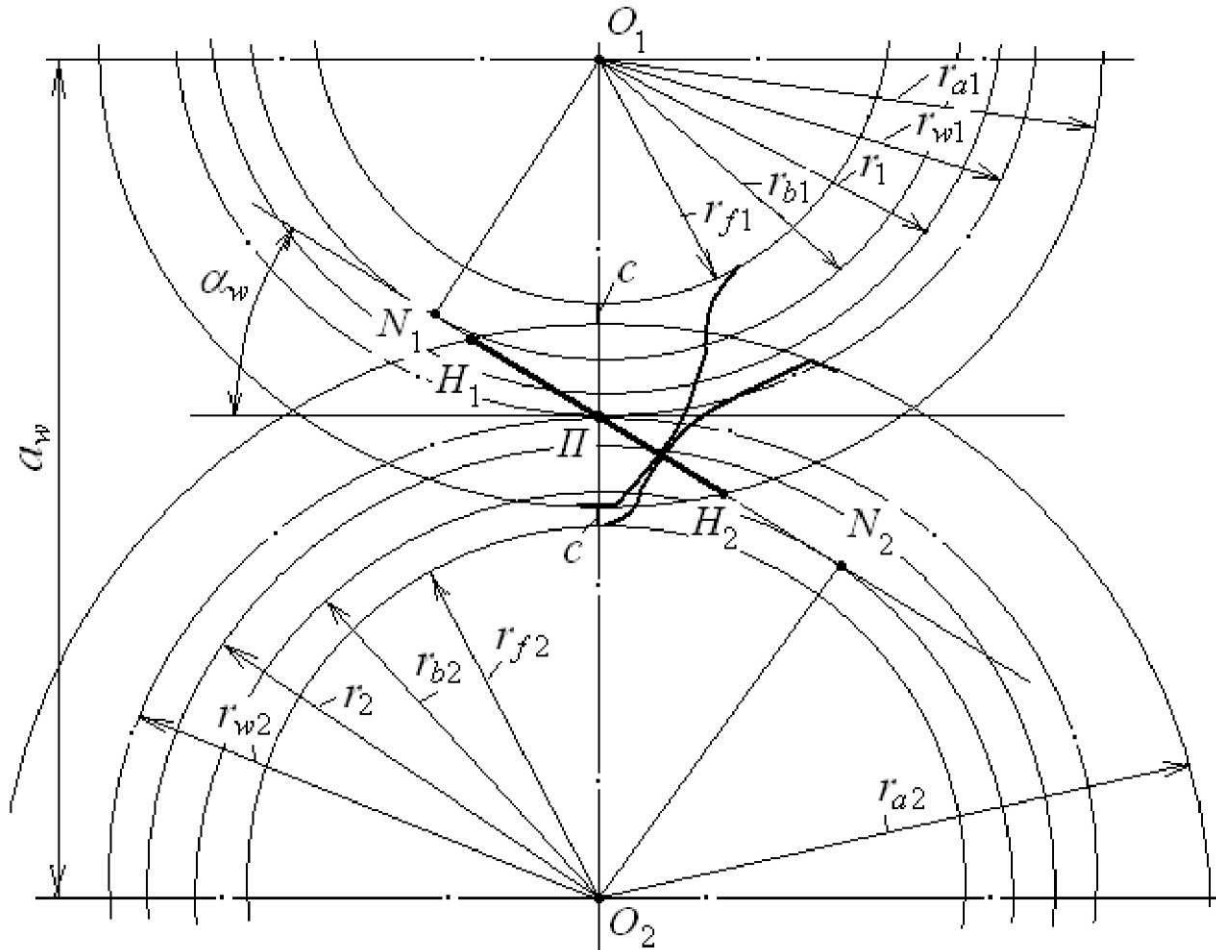


Рисунок 8.13

Межосевое расстояние a_w – это расстояние между центрами колёс O_1 и O_2 . Полюс зацепления Π – это точка касания centroидных окружностей колёс с радиусами r_{w1} и r_{w2} , которые в эвольвентном зацеплении называются начальными окружностями. Теоретическая линия зацепления N_1N_2 – это геометрическое место точек мгновенного касания профилей зубьев, отмеченное на неподвижной плоскости. Процесс передачи движения происходит таким образом, что профили одной пары зубьев на протяжении некоторого времени касаются друг друга, то есть имеют общую нормаль. На основании первого свойства эвольвенты нормаль к ней является касательной к основной окружности, а для двух касающихся друг друга профилей является касательной к обеим основным окружностям. Поэтому для данных профилей контактная нормаль является единственной и лежит на общей касательной к

основным окружностям, образуя, таким образом, *прямолинейную линию зацепления*. С учётом геометрических размеров конкретных колёс линия зацепления используется для передачи движения только в пределах зоны, заключённой между точками её пересечения с окружностями вершин (рис. 8.13). Эта зона называется *активной линией зацепления*. Её границы на рисунке отмечены точками H_1 и H_2 , и она проведена жирной линией.

Угол зацепления α_w – это угол между линией зацепления и общей касательной к начальным окружностям, проведённой через полюс зацепления П.

Сопряжённые (или парные) точки – это точки профилей зубьев, которыми они касаются друг друга на линии зацепления.

Радиальный зазор – это расстояние s на межосевой линии между точками пересечения её с окружностью вершин одного колеса и впадин другого колеса.

Величина радиального зазора равна $s = c^* \cdot m$, где c^* – это коэффициент радиального зазора, в соответствии со стандартом равный 0,25.

Свойства эвольвентного зацепления.

1. *Передачное отношение постоянно в любой фазе зацепления, так как оно может быть выражено через радиусы основных окружностей. Для доказательства используем подобные прямоугольные треугольники (рис. 8.13)*

$$\Delta O_1 N_1 П \text{ и } \Delta O_2 N_2 П \text{ и запишем цепочку равенств: } |i_{12}| = \left| \frac{\omega_1}{\omega_2} \right| = \frac{r_{w2}}{r_{w1}} = \frac{O_2 N_2}{O_1 N_1} = \frac{r_{b2}}{r_{b1}}.$$

2. *Передачное отношение не зависит от изменения межосевого расстояния a_w по той же причине, что и в предыдущем случае. Для компенсации погрешностей углового положения осей колёс применяют бочкообразные зубья.*

3. *Правильное зацепление эвольвентных профилей происходит только в пределах линии зацепления $N_1 N_2$, так как только в этих пределах контактирующие эвольвентные профили имеют общую нормаль.*

4. *Эвольвентные колёса одного модуля имеют полную взаимозаменяемость, то есть могут составить правильное зацепление.*

8.7. Методы изготовления зубчатых колёс

Метод копирования. Метод заключается в том, что *профиль зуба колеса повторяет форму профиля инструмента* (рис. 8.14), который, в свою очередь, теоретически точно соответствует форме эвольвенты и переходной кривой зуба конкретного колеса. Инструментом могут служить дисковая или пальцевая *модульные фрезы* или *протяжка*. Достоинством метода является возможность применения универсального оборудования (горизонтально- или вертикально-фрезерных станков), оснащенного делительной головкой для точного поворота заготовки на угловой шаг после обработки очередной впадины. Такое оборудование имеется, как правило, в ремонтной службе любого предприятия. К недостаткам следует отнести низкую точность и

невысокую производительность. Кроме того, геометрия эвольвенты полностью определяется радиусом основной окружности, зависящей от модуля и числа зубьев, поэтому каждое колесо, по существу, должно иметь собственный инструмент для нарезания зубьев. Так как это невозможно, то применяют наборы фрез одного модуля из 8 или 15 штук. Каждая фреза набора используется для изготовления нескольких колёс с разными числами зубьев, одному из которых она обеспечивает номинально точную эвольвенту, а другие получают ошибку профиля. Ошибка получается тем больше, чем больше отклоняется число зубьев колеса от номинала.

Метод обкатки (огибания) состоит в том, что профиль зуба колеса получается как *огibaющая ряда последовательных положений профиля инструмента* (рис. 8.15).

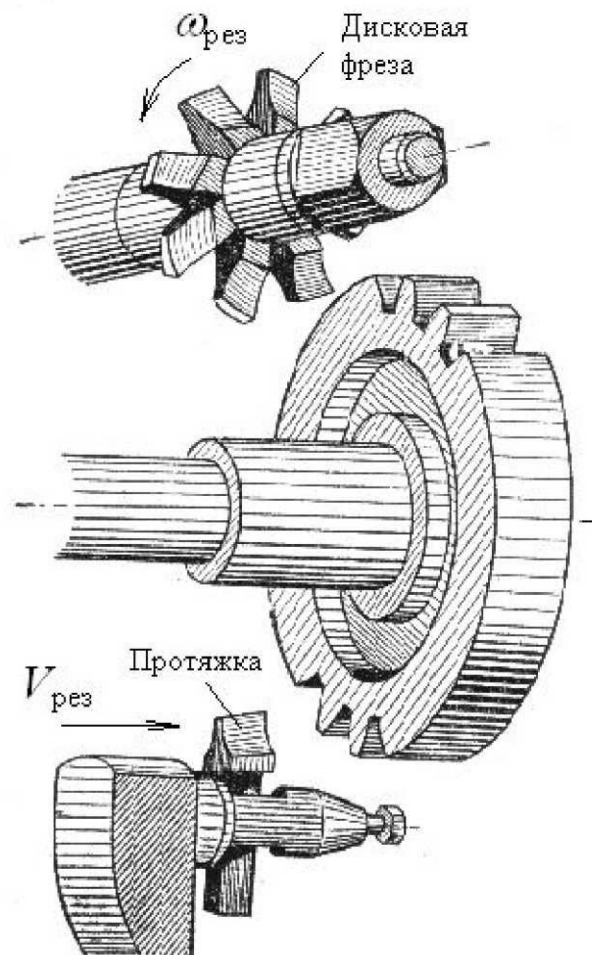


Рисунок 8.14

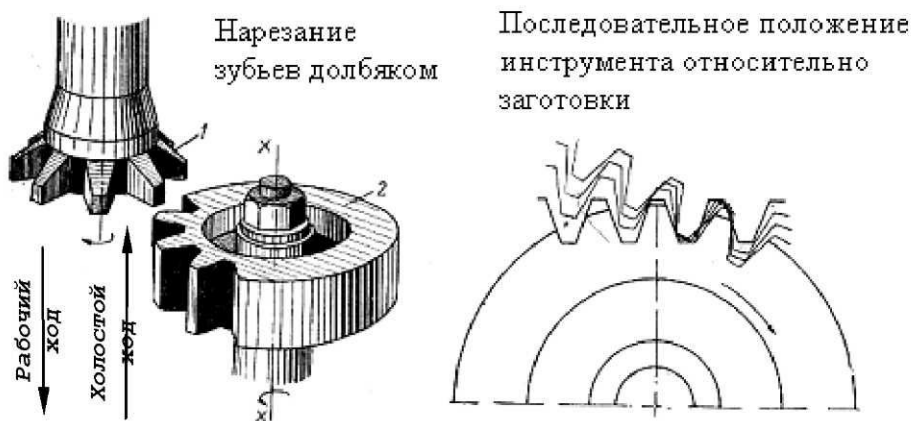


Рисунок 8.15

Движение инструмента относительно ещё не нарезанного колеса с помощью специальной цепи деления станка повторяет то движение, которое осуществляется в зубчатой передаче. Так как инструмент 1, по существу, представляет собой зубчатое колесо с геометрией режущего инструмента, то в процессе нарезания оно срезает всё, что попадает в зону движения режущих

кромки, а оставшееся и представляет собой зубья колеса 2. Метод характеризуется высокой точностью, производительностью и, что немаловажно, позволяет одним инструментом данного модуля изготавливать зубчатые колеса с любым числом зубьев. К недостаткам метода можно отнести необходимость в специальном зубообрабатывающем оборудовании, однако этот недостаток полностью компенсируется достоинствами метода.

8.8. Геометрия реечного производящего исходного контура

Реечным производящим исходным контуром (коротко – исходным контуром или инструментальной рейкой) называется профиль зуборезной гребёнки, применяемой для нарезания зубьев на зубострогальном станке, и профиль нормального сечения червячной фрезы, применяемой для нарезания зубьев на зубофрезерном станке. Форма и размеры исходного контура устанавливаются Государственным стандартом.

Элементы и размеры исходного контура можно увидеть на рис. 8.16.

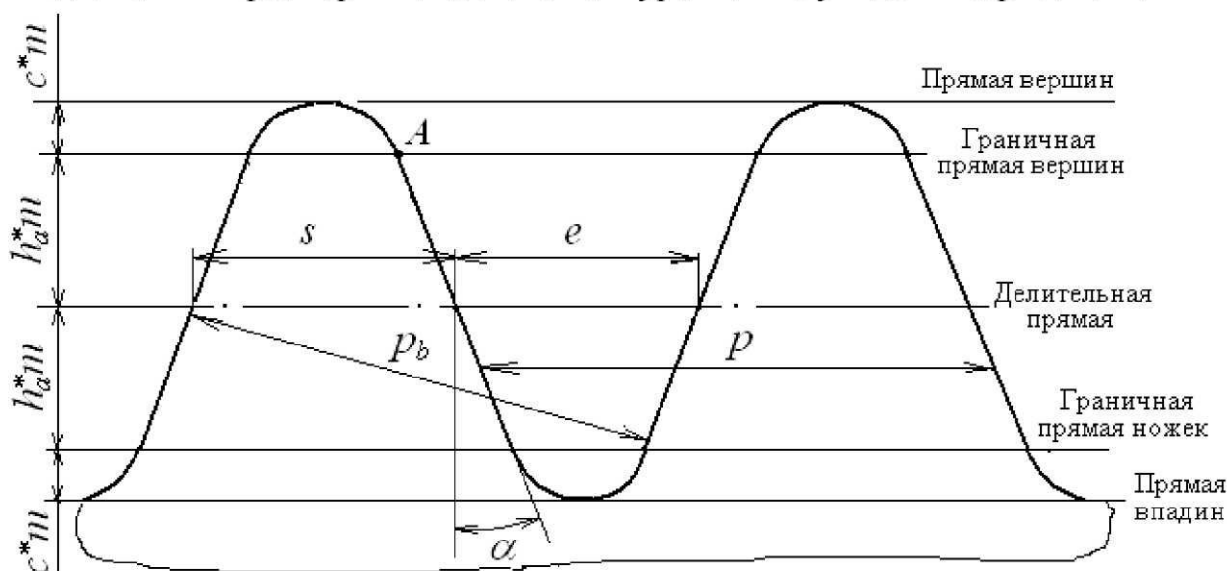


Рисунок 8.16

Делительная прямая проходит точно по середине высоты зубьев и делит, таким образом, высоту зуба пополам. По этой прямой шаг исходного контура $p = \pi \cdot m$ делится на две равные части, толщину зуба s и ширину впадины e , равные половине шага каждая. Часть контура выше делительной прямой называется головкой, ниже – ножкой исходного контура. Таким образом, делительная прямая делит зуб исходного контура на головку и ножку. Как видно из рис. 8.16, прямолинейная часть профиля исходного контура заключена между граничными прямыми, параллельными делительной прямой. Эти прямые отстоят от делительной вверх и вниз на расстояние h_a^*m . Сверху зуб ограничен прямой вершин, отстоящей от граничной прямой головок на величину c^*m , снизу он ограничен прямой впадин, отстоящей от граничной пря-

мой ножек на то же расстояние. С учётом отмеченных размеров общая высота зуба исходного контура получается

$$h = 2(h_a^* + c^*)m.$$

Наклон прямолинейных участков профиля относительно вертикали составляет угол $\alpha = 20^\circ$, который называется *углом профиля реечного производящего исходного контура*.

Расстояние по нормали между одноимёнными точками двух соседних зубьев называется *нормальным шагом исходного контура* p_n (он равен основному шагу зубчатого колеса p_b , поэтому на рис. 8.16 он так и обозначен) и определяется формулой $p_n = p_b = p \cdot \cos \alpha$.

При изготовлении зубчатого колеса прямолинейная часть профиля исходного контура формирует эвольвенту зуба колеса, а скруглённая часть головки исходного контура формирует переходную кривую на ножке зуба колеса. Заготовка колеса и инструмент (исходный контур) принудительно движутся относительно друг друга, как колёса в реечной передаче, поэтому в зацеплении инструмента и нарезаемого колеса присутствуют все элементы зацепления двух колёс, в том числе и центроиды. *Центроидой нарезаемого колеса* всегда служит его *делительная окружность*. Центроидой инструмента служит *станочно-начальная прямая*, в качестве которой может быть или делительная прямая, или прямая, ей параллельная.

Рабочая рейка, используемая в реечной передаче, отличается от инструментальной тем, что в ней срезана скруглённая часть на головках зубьев. Тем самым обеспечивается радиальный зазор в передаче, потому что общая высота зуба рабочей рейки должна быть равна высоте зуба зубчатого колеса.

8.9. Подрез зуба колеса и его предотвращение

Подрезом зуба называется пересечение траектории точки A , лежащей на граничной прямой головок исходного контура (рис. 8.16), с эвольвентой зуба нарезаемого колеса. В результате этого происходит утонение ножки зуба в его опасном сечении при работе на изгиб (рис. 8.17) и уменьшение плавности работы передачи из-за сокращения эвольвентной части профиля зуба.

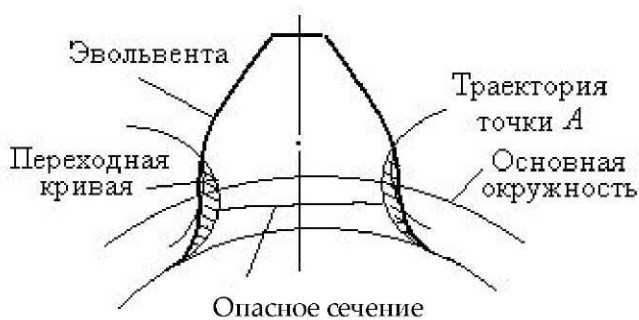


Рисунок 8.17

Подрез, как правило, не допускается, поэтому подрезанное колесо считается бракованным. Подрез наступает при количестве зубьев колеса, которое меньше некоторого значения, называемого *минимальным числом зубьев*. Для определения этого числа зубьев обратимся к рис. 8.18.

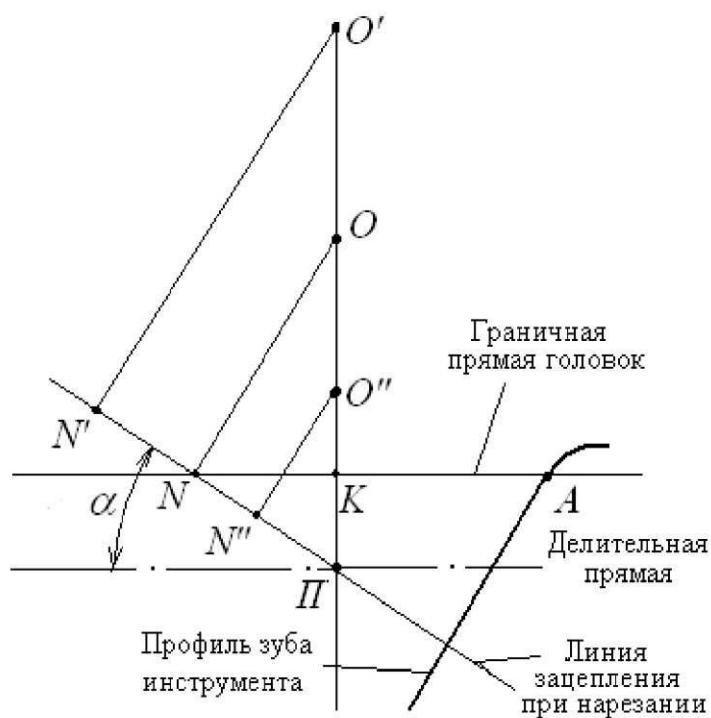


Рисунок 8.18

Если число зубьев нарезаемого колеса достаточно велико, $z' > z_{\min}$, то конец N' теоретической линии зацепления при нарезании располагается выше граничной прямой головок инструмента, и подрез отсутствует. Если число зубьев нарезаемого колеса мало $z'' < z_{\min}$, то конец N'' теоретической линии зацепления расположен ниже граничной прямой головок, и подрез есть. Наконец, если граничная прямая головок проходит точно через границу теоретической линии зацепления, то подреза ещё нет, то есть имеет место некое пограничное состояние. Число

зубьев колеса, соответствующее этому состоянию, равно минимальному, то есть z_{\min} . Выразим отрезок $KП$ на межосевой линии двояким образом. С одной стороны он равен h_a^*m , с другой, последовательно рассматривая треугольники PKN и $ПON$, имеем

$$KP = PN \cdot \sin \alpha = OP \cdot \sin^2 \alpha,$$

или

$$KP = \frac{m \cdot z_{\min}}{2} \cdot \sin^2 \alpha.$$

Приравнивая правую часть полученного выражения к h_a^*m и, решая новое равенство относительно z_{\min} , получаем

$$z_{\min} = \frac{2 \cdot h_a^*}{\sin^2 \alpha}.$$

Стандартным параметрам исходного контура соответствует $z_{\min} = 17$.

При необходимости изготовления колеса с числом зубьев, меньшим минимального, и предотвращения подреза следует инструментальную рейку сместить от центра колеса на такую величину, при которой её граничная прямая головок пройдет через точку N линии зацепления (рис. 8.19). Определим необходимую величину смещения. Согласно рис. 8.19, имеем с одной стороны

$$KP = h_a^*m - xm,$$

и с другой стороны

$$KP = PN \cdot \sin \alpha,$$

или

$$KP = OP \cdot \sin^2 \alpha.$$

Так как $OP = r = \frac{1}{2}mz$, то,

приравнявая правые части

этих выражений и заменив $\sin^2 \alpha$ на $\frac{2h_a^*}{z_{\min}}$, после не-

сложных преобразований находим искомый коэффициент смещения

$$x = h_a^* \left(1 - \frac{z}{z_{\min}} \right).$$

Для стандартных размеров исходного контура $z_{\min} = 17$, поэтому получаем: $x = \frac{17-z}{17}$. Вычисленный по этой формуле положительный коэффициент

смещения даёт ответ на вопрос, какая величина смещения инструмента от центра колеса требуется для предотвращения подреза. Отрицательный коэффициент укажет на допустимое смещение инструмента к центру колеса, при котором не будет подреза.

8.10. Качественные характеристики эвольвентного зацепления

Коэффициент перекрытия. Как было сказано выше (см. рубрику 8.3), коэффициентом перекрытия называется отношение дуги зацепления к шагу. То и другое берётся по центроидной окружности. Применительно к эвольвентному зацеплению это отношение можно заменить отношением дуги зацепления по основной окружности к шагу по той же окружности. Основанием для такой замены служит положение о том, что если разделить числитель и знаменатель на радиус начальной окружности, то отношение не изменится. Отношение дуги зацепления к радиусу даст угол поворота зуба от начала до конца его контакта с соответствующим зубом другого колеса. Отношение шага к радиусу даст угловой шаг τ . Отношение дуги зацепления по основной окружности к радиусу этой окружности равно тому же углу поворота зуба, а отношение основного шага к радиусу основной окружности также равно угловому шагу τ . На основании свойств эвольвенты дуговым величинам на основной окружности равны соответствующие отрезки линии зацепления. Тогда коэффициентом перекрытия можно назвать отношение длины активной линии зацепления к основному шагу зубчатого колеса. В эвольвентном зацеплении он обозначается ε_α и определяется отношением

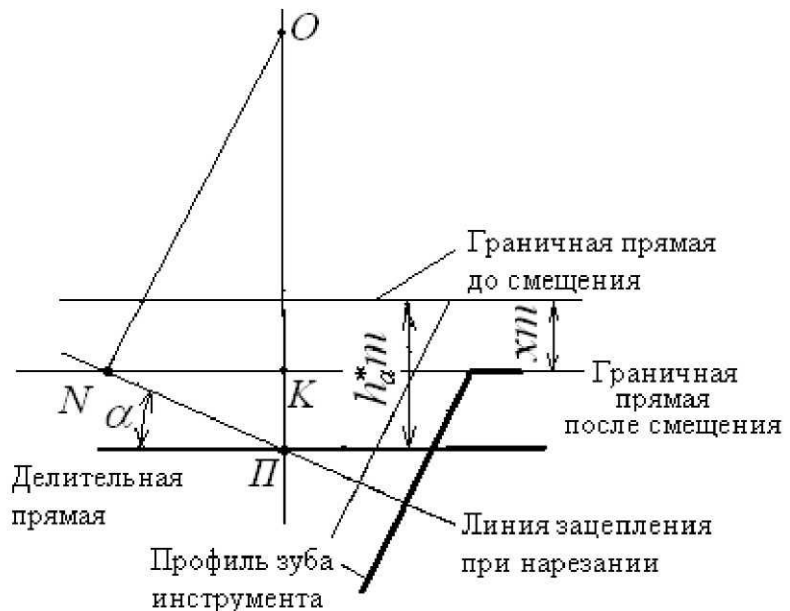


Рисунок 8.19

$$\varepsilon_{\alpha} = \frac{H_1 H_2}{p_b} = \frac{H_1 H_2}{\pi \cdot m \cdot \cos \alpha}$$

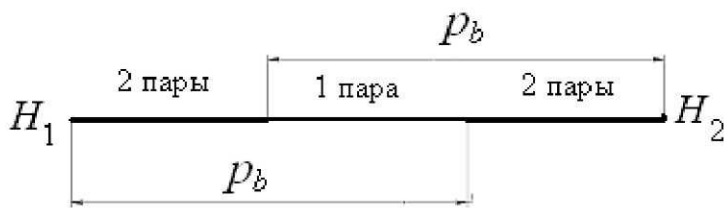


Рисунок 8.20

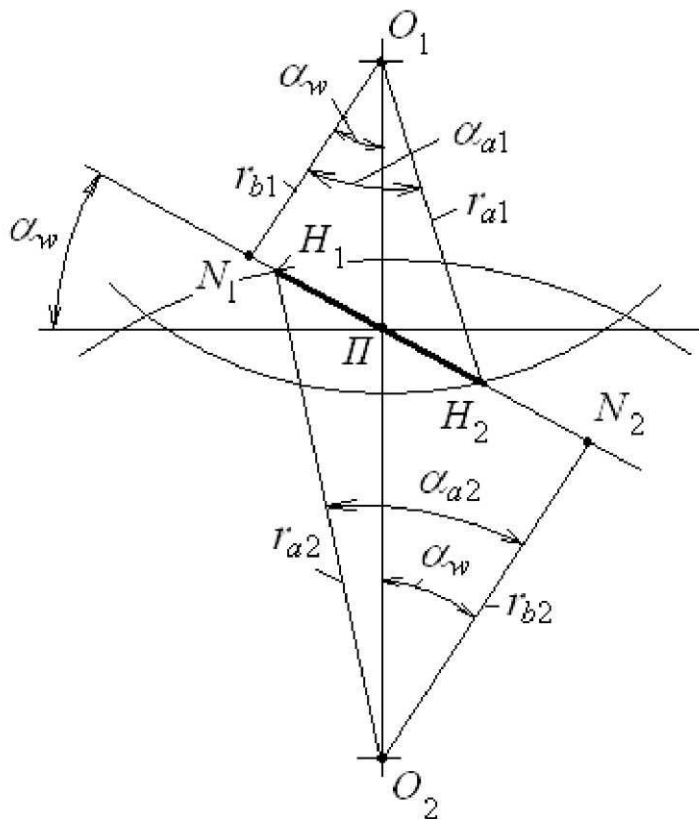


Рисунок 8.21

Обычно величина коэффициента перекрытия заключена между 1 и 2, при этом минимальное значение не должно быть меньше 1,1. Схематически соотношение между длиной активной линии зацепления и основным шагом показано на рис. 8.20. Точка контакта профилей зубьев перемещается вдоль активной линии зацепления от точки H_1 к точке H_2 . Основной шаг короче активной линии зацепления, поэтому в пределах этой линии работают то одна, то две пары зубьев. Если отложить, как показано на рис. 8.20, основной шаг p_b от точек H_1 и H_2 , то отрезок H_1H_2 будет разделён на три части. Две крайние части соответствуют зонам двухпарного зацепления зубьев, а средняя – зоне однопарного зацепления. Чем короче средняя зона, тем плавнее работает зубчатая передача, так как суммарная длина двух крайних участков становится длиннее. Данной формулой можно воспользоваться, если

вычерчена картина зацепления пары колёс, на которой можно измерить отрезок H_1H_2 и затем вычислить ε_{α} . Однако при отсутствии картины зацепления отрезок не измеришь и коэффициент перекрытия вычислить нельзя. Поэтому необходимо получить расчётную формулу, по которой можно рассчитать ε_{α} , используя другие данные. Обратимся к рис. 8.21, на котором показаны все элементы, необходимые для получения расчётной формулы. Активная линия зацепления H_1H_2 выделена жирной линией. Из окружностей колёс здесь показаны только окружности вершин и отмечены их радиусы r_{a1} и r_{a2} . Отмечены также радиусы основных окружностей r_{b1} и r_{b2} . И, наконец, указаны угол зацепления α_w и профильные углы α_{a1} эвольвенты первого колеса на вершине зуба и α_{a2}

эвольвенты второго колеса также на вершине зуба. Сразу же отметим, что указанные профильные углы легко определяются из прямоугольных треугольников $O_1N_1H_2$ и $O_2N_2H_1$. Из первого треугольника находим $\cos \alpha_{a1} = \frac{r_{b1}}{r_{a1}}$, из второго треугольника находим $\cos \alpha_{a2} = \frac{r_{b2}}{r_{a2}}$.

Далее выразим длину отрезка H_1H_2 следующим образом:

$$H_1H_2 = (N_1H_2 - N_1\Pi) + (H_1N_2 - \Pi N_2).$$

В этом выражении $N_1H_2 = r_{b1} \cdot \operatorname{tg} \alpha_{a1}$, $N_1\Pi = r_{b1} \cdot \operatorname{tg} \alpha_w$,

$$H_1N_2 = r_{b2} \cdot \operatorname{tg} \alpha_{a2} \quad \text{и} \quad \Pi N_2 = r_{b2} \cdot \operatorname{tg} \alpha_w.$$

Подставив вместо H_1H_2 найденные значения слагаемых правой части, записываем

$$\varepsilon_\alpha = \frac{r_{b1}(\operatorname{tg} \alpha_{a1} - \operatorname{tg} \alpha_w) + r_{b2}(\operatorname{tg} \alpha_{a2} - \operatorname{tg} \alpha_w)}{\pi \cdot m \cdot \cos \alpha}.$$

Заменим радиусы r_{b1} и r_{b2} соответствующими выражениями и, подставив их в полученную формулу, после сокращений находим

$$\varepsilon_\alpha = \frac{r_1(\operatorname{tg} \alpha_{a1} - \operatorname{tg} \alpha_w) + r_2(\operatorname{tg} \alpha_{a2} - \operatorname{tg} \alpha_w)}{\pi \cdot m}.$$

Заменив радиусы r_1 и r_2 их выражениями через модуль и числа зубьев, а затем, поделив числитель и знаменатель на модуль m , окончательно получаем

$$\varepsilon_\alpha = \frac{z_1(\operatorname{tg} \alpha_{a1} - \operatorname{tg} \alpha_w) + z_2(\operatorname{tg} \alpha_{a2} - \operatorname{tg} \alpha_w)}{2 \cdot \pi}.$$

Удельное скольжение. Удельным скольжением называется отношение скорости скольжения профилей в точке их касания к скорости перемещения точки касания по профилю. Этот показатель характеризует износ боковых (рабочих) поверхностей зубьев в результате трения скольжения. Об этом было сказано в рубрике 8.3. Там же было определено, что удельное скольжение описывается двумя математическими выражениями, относящимися к разным колёсам:

$$g_1 = \frac{V_{K1}^\tau - V_{K2}^\tau}{V_{K1}^\tau} \quad \text{и} \quad g_2 = \frac{V_{K2}^\tau - V_{K1}^\tau}{V_{K2}^\tau}.$$

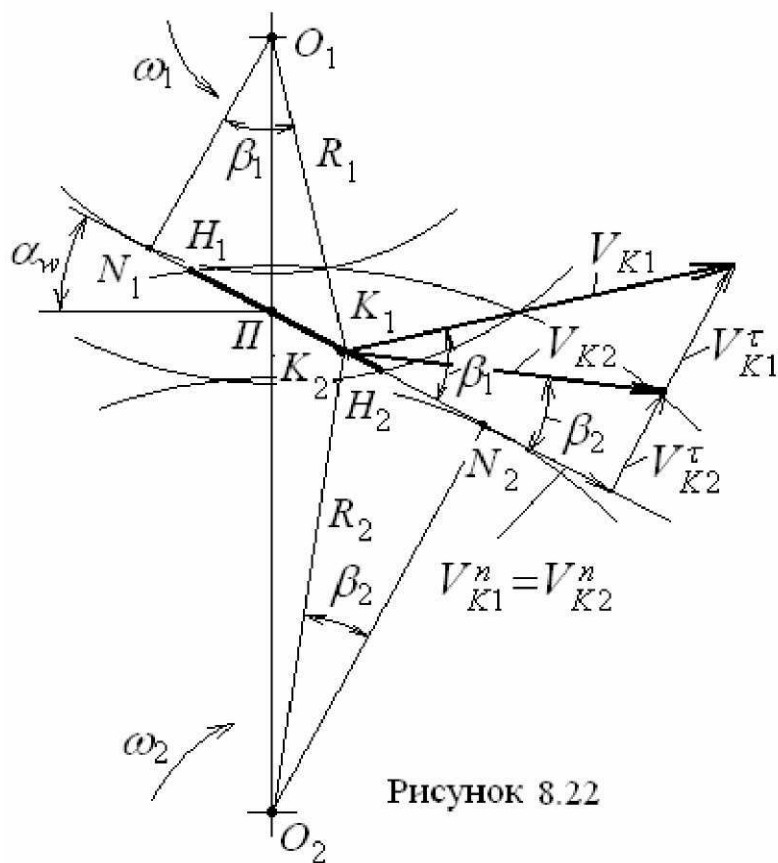


Рисунок 8.22

Для определения тангенциальных составляющих скоростей обратимся к рис. 8.22. Соединим точку K_1 профиля зуба колеса 1 с центром O_1 вращения этого колеса радиусом R_1 , и точку K_2 , совпадающую с точкой K_1 , с центром O_2 радиусом R_2 . Перпендикулярно радиусу R_1 в сторону вращения колеса 1 отложим абсолютную скорость точки K_1 , равную $V_{K_1} = \omega_1 \cdot R_1$, и перпендикулярно радиусу R_2 в сторону вращения колеса 2 отложим абсолютную скорость точки K_2 , равную $V_{K_2} = \omega_2 \cdot R_2$. Отметим угол β_1 между радиусом R_1 и перпендикуляром O_1N_1 к линии зацепления

и β_2 – между радиусом R_2 и перпендикуляром O_2N_2 также к линии зацепления. Спроецируем скорости V_{K_1} и V_{K_2} на линию зацепления N_1N_2 . Линия зацепления направлена по нормали к профилям зубьев, поэтому проекции скоростей на неё являются нормальными составляющими, равными друг другу. Составляющие, направленные перпендикулярно линии зацепления, действуют по касательной к профилям и являются тангенциальными составляющими. Они определяются следующими цепочками равенств

$$V_{K_1}^\tau = V_{K_1} \cdot \sin \beta_1 = \omega_1 R_1 \sin \beta_1 = \omega_1 \cdot N_1K,$$

$$V_{K_2}^\tau = V_{K_2} \cdot \sin \beta_2 = \omega_2 R_2 \sin \beta_2 = \omega_2 \cdot KN_2.$$

С учётом этого ранее записанные выражения примут следующий вид:

$$g_1 = 1 - |i_{21}| \cdot \frac{N_1N_2 - N_1K}{N_1K}, \quad g_2 = 1 - |i_{12}| \cdot \frac{N_1K}{N_1N_2 - N_1K}.$$

В этих выражениях буквой K обозначены совпадающие друг с другом точки K_1 и K_2 .

Схематический график удельного скольжения показан на рис. 8.23.

График показывает, что удельное скольжение на головках зубьев меньше, чем на ножках, следовательно, ножки изнашиваются интенсивнее, чем головки. Характер износа таков, что чем дальше от полюса в радиальном направлении находится зона профиля, тем больше она изнашивается. В полюсе зацепления износ от скольжения равен нулю, так как эта точка является мгновенным центром поворота одного колеса относительно другого, и точки профилей, попадающие в полюс, имеют радиус относительного вращения вокруг полюса, равный нулю.

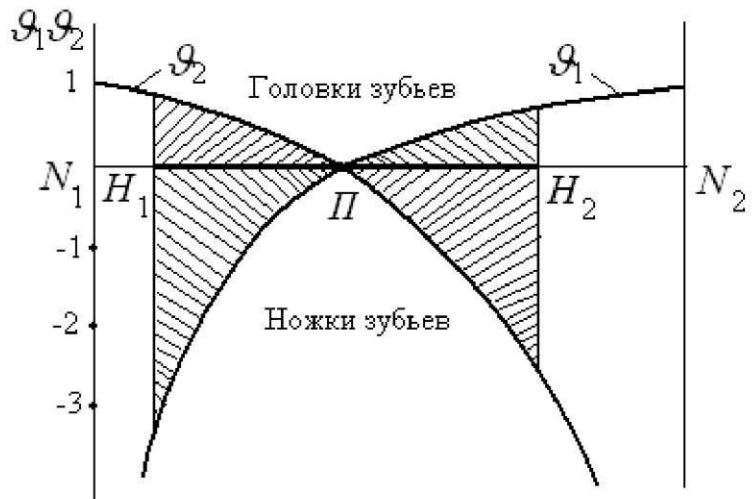


Рисунок 8.23

Коэффициент удельного давления. Коэффициентом удельного давления называется отношение модуля зацепления к приведённому радиусу кривизны профилей зубьев в точке их контакта. Этот коэффициент применяется при расчёте зубьев на контактную прочность. Формула Герца для расчёта контактных напряжений в контакте двух цилиндров имеет вид

$$\sigma_k = 0,418 \cdot \sqrt{\frac{P^n \cdot E_{\text{пр}}}{b \cdot \rho_{\text{пр}}}},$$

где P^n – нормальное усилие, сжимающее цилиндры, E_{i0} – приведённый модуль упругости, b – длина контактной линии цилиндров, ρ_{i0} – приведённый радиус кривизны цилиндров.

Умножив числитель и знаменатель формулы на модуль m , не изменим результат, а формула Герца приобретёт следующий вид

$$\sigma_k = 0,418 \cdot \sqrt{\frac{P^n \cdot E_{\text{пр}} \cdot q}{b \cdot m}},$$

где $q = \frac{m}{\rho_{\text{пр}}}$ представляет собой коэффициент удельного давления.

На основании свойств эвольвенты радиусы кривизны профилей равны: $\rho_1 = N_1 K$; $\rho_2 = N_1 N_2 - N_1 K$, поэтому окончательно формула получится в виде

$$q = \frac{m \cdot N_1 N_2}{N_1 K \cdot (N_1 N_2 - N_1 K)}.$$

Примерный вид графика коэффициента удельного давления в зависимости от положения точки контакта на линии зацепления показан на рис. 8.24.

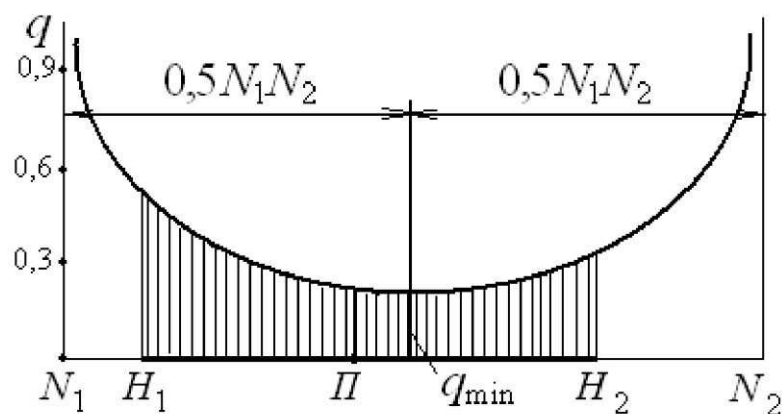


Рисунок 8.24

Минимальное значение коэффициента q_{\min} получается в центральной точке графика, то есть при $N_1K = 0,5N_1N_2$. Это значение составляет величину

$$q_{\min} = \frac{4 \cdot m}{N_1 N_2}.$$

8.11. Назначение коэффициентов смещения для нарезания зубчатых колёс

Коэффициенты смещения назначаются с целью:

- увеличения изгибной прочности зуба путём увеличения его опасного сечения вблизи основания;
- увеличения контактной прочности зуба путём использования участков эвольвенты, более удалённых от основной окружности;
- выравнивания максимальных удельных скольжений;
- предотвращения подреза малого колеса в передаче;
- увеличения плавности работы передачи путём удлинения активной линии зацепления;
- обеспечения заданного межосевого расстояния;
- обеспечения двухпарного зацепления в полюсе и других целей.

Коэффициенты смещения выбираются из таблиц ЦКБР (Центрального конструкторского бюро редукторостроения), таблиц проф. В. Н. Кудрявцева, по блокирующим контурам И. А. Болотовского, Т. П. Болотовской и В. Э. Смирнова и других источников.

Наиболее универсальными являются блокирующие контуры, позволяющие выбирать коэффициенты смещения для получения зубчатой передачи с заранее заданными свойствами.

8.12. Типы эвольвентных колёс и передач

В зависимости от относительного расположения инструмента и нарезаемого им колеса различают:

1. *Нулевое колесо*, которое получается, если центроида инструмента при нарезании (*станочно-начальная прямая*) совпадает с его делительной прямой (рис. 8.25, а).

2. *Положительное колесо* получается, если инструмент смещается в сторону от центра колеса на величину xm (рис. 8.25, б), где x называется коэффициентом смещения исходного контура и в данном случае $x > 0$. Отсюда и происходит название колеса. Центроидой инструмента служит станочно-начальная прямая, параллельная делительной. Расстояние между станочно-начальной и делительной прямыми также составляет xm .

3. *Отрицательное колесо* нарезается с отрицательным смещением инструмента, приближаясь к центру колеса на величину xm (рис. 8.25, в), причём, в данном случае принимается $x < 0$. Делительная прямая пересекает делительную окружность, а центроидой инструмента является станочно-начальная прямая, параллельная делительной.

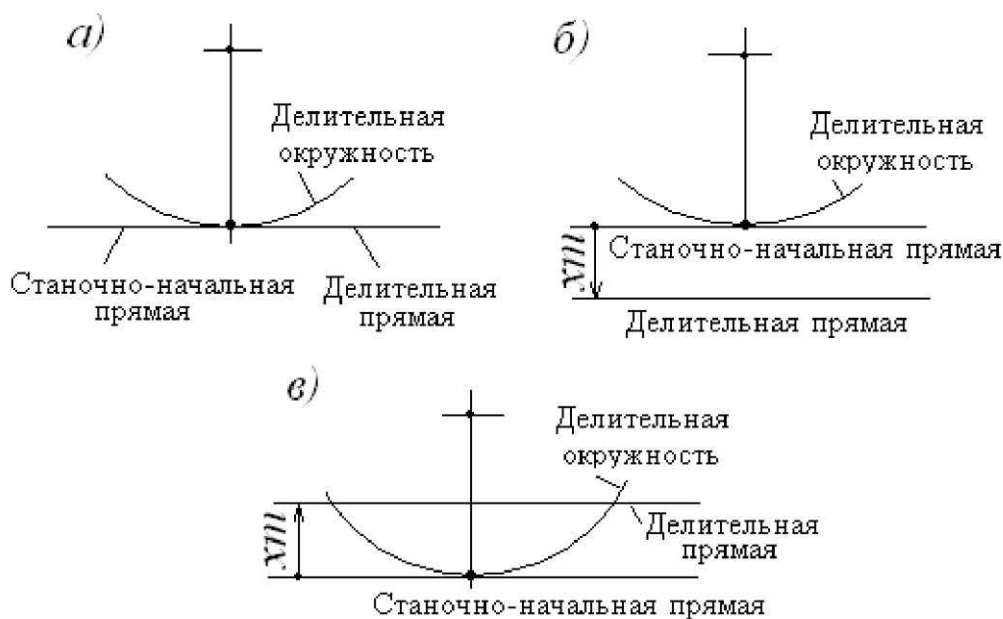


Рисунок 8.25

В зависимости от знака суммы коэффициентов смещения $x_1 + x_2$ колёс, составляющих передачу, можно говорить о нулевой, положительной или отрицательной передаче:

1. *Нулевая передача*, если $x_1 + x_2 = 0$. Здесь возможны два случая:

1-й случай – $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$, то есть оба колеса нулевые;

2-й случай – $x_2 = -x_1$, то есть модули коэффициентов смещения одинаковы, но их знаки противоположны.

В обоих случаях имеют место следующие соотношения:

$a_w = a$, $\alpha_w = \alpha$, $r_{w1} = r_1$, $r_{w2} = r_2$. Последние два равенства означают, что начальные окружности колёс передачи совпадают с делительными (буквой a обозначается так называемое *делительное межосевое расстояние*, то есть межосевое расстояние нулевой передачи, равное сумме радиусов делительных окружностей колёс).

2. *Положительная передача*, если $x_1 + x_2 > 0$. Здесь получаются следующие соотношения: $a_w > a$, $\alpha_w > \alpha$, $r_{w1} > r_1$, $r_{w2} > r_2$.

3. *Отрицательная передача*, имеет место при $x_1 + x_2 < 0$. Тогда $a_w < a$, $\alpha_w < \alpha$, $r_{w1} < r_1$, $r_{w2} < r_2$.

8.13. Расчёт геометрических размеров зубчатых колёс

Исходными данными для расчёта размеров служат числа зубьев колёс Z_1 и Z_2 , модуль колёс m , угол профиля исходного контура α , коэффициенты смещения x_1 и x_2 , коэффициент высоты головки зуба h_a^* и коэффициент радиального зазора c^* .

Угол зацепления. Формулу для определения угла зацепления приведём здесь без вывода из-за его громоздкости

$$\operatorname{inv}\alpha_w = \operatorname{inv}\alpha + \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

Из этой формулы, в частности, видно, что в нулевой передаче ($x_1 + x_2 = 0$) угол зацепления α_w равен углу профиля инструмента α , в положительной передаче ($x_1 + x_2 > 0$) $\alpha_w > \alpha$, в отрицательной передаче наоборот, то есть ($x_1 + x_2 < 0$) и соответственно $\alpha_w < \alpha$.

Радиусы начальных окружностей и межосевое расстояние. Для вывода формул обратимся к рис. 8.26 на котором показаны необходимые элементы зацепления. Линия зацепления N_1N_2 образует угол зацепления α_w с общей касательной к начальным окружностям радиусов r_{w1} и r_{w2} , касающимся друг друга в полюсе Π . Опустив перпендикуляры из центров колёс O_1 и O_2 на линию зацепления, получаем два прямоугольных треугольника $N_1O_1\Pi$ и $N_2O_2\Pi$ с углами при вершинах O_1 и O_2 , равными α_w . Из треугольника $N_1O_1\Pi$ следует $O_1\Pi = \frac{O_1N_1}{\cos\alpha_w}$, из треугольника $N_2O_2\Pi$ — $O_2\Pi = \frac{O_2N_2}{\cos\alpha_w}$. Так как имеют место равенства $O_1\Pi = r_{w1}$, $O_1N_1 = r_{b1}$, $O_2\Pi = r_{w2}$ и $O_2N_2 = r_{b2}$, а также

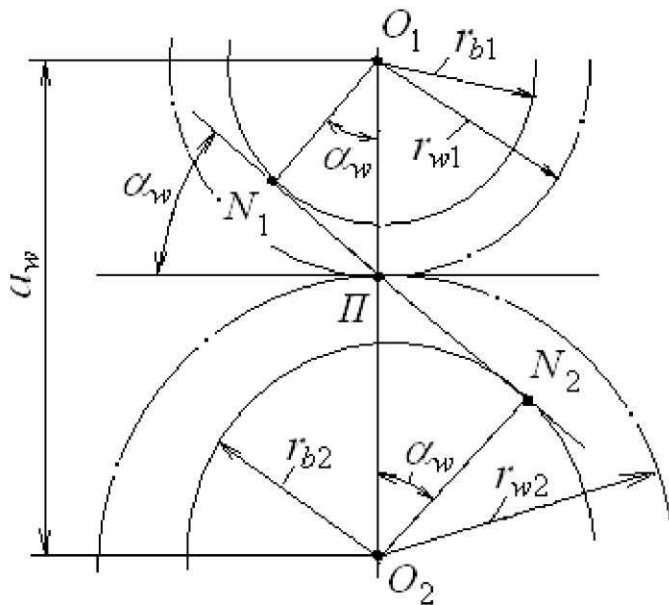


Рисунок 8.26

$r_{b1} = r_1 \cdot \cos \alpha$, $r_{b2} = r_2 \cdot \cos \alpha$, то
получаем $r_{w1} = r_1 \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w}$ и

$r_{w2} = r_2 \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w}$. Вместо радиу-

сов делительных окружностей r_1 и r_2 в эти формулы можно вставить их выражения, записанные ранее, тогда

$$r_{w1} = m \cdot \frac{z_1}{2} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w},$$

$$r_{w2} = m \cdot \frac{z_2}{2} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w}.$$

Как видно из рисунка, межосевое расстояние равно сумме радиусов начальных окружностей, то есть $a_w = r_{w1} + r_{w2}$, поэтому

$$a_w = m \cdot \frac{z_1 + z_2}{2} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w}.$$

Произведение первых двух сомножителей в этой формуле называется *делительным межосевым расстоянием*. Оно имеет место, когда передача изготавливается нулевой, то есть когда суммарный коэффициент смещения равен нулю. При этом $\alpha_w = \alpha$ и косинусы сокращаются.

Радиусы окружностей впадин. При образовании нулевого колеса его центроидой, как и всегда, является делительная окружность (рис. 8.27), а центроидой инструмента служит его делительная прямая (на рисунке профиль инструмента и его делительная прямая и прямая вершин показаны тонкими линиями). Поэтому радиус r_{f0} окружности впадин нулевого колеса равен разности $r_{f0} = r - (h_a^* + c^*) \cdot m$. При смещении инструмента на величину xm радиус окружности впадин увеличивается на эту же величину и приобретает значение

$$r_f = r + (h_a^* + c^*) \cdot m + x \cdot m.$$

На рис. 8.27 расположение смещённого инструмента по отношению к нарезаемому колесу изображено жирными линиями.

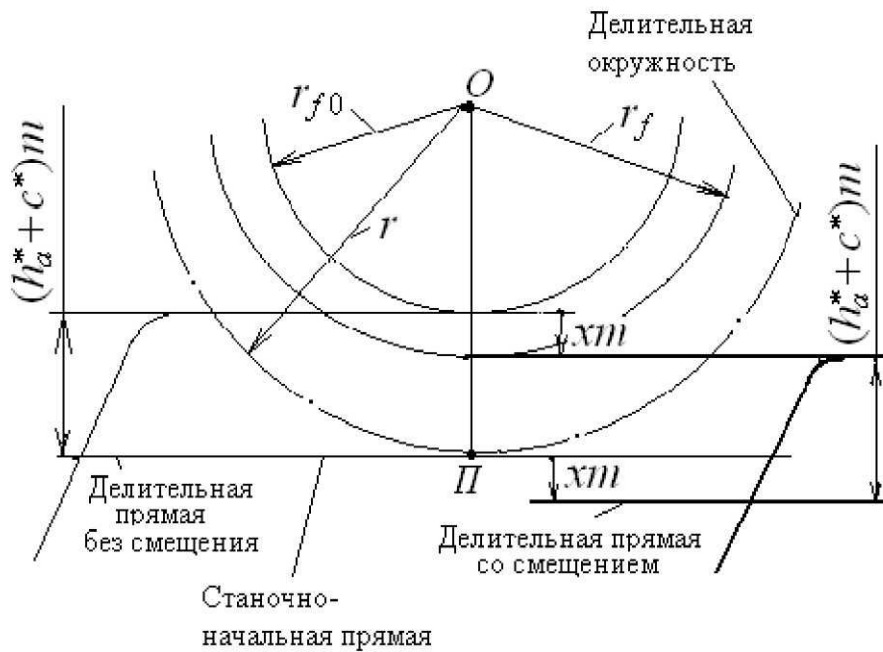


Рисунок 8.27

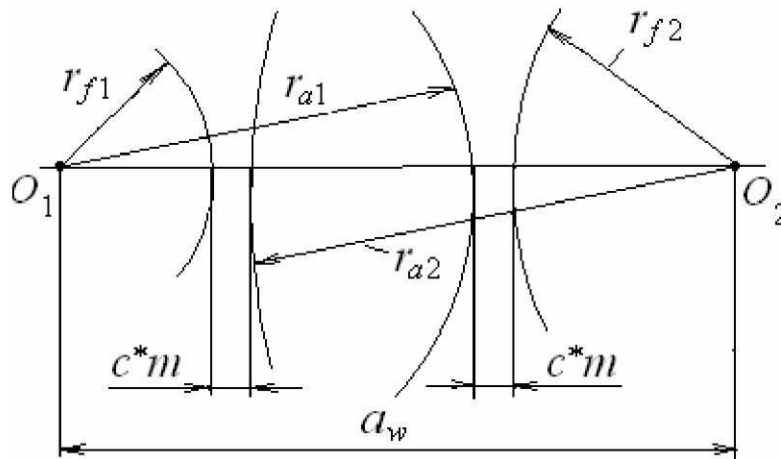


Рисунок 8.28

Радиусы окружностей вершин. Расчёт радиусов окружностей вершин понятен из рис. 8.28, где представлены элементы зацепления, связанные с этим расчётом. Непосредственно из рисунка видно, что радиус окружности вершин первого колеса

$$r_{a1} = a_w - r_{f2} - c^* m,$$

радиус окружности вершин второго колеса

$$r_{a2} = a_w - r_{f1} - c^* m.$$

Толщина зуба по делительной окружности. Толщина зуба колеса по делительной окружности определяется шириной впадины инструментальной рейки по станочно-начальной прямой (рис. 8.29), которая при изготовлении колеса перекачивается по его делительной окружности без скольжения.

Делительная окружность

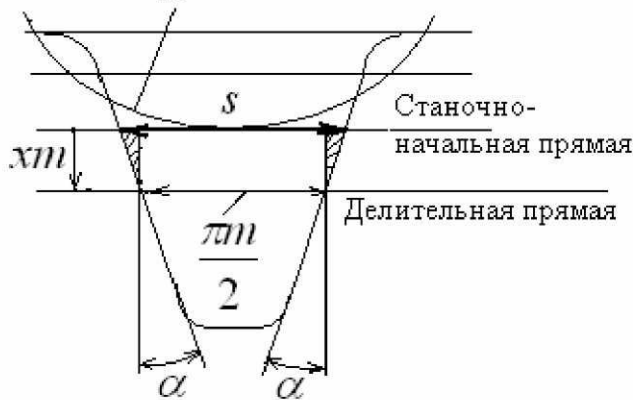


Рисунок 8.29

Размер s толщины зуба складывается из ширины $\frac{\pi m}{2}$ впадины инструментальной рейки по её делительной прямой и двух катетов прямоугольных треугольников, заштрихованных на рис. 8.29, которые расположены на станочно-начальной прямой рейки. Вертикальные катеты этих треугольников равны xm , так как они представляют собой величину смещения инструмента от центра колеса при его нарезании, что, по существу, равно расстоянию между делительной и станочно-начальной прямыми. Горизонтальные катеты прямоугольных треугольников равны $xm \cdot \operatorname{tg} \alpha$. С учётом этих соображений толщину зуба s можно выразить так

$$s = \frac{\pi m}{2} + 2xm \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

или в окончательном виде, после несложного преобразования

$$s = m \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2x \cdot \operatorname{tg} \alpha \right).$$

Во всех формулах расчёта геометрических размеров зубчатых колёс коэффициенты смещения необходимо подставлять с их знаками.

8.14. Особенности зацепления эвольвентных косозубых колёс

Эвольвентные косозубые цилиндрические колёса предназначены для передачи вращения между параллельными осями (рис. 8.30, *a*). Каждое из колёс пары, образующей зацепление, имеет зубья, направленные не параллельно оси колеса, как у прямозубых колёс, а под некоторым углом β к ней. Причём, как видно из рисунка, зубья расположены у колеса 1 под углом $+\beta$ к его оси, у колеса 2 – под углом $-\beta$. Угол наклона зуба принимается равным от 8° до 35° .

Такое расположение зубьев приводит к плавному поступенному входу в зацепление и снижает динамические нагрузки (появляется дополнительное осевое перекрытие зубьев, повышающее плавность работы передачи). Особенности зацепления косозубых колёс позволяют полностью использовать свойства материалов и при тех же размерах колёс передавать мощность, большую, чем при прямозубых колёсах.

Недостатком косозубых колёс является возникающая в зацеплении дополнительная осевая сила, отсутствующая у прямозубых колёс.

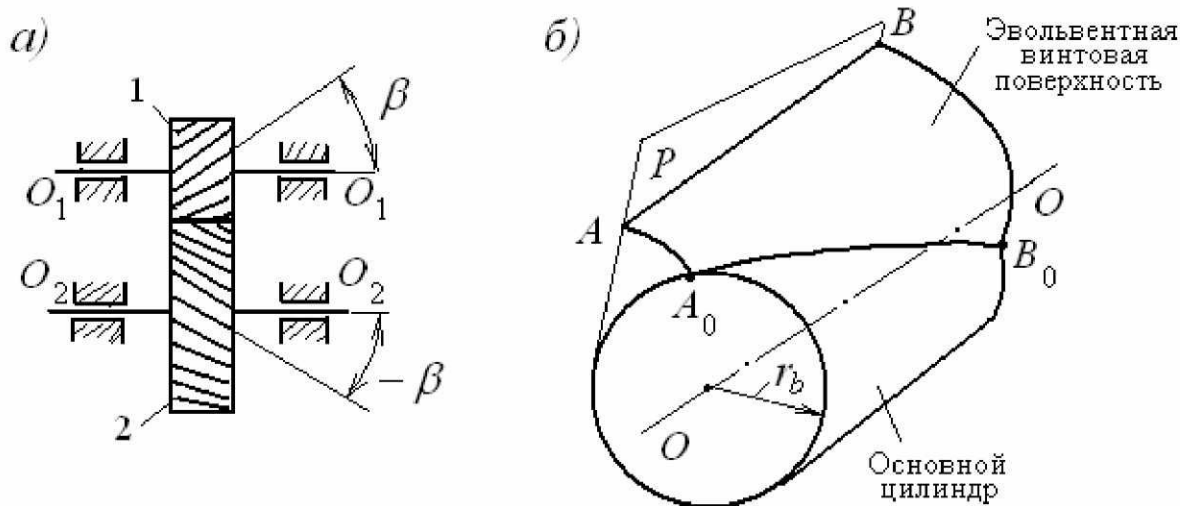


Рисунок 8.30

Боковые (рабочие) поверхности косозубых колёс, как и прямозубых, образуются на базе основных цилиндров (рис. 8.30, б). Их образование можно представить так. С основным цилиндром радиуса r_b вводится в касание плоскость P , в которой имеется прямая линия AB , не параллельная образующей основного цилиндра. При перекачивании без скольжения плоскости P по цилиндру прямая AB описывает эвольвентную винтовую поверхность, которая и служит рабочей поверхностью зуба колеса. В сечении этой поверхности любым круглым цилиндром, соосным с основным, в том числе и самим основным (линия A_0B_0), получается винтовая линия. Поэтому косозубое колесо, по

существу, является *винтовым*. Развернув косозубое колесо на плоскость, получим косозубую рейку, участок которой показан на рис. 8.31 и на которой видны особенности продольной формы зуба. Колесо имеет три шага – *нормальный* p , *торцевой* p_t и *осевой* p_x . Нормальный шаг расположен в плоскости, перпендикулярной к линии зуба. След этой плоскости, совпадающий с нормалью к линии зуба, на рисунке обозначен $n-n$. Торцовый шаг расположен в торцевой плоскости колеса, осевой – в плоскости, содержащей ось колеса, или параллельной оси колеса при его развёртке в рейку (рис. 8.31). Поделив каждый из шагов на π , получим три модуля, из которых стандартным является нормальный модуль $m = \frac{p}{\pi}$, он равен модулю инстру-

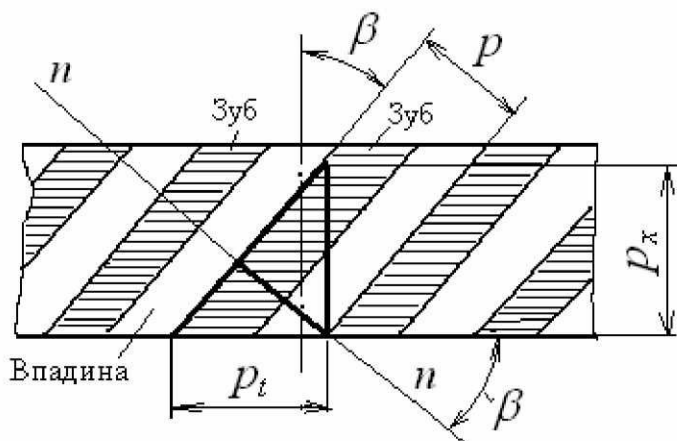


Рисунок 8.31

менту

стандартным является нормальный модуль $m = \frac{p}{\pi}$, он равен модулю инстру-

мента, нарезающего колесо. Из рис. 8.31 видно, что $p_t = \frac{p}{\cos \beta}$, и $p_x = \frac{p}{\sin \beta}$.

Соответствующие модули определяются по формулам $m_t = \frac{m}{\cos \beta}$ и

$$m_x = \frac{m}{\sin \beta}.$$

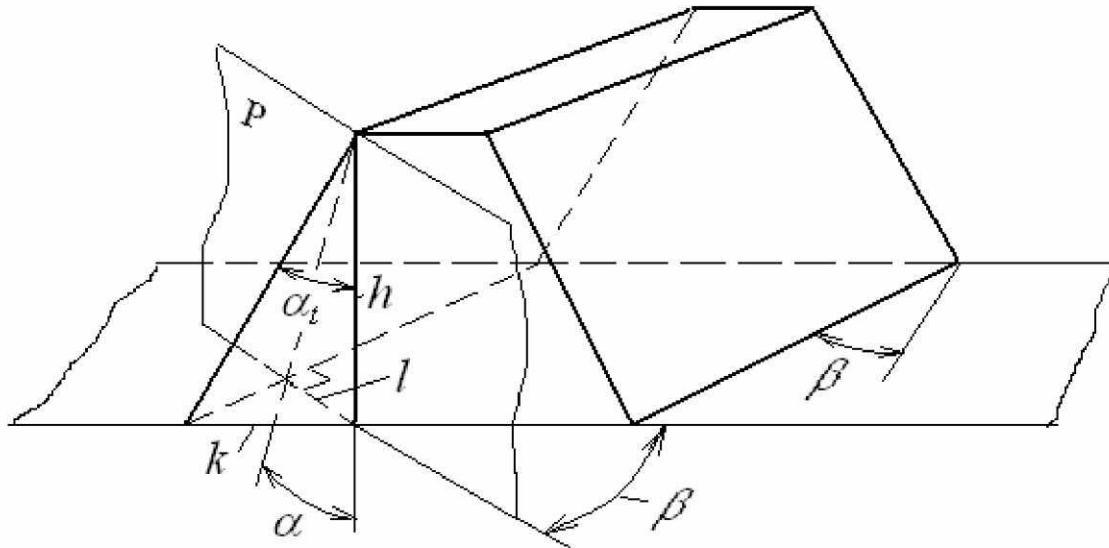


Рисунок 8.32

Для определения угла профиля зуба в торцовой плоскости обратимся к рис. 8.32. В плоскости нормального сечения P угол профиля составляет $\alpha = 20^\circ$.

В торцовом же сечении угол профиля α_t может быть определён как $\operatorname{tg} \alpha_t = \frac{k}{h}$.

Так как из прямоугольных треугольников можно последовательно записать $k = \frac{l}{\cos \beta} = \frac{h \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\cos \beta}$, то формула для расчёта α_t через тангенс получается как

$$\operatorname{tg} \alpha_t = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \beta}.$$

Поскольку $\cos \beta \leq 1$, то $\alpha_t \geq \alpha$, причём равенство этих углов имеет место в прямозубой передаче, когда $\beta = 0^\circ$. В косозубой передаче $\alpha_t > \alpha$, поэтому $\sin \alpha_t > \sin \alpha$, и при равенстве высот зубьев в прямозубой и косозубой

передачах, согласно формуле $z_{\min}^{\text{кос}} = \frac{2 \cdot h_a^*}{\sin^2 \alpha_t}$, имеем $z_{\min}^{\text{кос}} < z_{\min}^{\text{прям}}$. Например,

$$\text{при } \beta = 30^\circ \quad \cos 30^\circ = 0,866, \quad \operatorname{tg} \alpha_t = \frac{\operatorname{tg} 20^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{0,364}{0,866} = 0,420, \text{ угол } \alpha_t \text{ при этом}$$

значении тангенса составляет величину, равную $22^\circ 50'$. Далее определяем

$\sin 22^\circ 50' = 0,388$ и $z_{\min}^{\text{кос}} = \frac{2,1}{0,388^2} = 13,28$. Допуская минимальный подрез, округляем полученное число до ближайшего целого: $z_{\min}^{\text{кос}} = 13$. Как известно, при стандартных размерах режущего инструмента $z_{\min}^{\text{прям}} = 17$, что существенно больше чем $z_{\min}^{\text{кос}}$. При других значениях угла β наклона зуба получаются другие минимальные числа зубьев, но при любом β они меньше 17.

Из качественных показателей зацепления необходимо отметить высокую плавность работы. Это связано с повышенной величиной коэффициента перекрытия, который определяется двумя слагаемыми:

$$\varepsilon_\gamma = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta.$$

Здесь ε_α – коэффициент торцового перекрытия, определяемый по формуле, применяемой для расчёта коэффициента перекрытия прямозубого зацепления; ε_β – коэффициент перекрытия в осевом направлении, определяемый отношением $\varepsilon_\beta = \frac{b \cdot \operatorname{tg} \beta}{p_t}$ (b – ширина зубчатого венца колеса). Максимальное значение коэффициента перекрытия достигает значений от 10 до 20.

Следует отметить, что все размеры зубьев косозубого колеса определяются в торцовом сечении по формулам прямозубого колеса. Удельные скольжения и коэффициент удельного давления вычисляются по тем же формулам, что и для зацепления прямозубых колёс.

8.15. Особенности зацепления конических колёс

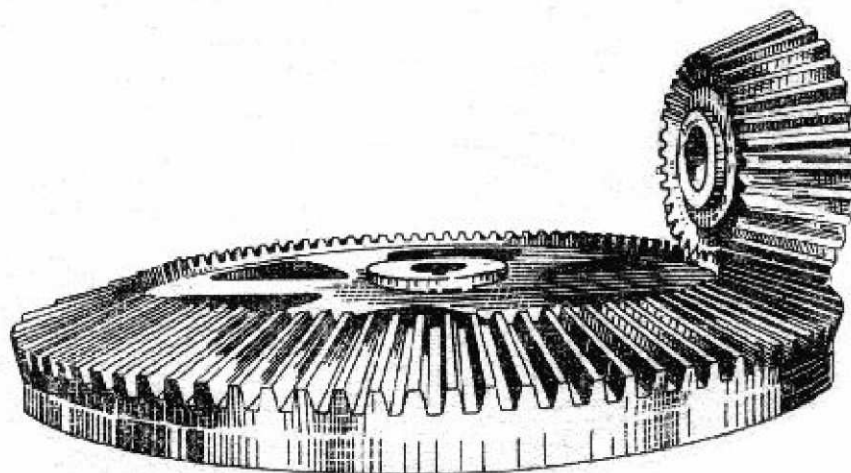


Рисунок 8.33

Передача движения с помощью высшей пары может осуществляться не только между параллельными осями звеньев, но также и между пересекающимися осями. В этом случае аналогами centroидных окружностей, а точнее – аксоидных цилиндров (от англ. слова axis – ось) передач с

цилиндрическими колёсами здесь являются конусы, имеющие общую вершину и перекатывающиеся друг по другу без скольжения. Эти конусы называются также *аксоидами*, так как каждый из них является геометрическим местом вращения одного колеса относительно другого. Зубья колёс располагаются на конусах, в результате чего и возникло название *конической передачи*, или *передачи коническими колёсами* (рис. 8.33).

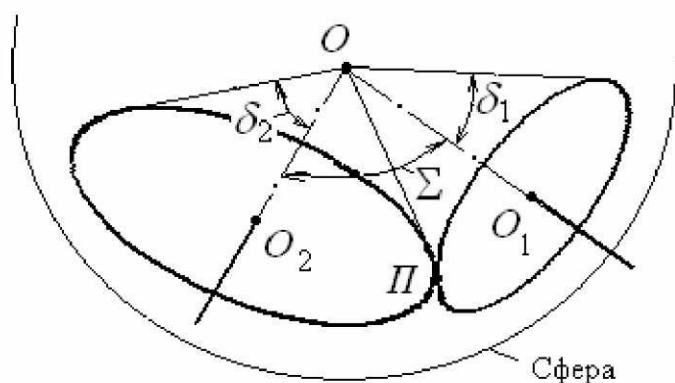


Рисунок 8.34

В данной передаче колёса совершают сферическое движение по отношению друг к другу, так как, если остановить одно из колёс, а другое перекатывать по нему, то можно увидеть, что точки подвижного колеса описывают кривые, лежащие на сферах с центром в точке O , совпадающей с общей вершиной конусов (рис. 8.34). Указанные конусы называются *начальными*. Половинные углы конусов при вершине O обозначаются

δ_1 – первого колеса и δ_2 – второго колеса. Угол между осями конусов обозначен Σ , причём $\Sigma = \delta_1 + \delta_2$. Точка касания оснований конусов, аналогичная полюсу зацепления в цилиндрической передаче, обозначена Π . При условии, что окружности оснований конусов катятся друг по другу без скольжения, и в точке Π их скорости одинаковы, имеем равенство $\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$, из которого ясно:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}.$$

В связи со сферическим характером движения конусов профилирование зубьев колёс должно производиться на сфере. Однако из-за сложности и громоздкости расчётов, мирясь с некоторой погрешностью, сферу заменяют *дополнительными конусами* (рис. 8.35). Дополнительные конусы развёртываются на плоскость, образуя секторы, на которых располагаются зубья Z_1 – первого колеса и Z_2 – второго колеса. Развёртки дополнительных конусов с зубьями на плоскость называют *эквивалентными цилиндрическими колёсами*. Количество зубьев на секторах равно количеству зубьев на конусах. Однако, если заполнить развёртки секторов зубьями до полного круга, то количество зубьев на круге разместится больше, чем было на секторе. Так что полные эквивалентные цилиндрические колёса имеют числа зубьев Z_{vt1} – первое колесо и Z_{vt2} – второе колесо, которые больше чем Z_1 и Z_2 соответственно. Радиусы центроидных окружностей эквивалентных цилиндрических колёс обозначаются r_{vte1} и r_{vte2} соответственно.

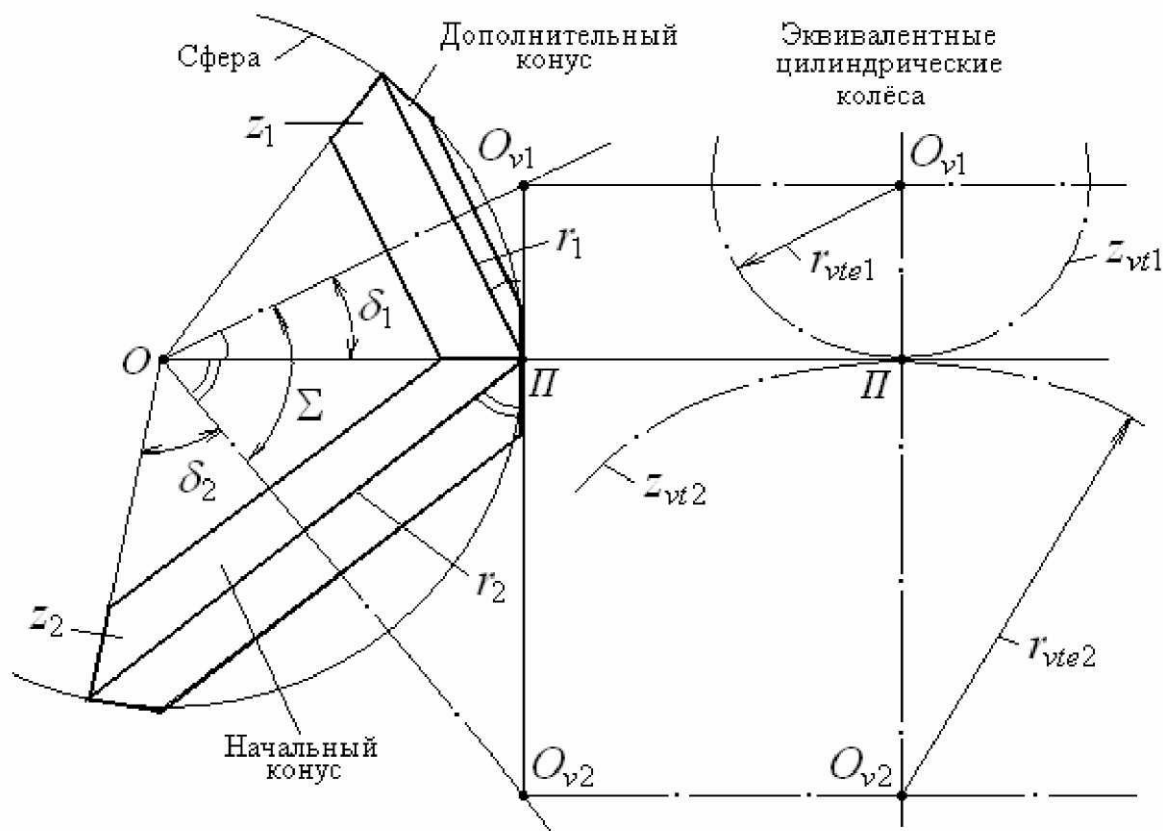


Рисунок 8.35

Установим связь между числами зубьев эквивалентных цилиндрических колёс и числами зубьев конических колёс. Из рис 8. 35 видим, что половины углов конусов могут быть выражены таким образом:

$$\cos \delta_1 = \frac{OP}{OO_{v1}} = \frac{r_1}{r_{vte1}} \quad \text{и} \quad \cos \delta_2 = \frac{OP}{OO_{v2}} = \frac{r_2}{r_{vte2}},$$

откуда

$$r_{vte1} = \frac{r_1}{\cos \delta_1}, \quad r_{vte2} = \frac{r_2}{\cos \delta_2}.$$

Внешний окружной модуль m_e , соответствующий шагу конического колеса и шагу эквивалентной цилиндрической передачи, один и тот же. Поэтому, поделив левые и правые части в последней паре формул на $0,5 \cdot m_e$, получаем

$$z_{vt1} = \frac{z_1}{\cos \delta_1}, \quad z_{vt2} = \frac{z_2}{\cos \delta_2}.$$

Модуль конических колёс является переменной величиной, уменьшаясь от периферии к точке O , принимая минимальное значение на том основании усечённого конуса, которое ближе расположено к точке O .

Передаточное отношение передачи эквивалентными цилиндрическими колёсами определяется отношением соответствующих чисел зубьев, что приводит к следующему:

$$i_{vt12} = \frac{z_{vt2}}{z_{vt1}} = \frac{z_2}{\cos \delta_2} \cdot \frac{\cos \delta_1}{z_1} = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{\cos \delta_1}{\cos \delta_2} = i_{12} \cdot \frac{\cos \delta_1}{\cos \delta_2}.$$

Минимальное количество зубьев, нарезаемых без подреза, у конического колеса меньше, чем у цилиндрического, так как если полное эквивалентное колесо имеет $z_{vt}^{\min} = 17$, то для получения конического колеса его необходимо сократить, чтобы образовался сектор, а затем этот сектор свернуть в конус. При этом получается $z_{\min} = z_{vt}^{\min} \cdot \cos \delta$, откуда ясно, что $z_{\min} < z_{vt}^{\min}$.

8.16. Особенности зацепления в гиперболических передачах

Как известно из теоретической механики, *мгновенное относительное движение твёрдых тел при скрещивающихся осях их вращений является мгновенным винтовым, состоящим из вращения вокруг мгновенной винтовой оси V и поступательного движения вдоль этой оси* (рис. 8.36, а). Этот вид движения и дал название данной оси. В системе каждого из твёрдых тел мгновенная винтовая ось описывает *гиперboloид вращения*, являющийся линейчатой поверхностью второго порядка (рис. 8.36, б). В связи с этим *зубчатые передачи, образованные колёсами с осями, совпадающими с осями гиперboloидов, называются гиперboloидными*. Гиперboloиды вращения являются *аксоидами* в зацеплении колёс.

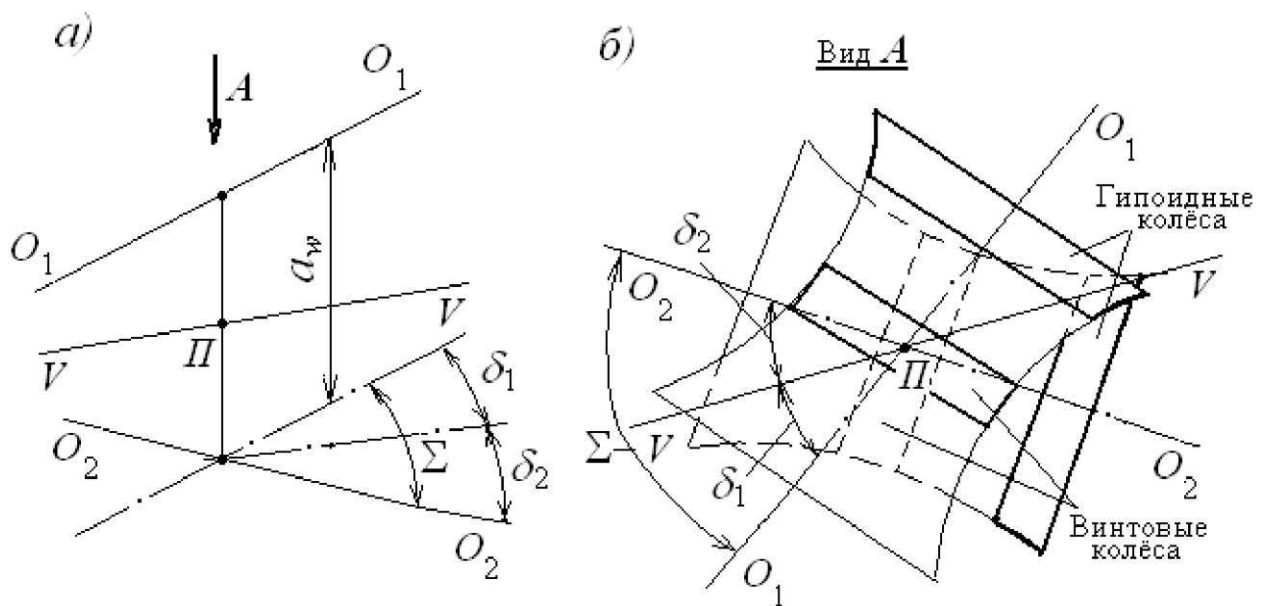


Рисунок 8.36

Для зубчатых передач со скрещивающимися осями колёс применяются два участка гиперboloидов вращения. Если используется участок, расположенный в средней части (в горловинах) гиперboloидов, то образуется *передача винтовыми колёсами* (рис. 8.36, б). При использовании участка, удалённого от горловин, получается *гипоидная передача* (рис. 8.36, б). Так как винтовое движение включает поступательную составляющую вдоль мгновенной

винтовой оси $V-V$, то в гиперболоидных колёсах обязательно присутствует скольжение, направленное вдоль линии зуба. Если линии зубьев направляются вдоль мгновенной винтовой оси, то скольжение происходит с минимальной скоростью.

Важно отметить, что если в качестве начальных поверхностей использовать гиперболоиды вращения (аксоиды), то контакт зубьев будет *линейным*. На практике вместо аксоид используют цилиндры (в передаче винтовыми колёсами) или конусы (в гипоидной передаче). В этом случае контакт получается *точечным*.

Винтовые колёса в гиперболоидной передаче получаются как обычные, косозубые, однако с неравными углами наклона зубьев, а гипоидные – как конические с непересекающимися осями и несовпадением вершин конусов в отличие от передачи коническими колёсами. На рис. 8.37 показаны винтовые колёса (а) и гипоидные (б).

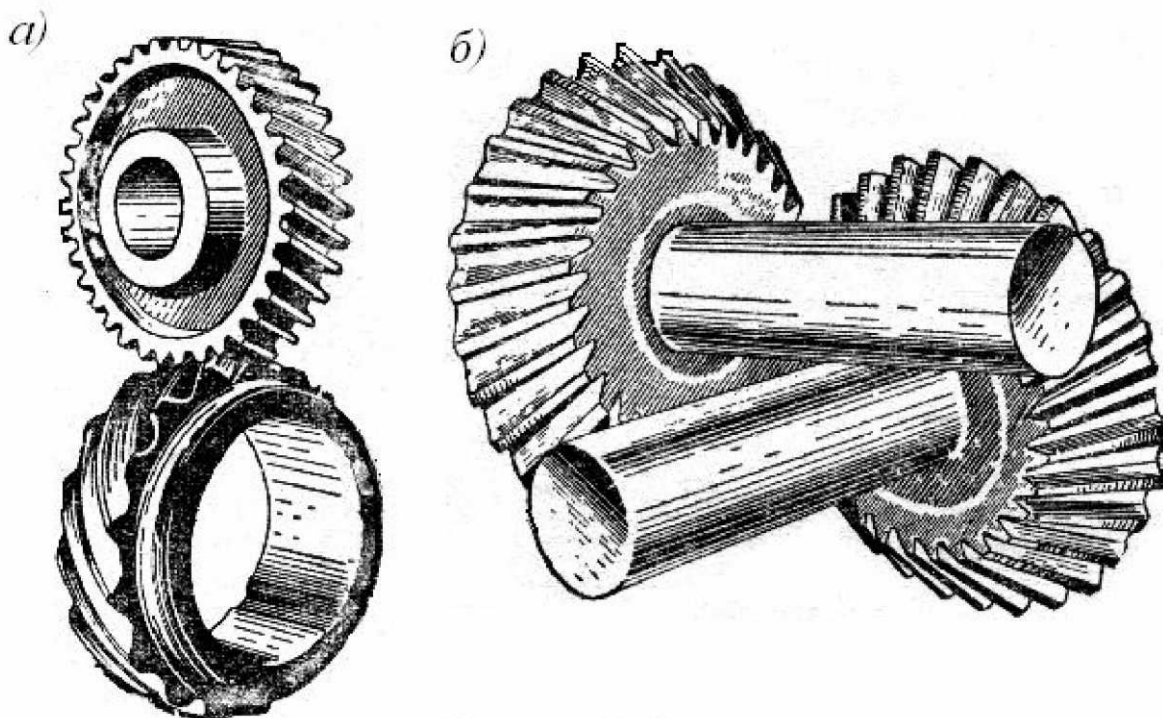


Рисунок 8.37

Геометрический расчёт винтовых и гипоидных колёс не отличается от расчёта соответственно косозубых и конических колёс. В винтовых колёсах стандартный модуль – в нормальном сечении зубьев.

Червячная передача с цилиндрическим червяком. Червячная передача является частным случаем зубчатой передачи винтовыми колёсами, в которой одно из колёс имеет всего от одного до трёх-четырёх зубьев. В этом случае оно превращается в так называемый червяк, зубья которого называются *заходами*, а сам червяк называется *одно-, двух-, трёх-* и так далее *заходным*. Колесо, с которым в паре работает червяк, называется *червячным колесом*. Количество зубьев колеса может быть любым. В этих условиях могут быть достигнуты очень большие передаточные отношения, до 1000 и более.

Особенностью червячной передачи является чаще всего ортогональное расположение осей червяка и колеса (угол скрещивания составляет 90°) и частичный охват червяка колесом (рис. 8.38). Основные достоинства передачи заключаются в возможности получения больших передаточных отношений, в большой плавности работы передачи и в высокой нагрузочной способности в результате линейного контакта витков червяка и зубьев колеса. Последнее обстоятельство связано с тем, что при изготовлении передачи делаются два червяка. Один из них затем превращается в режущий инструмент путём придания ему соответствующей геометрии. Другой используется в качестве червяка в передаче.

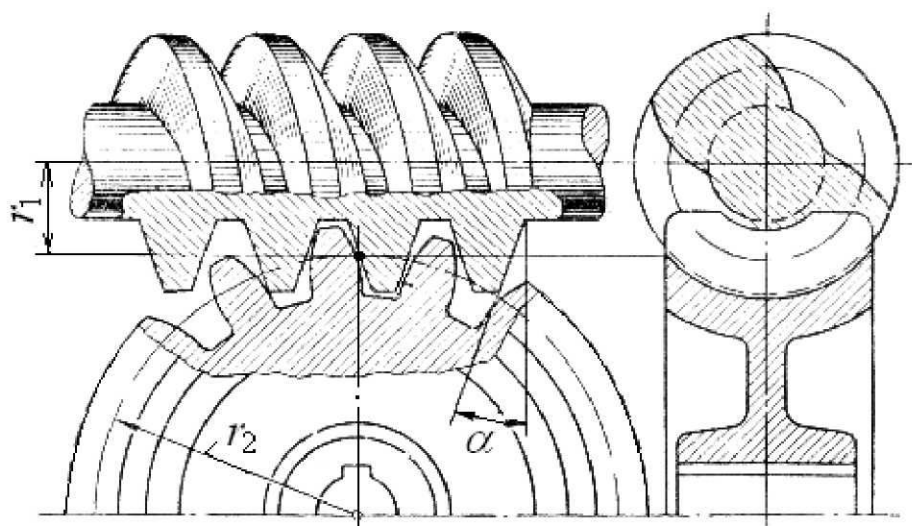


Рисунок 8.38

Последовательное положение линий контакта на зубе колеса показано на рис. 8.39. Эти линии имеют такую форму, что по отношению к скорости скольжения касательная к ним образует малый угол γ . Иногда этот угол равен нулю. Это обстоятельство ухудшает условия смазки контакта и снижает долговечность работы передачи. Кроме названного недостатка следует указать также низкий КПД передачи и необходимость использования дорогих антифрикционных материалов.

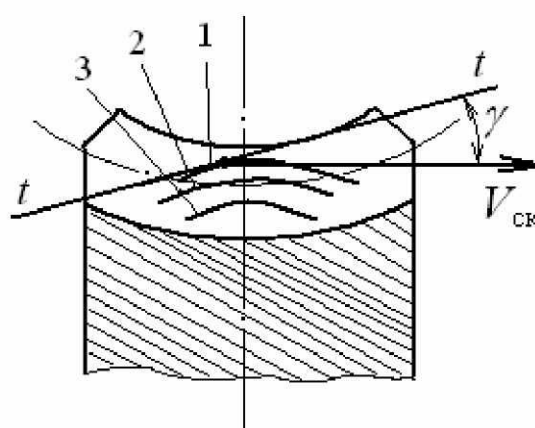


Рисунок 8.39

Червячная передача с глобоидным червяком (глобоидная червячная передача). Более благоприятные условия для смазки контакта и повышенная нагрузочная способность имеют место в червячной передаче с так называемым *глобоидным червяком*, в которой и червяк 1, и червячное колесо 2 охватывают друг друга (рис. 8.40).

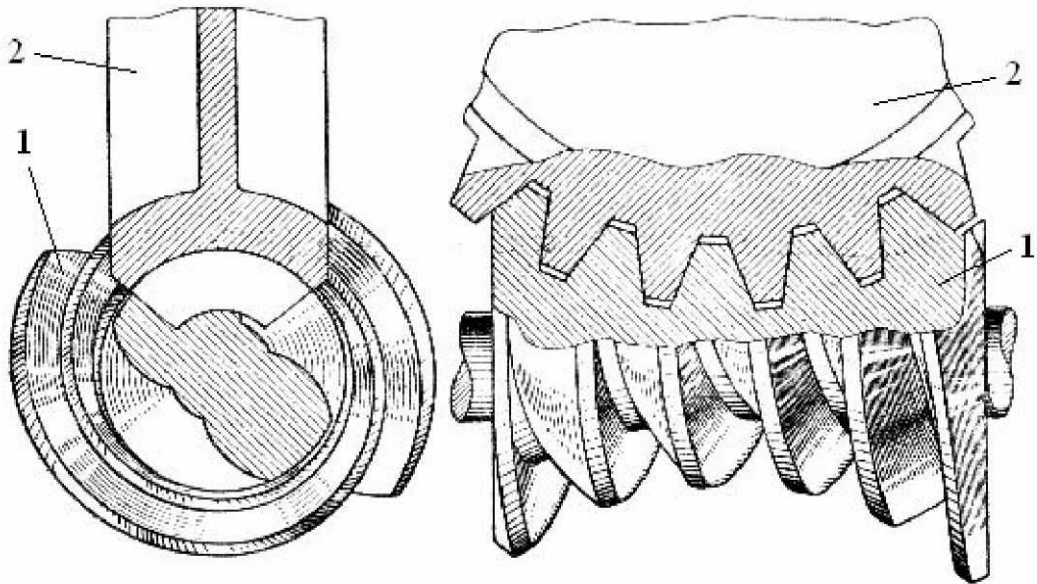


Рисунок 8.40

Способ образования глобоидной передачи и её конструкция обеспечивают контакт витка червяка в пределах всей длины последнего одновременно с рядом зубьев колеса, что и обеспечивает повышенную нагрузочную способность передачи.

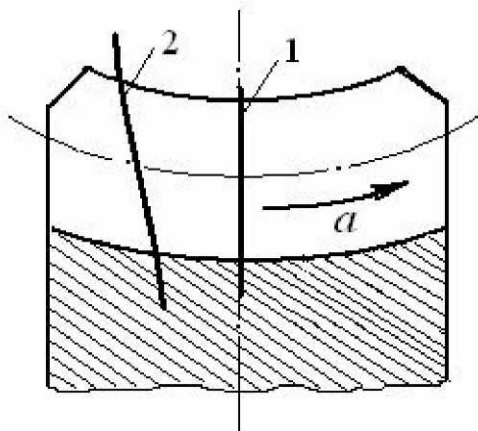


Рисунок 8.41

Червяк нарезается резцом с прямолинейной режущей кромкой, которая вращается вокруг оси предполагаемого колеса в осевой плоскости червяка. Затем с помощью такого же червяка с геометрией режущего инструмента нарезается червячное колесо. В результате получается зацепление с линейным контактом. Причём во входной половине червяка (до его горлового сечения) на каждом зубе колеса с витком червяка имеют место одновременно две *линии контакта* (рис. 8.41). Одна из них, обозначенная на рисунке цифрой 1, располагается в осевой плоскости червяка, перпен-

дикулярной оси колеса. Другая, под цифрой 2, смещена навстречу окружной скорости червяка (на рис. 8.41 дуговой стрелкой *a* обозначено направление движения витка червяка относительно зуба колеса). Это обстоятельство также увеличивает нагрузочную способность передачи. Следовательно, при одинаковой нагрузке глобоидная передача имеет существенно меньшие размеры по сравнению с обыкновенной червячной передачей.

Как видно из рисунка, положение линий контакта таково, что оно действительно благоприятствует смазке рабочих поверхностей и, тем самым, увеличивает срок службы передачи и её КПД.

Вопросы для самопроверки

1. В чём заключается существо основного закона зацепления?
2. Какие профили зубьев колёс называются сопряжёнными?
3. Что такое эвольвента окружности, производящая прямая?
4. Какими свойствами обладает эвольвента окружности?
5. Что такое эвольвентная функция?
6. Назовите элементы зубчатого колеса и дайте их понятие; какими линиями очерчивается профиль зуба?
7. Что называется шагом колеса, модулем, головкой, ножкой зуба? Как они связаны с модулем зубчатого колеса?
8. В каком месте измеряется толщина зуба, ширина впадины колеса?
9. Какими свойствами обладает делительная окружность?
10. Что такое коэффициент высоты головки зуба, чему он равен?
11. Какая окружность колеса называется основной?
12. Назовите элементы зацепления пары колёс.
13. Что такое полюс зацепления?
14. Какие окружности колёс называются начальными?
15. Что такое угол зацепления?
16. Что такое линия зацепления, активная линия зацепления?
17. Что такое радиальный зазор, за счёт чего он образуется?
18. Сформулируйте свойства эвольвентного зацепления.
19. Какими методами изготавливают эвольвентные зубья, в чём заключается существо методов? Каковы основные достоинства и недостатки методов?
20. Что такое реечный производящий исходный контур (инструментальная рейка)?
21. Что такое подрез зубчатого колеса?
22. Какое число зубьев считается минимальным, от чего оно зависит?
23. Как предотвратить подрез зубчатого колеса?
24. Что такое коэффициент смещения исходного контура?
25. Какие зубчатые колёса называются нулевыми, положительными и отрицательными? Какие зубчатые передачи называются нулевыми, положительными, отрицательными?
26. Назовите качественные характеристики эвольвентного зацепления.
27. Что называется коэффициентом перекрытия, и что он характеризует?
28. Что такое удельное скольжение, почему возникает скольжение в контакте зубьев?
29. Почему в полюсе зацепления удельное скольжение равно нулю?
30. Что такое коэффициент удельного давления, где он применяется?
31. Для чего назначаются коэффициенты смещения для нарезания зубчатых колёс?
32. Как определяются геометрические размеры зубчатых колёс: угол зацепления, радиусы начальных окружностей, межосевое расстояние, радиусы окружностей впадин, радиусы окружностей вершин и толщина зуба по делительной окружности?

33. Как образуется рабочая поверхность зуба косозубого эвольвентного колеса?
34. Какие достоинства и недостатки имеет зацепление косозубыми колёсами?
35. Какие шаги и модули имеет косозубое колесо?
36. Как определяется коэффициент перекрытия косозубой передачи?
37. Как осуществляется передача движения коническими колёсами?
38. Что такое дополнительные конусы?
39. Что такое эквивалентные зубчатые колёса?
40. Почему опасность подреза конического колеса меньше чем цилиндрического?
41. Как образуются начальные поверхности гиперболоидных колёс?
42. Что представляет собой червячная передача с цилиндрическим червяком?
43. Какие достоинства и недостатки имеет червячная передача?
44. Как образуется червячная передача с глобоидным червяком?
45. Какие достоинства имеет глобоидная червячная передача?

9. Синтез профилей кулачков и элементов плоских кулачковых механизмов

Кулачковым называется механизм, в составе которого имеется звено с рабочей поверхностью переменной кривизны, образующее с взаимодействующим с ним звеном высшую пару.

Кулачковые механизмы обладают существенными преимуществами перед другими механизмами, обусловленными следующими основными свойствами. Во-первых, они позволяют получить практически любой закон движения выходного звена. Во-вторых, позволяют легко согласовать друг с другом работу нескольких исполнительных органов машины, приводимых в действие разными механизмами, в том числе и кулачковыми. Этим обусловлено широкое применение кулачковых механизмов, например, в полиграфических машинах.

Кулачковые механизмы обладают достоинствами, связанными с наличием в их составе высшей кинематической пары. Этим же обстоятельством обусловлены и недостатки кулачковых механизмов.

9.1. Элементы кулачкового механизма и геометрические элементы кулачка

Рассмотрим типовую схему кулачкового механизма (рис. 9.1). Она включает, кроме стойки 0, кулачок 1, вращающийся с угловой скоростью ω , толкатель 2, движущийся возвратно-поступательно, пружину 3 для обеспечения надёжности контакта толкателя и кулачка и, наконец, ролик 4. Кроме, естественно, кулачка и толкателя, остальные элементы схемы могут отсутствовать.

Ось толкателя смещена относительно оси O вращения кулачка на некоторое расстояние e , называемое *эксцентриситетом*. При отсутствии эксцентриситета кулачковый механизм называется *центральный*.

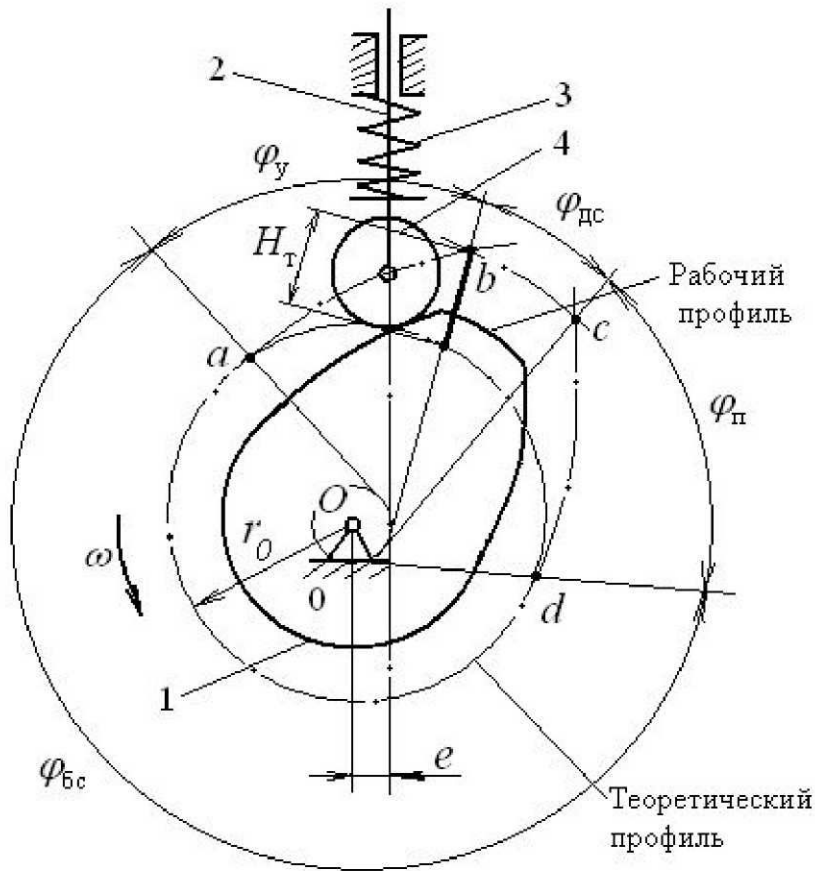


Рисунок 9.1

Во время работы механизма ролик толкателя перекачивается по профилю кулачка, называемому *рабочим профилем*. При этом центр ролика описывает траекторию, являющуюся эквидистантой по отношению к рабочему профилю и называемую *теоретическим профилем*. Теоретический профиль полностью соответствует закону движения толкателя и для данного закона является единственным, в то время как рабочий профиль зависит от радиуса ролика. При радиусе ролика, равном нулю, теоретический и рабочий профили совпадают.

Теоретический профиль строится от окружности минимального радиуса r_0 , называемой *основной окружностью* теоретического профиля.

На теоретическом профиле, в соответствии с движением толкателя, можно отметить точки a , b , c и d , которые обозначают границы фаз: ab – *фаза удаления* толкателя, на протяжении которой происходит удаление толкателя от центра кулачка, bc – *фаза дальнего стояния*, где толкатель неподвижен, несмотря на продолжающееся вращение кулачка, cd – *фаза приближения*, когда толкатель приближается к центру кулачка, и da – *фаза ближнего стояния*, на протяжении которой толкатель неподвижен в ближнем положении к центру кулачка.

Ось толкателя в любом положении механизма остаётся на одном и том же расстоянии от оси вращения кулачка, равном эксцентриситету e . Поэтому отрезок эксцентриситета описывает круг с центром в точке O , к которому ось толкателя проходит по касательной. Проведя через точки a , b , c и d касательные к кругу эксцентриситета, получим фазовые углы, являющиеся углами поворота кулачка, соответствующими той или иной фазе: φ_0 – *фазовый угол удаления толкателя*, или просто *угол удаления толкателя*, $\varphi_{\text{аа}}$ – *угол дальнего стояния толкателя*, φ_1 – *угол приближения*, $\varphi_{\text{аа}}$ – *угол ближнего стояния*. Очевидно,

что $\varphi_y + \varphi_{дс} + \varphi_{п} + \varphi_{бс} = 360^\circ = 2\pi$, а, поделив это равенство на угловую скорость кулачка, получим соответствующее время, то есть

$$\frac{\varphi_y}{\omega} + \frac{\varphi_{дс}}{\omega} + \frac{\varphi_{п}}{\omega} + \frac{\varphi_{бс}}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega},$$

или $t_y + t_{дс} + t_{п} + t_{бс} = T$, где T – время одного оборота кулачка. Имеются схемы кулачковых механизмов, в которых отсутствуют фазы дальнего и (или) ближнего стояния.

Важным параметром кулачкового механизма является *ход толкателя* H_{δ} , то есть расстояние вдоль оси толкателя между основной окружностью и точкой b (или точкой c). Это расстояние является *максимальным перемещением толкателя* S_{δ}^{\max} в процессе работы механизма. На рис. 9.1 ход толкателя отмечен жирной линией.

9.2. Разновидности плоских кулачковых механизмов

По характеру преобразования движения. В большинстве случаев в кулачковых механизмах ведущее звено – кулачок совершает вращательное движение. При этом толкатель может совершать *возвратно-поступательное* (рис. 9.1), *возвратно-вращательное* (рис. 9.2, а) или *сложное плоское* (рис. 9.2, б) движение. В первом случае толкатель механизма является обыкновенным ползуном, во втором – коромыслом, в третьем толкатель является одновременно шатуном четырёхшарнирного механизма.

Во всех трёх случаях вместо вращающегося кулачка может использоваться возвратно-поступательно движущийся кулачок. Следует заметить, что такого типа кулачковые механизмы применяются довольно редко.

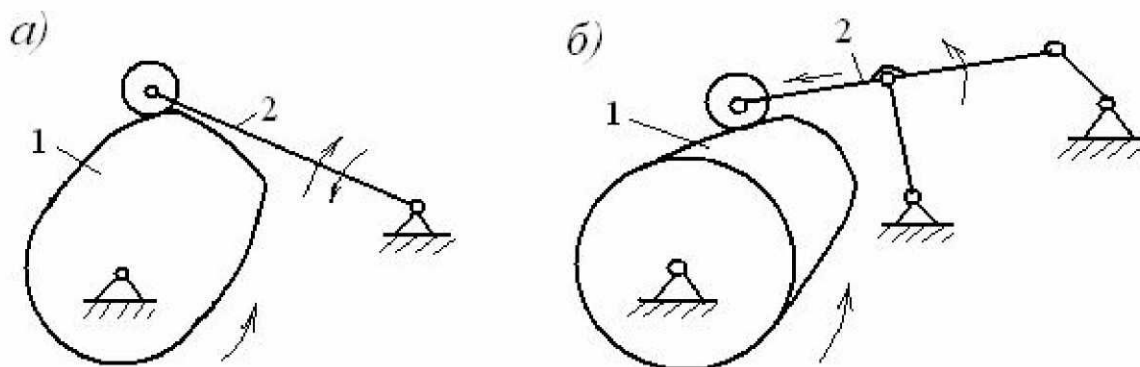


Рисунок 9.2

Механизмы первого типа отличаются более простой конструкцией и широко применяются во многих машинах (например, в поршневых машинах различного назначения). Лучшими характеристиками обладают механизмы второго типа, чем и объясняется их наиболее широкое распространение в технике. Механизмы третьего типа, не имея преимуществ по сравнению с первыми, сложнее

их по конструкции, поэтому применять такие механизмы не рекомендуется, и в машинах они встречаются редко.

По форме окончания толкателя. Толкатели в кулачковых механизмах могут применяться *остроконечными* (рис. 9.3, а). В этом случае механизмы не могут передавать значительных усилий вследствие больших удельных давлений в контакте толкателя и кулачка. В механизме с остроконечным толкателем теоретический и рабочий профили кулачка совпадают. Наиболее широкое распространение имеют *роликовые* толкатели (рис. 9.3, б) вследствие малых потерь на трение в контакте ролика и кулачка, так как ролик перекачивается по профилю кулачка, а не скользит как при других формах окончания толкателя.

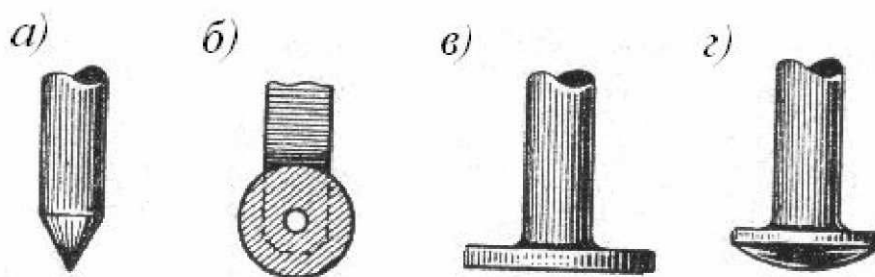


Рисунок 9.3

Если радиус ролика сделать равным бесконечности, то он выпрямляется и становится плоской тарелкой с названием *плоский* или *тарельчатый* толкатель (рис. 9.3, в). Естественно, что в плоскости чертежа такой толкатель вращаться не может.

Наконец, при достаточно большом радиусе ролика (но не бесконечном) используется его небольшой участок, напоминающий по форме шляпку гриба (рис. 9.3, г). Отсюда и его название – *грибовидный* толкатель.

По способу замыкания высшей пары кулачок-толкатель. Для правильной работы кулачкового механизма необходимо, чтобы осуществлялся постоянный контакт толкателя и кулачка. Это условие выполняется двумя способами: с помощью сил полезного сопротивления, преодолеваемых толкателем, или сил веса толкателя и связанных с ним частей, а также, наиболее часто, с помощью пружины – первый способ, путём придания определённой формы толкателю и кулачку, препятствующей разрыву высшей пары – второй способ. Первый способ называется *силовым замыканием*, второй – *кинематическим* (или *геометрическим*) замыканием. Пример силового замыкания посредством пружины осуществлён в схеме механизма на рис. 9.1.

На рис. 9.4 показан механизм с кинематическим (геометрическим) замыканием высшей пары. В этом механизме профиль кулачка выполнен в виде выфрезерованного паза на торце круглого диска 1. Ширина паза соответствует диаметру ролика, который помещается в паз. В процессе работы механизма в за-

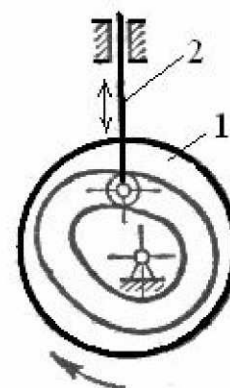


Рисунок 9.4

зависимости от направления действия силы ролик прижимается то к наружному, то к внутреннему профилю паза, но не может выйти из него.

Так обеспечивается постоянство контакта ролика толкателя 2 и профиля кулачка 1.

9.3. Кинематический анализ кулачковых механизмов

Задачей кинематического анализа кулачкового механизма так же, как и других механизмов, является определение в нём закона преобразования движения с одновременным определением скоростей и ускорений толкателя при заданной скорости вращения кулачка (в случае вращающегося кулачка). При этом чаще всего принимается, что угловая скорость кулачка $\omega = 0$.

В результате анализа кинематики определяется функция положения механизма в форме $S = S(\varphi)$ и её производные по φ : $S' = S'(\varphi) = \frac{d}{d\varphi} S(\alpha)$, называемая аналогом скорости, и $S'' = S''(\varphi) = \frac{d}{d\varphi} S'(\alpha) = \frac{d^2}{d\varphi^2} S(\varphi)$, называемая аналогом ускорения.

Аналогичным образом определяются данные кинематические параметры и в случае возвратно-вращательного движения толкателя. Как известно из материалов по исследованию кинематики рычажных механизмов, имея аналоги скоростей и ускорений, легко вычислить и сами скорости и ускорения толкателя, то есть $V = S' \cdot \omega$ и $a = S'' \cdot \omega^2$.

Из этих простейших выкладок ясно, что анализ кинематики необходимо начинать с определения функции положения, то есть зависимости перемещения толкателя от угла поворота кулачка.

Рассмотрим несколько методов решения этой задачи.

Аналитический метод. Возьмём для простоты тангенциальный кулачок, профиль которого на некотором участке очерчен прямой линией (рис. 9.5). Будем также считать, что толкатель оканчивается остриём, тогда его теоретический и рабочий профили совпадают.

Кулачок 1 вращается против часовой стрелки с угловой скоростью ω вокруг точки O . Отсчёт угла поворота φ кулачка будем вести от радиуса OA_0 , соединяющего точку A_0 начала фазы удаления толкателя с центром кулачка. Угол φ отсчитывается навстречу направлению вращения кулачка, так как если мысленно разместиться на кулачке, то можно видеть движение толкателя относительно кулачка именно в направлении указанного отсчёта угла φ . В положении, показанном на рисунке, когда касание толкателя с кулачком происходит в точке A , перемещение S

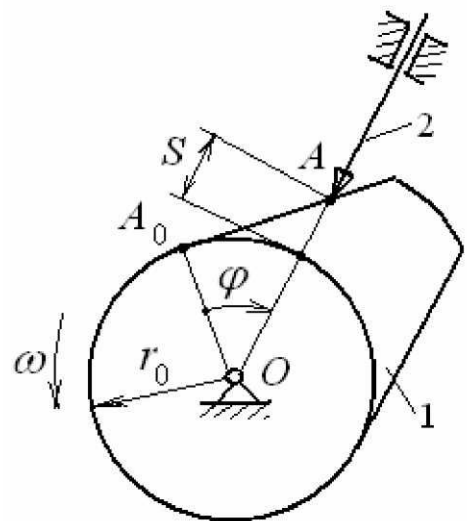


Рисунок 9.5

толкателя в направлении его оси равно расстоянию от точки A до основной окружности, имеющей радиус r_0 . Это расстояние определяется разностью

$$S = OA - r_0. \text{ Так как из прямоугольного треугольника } OA_0A \quad OA = \frac{OA_0}{\cos \varphi} = \frac{r_0}{\cos \varphi},$$

то

$$S = r_0 \left(\frac{1}{\cos \varphi} - 1 \right).$$

Это и есть функция положения механизма.

Продифференцировав один раз полученное выражение, находим аналог скорости

$$S' = \frac{d}{d\varphi} S = r_0 \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi}.$$

После второго дифференцирования получаем аналог ускорения

$$S'' = \frac{d}{d\varphi} S' = r_0 \cdot \frac{1 + \cos^2 \varphi}{\cos^3 \varphi}.$$

Графический метод с использованием графического дифференцирования. Метод может применяться для анализа кинематики реально существующего механизма, все размеры которого известны. Известна также форма профиля, но неизвестно, какую функцию положения реализует данный механизм. Таким образом, задача сводится к определению функции положения, которая соответствует данному рабочему профилю кулачка.

Решение задачи начинается с разборки механизма и очерчивания рабочего профиля его кулачка на листе бумаги (рис. 9.6). Центр кулачка определяется известным геометрическим способом. Затем из этого центра проводится окружность эксцентриситета и основная окружность рабочего профиля. С помощью радиуса ролика производится переход от рабочего профиля к теоретическому. Для этого раствором циркуля, равным радиусу ролика, проводится ряд окружностей (или дуг окружностей) с центрами на линии рабочего профиля. Огибающая этих окружностей даст теоретический профиль.

Ось толкателя во всех положениях механизма остаётся касательной к окружности эксцентриситета, поэтому через небольшой угловой интервал необходимо провести как можно больше касательных к этой окружности с той стороны от центра кулачка, с которой располагается толкатель. Касательные необходимо пронумеровать в направлении, обратном направлению вращения кулачка. На этих касательных расстояния между точками их пересечения с основной окружностью теоретического профиля радиуса r_0 и самим теоретическим профилем равны перемещениям толкателя в каждом из отмеченных положений. На рис. 9.6 в i -м положении угол оси толкателя относительно начала отсчёта отмечен φ_i , и соответствующее ему перемещение отмечено S_i .

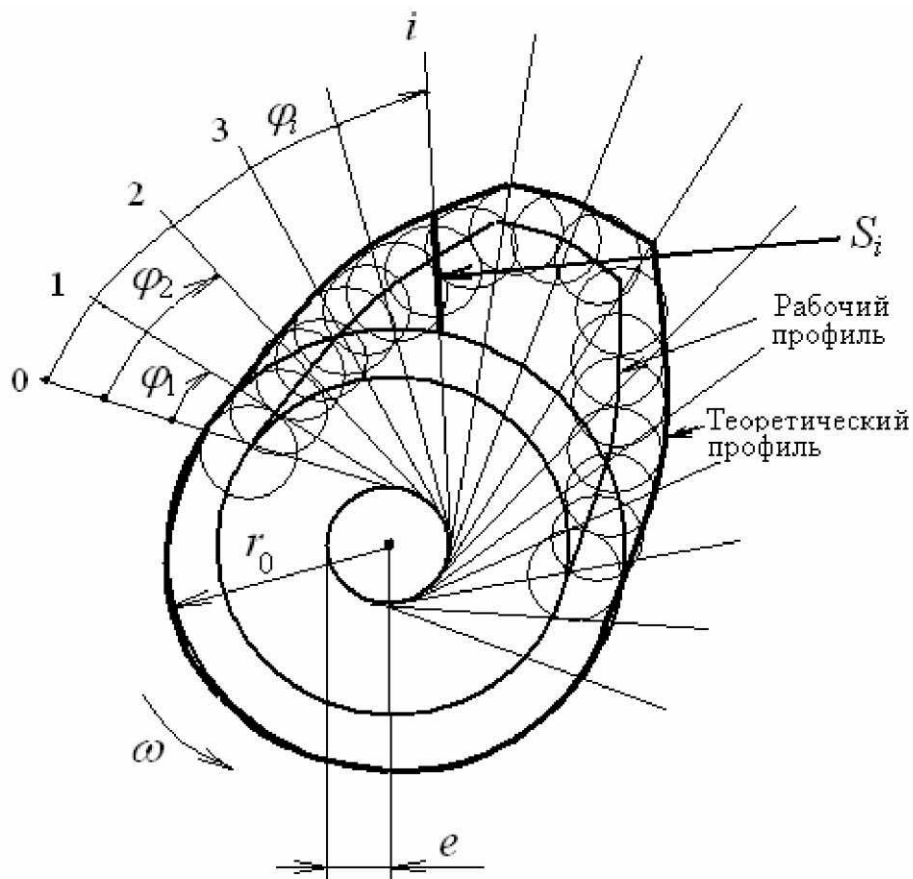


Рисунок 9.6

После измерения во всех положениях механизма перемещения толкателя представляются в виде графика $S = S(\varphi)$ (рис. 9.7).

По оси абсцисс вместо угла поворота φ можно отложить время t , имея в виду линейную зависимость между углом поворота кулачка и временем, а именно, $\varphi = \omega \cdot t$. Согласно этой зависимости шкала времени будет равномерной, как и угловая шкала. В точке n на рисунке будет заканчиваться время полного оборота кулачка T .

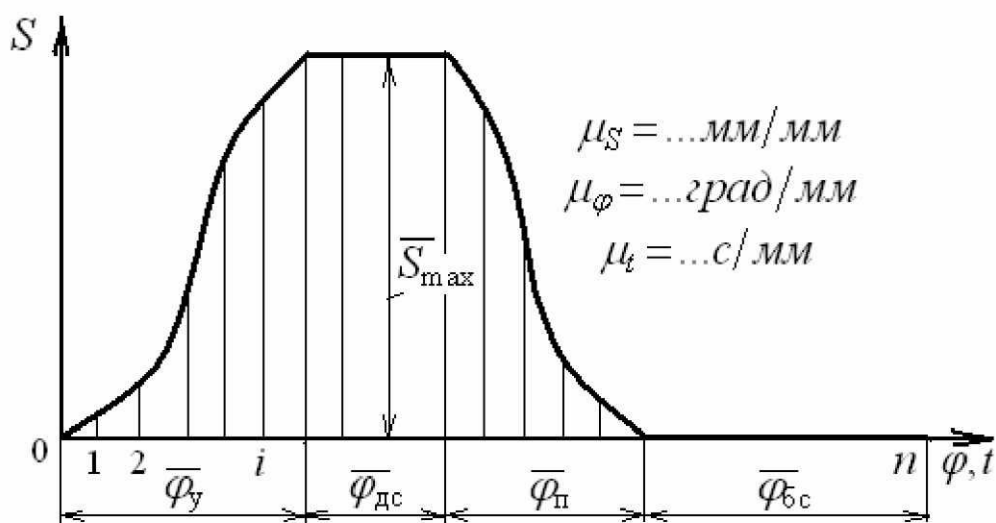


Рисунок 9.7

Сумма углов удаления, дальнего стояния и приближения образует так называемый *рабочий угол* $\varphi_{\text{раб}}$. Поделив рабочий угол на угловую скорость кулачка, получим время прохождения механизмом рабочего угла, то есть $t_{\text{раб}} = \frac{\varphi_{\text{раб}}}{\omega}$.

Для построения графика аналога скорости необходимо продифференцировать полученный график функции положения по α . Повторное дифференцирование даёт график аналога ускорения. Если вместо α дифференцировать по времени t , то получится сначала скорость согласно формуле $V = \frac{dS}{dt}$. Затем продифференцировав график скорости также по времени согласно формуле $a = \frac{dV}{dt}$, построится график ускорения. Методика графического дифференцирования изложена в разделе кинематики механизмов с низшими кинематическими парами.

План скоростей кулачкового механизма. Для анализа кинематики кулачкового механизма полезно уметь построить для него план скоростей. Возьмём кулачковый механизм с поступательно движущимся толкателем (рис. 9.8, а). Для простоты будем считать, что заранее нами построен теоретический профиль. В этом случае с ним в контакте работает толкатель, оканчивающийся остриём.

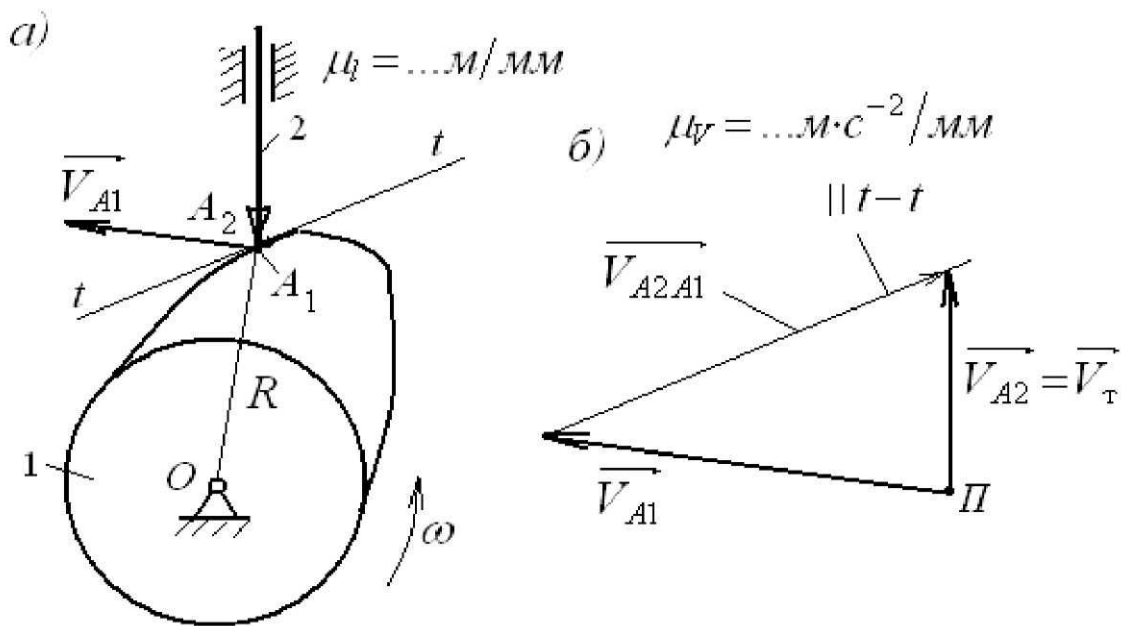


Рисунок 9.8

Обозначим A_1 точку кулачка 1, находящуюся в данный момент в контакте с толкателем 2, и A_2 точку толкателя, контактирующую с кулачком. В данный момент эти точки совпадают друг с другом. Векторное уравнение скоростей для точек A_1 и A_2 согласно общему правилу запишется так $\underline{V_{A_2}} = \underline{V_{A_1}} + \underline{V_{A_2A_1}}$.

В этом уравнении первое слагаемое правой части является скоростью точки A_1 кулачка в её вращении вокруг центра O на радиусе R , определяемой формулой $V_{A1} = \omega \cdot R$ и направленной перпендикулярно R в сторону вращения кулачка, то есть известной по величине и направлению. Второе слагаемое представляет относительную скорость точки A_2 относительно точки A_1 , направленной вдоль касательной $t-t$ и неизвестной по величине. Наконец, вектор левой части есть скорость точки A_2 , или скорость самого толкателя, неизвестная по величине и направленная вдоль оси толкателя. При этих данных треугольник плана скоростей легко строится (рис. 9.8, б). Так можно построить планы скоростей для любого положения механизма и по ним определить скорости толкателя или их аналоги и представить в виде графика. С помощью графического интегрирования можно далее определить график функции положения механизма, а с помощью графического дифференцирования – график аналога ускорения.

Графический метод с использованием основного закона зацепления. Вместо метода планов скоростей можно для определения скоростей воспользоваться основным законом зацепления. Пусть имеется кулачковый механизм с поступательно движущимся роликовым толкателем (рис. 9.9). С точки зрения теории зацепления центры вращения звеньев, образующих высшую пару, лежат на так называемой межосевой линии. Причём, в данном случае центр O кулачка находится в пределах чертежа, а центр вращения толкателя находится в бесконечности, так как толкатель движется поступательно. Поэтому межосевая линия расположена горизонтально и образует прямой угол с осью толкателя. Ролик толкателя и кулачок находятся в контакте между собой в точке K .

Проведём нормаль $n-n$ к профилям в точке K , которая пройдёт через центр ролика и пересечёт межосевую линию в полюсе зацепления Π . Так как полюс зацепления Π является точкой касания центроид, то скорости точек, принадлежащих центроидам звеньев, одинаковы. Толкатель совершает поступательное движение, поэтому скорости всех его точек равны друг другу и скорости полюса. Значит, для определения скорости толкателя необходимо знать скорость полюса, а она найдётся по формуле $V_{\Pi} = \omega \cdot O\Pi$, так как кулачок вращается вокруг центра O вместе со своей центроидой.

Так можно определить скорость полюса, а следовательно, и скорость толкателя во всех требуемых положениях механизма и далее поступить с ней так же, как это пояснялось выше.

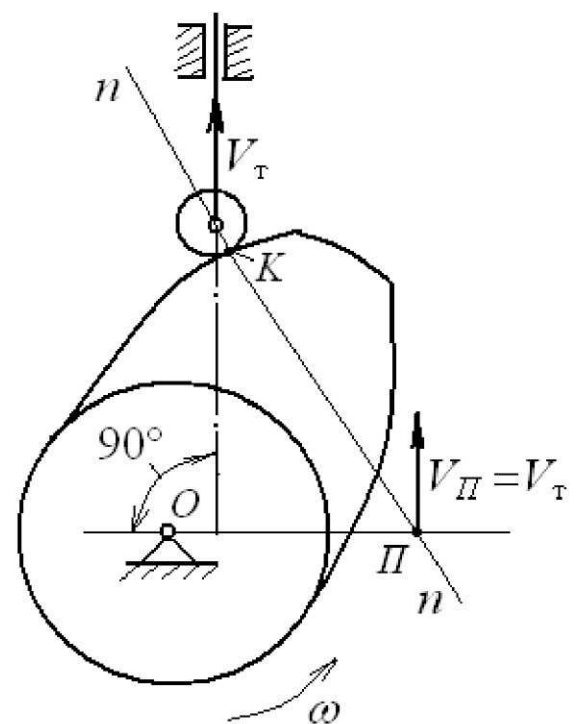


Рисунок 9.9

9.4. Понятие об ударах в кулачковых механизмах

В практике применения кулачковых механизмов иногда встречаются случаи, когда необходимо обеспечить движение с постоянной скоростью исполнительного органа машины, связанного с толкателем (рис. 9.10, а). Интегрирование постоянной величины, как известно, даёт линейную зависимость. Дифференцирование постоянной величины даёт ноль (рис. 9.10, б). Нулевое значение ускорения получается на всём интервале времени удаления толкателя. Однако по концам интервала картина получается совсем другая. В начале фазы удаления за практически нулевой отрезок времени скорость увеличивается от нуля до некоторой постоянной величины. Это ведёт к возникновению ускорения, стремящегося к бесконечности, как отмечено на рис. 9.10, б. Следствием этого является сила инерции толкателя, также стремящаяся к бесконечности. Точно такое же явление имеет место в конце фазы удаления, где ускорение направлено в противоположную сторону по сравнению с началом фазы. Эти бесконечно большие силы инерции и вызывают так называемый *жесткий удар* в механизме.

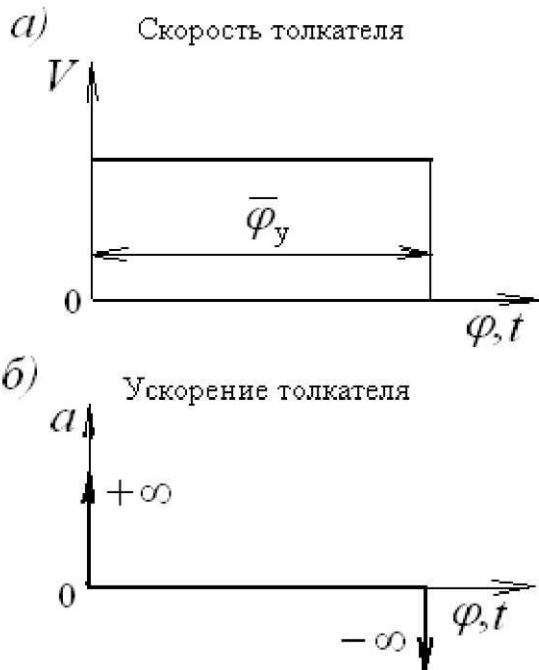


Рисунок 9.10

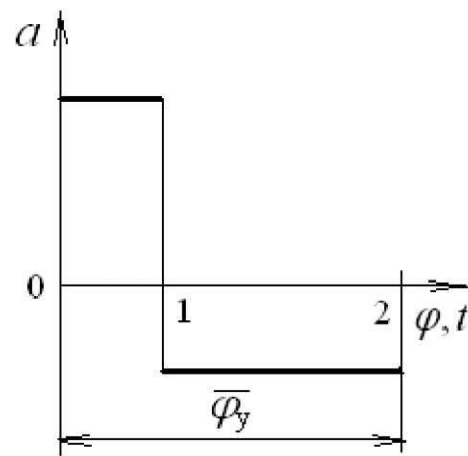


Рисунок 9.11

В других случаях может требоваться движение исполнительного органа с ускорением, меняющимся скачком от нуля до некоторой конечной величины (рис. 9.11). В точках 0, 1 и 2 скачки ускорения вызывают появление сил инерции, меняющихся также скачком от нуля до конечной величины. Это явление называют *мягким ударом*.

Существует бесчисленное множество законов движения, в которых отсутствуют скачки ускорения, а значит, и удары. Идеальным с точки зрения плавности работы является закон движения с синусоидальным изменением ускорения.

9.5. Угол давления и его влияние на работоспособность кулачкового механизма

Углом давления в кулачковом механизме называется угол между силой, действующей со стороны кулачка на толкатель, и абсолютной скоростью толкателя (или скоростью центра ролика). Так как сила P действия кулачка на толкатель направлена вдоль нормали в точке контакта толкателя и кулачка, то угол давления β измеряется между осью толкателя, вдоль которой направлена его скорость V_{τ} , и указанной нормалью (рис. 9.12).

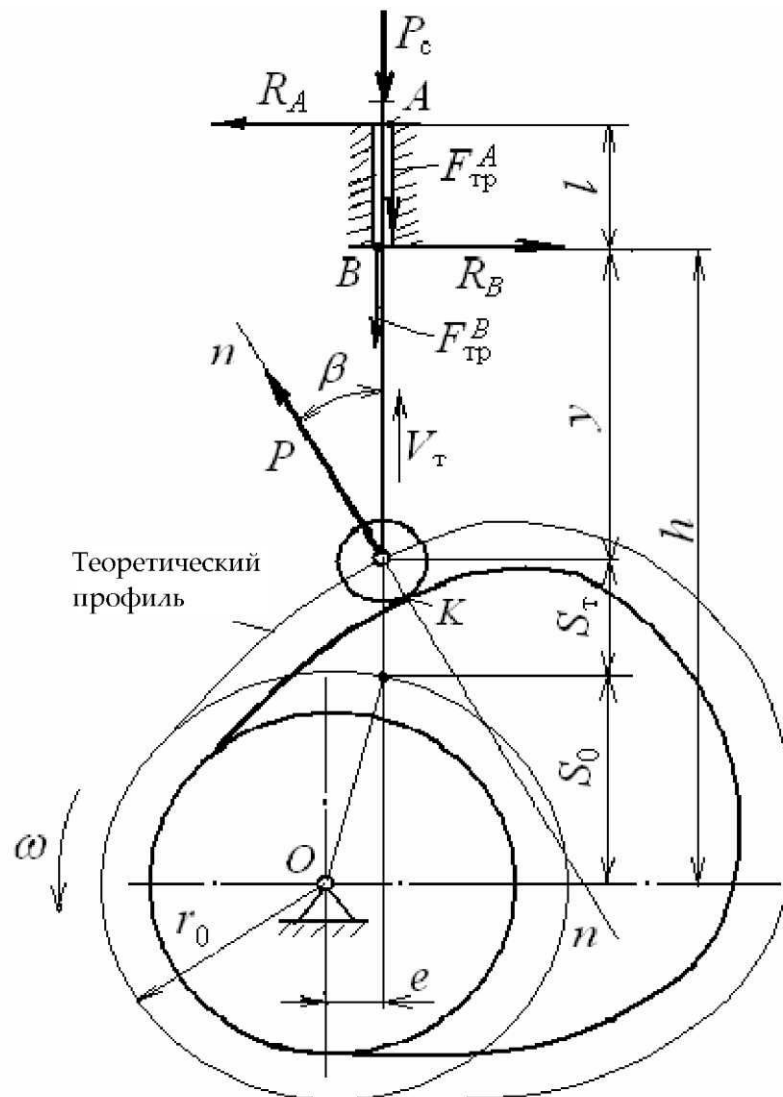


Рисунок 9.12

Выясним, как влияет угол давления на возможность передачи усилий кулачковым механизмом.

Вследствие зазоров в поступательной кинематической паре под действием силы P происходит перекося толкателя в направляющих, в результате которого толкатель прижимается к правой верхней точке A и левой нижней точке B направляющих. В этих точках появляется реакция R_A , действующая перпендику-

лярно направляющим справа налево, и реакция R_B , действующая слева направо также перпендикулярно направляющим. Под действием этих реакций в точках A и B возникают силы трения $F_{\text{отт}}^A$ и $F_{\text{отт}}^B$, действующие навстречу движению толкателя, то есть в данном случае вниз. Под действием всех этих сил толкатель находится в равновесии.

Сначала необходимо определить реакции R_A и R_B и силы трения $F_{\text{отт}}^A$ и $F_{\text{отт}}^B$. Составим уравнение равновесия толкателя в форме моментов сил относительно точки B : $R_A \cdot l - P \cdot y \cdot \sin \beta = 0$, где l – длина направляющих, y – вылет толкателя (расстояние от нижнего края направляющих до центра ролика. Из уравнения находим $R_A = P \cdot \frac{y}{l} \cdot \sin \beta$. Сила трения в точке A $F_{\text{тр}}^A = f \cdot P \cdot \frac{y}{l} \cdot \sin \beta$ (здесь f – коэффициент трения в направляющих).

Далее, составляем уравнение равновесия в форме моментов сил, действующих на толкатель, относительно точки A : $R_B \cdot l - P \cdot (l + y) \cdot \sin \beta = 0$, из которого определяем $R_B = P \cdot \frac{l+y}{l} \cdot \sin \beta$. Сила трения в точке B получится, как

$$F_{\text{тр}}^B = f \cdot P \cdot \frac{l+y}{l} \cdot \sin \beta.$$

Записываем уравнение равновесия в форме суммы сил, действующих на толкатель в вертикальном направлении. При этом считаем положительными силы, помогающие движению толкателя, и отрицательными – препятствующие движению. Получаем $P \cdot \cos \beta - P_c - F_{\text{тр}}^A - F_{\text{тр}}^B = 0$. Подставляя сюда выражения для сил трения, находим

$$P \cdot \cos \beta - P_c - f \cdot P \cdot \frac{y}{l} \cdot \sin \beta - f \cdot P \cdot \frac{l+y}{l} \cdot \sin \beta = 0.$$

Решение данного уравнения относительно P даёт следующее выражение

$$P = \frac{P_c}{\cos \beta - f \cdot \left(\frac{y}{l} + \frac{l+y}{l} \right) \cdot \sin \beta}.$$

После преобразования суммы в скобках можно записать

$$P = \frac{P_c}{\cos \beta - f \cdot \left(1 + 2 \frac{y}{l} \right) \cdot \sin \beta}.$$

При определённом соотношении величин, стоящих в знаменателе, он может обратиться в ноль, то есть будет иметь место равенство

$$\cos \beta = f \cdot \left(1 + 2 \frac{y}{l}\right) \cdot \sin \beta.$$

Тогда движущая сила P становится равной бесконечности. Это означает, что под действием такой силы движение толкателя невозможно, то есть происходит *заклинивание* механизма. Угол давления β , при котором имеет место такое явление, называется *критическим углом давления* $\beta_{\text{крит}}$.

Заменив в последнем равенстве β на $\beta_{\text{крит}}$, можно записать

$$\text{ctg} \beta_{\text{крит}} = f \cdot \left(1 + 2 \frac{y}{l}\right).$$

Вылет толкателя y можно выразить с учётом конструктивных элементов механизма согласно рис. 9.12: $y = h - S_0 - S_{\tau}$, где S_0 можно записать через радиус основной окружности теоретического профиля r_0 и эксцентриситет e , то есть $S_0 = \sqrt{r_0^2 - e^2}$, h – расстояние между нижней плоскостью направляющих и центром кулачка O , S_0 – текущее значение перемещения толкателя. С учётом этого

$$\text{ctg} \beta_{\text{крит}} = f \cdot \left(1 + 2 \frac{h - S_0 - S_{\tau}}{l}\right).$$

Из полученного выражения видно, что, чем меньше его правая часть, тем больше критический угол давления. При большем значении критического угла давления механизм имеет больший диапазон возможностей с точки зрения отсутствия заклинивания. Это возможно, в свою очередь:

- при уменьшении коэффициента трения f ;
- при увеличении длины направляющих l ;
- при уменьшении h ;
- при увеличении радиуса кулачка r_0 и эксцентриситета e (увеличении S_0).

Что касается перемещения толкателя S_0 , то оно является переменной величиной, принимающей значения от нуля до S_0^{max} . С изменением величины перемещения изменяется критический угол давления. Наиболее опасным для заклинивания является нулевое значение S_0 , которое имеет место в начале фазы удаления.

При проектировании кулачкового механизма используется так называемый *допустимый угол давления* β^* , существенно меньший критического. В фазе удаления допустимый угол давления составляет величину $\beta^* = 25^\circ \dots 30^\circ$ в схеме с поступательно движущимся толкателем и $\beta^* = 45^\circ \dots 60^\circ$ в схеме с качающимся толкателем. В фазе приближения $\beta^* = 75^\circ \dots 80^\circ$ для обеих схем.

9.6. Связь между углом давления и геометро-кинематическими характеристиками механизма

Возьмём кулачковый механизм с поступательно движущимся толкателем, оканчивающимся остриём (рис. 9.13). В таком механизме теоретический и рабочий профили совпадают. Пусть ось толкателя располагается вертикально. Проведём межосевую линию O_1O_2 , имея в виду, что центр вращения толкателя находится в бесконечности, так как толкатель движется поступательно. Затем в точке касания K профиля кулачка с толкателем проведём нормаль $n-n$ и отметим точку Π её пересечения с межосевой линией, являющуюся полюсом зацепления.

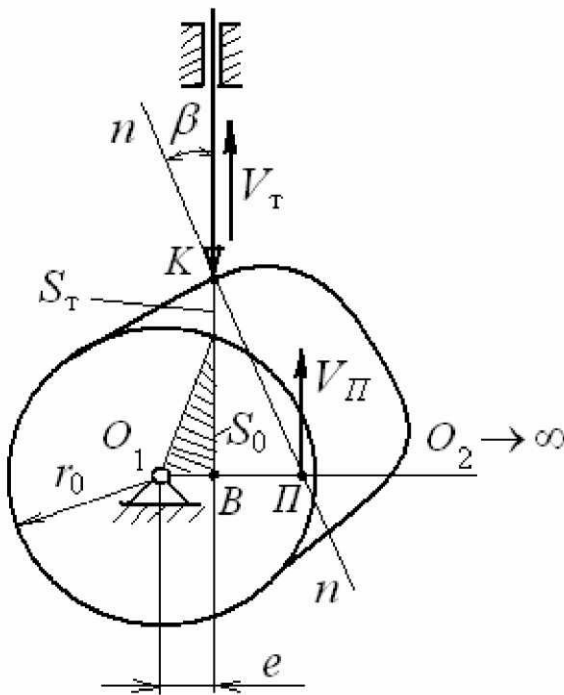


Рисунок 9.13

В полюсе зацепления скорости звеньев одинаковы и равны $V_{\Pi} = \omega \cdot O_1\Pi$. Отсюда получаем $O_1\Pi = \frac{V_{\Pi}}{\omega}$. При поступательном движении звена все его точки, в т. ч. и принадлежащие центруоиде, имеют одинаковые скорости, то есть $V_{\Pi} = V_T$. Следовательно, $O_1\Pi = \frac{V_T}{\omega}$. Данное отношение, как известно, является аналогом скорости $S'_T = \frac{dS_T}{d\varphi}$, поэтому $O_1\Pi$ также является аналогом скорости. Из прямоугольного треугольника $KB\Pi$ выразим тангенс угла давления β : $\operatorname{tg}\beta = \frac{B\Pi}{KB}$. Из рис. 9.13 видим, что $B\Pi = O_1\Pi - O_1B$, или

$B\Pi = S'_T - e$, а $KB = S_0 + S_T$, где выраженное из заштрихованного прямоугольного треугольника $S_0 = \sqrt{r_0^2 - e^2}$. С учётом изложенного $\operatorname{tg}\beta = \frac{S'_T - e}{\sqrt{r_0^2 - e^2} + S_T}$.

По этой формуле при заданных r_0 , e и законе движения толкателя в форме зависимостей $S_T(\varphi)$ и $S'_T(\varphi)$ легко определяется угол давления в любом положении механизма. В этом заключается *аналитическое решение* задачи определения угла давления в кулачковом механизме.

9.7. Графическое определение угла давления

Для решения задачи определения угла давления графическим методом необходимо взять систему координат, в которой по оси абсцисс отложить аналог скорости S'_0 толкателя, а по оси ординат – перемещение S_0 . Причём,

масштабы по обеим осям должны быть одинаковы (рис. 9.14). Положительное направление оси абсцисс определяется поворотом вектора скорости толкателя в фазе удаления на угол 90° в сторону вращения кулачка. Углы удаления и приближения необходимо разбить на интервалы, обозначив их границы номерами $0, 1, 2, \dots$. В i -й точке деления с заданных графиков $S_o(\varphi)$ и $S'_o(\varphi)$ необходимо взять соответствующие значения и, переведя их

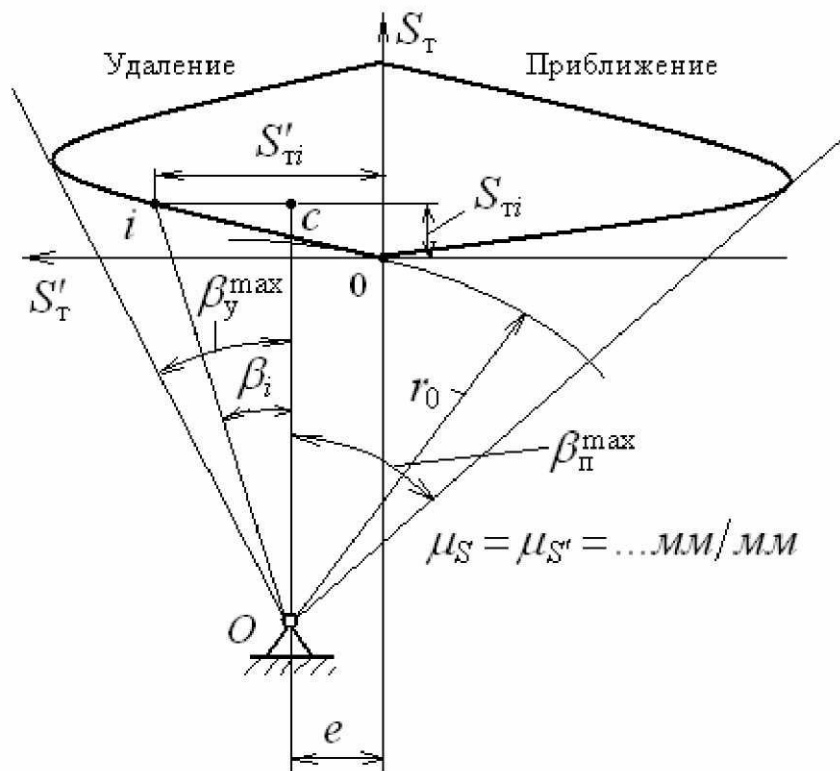


Рисунок 9.14

в масштаб диаграммы, построить точку i графика (рис. 9.14). Как отмечалось выше, аналог скорости толкателя S'_o является одновременно радиусом центроиды кулачка. Поэтому данная диаграмма называется также *диаграммой радиусов центроиды*. В системе координат диаграммы в её масштабе находится положение центра O вращения кулачка. Соединим точку i с центром кулачка O и опустим перпендикуляр из точки O на линию абсциссы точки i . После этих действий получается прямоугольный треугольник Oic с углом β_i при вершине O . Как видно из рис. 9.14,

$$\operatorname{tg} \beta_i = \frac{S'_{Ti} - e}{\sqrt{r_0^2 - e^2 + S_{Ti}}}$$

Данное математическое выражение полностью совпадает с ранее полученным для расчёта угла давления. Это значит, что с помощью данного графика можно легко найти угол давления в кулачковом механизме в любом его положении. Достаточно соединить соответствующую заданному положению механизма точку графика с центром кулачка, отмеченным на графике, и угол между этой линией и осью толкателя будет углом давления.

Максимальное значение угла давления в фазе удаления толкателя β_o^{\max} найдётся как угол между касательной к диаграмме в зоне удаления и осью толкателя. Аналогичным образом найдётся максимальный угол давления и в фазе приближения β_i^{\max} (рис. 9.14). Данное решение относится к графическому методу решения задачи.

9.8. Определение радиуса основной окружности теоретического профиля кулачка

Исходя из выше изложенной методики определения максимальных углов давления в кулачковом механизме нетрудно решить обратную задачу, а именно: *при заданных максимально допустимых углах давления найти размеры кулачкового механизма – радиус основной окружности теоретического профиля и эксцентриситет.*

Для решения этой задачи необходимо иметь закон движения толкателя в форме зависимостей $S_{\delta}(\varphi)$ и $S'_{\delta}(\varphi)$ и величины допустимых углов давления в фазе удаления и фазе приближения, то есть β_{δ}^* и β_{δ}^* соответственно.

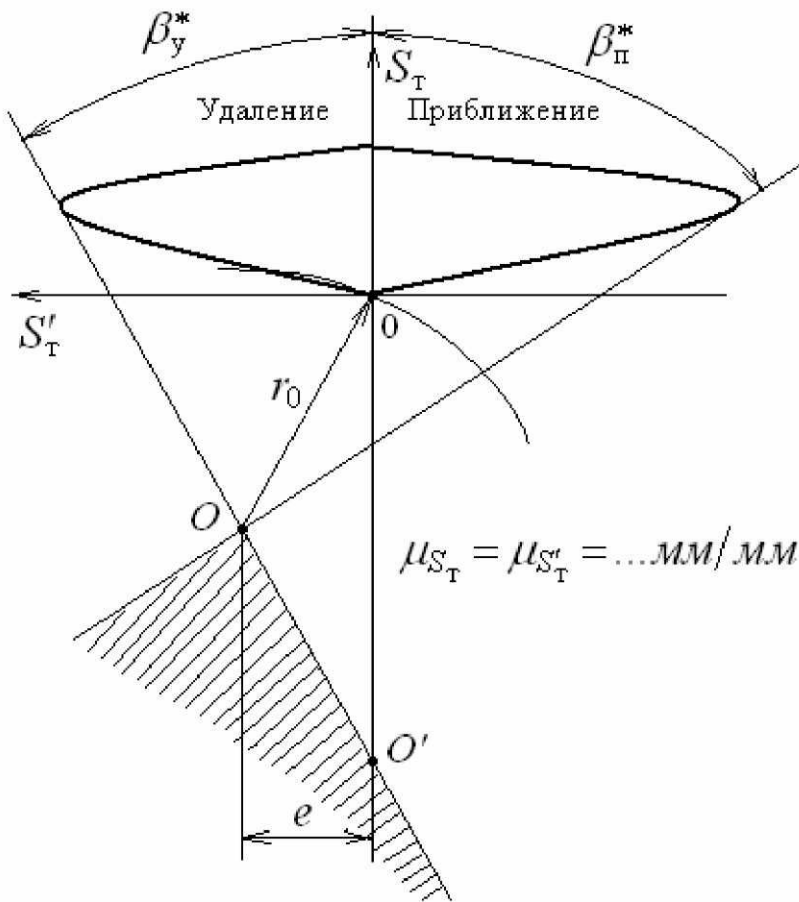


Рисунок 9.15

В соответствии с заданными перемещением толкателя и аналогом скорости путём исключения из них параметра φ строится диаграмма радиусов centroиды кулачка (рис. 9.15). Под углом β_{δ}^* строится касательная к кривой графика в фазе удаления толкателя, и под углом β_{δ}^* строится касательная в фазе приближения. Касательные проводятся до пересечения друг с другом. Между этими касательными ниже точки их пересечения образуется область разрешённых положений центра кулачка (на рис. 9.15 эта область заштрихована), где можно выбирать этот

центр в любом месте, так как в этой области соблюдаются условия по углам давления $\beta_y^{\max} \leq \beta_y^*$ и $\beta_{\pi}^{\max} \leq \beta_{\pi}^*$. Минимальные размеры кулачка получатся, если центром выбрать точку O пересечения касательных. Расстояние от выбранного положения точки O до начала координат диаграммы равно радиусу r_0 , а расстояние от этой точки до оси толкателя равно эксцентриситету e . Естественно, что эти расстояния получаются в масштабе построения диаграммы.

Если требуется спроектировать механизм без эксцентриситета, то центр кулачка можно выбрать на оси S_{δ} . Минимальные размеры кулачка в этом случае получатся, если центром выбрать точку O' .

9.9. Определение радиуса основной окружности в механизме с плоским толкателем

В кулачковом механизме с плоским толкателем угол давления равен нулю во всех положениях, если ось толкателя перпендикулярна тарелке. В случае, если ось не перпендикулярна тарелке, то угол давления не равен нулю, но остаётся постоянным во всех положениях механизма. Поэтому для определения радиуса основной окружности кулачка необходимо выполнить другое условие, которое требуется для нормальной работы механизма. Таким условием является *условие выпуклости профиля*. Оно заключается в том, что во всех своих точках профиль кулачка должен быть выпуклым и не иметь провалов (рис. 9.16), так как плоская тарелка толкателя не сможет огибать провал (вогнутость) профиля, и закон движения толкателя в зоне провала не может быть реализован. На рисунке цифрами отмечены последовательные положения толкателя и штриховкой показан участок профиля кулачка, недоступный для контакта с толкателем. Чтобы такого явления не происходило, необходимо спроектировать профиль кулачка таким образом, чтобы на нём не было вогнутостей.

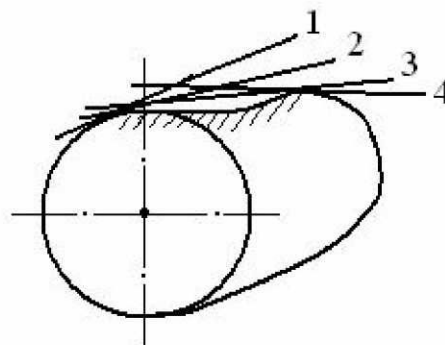


Рисунок 9.16

На форму профиля кулачка можно влиять радиусом основной окружности. Посмотрим, как связана геометрия профиля с радиусом r_0 . Возьмём кулачковый механизм с плоским толкателем (рис. 9.17). В данном положении механизма тарелка толкателя касается профиля кулачка в точке K . Определим в данной точке радиус кривизны профиля ρ . Для этого проведём нормаль $n-n$ к профилю и найдём на ней центр кривизны C . Как видно из рисунка, радиус кривизны равен сумме $\rho = r_0 + S_T + y$. Согласно условию выпуклости профиля необходимо $\rho > 0$, то есть $r_0 + S_T + y > 0$.

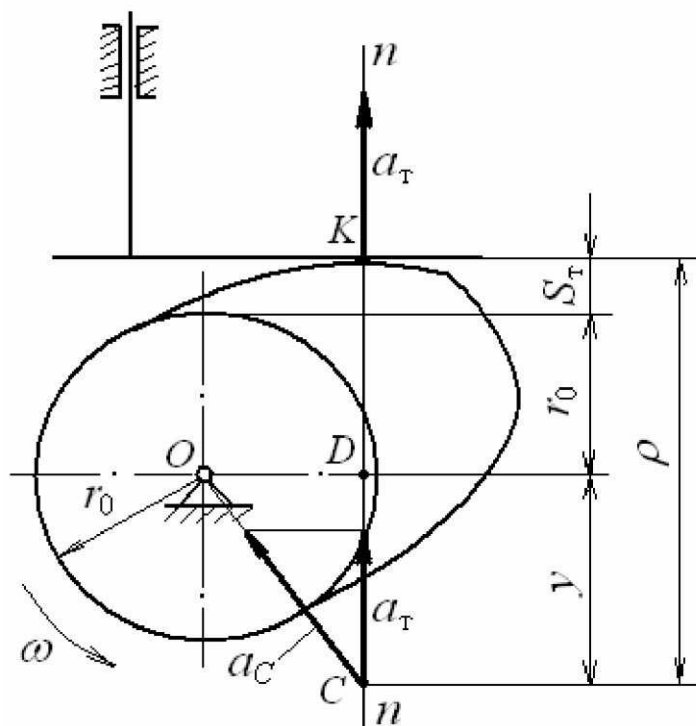


Рисунок 9.17

Чтобы определить неизвестную координату y центра кривизны C , обратимся к подобию треугольника OCD и треугольника ускорений, построенных из точки C . Из этого подобия запишем $\frac{y}{a_T} = \frac{OC}{a_C}$, откуда $y = OC \cdot \frac{a_T}{a_C}$, где a_0 –

ускорение толкателя, a_C – ускорение точки C . Точка C принадлежит кулачку, вращающемуся с постоянной угловой скоростью ω . Поэтому её ускорение состоит только из нормальной составляющей $a_C = OC \cdot \omega^2$. С учётом этого имеем

$y = \frac{a_T}{\omega^2}$. Но данное отношение представляет собой аналог ускорения толкателя

S_{δ}'' . Тогда условие выпуклости запишется так: $\rho = r_0 + S_T + S_T'' > 0$.

Перенесём аналог ускорения в правую часть неравенства и поделим всё выражение на $r_0 + S_T$: $\frac{-S_T''}{r_0 + S_T} < 1$.

Для дальнейшего заменим единицу $tg45^\circ$, то есть $\frac{-S_T''}{r_0 + S_T} < tg45^\circ$.

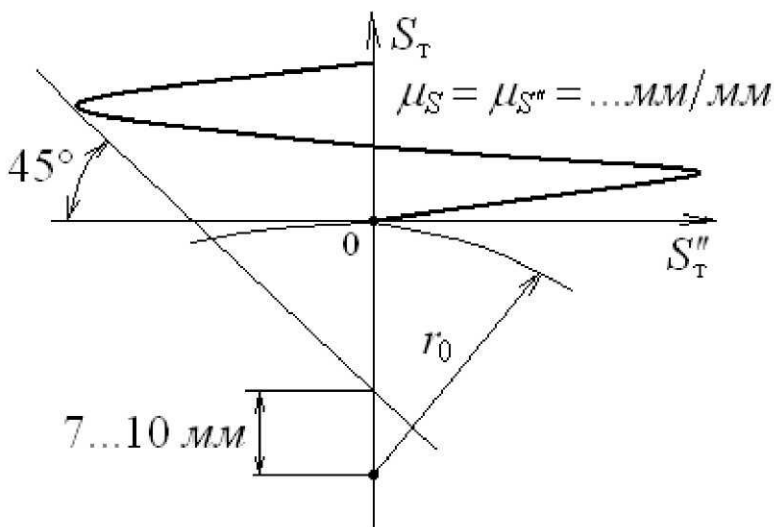


Рисунок 9.18

Последнее неравенство позволяет определить r_0 , если представить его в форме графических построений. Выберем систему координат (рис. 9.18), по оси абсцисс которой отложим аналог ускорения S_{δ}'' , а по оси ординат – перемещение S_{δ} толкателя (масштабы по осям координат должны быть одинаковы), исключив параметр φ из предварительно найденных зависимостей $S_{\delta}''(\varphi)$ и

$S_{\delta}(\varphi)$. Затем к отрицательной части диаграммы необходимо провести касательную под углом 45° до пересечения с осью S_{δ} . Так как левая часть неравенства меньше чем $tg45^\circ$, то центр кулачка необходимо принять на $7 \dots 10 \text{ мм}$ ниже точки пересечения касательной с осью ординат. Расстояние от этого центра до начала координат будет равно радиусу r_0 . Если радиус взять от точки пересечения касательной с осью ординат, то это соответствовало бы знаку равенства вместо знака неравенства.

9.10. Построение профилей вращающихся кулачков

Построение профиля кулачка с роликовым толкателем. Известными величинами для построения профиля кулачка являются закон движения толкателя в форме зависимости $S_{\delta}(\varphi)$, представленный или в виде графика (рис. 9.19), или в виде таблицы значений перемещения, величины

радиуса основной окружности r_0 и эксцентриситета e . Естественно, что фазовые углы должны быть также известны.

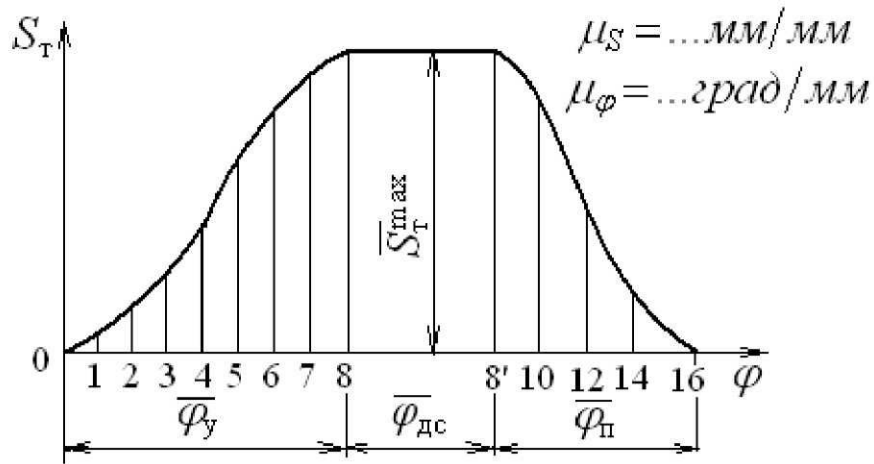


Рисунок 9.19

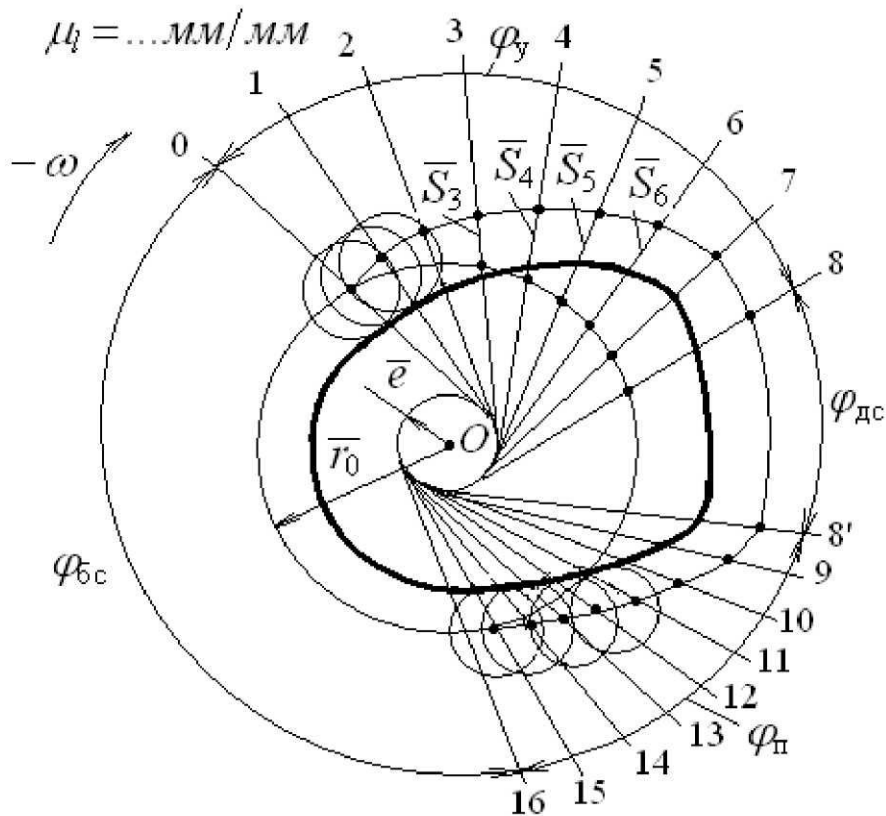


Рисунок 9.20

Отрезки, выражающие на графике фазовые углы удаления $\overline{\varphi}_6$ и приближения $\overline{\varphi}_1$, необходимо разделить на ряд равных интервалов. Количество интервалов выбирается произвольно в зависимости от величины фазовых углов. На рис. 9.19 каждый из углов разделён на восемь интервалов. Границы интервалов

отмечаются порядковыми номерами. Затем приступаем к построению профиля кулачка. Для этого выбираем произвольную точку O в качестве центра кулачка и с центром в этой точке проводим две концентрические окружности радиусами \bar{r}_0 и \bar{e} (рис. 9.20), представляющими собой величины радиуса и эксцентриситета в масштабе построения μ_l . В направлении, обратном направлению вращения кулачка, то есть в направлении $-\omega$ откладываем фазовые углы $\varphi_0, \varphi_{a1}, \varphi_1$ и φ_{a11} . Такое направление отсчёта углов даст правильное их чередование, когда в спроектированном механизме кулачок станет вращаться в нужном направлении. Угол удаления откладывается от касательной к окружности эксцентриситета, проведённой в произвольном месте построения. Необходимо следить за тем, чтобы ось толкателя располагалась относительно центра кулачка так, как она расположилась при определении радиуса и эксцентриситета (рис. 9.15). Углы удаления и приближения делятся на столько частей, на сколько они разделены на диаграмме перемещения. Границами угловых интервалов являются касательные к окружности эксцентриситета, пронумерованные на рис. 9.20 цифрами $0, 1, 2, \dots, 8, 8', 9, \dots, 16$. Данные границы, по существу, являются мгновенными положениями оси толкателя при его вращении вокруг центра кулачка. На каждой касательной от основной окружности откладывается величина перемещения, снятая с графика и пересчитанная в масштаб построения. Эти перемещения отмечены на рис. 9.20 как $\dots, \bar{S}_3, \bar{S}_4, \bar{S}_5, \bar{S}_6, \dots$. Плавное последовательное соединение полученных точек даёт теоретический профиль кулачка (на рис. 9.20 он проведён тонкой линией). В пределах угла дальнего стояния теоретический профиль очерчен дугой окружности. Для получения рабочего профиля, проведённого на рисунке жирной линией, необходимо задаться радиусом ролика r_δ . Обычно при выборе радиуса ролика придерживаются нормы $r_p \leq 0,7 \dots 0,8 \rho_{\min}$, где ρ_{\min} – минимальный радиус кривизны теоретического профиля.

Найденным радиусом ролика, взятым в масштабе построения, проводится множество дуг или окружностей с центрами на линии теоретического профиля. Их огибающая будет рабочим профилем кулачка, по которому катится ролик толкателя.

Построение профиля кулачка с плоским (тарельчатым) толкателем. Подготовка графика перемещения и нахождение точек теоретического профиля кулачка с плоским толкателем не отличается от предыдущего. Следует только иметь в виду, что в данном механизме наличие эксцентриситета не сказывается на построении профиля, так как он не влияет на форму последнего. Отличие, связанное с формой окончания толкателя, существует в построении рабочего профиля.

В точках теоретического профиля на радиальных прямых, представляющих мгновенные положения оси толкателя, строятся перпендикуляры к этим осям до их взаимного пересечения друг с другом (рис. 9.21). Так как плоская тарелка

толкателя во всех положениях совпадает с касательной к профилю кулачка, то искомый рабочий профиль строится с помощью лекала как огибающая данных перпендикуляров к осям толкателя, изображающих положения тарелки.

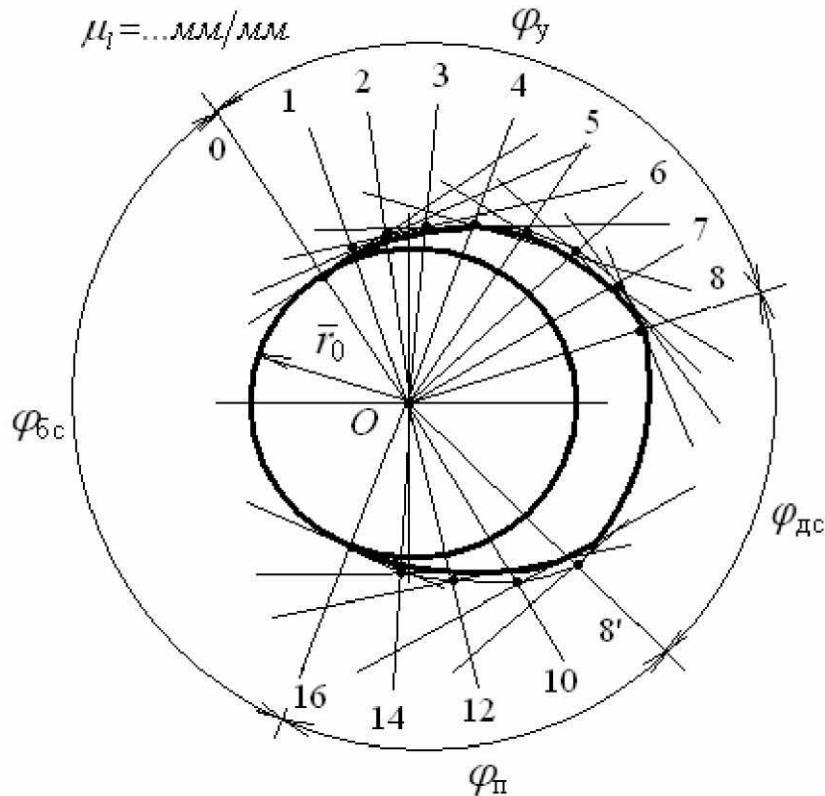


Рисунок 9.21

Построение профиля кулачка с качающимся толкателем можно найти в пособиях к курсовому проектированию по ТММ.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется кулачковым механизмом?
2. Какие основные достоинства имеет кулачковый механизм?
3. Назовите элементы кулачкового механизма.
4. Назовите фазы движения толкателя.
5. Что такое теоретический и рабочий профили кулачка?
6. Что называют ходом толкателя?
7. Назовите разновидности кулачковых механизмов.
8. Какие способы замыкания высшей пары кулачок-толкатель применяются в кулачковых механизмах?
9. Какие формы окончания толкателя применяются в кулачковых механизмах?
10. Изобразите примерную диаграмму закона движения толкателя.

11. Что такое жёсткий и мягкий удары в кулачковом механизме?
12. Что такое угол давления в кулачковом механизме?
13. Что такое критический, допустимый углы давления?
14. Какие параметры механизма влияют на критический угол давления?
15. Как определяется угол давления?
16. По какому условию и как определяется радиус основной окружности кулачка с роликовым толкателем? С плоским толкателем?
17. Какие данные необходимы для построения профиля кулачка с роликовым толкателем? С плоским толкателем?
18. Как строится профиль кулачка с роликовым толкателем? С плоским толкателем?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин. М., 1988. 640 с.
2. Фролов К.В., Попов С.А., Мусатов А.К. и др. Теория механизмов и машин / Под ред. К.В. Фролова. М., 1987. 496 с.
3. Юдин В.А., Петрокас Л.В. Теория механизмов и машин. М., 1977. 527 с.
4. Левитский Н.И. Теория механизмов и машин. М., 1979. 576 с.
5. Крайнев А.Ф. Словарь-справочник по механизмам. М., 1981. 438 с.
6. Кореняко А.С. Теория механизмов и машин. Киев, 1976. 444 с.
7. Левитская О.Н., Левитский Н.И. Курс теории механизмов и машин. М., 1976. 269 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Введение	4

Раздел 1. Структура, кинематика и элементы синтеза механизмов

1. Структура механизмов	6
1.1. Классификация кинематических пар.....	6
1.2. Кинематические цепи и их классификация.....	9
1.3. Расчет степени подвижности механизма	9
1.4. Структурная классификация плоских механизмов	11
1.5. Замена высших пар в плоских механизмах.....	14
1.6. Избыточные (повторяющиеся) связи и местные подвижности в механизмах.....	15
1.7. Структурный синтез механизмов	18
2. Кинематика и синтез зубчатых механизмов	20
2.1. Разновидности зубчатых передач	20
2.2. Понятие о передаточном отношении	21
2.3. Передаточное отношение простых зубчатых передач	22
2.4. Кинематика и синтез зубчатых механизмов с неподвижными осями колес	26
2.5. Кинематика механизмов планетарного типа.....	29
2.6. Синтез механизмов планетарного типа.....	36
3. Кинематика и синтез механизмов с низшими кинематическими парами	41
3.1. Задачи исследования кинематики. Исходные данные. Методы исследования.....	41
3.2. Кинематические и передаточные функции механизмов	41
3.3. Аналитический метод.....	42
3.4. Метод планов положений, скоростей и ускорений	47
3.5. Метод кинематических диаграмм (метод графического дифференцирования).....	62
3.6. Синтез рычажных механизмов	63

Раздел 2. Кинестатика механизмов и динамика машин

4. Кинестатика механизмов	74
4.1. Характеристика сил, действующих в машинах	74
4.2. Задачи кинестатики.....	76
4.3. Расчёт сил инерции.....	77
4.4. Общие положения силового расчёта	79
4.5. Метод планов сил	81
4.6. Метод разложения сил	88
4.7. Аналитический метод.....	89
4.8. Определение уравновешивающей силы	91
5. Трение в кинематических парах и КПД	94
5.1. Виды трения. Законы трения скольжения.....	94
5.2. Понятие о коэффициенте полезного действия.....	97
5.3. Трение в поступательной кинематической паре.....	98
5.4. Трение в винтовой кинематической паре.....	102
5.5. Трение во вращательной кинематической паре.....	104
5.6. Трение качения	106
6. Динамика машин	108
6.1. Вспомогательные задачи динамики машин	109
6.2. Характеристики режимов движения машин	111
6.3. Формы уравнений движения машин	113
6.4. Исследование пуска машины при силах – функциях перемещений.....	114
6.5. Исследование установившегося неравновесного движения машины с маховиком при силах – функциях перемещений.....	117
6.6. Определение момента инерции маховика при внешних силах – функциях перемещений	120
6.7. Назначение маховика в машине.....	124
6.8. Исследование пуска машины при силах – функциях скоростей.....	125
6.9. Исследование устойчивости установившегося равновесного движения	128
7. Проблемы уравновешивания и балансировки звеньев и механизмов ..	132
7.1. Значение проблемы уравновешивания и балансировки в машинах	132
7.2. Виды неуравновешенности вращающихся звеньев и их устранение	137

7.3. Начальные сведения об уравнивании механизмов	144
7.4. Виброгашение и виброизоляция	150

Раздел 3. Синтез элементов высших кинематических пар

8. Теория и геометрия зубчатых зацеплений	157
8.1. Элементы относительного движения звеньев высшей пары	157
8.2. Элементы зубчатых зацеплений, обусловленные их кинематикой	160
8.3. Основные качественные характеристики зацеплений.....	161
8.4. Эвольвента зуба колеса, её свойства и уравнение	165
8.5. Элементы зубчатого колеса	167
8.6. Элементы и свойства эвольвентного зацепления	169
8.7. Методы изготовления зубчатых колёс	170
8.8. Геометрия реечного производящего исходного контура	172
8.9. Подрез зуба колеса и его предотвращение.....	173
8.10. Качественные характеристики эвольвентного зацепления	175
8.11. Назначение коэффициентов смещения для нарезания зубчатых колёс	180
8.12. Типы эвольвентных колёс и передач.....	181
8.13. Расчёт геометрических размеров зубчатых колёс	182
8.14. Особенности зацепления эвольвентных косозубых колёс	185
8.15. Особенности зацепления конических колёс	188
8.16. Особенности зацепления в гиперболических передачах	191
9. Синтез профилей кулачков и элементов плоских кулачковых механизмов	196
9.1. Элементы кулачкового механизма и геометрические элементы кулачка	196
9.2. Разновидности плоских кулачковых механизмов	198
9.3. Кинематический анализ кулачковых механизмов	200
9.4. Понятие об ударах в кулачковых механизмах	205
9.5. Угол давления и его влияние на работоспособность кулачкового механизма	206
9.6. Связь между углом давления и геометро-кинематическими характеристиками механизма	209
9.7. Графическое определение угла давления.....	209

9.8. Определение радиуса основной окружности теоретического профиля кулачка.....	211
9.9. Определение радиуса основной окружности в механизме с плоским толкателем	212
9.10. Построение профилей вращающихся кулачков.....	213
Библиографический список	218