

ОПД.Ф.02.03 ТЕОРИЯ МАШИН И МЕХАНИЗМОВ
Учебное пособие

ВВЕДЕНИЕ

Теория механизмов и машин (ТММ) — наука о методах исследования и проектирования механизмов и машин. Она базируется на основных положениях высшей математики, физики и теоретической механики. ТММ сравнительно молодая наука, сформировавшаяся примерно в середине XIX века. Ее основоположником можно по праву считать выдающегося русского ученого математика и механика, академика Пафнутия Львовича Чебышева. Его труды посвящены одной из сложнейших задач теории механизмов — задаче синтеза механизмов, не утратившей своей актуальности и по настоящее время. Разработанная и созданная Чебышевым серия шарнирно-рычажных механизмов с максимальным приближением к заданной траектории движения отдельных точек механизма получила высокую оценку его современников и составила основу для решения конкретных задач практики.

Из числа других ученых, внесших весомый вклад в развитие теории механизмов, следует назвать Николая Егоровича Жуковского, известного своими трудами в области динамики механизмов, Леонида Владимировича Ассура — создателя стройной теории структуры рычажных механизмов, Ивана Ивановича Артоболевского, систематизировавшего труды многих отечественных и зарубежных ученых в области теории механизмов и написавшего фундаментальный учебник по теории механизмов и машин, по которому изучают эту дисциплину последующие поколения специалистов и студентов, Владимира Александровича Гавриленко, разработавшего теорию эвольвентных зубчатых передач, Леонида Николаевича Решетова, создавшего основополагающую теорию синтеза кулачковых механизмов и многих других известных ученых, обогативших и продолжающих обогащать своими трудами дальнейшее развитие этой науки.

Глава 1

СТРУКТУРА МЕХАНИЗМОВ

1.1. Основные понятия и определения

I. *Механизм* есть система связанных между собой материальных тел (звеньев), в которой при заданном движении одного или нескольких звеньев остальные будут совершать вполне определенные движения относительно звена, принятого за неподвижное (стойка, станина),

Механизмы различают по характеру движения звеньев: плоские и пространственные. К *плоским* относятся механизмы, звенья которых совершают движения в одной плоскости или в параллельных плоскостях. К *пространственным* относятся механизмы, звенья которых движутся в произвольных (непараллельных) плоскостях.

Кроме того, механизмы следует различать по конструктивным особенностям. Среди них можно выделить три основных типа механизмов.

Шарнирно-рычажные механизмы. Это механизмы, звенья которых выполнены в виде стержней (рычагов), соединенных между собой посредством шарниров. В качестве примера можно привести кривошипно-ползунный механизм, лежащий в основе двигателя внутреннего сгорания и других поршневых машин (рис. 1.1). Он состоит из трех подвижных звеньев

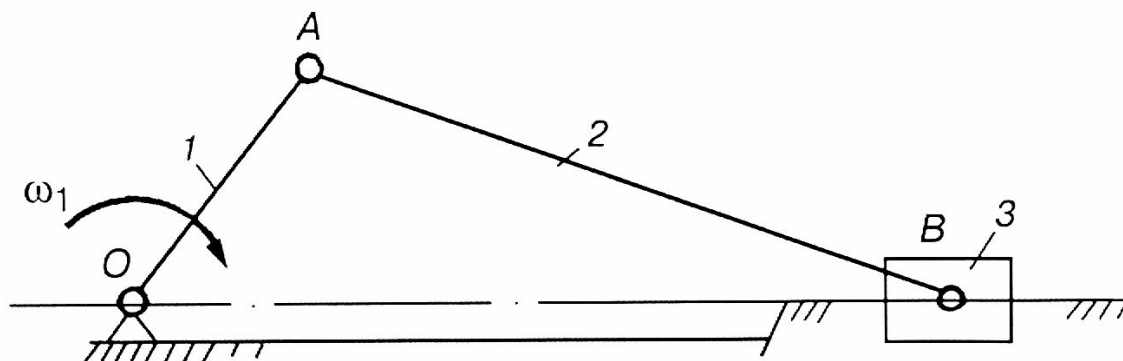


Рис. 1.1

1, 2 и 3 и трех шарниров O , A и B . Соединение ползуна 3 со стойкой осуществляется с помощью неподвижной направляющей OB .

Кулачковые механизмы. К ним относятся механизмы, одно из звеньев которых выполнено в виде диска некруглой формы (рис. 1.2). Такое звено называют *кулачком* (звено 1 на рисунке), связанное с ним звено (2) называют *толкателем* (коромыслом). При непрерывном вращательном движении кулачка коромысло совершает возвратно-вращательное движение.

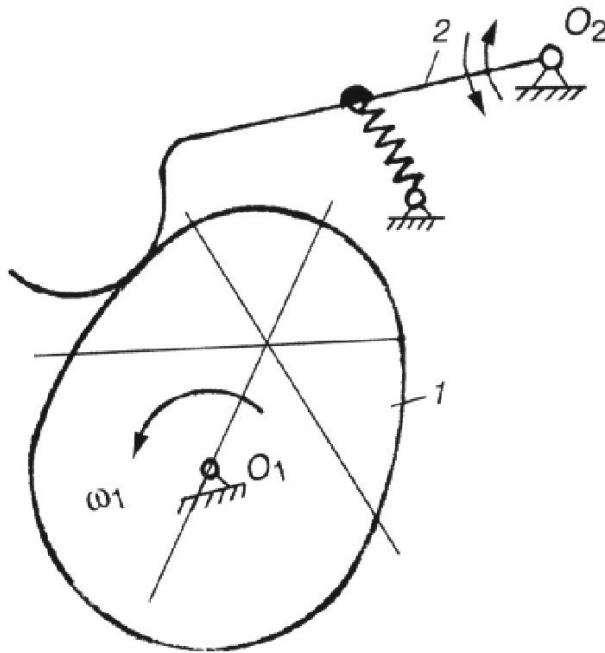


Рис. 1.2

Зубчатые механизмы. Это такие механизмы звенья которых выполнены в дисков с нарезанными зубьями по их контуру (рис. 1.3). При приведении в движение одного из колес, находящееся с ним в зацеплении другое из колес также придет в движение.

Применяемые на практике механизмы нередко используются в сочетании друг с другом. Например: шарнирно-рычажный с зубчатым, и называться он будет соответственно — зубчато-рычажный и т.д.

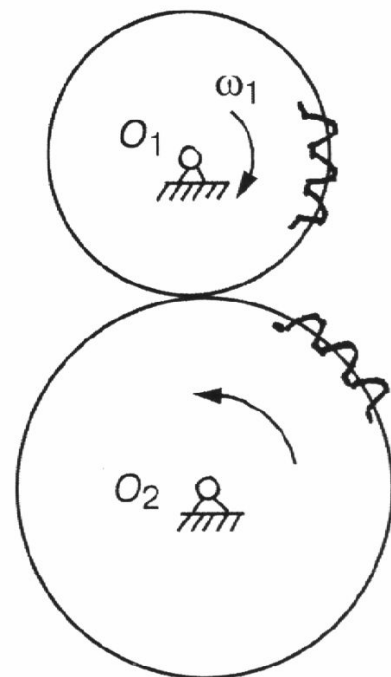


Рис. 1.3

II. *Звено* есть часть механизма, движущаяся как единое целое. В отличие от детали, как элемента машины, выполненной без дополнительной операции сборки, звено может состоять из нескольких деталей, жестко связанных между собой, и совершать единое движение,

III. *Кинематическая пара* есть соединение двух звеньев, обладающих относительной подвижностью,

Кинематические пары различают по характеру соединения звеньев — низшие и высшие. К *низшим* относятся пары, соединения звеньев которых осуществляется по поверхности; к *высшим* — пары, у которых звенья соединяются по линии или в точке. Кроме того, кинематические пары различают по числу связей, накладываемых на относительное движение звеньев. При этом соединения можно разделить на пять классов.

К первому классу относятся соединения звеньев, обладающих одной связью (или условием связи) и пятью возможными относительными движениями (рис. 1.4, *a*). Пусть два звена, одно из которых выполнено в виде плоскости, а второе в виде сферы, контактируют между собой в точке O . При этом звено 2 (сфера) относительно звена 1 (плоскость) может совершать движение в системе координат XYZ в направлении, указанном стрелками. Невозможно лишь одно из этих движений: в направлении оси OZ . При осуществлении такого движения нарушается соединение звеньев, и кинематическая пара перестает существовать. Поэтому относительное движение вдоль оси OZ считается невозможным и называется *условием связи*. Таким образом, по количеству связей это соединение относится к первому классу.

Ко второму классу можно отнести соединение шар в трубке (рис. 1.4, *b*). Шар 2 относительно трубки 1 не имеет возможности перемещаться вдоль координатных осей OX и OZ , т.е. обладает двумя условиями связи.

К третьему классу относится соединение, представляющее собой сферический шарнир (рис. 1.4, *в*). В данном соединении невозможны линейные относительные движения звеньев вдоль координатных осей, т.е. имеют место три условия связи.

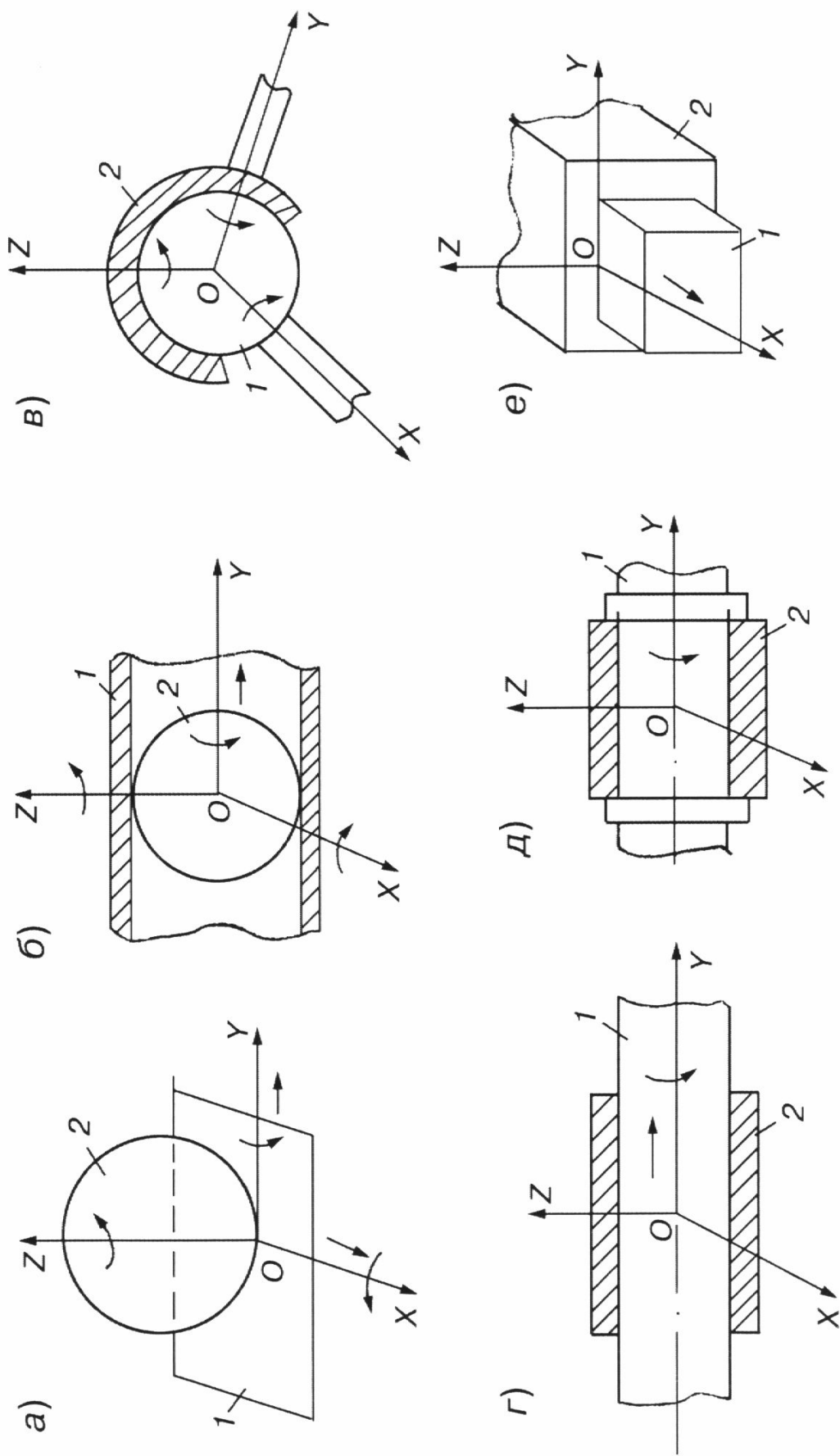


Рис. 1.4

К четвертому классу можно отнести соединение вала со втулкой или цилиндрический шарнир (рис. 1.4, *з*). В этом соединении возможны только 2 относительных движения и четыре условия связи (невозможность движения относительно координатных осей OX и OZ).

К пятому классу можно отнести соединения, выполненные по схеме цилиндрического шарнира с ограничением одного из движений. Исключив в предыдущей схеме линейное, относительное движение вдоль оси OF , получим кинематическую пару пятого класса с вращательным относительным движением (рис. 1.4, *д*), а исключив вращательное относительное движение в кинематической паре четвертого класса получим пару пятого класса, но с поступательным относительным движением (рис. 1.4, *е*).

Приведенные схемы кинематических пар различных классов не исчерпывают всего многообразия соединений звеньев.

Например, к какому классу следует отнести винтовую кинематическую пару (винт с гайкой)? Указанное соединение допускает два относительных движения: вращательное и поступательное, и по классификации должно было относиться к четвертому классу. Но в силу того, что оба движения являются взаимосвязанными, то соединение является фактически одноподвижным и относится к кинематическим парам пятого класса и т.д.

В начале было отмечено, что по характеру соединений кинематические пары различают низшие и высшие. Согласно классификации можно уточнить, что к низшим кинематическим парам, звенья которых соединяются по поверхности, следует отнести пары третьего, четвертого и пятого классов. Соответственно к высшим кинематическим парам нужно отнести соединения первого и второго классов.

IV. *Кинематическая цепь* есть система связанных между собой звеньев посредством кинематических пар. Различают кинематические цепи замкнутые и незамкнутые (разомкнутые).

Незамкнутая кинематическая цепь есть такая цепь, в которой имеется хотя бы одно звено, входящее лишь в одну кинематическую пару (рис. 1.5). В приведенной схеме звенья 1 и 4 входят только в одну кинематическую пару. Звено 1 — в пару A , а звено 4 — в пару C в отличие от звеньев 2 и 3, которые входят одновременно в две кинематические пары. Звено 2 — в пары A и B , а звено 3 — в пары B и C .

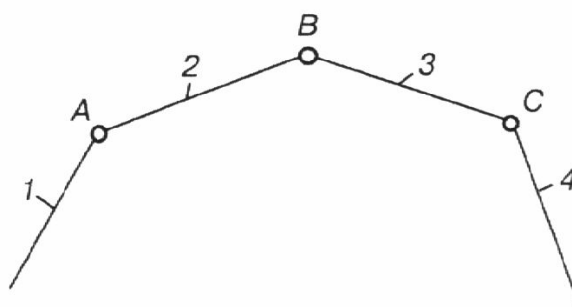


Рис. 1.5

Замкнутая кинематическая цепь есть такая цепь, в которой все звенья входят как минимум в две кинематические пары (рис. 1.6). Так, звено 1 входит в пары O и A , звено 2 — в пары A и B и т.д. Если одно из звеньев данной цепи выполнить неподвижным, а остальные звенья заставить двигаться относительно неподвижного звена, то можно сформулировать параллельное, более строгое определение механизма.

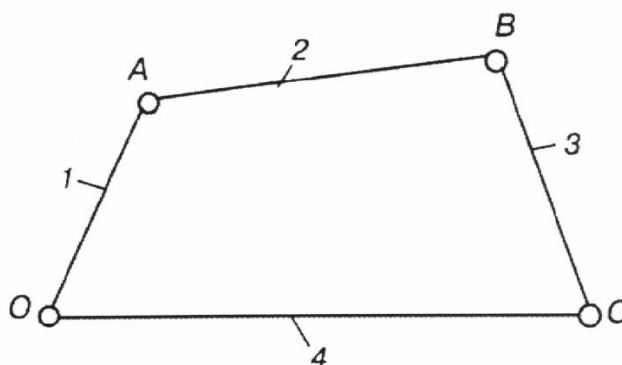


Рис. 1.6

Итак, механизм есть замкнутая кинематическая цепь, предназначенная для преобразования движения одних звеньев в движение других звеньев.

1.2. Степень подвижности механизма

Базируясь на приведенных понятиях и определениях, возможно перейти к изучению конкретных механизмов. Важным параметром любого механизма является *степень его подвижности*, под которой понимается число независимых дви-

жений, которое необходимо сообщить механизму для получения определенности движения всех его звеньев. При исследовании плоских механизмов степень подвижности их W можно определить из следующих соображений: каждое звено механизма, движущееся в плоскости, обладает тремя степенями свободы. Это движения вдоль двух координатных осей и вращения вокруг третьей оси, перпендикулярной плоскости движения механизма. Пусть число подвижных звеньев механизма составляет n , тогда все они будут обладать $3n$ степеней свободы. Полученное значение было бы справедливо при условии независимости движения каждого из звеньев. Но так как все звенья механизма взаимосвязаны между собой посредством кинематических пар, накладывающих определенные ограничения на движения звеньев, то из общего числа степеней свободы необходимо вычесть указанные ограничения. При этом надо иметь в виду, что каждая низшая кинематическая пара в плоскости называется *одноподвижной*, т.е. допускает только одно относительное движение и два движения из трех ограничивает. Следовательно, если в механизме p_H низших кинематических пар, то они наложат $2p_H$ ограничений на общее число $3n$ степеней свободы. Каждая высшая кинематическая пара допускает два относительных движения и одно движение из трех ограничивает. При наличии в механизме p_B высших кинематических пар следует вычесть из общего количества $3n$ степеней свободы p_B ограничений.

Суммируя вышеизложенное, можно записать

$$W = 3n - 2p_H - p_B.$$

Полученная зависимость представляет собой формулу для определения степени подвижности плоского механизма, впервые выведенную П.Л. Чебышевым в 1869 г.

Пример: определить степень подвижности четырехшарнирного (кривошипно-коромыслового) механизма (рис. 1.7). Указанный механизм имеет три подвижных звена $n = 3$ и четыре низшие кинематические пары $p_H = 4$, высших кинема-

тических пар в механизме нет, $p_B = 0$. Подставляя параметры механизма в формулу П.Л. Чебышева, будем иметь

$$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 0 = 1.$$

Полученное значение $W = 1$ свидетельствует о том, что в механизме должно быть лишь одно звено с независимым движением для определенности движения всех его звеньев. Звено с независимым движением в технике называют *ведущим звеном*, а звенья с зависимым движением называют *ведомыми звеньями* механизма. Таким образом, степень подвижности механизма всегда численно равна числу его ведущих звеньев.

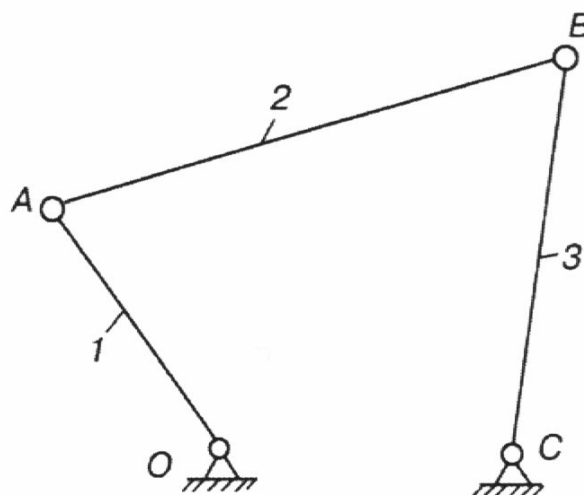


Рис. 1.7

Несколько иначе дело обстоит при определении степени подвижности пространственного механизма, звенья которого совершают движение в различных плоскостях. При этом каждое звено такого механизма обладает шестью степенями свободы и, если их количество в механизме равно n , то все они будут обладать степенью подвижности равной $6n$. Так как все звенья в пространственном механизме могут соединяться посредством кинематических пар любого класса от 1 до 5-го, то каждая из них накладывает соответствующее количество ограничений на относительное движение звеньев, равное числу условий связи в зависимости от класса кинематической пары. Согласно классификации кинематическая пара 1-го класса накладывает одно ограничение, 2-го класса — 2, 3-го класса — 3, 4-го класса — 4, 5-го класса — 5 (см. рис. 1.4). Если в механизме количество кинематических пар каждого класса будет равно: 1-го класса p_1 , 2-го класса p_2 , 3-го класса p_3 , 4-го класса p_4 , 5-го класса p_5 , то из общего числа степеней свободы, равного $6n$, необходимо вычесть количество ограничений, накладываемых кинематическими парами

соответствующего класса. Таким образом, формула для определения степени подвижности пространственного механизма записывается в виде

$$W = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - 1p_1.$$

Эта зависимость впервые, в несколько ином виде, была получена профессором П.И. Сомовым в 1887 году и развита профессором А.П. Малышевым в 1923 году. Она носит название формулы Сомова-Малышева.

При пользовании данной формулой для определения степени подвижности можно получить неожиданный результат.

Пример: определить степень подвижности четырехшарнирного механизма (рис. 1.7), состоящего из трех подвижных звеньев и четырех кинематических пар пятого класса. Подставив значения данных величин в формулу, получим

$$W = 6 \cdot 3 - 5 \cdot 4 - 4 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 1 \cdot 0 = -2.$$

Этот результат свидетельствует о том, что механизм теоретически неработоспособен из-за наличия в нем избыточных (пассивных) связей. Для восстановления его работоспособности ($W = 1$) необходимо устранить три пассивные связи, возникающие вследствие необходимости обеспечения параллельности между собой осей всех четырех кинематических пар данного механизма. Устранить пассивные связи возможно путем подбора класса кинематических пар таким образом, чтобы пропала необходимость обеспечения параллельности осей кинематических пар. Это можно выполнить следующим образом. Используем для данной схемы механизма низшие кинематические пары, т.е. пятого, четвертого и третьего классов. Тогда из формулы Сомова-Малышева получим

$$W = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 = 1$$

$W = 1$ необходимо для обеспечения работоспособности механизма. Подставляя значение $n = 3$ для рассматриваемого механизма, будем иметь

$$5p_5 + 4p_4 + 3p_3 = 6n - 1 = 6 \cdot 3 - 1 = 17.$$

С другой стороны количество кинематических пар механизма должно быть равно 4, или

$$p_5 + p_4 + p_3 = 4,$$

т.е. получили систему двух уравнений с тремя неизвестными, которую можно решить путем подбора. Один из вариантов такого решения можно принять, если выбрать $p_5 = 2$, $p_4 = 1$ и $p_3 = 1$.

Подставляя выбранный вариант кинематических пар в формулу Сомова-Малышева, найдем

$$W = 6 \cdot 3 - 5 \cdot 2 - 4 \cdot 1 - 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 0 = 1.$$

Таким образом, достигнуто условие работоспособности рассматриваемого механизма, в котором полностью устранены имевшие место избыточные связи.

При исследовании и синтезе (проектировании) шарнирно-рычажных механизмов необходимо учитывать особенности их строения. Это важно например при выборе наиболее рациональной схемы механизма для решения конкретной задачи или выбора существующих методов исследования при анализе выполненных механизмов.

1.3. Структурный анализ плоских шарнирно-рычажных механизмов

Впервые научно-обоснованная структурная классификация рычажных механизмов была предложена профессором Леонидом Владимировичем Ассуром в 1914 г. В ее основу положен принцип образования механизмов путем последовательного присоединения сначала к ведущему звену и стойке, а затем к любым другим звеньям кинематических цепей нулевой подвижности. В качестве ведущего звена используется двухзвенный механизм, состоящий из одного подвижного звена и стойки, связанных между собой посредством вращательной или поступательной кинематической пары (рис. 1.8).

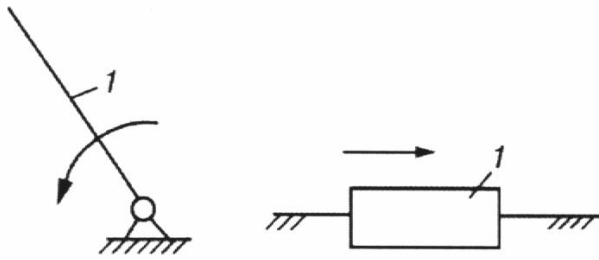


Рис. 1.8

Кинематическая цепь нулевой подвижности представляет собой совокупность звеньев и кинематических пар, степень подвижности которой $W=0$. Соотношение между количеством звеньев и кинематическими парами в этой цепи нетрудно получить из формулы П.Л. Чебышева, приняв в ней количество высших кинематических пар $p_B=0$, так как структура распространяется только на механизмы с низшими парами. Согласно указанной формуле будем иметь

$$W = 3n - 2p_H = 0,$$

откуда

$$p_H = \frac{3}{2}n.$$

Выполняя условие целого числа звеньев и кинематических пар в кинематической цепи нулевой подвижности, получим указанные соотношения.

n	2	4	6	...
p_H	3	6	9	...

Первое из соотношений $n=2$ и $p_H=3$ показано на схемах (рис. 1.9). Каждая из приведенных схем кинематических цепей нулевой подвижности имеет свободные концевые кинематические пары, которыми она присоединяется к ведущему звену и стойке при образовании новых механизмов. Количе-

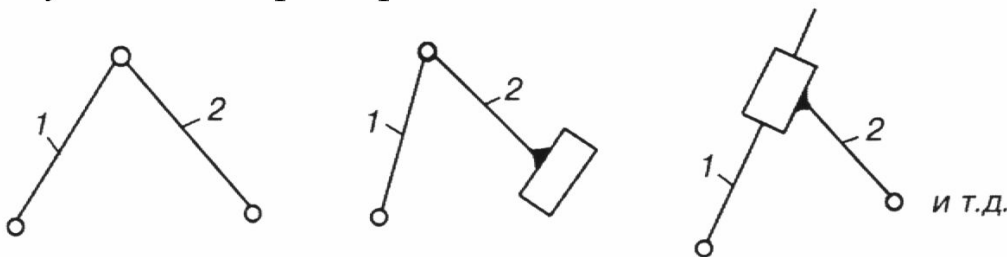


Рис. 1.9

ство присоединяемых цепей теоретически может быть неограниченным. Пример образования новых механизмов показан на схеме (рис. 1.10).

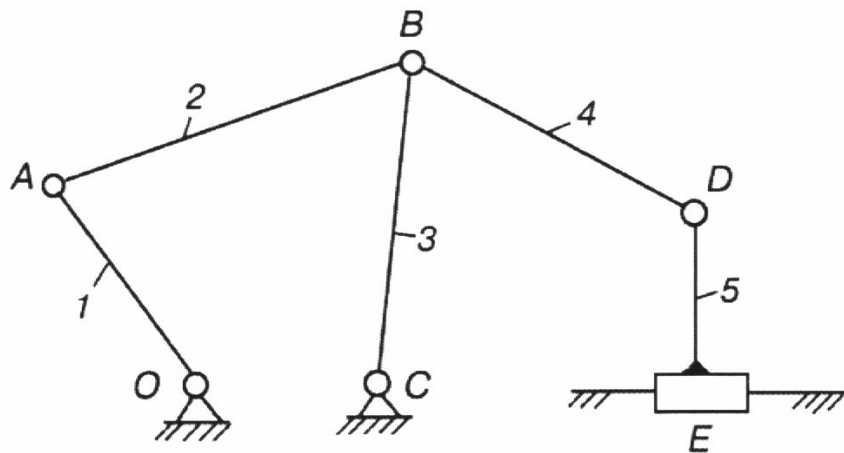


Рис. 1.10

Ведущее звено механизма Л.В. Ассуром отнесено к первичным механизмам, к механизмам I класса первого порядка. Кинематические цепи нулевой подвижности, составленные из двух звеньев и трех низших кинематических пар относятся к цепям второго порядка и соответственно механизмы, образованные из ведущего звена и кинематической цепи второго порядка будут относиться к механизмам I класса второго порядка.

Кинематическая цепь нулевой подвижности, составленная из четырех звеньев и шести низших кинематических пар, схематично представленная на рис. 1.11, отнесена к цепям тре-

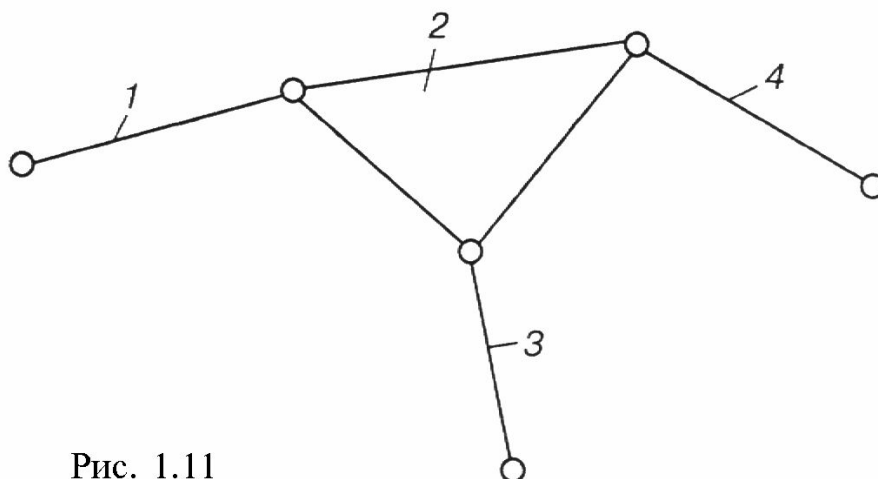


Рис. 1.11

твого порядка. Аналогично механизмы, образованные из ведущего звена и кинематической цепи третьего порядка относятся к механизмам I класса третьего порядка (рис. 1.12).

В ходе развития идей Л.В. Ассура о классификации шарнирно-рычажных механизмов академиком И.И. Артоболевским предложена несколько иная классификация, в которой порядок кинематических цепей нулевой подвижности предлагается заменить классом кинематических цепей. Кинематическая цепь второго порядка заменяется кинематической цепью второго класса, третьего порядка — третьего класса ... и т.д., таким образом, по И.И. Артоболевскому классификация механизмов получается более стройной. Например, если механизм образован из ведущего звена (механизм I класса) и кинематической цепи нулевой подвижности II класса, то он будет относиться к механизмам II класса, т.е. класс механизма определяется наивысшим классом кинематической цепи нулевой подвижности в составе этого механизма. По классификации И.И. Артоболевского удобно составить формулу строения механизма, отражающую структурные компоненты механизма. Если, например, механизм составлен из ведущего звена (механизма I класса) и кинематической цепи нулевой подвижности (одной или нескольких) II класса, то формула строения запишется в виде (рис. 1.10)

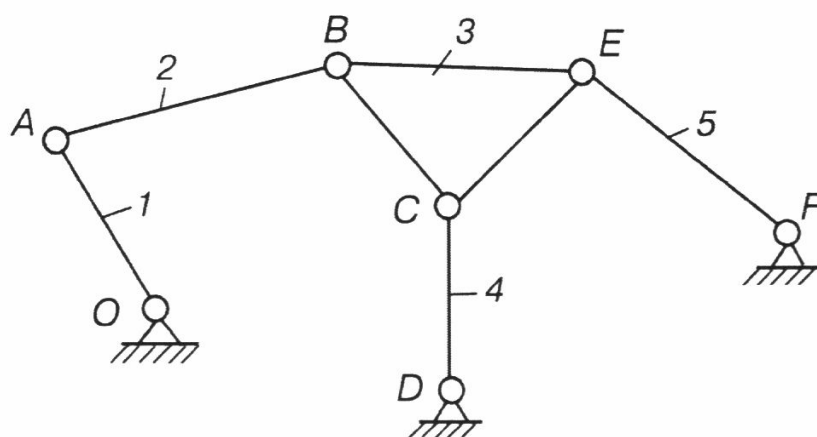


Рис. 1.12

$$I(1) \rightarrow (2,3) \rightarrow II(4,5) \rightarrow \dots$$

Аналогично для механизма, показанного на схеме (рис. 1.12), формула строения имеет вид

$$I(1) \rightarrow III(2,3,4,5) \rightarrow \dots\dots\dots$$

Согласно первой формуле строения механизм относится ко II классу, а согласно второй — к III классу. Надо отметить, что в практике наибольшее применение имеют механизмы II класса, которые составляют порядка 95% из всех существующих, и лишь около 5% применяемых механизмов относятся к III и более высокому классам.

Следует обратить внимание на одну особенность механизмов по классификации Ассура-Артоболевского. Согласно этой классификации класс механизма зависит от выбора ведущего звена. Для большинства механизмов II класса выбор ведущего звена не изменяет класс механизма, но механизмы III класса могут понижать класс в зависимости от выбранного ведущего звена. Так, например, механизм III класса (рис. 1.12) может понизить класс, если выбрать в качестве ведущего звена 4 или 5. При этом формула строения записывается в виде

$$I(4) \rightarrow II(3,5) \rightarrow II(2,1),$$

или

$$I(5) \rightarrow II(3,4) \rightarrow II(2,1).$$

Этим обстоятельством пользуются в ряде случаев при проведении кинематического и силового анализа механизмов.

Пример: составить формулу строения и определить класс механизма, изображенного на схеме (рис. 1.13).

Для ответа на поставленный вопрос необходимо выбрать ведущее звено механизма.

При ведущем звене 1 механизм распадается на структурные цепи нулевой подвижности 2–3, 4–5 и 6–7.

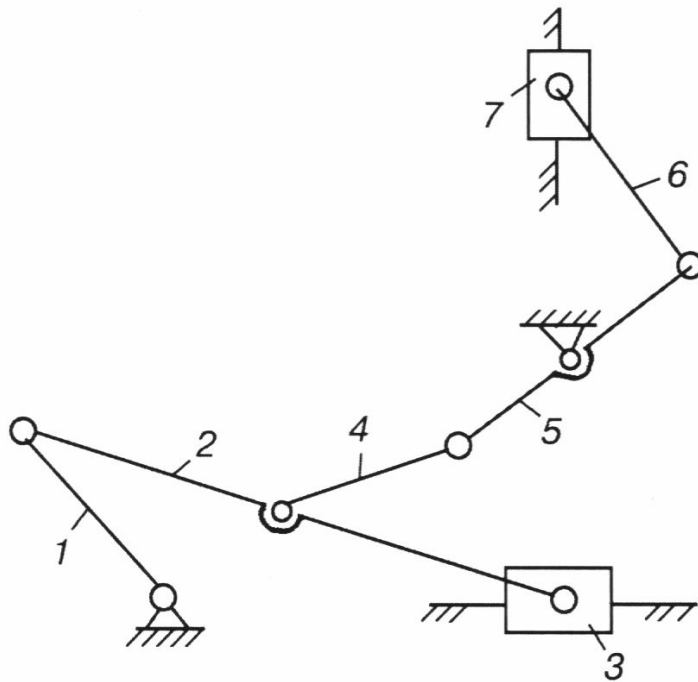


Рис. 1.13

Формула строения записывается в виде

$$I(1) \rightarrow II(2,3) \rightarrow II(4,5) \rightarrow II(6,7).$$

Следовательно, механизм нужно отнести ко II классу. Если за ведущее принять звено 3, то формула строения примет вид

$$I(3) \rightarrow II(2,1) \rightarrow II(4,5) \rightarrow II(6,7).$$

Механизм также будет II класса.

При ведущем звене 5 формула строения примет вид

$$I(5) \rightarrow III(2,1) \rightarrow II(4,3,2,1) \rightarrow II(6,7).$$

Механизм станет III класса.

При ведущем звене 7

$$I(7) \rightarrow II(6,5) \rightarrow III(4,3,2,1).$$

Механизм также будет относиться к III классу.

1.4. Кинематическое исследование шарнирно-рычажных механизмов

Во многих случаях практики кинематическое исследование механизмов предшествует их синтезу (проектированию). Необходимость проведения такого анализа диктуется выбором, оптимальных параметров создаваемого механизма, а в ряде случаев данное исследование проводится с целью проверки соответствия выполненных механизмов их заданным характеристикам. При кинематическом исследовании ставится задача определить закон движения ведомых звеньев механизма при заданном движении ведущего звена и оценить полученные результаты для последующего использования. Определение кинематических параметров производится на основе положений теоретической механики, устанавливающей функциональные зависимости для различных видов движения материальных тел.

В теории механизмов известно несколько способов кинематического исследования: аналитический, графический, экспериментальный, с использованием ЭВМ. Причем приведенные из них могут иметь свои подходы: например аналитический способ может выполняться путем составления математических зависимостей между входными и выходными параметрами механизма, или составлением векторных уравнений для замкнутого контура механизма; графический способ может быть выполнен методом планов, повернутых планов, кинематических диаграмм и т.д. Каждый из применяемых способов обладает своими особенностями: либо громоздкостью математических вычислений, либо недостаточной точностью получаемых результатов, либо составлением программы для выполнения расчета на ЭВМ, либо наличием специального оборудования для исследования выполненных механизмов в лабораторных условиях и т.п.

Для учебных целей наиболее простым и наглядным является графический метод кинематического исследования, основанный на составлении и графическом решении векторных

уравнений, устанавливающих зависимость между заданными и искомыми параметрами механизма. При тщательном выполнении графических построений можно получить результат с достаточной степенью точности (до 5%). При определении кинематических параметров механизма необходимо знать характер движения его звеньев. В плоском механизме каждое звено его может совершать одно из трех видов движения: поступательное, вращательное или плоско-параллельное. Давая характеристику каждому из трех видов движения можно отметить следующее:

1. *Поступательным* называется такой вид движения, при котором любая прямая, проведенная на твердом теле, остается при движении параллельной своему первоначальному положению. Все точки движущегося тела имеют одинаковые траектории, скорости и ускорения. Если на теле взять две точки A и B , то согласно определению скорости $V_B = V_A$; ускорения $a_B = a_A$; угловая скорость $\omega = 0$; угловое ускорение $\varepsilon = 0$.
2. *Вращательным* называется такой вид движения, при котором некоторая прямая ось вращения остается неподвижной, а все остальные точки движутся по окружности с центром на оси вращения. Если вращение тела происходит с угловой скоростью ω , то линейная скорость точки, отстоящей от оси вращения на расстоянии l_{OA} , будет равна

$$V_A = \omega \cdot l_{OA} \text{ (м/с)}.$$

Полное ускорение точки A будет равно сумме двух составляющих (нормальной a_A^n , направленной по радиусу к центру вращения и тангенциальной a_A^t , направленной перпендикулярно радиусу вращения).

При этом $a_A^n = \omega^2 l_{OA}$ и $a_A^t = \varepsilon l_{OA}$, и, соответственно, $\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^t$.

3. *Плоско-параллельным* называется такое движение, при котором каждая точка тела движется в плоскости, параллельной неподвижной плоскости, совершая поступатель-

ное движение вместе с полюсом и одновременно поворачиваясь вокруг полюса. Таким образом, приняв за полюс т. A , скорость т. B определяется по уравнению

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}.$$

Аналогичным образом определяется ускорение a_B :

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}.$$

При решении практических задач нередко возникает необходимость использовать зависимость между кинематическими параметрами двух совпадающих точек, принадлежащих различным звеньям. Это имеет место при исследовании кулисных механизмов. Для составления зависимости между скоростями и ускорениями двух совпадающих точек рассмотрим схему кулисной пары (рис. 1.14). При определении кинематических параметров т. A_2 ползуна составляется векторное уравнение для скоростей и ускорений двух совпадающих точек A_1 и A_2 . Точка A_1 находится в плоскости, проведенной через направляющую l . Приняв движение точки A_1 за переносное, точки A_2 за абсолютное, а точки A_2 , относительно A_1 за относительное, уравнение будет иметь:

$$\vec{V}_{A_2} = \vec{V}_{A_1} + \vec{V}_{A_2A_1}.$$

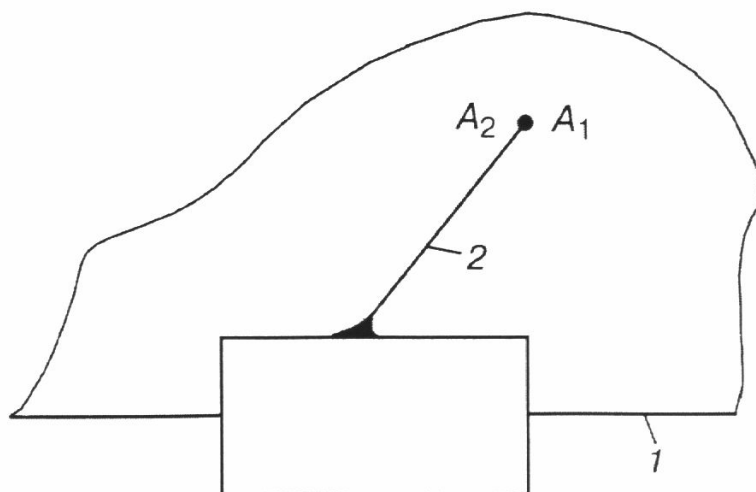


Рис. 1.14

Аналогичное уравнение запишется для ускорений

$$\bar{a}_{A_2} = \bar{a}_{A_1} + \bar{a}_{A_2A_1}^t.$$

где $\bar{a}_{A_2A_1}^t$ — относительное ускорение.

Составленное уравнение для ускорений справедливо при условии поступательного движения или неподвижности направляющей (кулисы) 1. Если направляющая при движении поворачивается, то появляется добавочное (поворотное) ускорение $a_{A_2A_1}^k$, известное в литературе как ускорение Кориолиса.

Ускорение Кориолиса известно по модулю и направлению:

$$a_{A_2A_1}^k = 2V_{A_2A_1} \cdot \omega_1.$$

Направление определяется по правилу Жуковского поворотом вектора относительной скорости $V_{A_2A_1}$ в сторону вращения кулисы ω_1 .

Пример: произвести кинематическое исследование кривошипно-ползунного механизма (рис. 1.15).

Дано: положение ведущего звена φ_1^0 ; $\omega_1 = \text{const}$, размеры звеньев механизма.

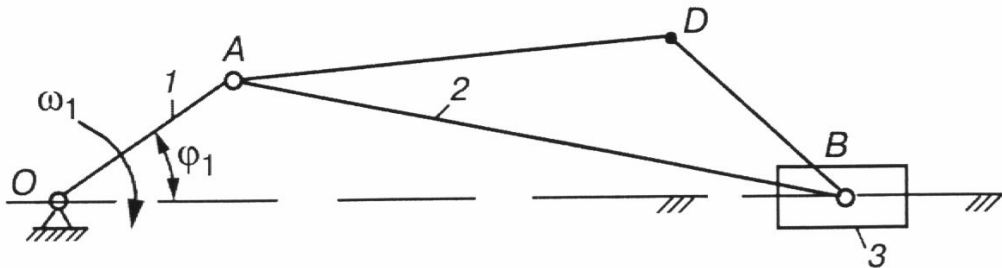


Рис. 1.15

По исходным данным вычерчивается кинематическая схема механизма в масштабе (план механизма). Под масштабом будем понимать число единиц изображаемой величины в одном мм чертежа. Пусть заданный размер кривошипа l_{OA} (м) изображен на чертеже отрезком OA (мм). Тогда масштаб

$$K_l = \frac{l_{OA} \text{ м}}{OA \text{ мм}}.$$

Изображая кривошип OA под заданным углом φ_1^0 , найдем положение шатуна AB засечкой на траектории движения ползуна. Чертежный размер шатуна определим по выбранному масштабу:

$$A_B = \frac{l_{AB}}{K_l} \text{ мм.}$$

Аналогичным образом (методом засечек) строится треугольник на шатуне (т. D), размеры ползуна не заданы, и он вычерчивается условно (произвольных размеров). По вычерченной схеме определяется вид движения каждого из звеньев. Нетрудно сообразить, что ведущее звено совершает вращательное движение, шатун — плоско-параллельное и ползун — поступательное. Определение линейных скоростей начинается с ведущего звена. Скорость точки A кривошипа

$$V_A = \omega_1 \cdot l_{OA} \text{ м/с.}$$

Точка A принадлежит одновременно двум звеньям 1 и 2, а точка B тоже принадлежит двум звеньям 2 и 3. Таким образом, можно считать, что точки A и B принадлежат одному звену 2. Для определения скорости т. B достаточно составить векторное уравнение

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA},$$

где V — искомая абсолютная скорость;

V_A — переносная и V_{BA} — относительная.

Решение векторного уравнения выполняется графически, если неизвестных в нем не более двух. Так как вектор характеризуется двумя параметрами: модулем и направлением, то в приведенном уравнении два неизвестных; V_A — известно по модулю и направлению (перпендикулярно OA), V_{BA} — по направлению (перпендикулярно AB) и V_B — по направлению (параллельно OB). Выбрав произвольный масштаб, строим план скоростей.

Пусть скорость V_A (м/с) будет отложена на чертеже отрезком Pa (мм), тогда масштаб построения

$$K_v = \frac{V_A \text{ м/с}}{Pa \text{ мм}}$$

Решение векторного уравнения выполняется по правилу сложения векторов. Отложив из произвольно выбранной точки P (полнос) отрезок Pa , изображающий в масштабе скорость V_A согласно ее направлению (OA), проводим из конца построенного следующий вектор V_{BA} , известный только по направлению. Построенная (неполно) сумма векторов должна быть равна суммарному вектору V , который также должен выходить из полюса согласно своему направлению. Пересечение направлений векторов V_B и V_{BA} дает решение векторного уравнения. Обозначив точку пересечения буквой b , получим, что отрезок Pb изображает в масштабе скорость V_B , а отрезок ab — V_{BA} . Найдем модули найденных скоростей (рис. 1.16, а).

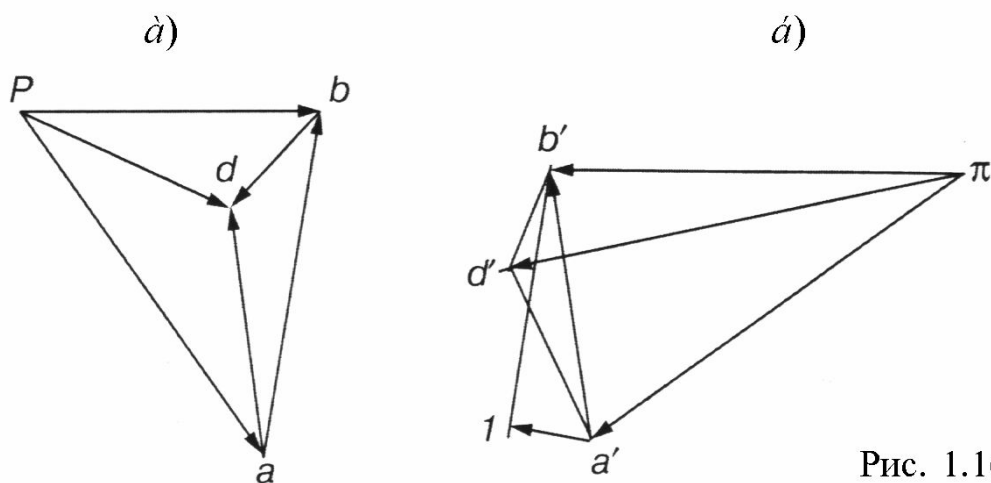


Рис. 1.16

$$V_B = Pb(\text{мм}) \cdot K_V \frac{\text{м/с}}{\text{мм}};$$

$$V_{BA} = ab(\text{мм}) \cdot K_V \frac{\text{м/с}}{\text{мм}}.$$

Направление их определяется согласно векторному уравнению.

Для определения скорости V_D также составляется векторное уравнение, точка D принадлежит звену 2, скорость V_D можно выразить через скорость V_A

$$\bar{V}_D = \bar{V}_A + \bar{V}_{DA}.$$

Однако в данном уравнении три неизвестных параметра. Полностью неизвестна скорость V_D (по модулю и направлению) и V_{DA} (по модулю). Таким образом, решить это уравнение графически невозможно. Для определения V_D следует составить дополнительное уравнение, выразив скорость V_D через скорость точки B

$$\bar{V}_D = \bar{V}_B + \bar{V}_{DB}.$$

В этом уравнении также неизвестны три параметра, но если объединить оба уравнения в систему, то решение их возможно.

$$\bar{V}_B = \bar{V}_{DB} = \bar{V}_A + \bar{V}_{DA}.$$

В приведенном уравнении два неизвестных: модуль скорости V_{DB} и модуль V_{DA} . Решение этого уравнения показано на плане (рис. 1.16, а).

Модуль скорости V_D соответственно определяется

$$V_D = Pd \cdot K_V \text{ м/с.}$$

Построенный план скоростей отражает некоторые закономерности.

1. Все векторы абсолютных скоростей точек исходят из полюса (V_A, V_B, V_D), все векторы относительных скоростей точек проходят вне полюса (V_{BA}, V_{DA}, V_{DB}).
2. Фигуры, образуемые на плане скоростей, подобны фигурам на плане механизма.

Так, например, Δabd на плане скоростей подобен ΔABD на плане механизма вследствие взаимной перпендикулярности сторон. Свойство подобия удобно использовать при определении скоростей любых необозначенных (промежуточных) точек механизма, не прибегая к составлению и решению векторных уравнений. Для определения скорости V_D достаточно составить две пропорции:

$$\frac{ad}{AD} = \frac{ab}{AB} \quad \text{и} \quad \frac{bd}{BD} = \frac{ab}{AB},$$

из которых находим

$$ad = ab \frac{AD}{AB} \quad \text{и} \quad bd = ab \frac{BD}{AB}.$$

Отрезок ab замеряется на плане скоростей, а отрезки AD, BD, AB снимаются с плана механизма.

Засечками радиусами ad и bd из точек a и b плана скоростей определяется положение точки d . При этом необходимо следить, чтобы вершина d треугольника adb на плане скоростей находилась с той стороны отрезка ab , чтобы выполнялась последовательность обхода вершин треугольника на плане скоростей и на плане механизма.

Определение угловых скоростей звеньев производится с использованием относительных скоростей точек. Так, для определения угловой скорости шатуна ω_2 достаточно знать относительную скорость V_{BA} . Тогда

$$\omega_2 = \frac{V_{BA}}{l_{BA}} 1/c.$$

Направление угловой скорости ω_2 совпадает с направлением относительной линейной скорости V_{BA} , перенесенной с плана скоростей в точку B механизма. В рассматриваемом примере ω_2 будет направлена против движения часовой стрелки, $\omega_3 = 0$ (звено 3 совершает поступательное движение).

Определение ускорений производится по аналогии с определением скоростей, начиная с ведущего звена.

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau.$$

При этом

$$a_A^n = \omega_1^2 \cdot l_{OA} = \frac{V_A^2}{l_{OA}} \text{ м/с}^2;$$

$$a_A^\tau = \varepsilon_1 \cdot l_{OA} = \frac{d\omega_1}{dt} \cdot l_{OA} = 0 \cdot l_{OA} = 0,$$

так как принято, что $\omega_1 = \text{const}$. Для определения ускорения точки B , составляется аналогичное векторное уравнение

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}.$$

Однако решить уравнение в приведенном виде нельзя, так как неизвестных в нем более двух. С этой целью удобнее представить это уравнение в развернутом виде, разложив каждый вектор на два составляющих. Тогда будем иметь

$$\bar{a}_B^n = \bar{a}_B^\tau = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau,$$

принимая во внимание, что $a_A^\tau = 0$ и $a_B^n = 0$ (при поступательном движении точки нормальное ускорение отсутствует). Следовательно, уравнение переписывается в виде

$$\bar{a}_B^\tau = \bar{a}_A^n + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau.$$

В этом уравнении известно a_A^n — по модулю и направлению, a_{BA}^n — по модулю и направлению, a_{BA}^c — по направлению, a_B^c — по направлению. Его можно решить графически, поскольку в нем два неизвестных. Определяем по модулю

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot l_{AB} = \frac{V_{BA}^2}{l_{AB}}$$

Строим план ускорений. Для этого выбираем масштаб построения. Пусть ускорение a_A^n (м/с²) будет отложено на чертеже отрезком $\pi a'$ (мм), тогда масштаб построения

$$K_a = \frac{a_A^n \text{ м/с}^2}{\pi a' \text{ мм}}$$

Выбрав произвольное положение полюса π , откладываем из него вектор a_A^n (равный на чертеже отрезку $\pi a'$). Направление его параллельно положению кривошипа от точки A к центру вращения O . Из конца предыдущего откладываем следующий вектор a_{BA}^n , равный на чертеже отрезку ($1a'$)

$$1a' = \frac{a_{BA}^n}{K_a} \text{ мм}$$

и направленный параллельно звену AB от точки B к точке A . Затем откладывается последующий вектор a_{BA}^c из конца предыдущего, известный только по направлению (перпендикулярно шатуну AB). Построенная неполная сумма векторов должна быть равна суммарному вектору a_B^c , исходящему из полюса и направленному параллельно линии движения ползуна OB . Пересечение направлений векторов a_{BA}^c и a_B^c дает решение векторного уравнения. Точка пересечения обозначается буквой b' , а отрезок $\pi b'$ в масштабе соответствует ускорению a_B^c (м/с²), (рис. 1.16, б).

$$a_B^c = \pi b' (\text{мм}) K_a \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}$$

Ускорение a_{BA}^{τ} будет пропорционально отрезку $1b'$ и равно $a_{BA}^{\tau} = 1b' - K_a \text{ м/с}^2$.

Относительное ускорение a_{BA} будет равно

$$a_{BA} = a'b' - K_a \text{ м/с}^2.$$

Для определения ускорения a_D достаточно воспользоваться свойством подобия, которое распространяется на план ускорений. Составим пропорции

$$\frac{a'd'}{AD} = \frac{a'b'}{AB} \quad \text{и} \quad \frac{b'd'}{BD} = \frac{a'b'}{AB},$$

откуда находим

$$a'd' = a'b' \frac{AD}{AB} \quad \text{и} \quad b'd' = a'b' \frac{BD}{AB}.$$

Отрезок $a'b'$ замеряется на плане ускорений, а отрезки AD , BD , AB берутся с плана механизма. Затем засечками радиусами $a'd'$ и $b'd'$ из точек a' и b' находится положение точки d' с учетом соответственного обхода вершин треугольников $a'b'd'$ и ADB .

Найденное положение точки d' на плане ускорений соединяется с полюсом, и ускорение a_D определится:

$$a_D = \pi d' - K_a \text{ м/с}^2.$$

Определение угловых ускорений звеньев производится по относительным тангенциальным ускорениям точек.

Для ускорения ϵ_2 нужно знать a_{BA}^{τ} :

$$\epsilon_2 = \frac{a_{BA}^{\tau}}{l_{AB}} 1/c^2.$$

Направление ϵ_2 совпадает с направлением вектора a_{BA}^{τ} , перенесенным с плана ускорений в точку B механизма. В дан-

ном примере оно будет совпадать с направлением движения против часовой стрелки.

Угловое ускорение звена 3

$$\varepsilon_3 = 0.$$

так как ползун 3 совершает поступательное движение. Рассмотренный пример показывает, что кинематический анализ механизма весьма трудоемкая задача и требует значительных затрат времени на его проведение даже для сравнительно простых механизмов. Кроме того, надо учитывать и то обстоятельство, что для полной оценки кинематической характеристики механизма необходимо располагать данными за цикл движения механизма, т.е. за полный оборот кривошипа. В этом случае следует определить кинематические параметры для нескольких положений механизма (6-, 12- или 24-х) и построить закон их изменения. Для выполнения этой задачи целесообразно использовать более совершенные методы исследования, например с применением ЭВМ или с привлечением экспериментальных методов в лабораторных условиях для выполненных механизмов.

Глава 2

РАЗЛИЧНЫЕ МЕТОДЫ КИНЕМАТИЧЕСКОГО ИССЛЕДОВАНИЯ МЕХАНИЗМОВ

2.1. Метод повернутых планов

В практике кинематического анализа механизмов нередко используют и другие методы исследования. Наиболее удобным из них является метод повернутых планов в принужденном масштабе. Сущность его заключается в том, что в качестве полюса выбирается центр вращения кривошипа и планы скоростей и ускорений строятся непосредственно на плане механизма. При этом векторы скоростей поворачиваются на 90° против вращения кривошипа, а векторы ускорений сохраняют свое действительное направление. Сам метод легко проиллюстрировать на конкретном механизме. Возьмем в качестве примера кривошипно-ползунный механизм (рис. 2.1). Пусть ведущее звено l вращается с заданной угловой скоростью $\omega_1 = \text{const}$, направленной по часовой стрелке. Тогда линейная скорость точки A определится по модулю как

$$V_A = \omega_1 \cdot l_{OA}.$$

Для определения линейной скорости точки B воспользуемся векторным уравнением, выражающим зависимость между скоростями двух точек для звена, совершающего плоскопараллельное движение. На основе сказанного

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA},$$

где V_A — вектор скорости A , известный по модулю и направлению;
 V_{BA} — вектор скорости точки B относительно точки A , известной только по направлению;
 V_B — вектор скорости точки B , известной только по направлению.

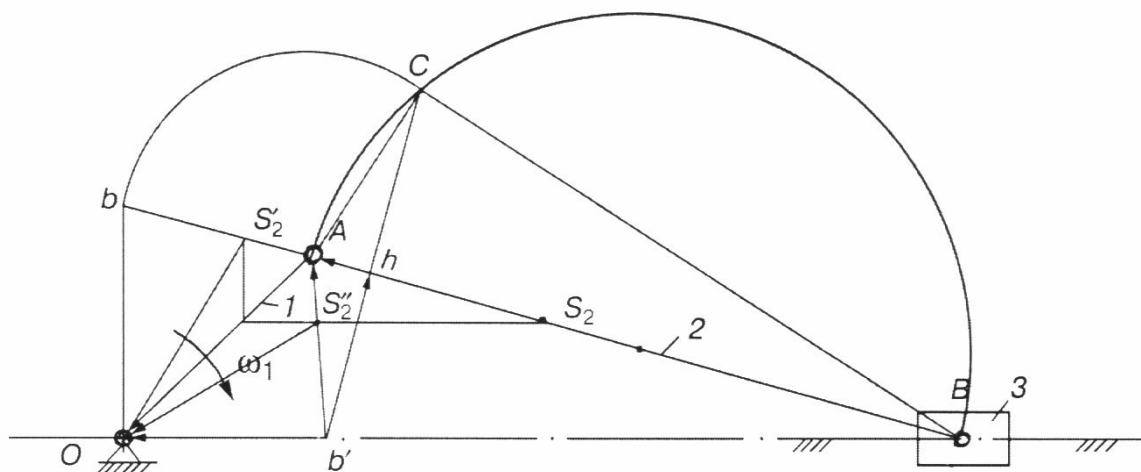


Рис. 2.1

Решение этого уравнения произведем графически, т.е. построим план скоростей. При этом полюс плана выберем совпадающим с центром вращения кривошипа — в точке O . Вектор скорости \vec{V}_A отложим из полюса не перпендикулярно кривошипу, а повернем его на 90° противоположно вращению кривошипа, т.е. совпадающим с направлением кривошипа. При этом отрезок на плане, пропорциональный скорости V_A , примем равным чертежной длине кривошипа. План механизма построен в масштабе K_l , следовательно масштаб плана скоростей определим из условия: V_A м/с соответствует OA мм:

или

$$K_V = \frac{V_A}{OA} = \frac{\omega_1 \cdot l_{OA}}{OA} = \frac{\omega_1 \cdot OA \cdot K_l}{OA} = \omega_1 \cdot K_l \frac{\text{м/с}}{\text{мм}}$$

Таким образом, построение плана скоростей будет выполнено в принужденном масштабе. Отложив первый вектор правой части уравнения V_A , откладываем второй вектор правой части уравнения V_{BA} , известный только по направлению, но не перпендикулярно звену AB , а ему параллельно, т.е. в нашем случае с ним совпадающий. Вектор левой части уравнения V_B , также известный только по направлению, отклады-

ваем из полюса, но не параллельно движению ползуна, а ему перпендикулярно до пересечения в точке b (см. рис. 2.1). Построенный треугольник ObA представляет собой повернутый на 90° план скоростей. Для определения модуля действительных скоростей найдем

$$V_B = Ob \cdot K_V \left(\text{мм} \cdot \frac{1}{\text{с}} \cdot \frac{\text{м}}{\text{мм}} \right);$$

$$V_{BA} = Ab \cdot K_V \text{ м/с.}$$

Таким образом, для построения плана скоростей кривошипно-ползунного механизма в любом положении кривошипа достаточно продлить линию звена AB до пересечения с перпендикуляром, проведенным через точку O кривошипа к линии движения ползуна.

Для определения скорости любой промежуточной точки шатуна AB используется свойство подобия фигур плана скоростей и плана механизма. Например, для скоростей точки $S_2 - V_{S_2}$ достаточно разделить отрезок относительной скорости Ab в таком же отношении, в котором точка S_2 делит длину звена AB . Это деление можно выполнить графически. Проведя через точку S_2 прямую, параллельную линии движения ползуна до пересечения с кривошипом OA , и через полученную точку затем линию, перпендикулярную движению ползуна до пересечения с отрезком относительной скорости Ab , получим точку S'_2 . Отрезок Os'_2 будет пропорционален скорости V_{S_2} . Модуль этой скорости определяется по аналогии:

$$V_{S_2} = Os'_2 \cdot K_V \text{ м/с.}$$

Определение ускорений также можно произвести с помощью плана в принужденном масштабе. При этом ускорение точки A будет состоять только из нормальной составляющей, так как кривошип вращается с постоянной угловой скоростью

$$a_A^n = \omega_1^2 \cdot l_{OA} \text{ м/с}^2.$$

Для определения линейного ускорения точки B составляется векторное уравнение на основе зависимости искомого параметра от заданного при плоско-параллельном движении звена AB :

$$\bar{a}_B^1 = \bar{a}_A^n + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^t,$$

где \bar{a}_A^n — вектор нормального ускорения точки A , известный по модулю и направлению;

\bar{a}_{BA}^n — вектор нормального ускорения точки B относительно A , известный по модулю и направлению;

\bar{a}_{BA}^t — вектор тангенциального ускорения точки B относительно A , известный только по направлению;

\bar{a}_B^t — вектор тангенциального ускорения точки B , известный только по направлению.

Решается это уравнение также графически, построением плана ускорений. Полус плана выберем совпадающим с центром вращения кривошипа — в точке O . Вектор ускорения a_A^n отложим по направлению кривошипа и примем равным длине кривошипа, тогда масштаб плана определяется:

$$K_a = \frac{a_A^n}{OA} = \frac{\omega_1^2 \cdot l_{OA}}{OA} = \frac{\omega_1^2 \cdot OA \cdot K_l}{OA} = \omega_1^2 \cdot K_l \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}.$$

Построение плана ускорений выполним также в принужденном масштабе.

Первый вектор правой части уравнения a_A^n , равный отрезку OA кривошипа, направим к полюсу O . В отличие от плана скоростей план ускорений будет не повернут и все векторы уравнения будут не исходить из полюса, а сходиться в

полюсе. Далее второй вектор уравнения a_{BA}^n следует пристроить в начало предыдущего вектора, причем модуль его определится по формуле

$$a_{BA}^n = \frac{V_{BA}^2}{l_{BA}}.$$

Выразим это выражение через отрезки чертежа:

$$Z_{BA}^n \cdot K_a = \frac{Ab^2 K_V^2}{BA \cdot K_l}.$$

Отрезок нормального ускорения Z_{BA}^n будет равен

$$Z_{BA}^n = \frac{Ab^2}{BA},$$

если масштаб K_a будет равным $\frac{K_V^2}{K_l}$. Подставляя в отношение масштабов их значения, получим

$$\frac{K_V^2}{K_l} = \frac{\omega_1^2 K_l^2}{K_l} = \omega_1^2 K_l,$$

что соответствует значению принужденного масштаба ускорений. Длину отрезка Z_{BA}^n нетрудно определить из следующих построений, если формулу для его расчета представить в виде пропорции

$$\frac{Z_{BA}^n}{Ab} = \frac{Ab}{BA}.$$

Последнее соотношение возможно выполнить графически непосредственно на плане механизма. Для этого на отрезке

длины звена AB вычерчивается полуокружность, на которой радиусом отрезка Ab из точки A делается засечка (точка C), и из нее на AB опускается перпендикуляр, отсекающий отрезок An равный отрезку Z_{BA}^n . Справедливость указанного утверждения следует из подобия треугольников ΔAnC и ΔCbA , являющихся прямоугольными и имеющих одинаковый угол при вершине A . Из последнего следует отношение

$$\frac{An}{AC} = \frac{AC}{AB} \quad \text{или} \quad \frac{Z_{BA}^n}{Ab} = \frac{Ab}{AB}.$$

Третий вектор правой части уравнения a_{BA}^t , известный по направлению, пристраивается в хвост отрезку Z_{BA} в точке n . Он будет являться продолжением перпендикуляра, опущенного из точки C на длину отрезка AB . Сумма трех векторов правой части уравнения равна суммарному вектору левой части уравнения a_B^t , направленному параллельно движению ползуна, т.е. горизонтально. Проводя эту прямую через полюс O до пересечения с продолжением перпендикуляра Cn в точке b' , получим решение векторного уравнения. Построенный многоугольник $OAnb'$ представляет собой план ускорений, в котором стороны его пропорциональны указанным в уравнении ускорениям. Направления ускорений показаны на плане согласно векторному уравнению. Модули искомых ускорений определяются согласно построенному плану ускорений:

$$a_B^t = Ob' \cdot K_a \left(\frac{\text{мм}}{\text{мм}} \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}} \right)$$

$$a_{BA} = Ab' \cdot K_a \text{ м/с}^2.$$

$$a_{BA}^n = An \cdot K_a \text{ м/с}^2.$$

$$a_{BA}^t = b'n \cdot K_a \text{ м/с}^2.$$

Для определения ускорений промежуточных точек используется свойство подобия. Так, например, для определения ускорения a_{S_2} достаточно через точку S_2 на звене AB провести прямую, параллельную линии движения ползуна до пересечения с отрезком Ab' в точке s_2'' . Соединяя последнюю с полюсом O , получим отрезок Os_2'' , пропорциональный ускорению a_{S_2} . Модуль этого ускорения определяется по аналогии:

$$a_{S_2} = Os_2'' \cdot K_a \text{ м/с}^2.$$

Аналогичный прием кинематического исследования можно применить и для рычажных механизмов других схем.

2.2. Метод кинематических диаграмм

В ряде случаев для более грубой оценки закона движения ведомого звена механизма применяется кинематическое исследование методом кинематических диаграмм. Он заключается в том, что первоначально записывается или вычерчивается путем построения закона движения одного из параметров, например, перемещение, скорость или ускорение ведомого звена механизма. Затем последовательным дифференцированием или интегрированием строятся графики остальных параметров движения. Рассмотрим в качестве примера тот же кривошипно-ползунный механизм (рис. 2.2, *a*). Для заданной схемы несложно построить закон перемещений ползуна за цикл движения ведущего звена. Он строится в координатах S_B, φ , т.е. по горизонтальной оси откладывается угол поворота кривошипа φ или время его движения t и по вертикальной оси — перемещение ползуна S_B (рис. 2.2, *б*). При этом масштабы по координатным осям выбираются произвольно. Масштаб K_l может быть принят равным масштабу плана механизма или измененным в сторону увеличения или уменьшения. Масштаб углов поворота K_φ вычисляется:

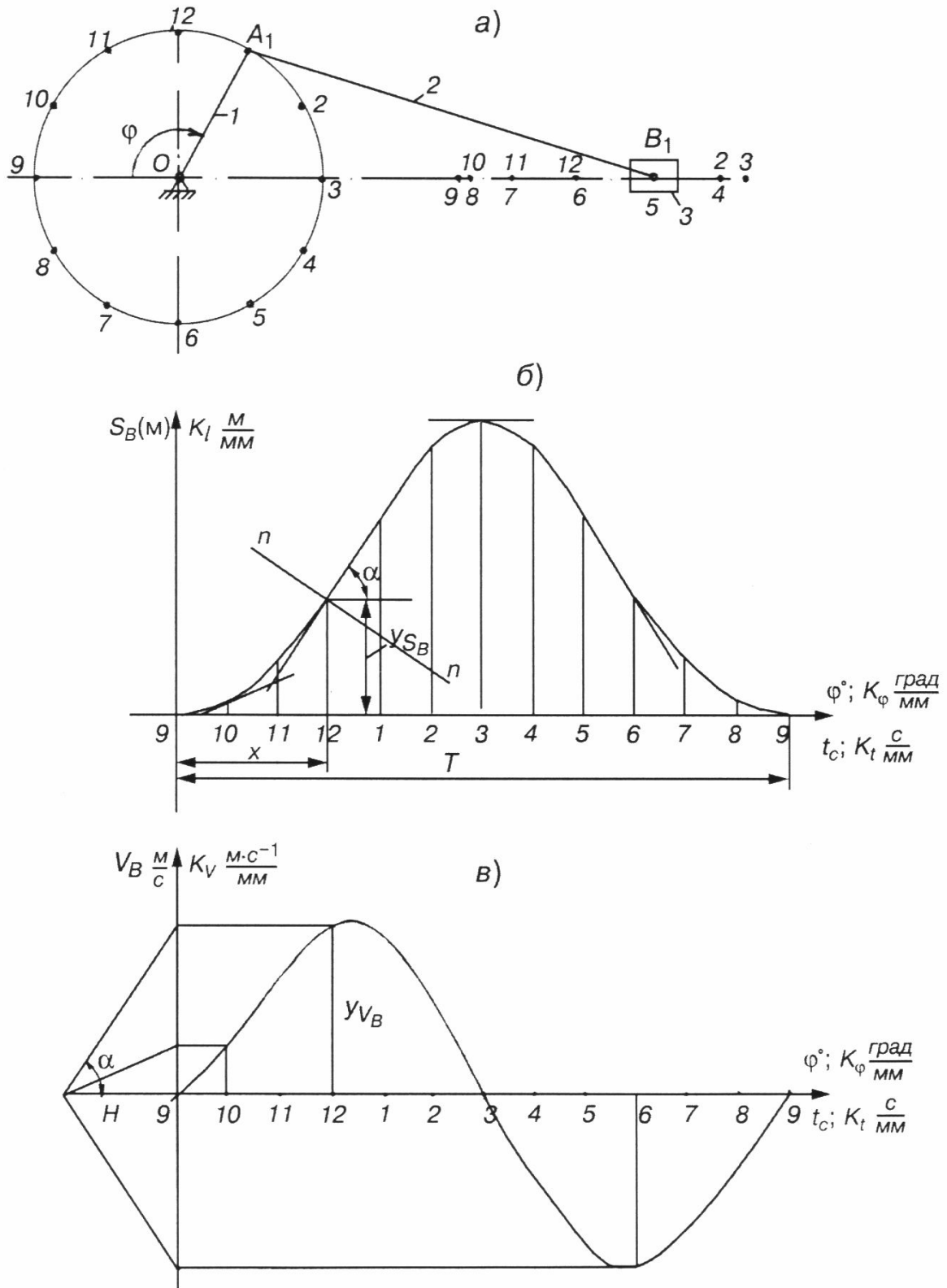


Рис. 2.2

$$K_{\varphi} = \frac{360 \text{ град}}{T \text{ мм}} \quad \text{или} \quad K_{\varphi} = \frac{2\pi \text{ рад}}{T \text{ мм}},$$

360° — угол, соответствующий одному обороту кривошипа в градусах;

T — база диаграммы в мм.

По горизонтальной оси может откладываться и время поворота кривошипа

$$K_t = \frac{t \text{ с}}{T \text{ мм}},$$

где t — время одного оборота кривошипа, с.

$$t = \frac{\varphi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi n}{60}} = \frac{60}{n} \text{ с},$$

где n — число оборотов кривошипа в мин.

Для определения закона изменения скорости движения ползуна достаточно продифференцировать график его перемещения, поскольку скорость

$$V_B = \frac{dS_B}{dt}.$$

Или, выражая через отрезки диаграммы перемещений,

$$y_{V_B} K_V = \frac{dy_{S_B} \cdot K_l}{dx \cdot K_t} = \frac{K_l}{K_t} \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Умножив и поделив правую часть равенства на одно и то же число H и приняв масштаб скорости:

$$K_V = \frac{K_l}{K_t \cdot H} \frac{\text{мс}^{-1}}{\text{мм}},$$

получим

$$y_{V_B} = H \cdot \text{tg}\alpha,$$

где α — угол наклона касательной к кривой перемещений в точке, в которой определяется скорость V_B . Последнее равенство может быть представлено графически.

Проведя последовательно дифференцирование кривой перемещений в различных точках, можно построить закон изменения скорости движения ползуна. При построении производной кривой необходимо следить, чтобы максимум ее соответствовал точке перегиба дифференцируемой кривой, а нуль — ее экстремальным значениям. Продифференцировав полученную кривую скорости, получим закон изменения ускорения движения ползуна. Последнее следует из условия, что

$$a_{S_B} = \frac{dV_B}{dt}$$

и, соответственно,

$$y_{a_B} \cdot K_a = \frac{dy_{V_B} \cdot K_V}{dx \cdot K_t} = \frac{K_V}{K_t} \cdot \text{tg}\alpha,$$

откуда

$$K_a = \frac{K_V}{K_t \cdot H} \frac{\text{мс}^{-2}}{\text{мм}}$$

и

$$y_{a_B} = H \cdot \text{tg}\alpha.$$

При этом отрезок H , называемый в дальнейшем *отрезком дифференцирования*, может быть принят таким же, как для диаграммы скорости или отличным от него.

При использовании метода графического дифференцирования необходимо иметь ввиду, что построенная производная кривая имеет приближенный характер. Точность ее во многом зависит от того, насколько точно проведены касательные к кривой в исследуемых точках. Для повышения точности исследования иногда прибегают к использованию зеркальной линейки. Последняя представляет собой квадратный стержень с полированными гранями. Если такую линейку приложить к дифференцируемой кривой в исследуемой точке таким образом, чтобы линия кривой плавно (без излома) переходила в свое отражение на грани линейки, то это означает что линейка занимает положение нормали $n-n$ к кривой. Проведя с помощью линейки нормаль, уже можно более точно провести положение касательной.

Дополнительно следует заметить, что при двукратном дифференцировании диаграммы перемещений для получения закона ускорений погрешность может достигнуть значительной величины, и подобное исследование уже не будет отражать действительную картину. Поэтому на практике стремятся ограничиться однократным дифференцированием. С этой целью записывается, например, диаграмма скорости, после дифференцирования которой получают диаграмму ускорений, а после интегрирования — диаграмму перемещений.

Сущность метода графического интегрирования заключается в следующем. Пусть задана диаграмма скорости ползуна ($V_B; \varphi$) (рис. 2.3). Так как

$$V_B = \frac{dS_B}{dt},$$

то

$$dS_B = V_B \cdot dt.$$

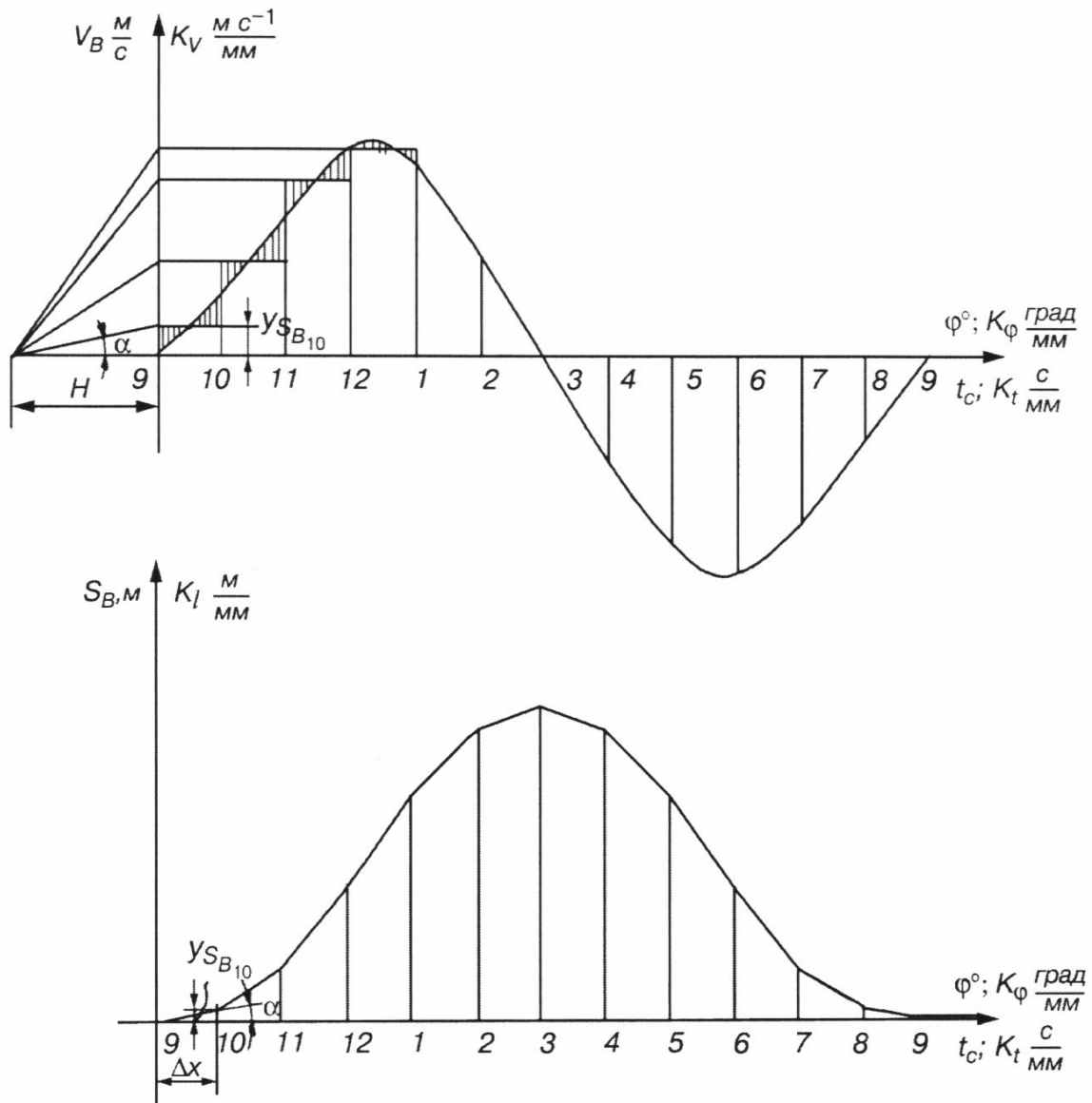


Рис. 2.3

Интегрируя обе части этого равенства, будем иметь

$$\int dS_B = \int V_B \cdot dt.$$

Интегрирование выполняется по участкам, на которые разбита база диаграммы. Так, для первого участка 9–10 получим

$$\int_{S_9}^{S_{10}} dS_B = \int_{t_9}^{t_{10}} V_B dt.$$

S_9 и t_9 в начале координат равны нулю и, если на данном участке значение скорости принять равным среднему значению, то последнее равенство можно переписать

$$S_{B_{10}} = V_B \int_0^{t_{10}} dt = V_B \cdot t_{10}.$$

Выражая последнее равенство через отрезки чертежа, запишем

$$y_{S_{B_{10}}} \cdot K_l = y_B \cdot K_V \cdot \Delta x \cdot K_t.$$

Умножив и поделив правую часть равенства на постоянное число H , перепишем последний результат в виде

$$\frac{y_{S_{B_{10}}}}{\Delta x} \cdot K_l = K_V \cdot K_t \cdot H \cdot \frac{y_{V_{B_{10}}}}{H}.$$

Если принять масштаб перемещений равным

$$K_l = K_V \cdot K_t \cdot H \frac{\text{м}}{\text{мм}},$$

то выражение

$$\frac{y_{S_{B_{10}}}}{\Delta x} = \frac{y_{V_{B_{10}}}}{H}$$

можно выполнить графическим путем. Выполняя указанную операцию на каждом участке диаграммы скорости, получим интегральную кривую диаграммы перемещений. Она имеет ломаный характер. Но если количество участков будет стремиться к бесконечности, то интегральная кривая будет стремиться к плавной закономерности. На практике не будет большой погрешностью, если через точки излома диаграммы провести плавную кривую.

2.3. Аналитический метод кинематического исследования

При необходимости выполнения более точного кинематического исследования прибегают к аналитическому методу.

Он заключается в составлении математической зависимости между исходными и искомыми параметрами механизма и позволяет получить результат практически с любой степенью точности. Покажем применение этого метода также на примере кривошипно-ползунного механизма (рис. 2.4). Пусть в качестве исходных данных известны: частота вращения ω_1 , положение ведущего звена под углом φ , а также длина кривошипа l_1 и шатуна l_2 . Определим координату точки B ползуна S_B в функции параметров механизма. Опустив из точки A перпендикуляр на линию движения ползуна, отметим точку его пересечения D . Тогда

$$S_B = l_1 \cdot \cos(180 - \varphi) + l_2 \cdot \cos \theta = -l_1 \cos \varphi + l_2 \cos \theta.$$

Из треугольника OAB следует, что стороны его относятся как синусы противолежащих углов

$$\frac{l_1}{\sin \theta} = \frac{l_2}{\sin(180 - \varphi)} = \frac{l_2}{\sin \varphi}.$$

Отсюда

$$\sin \theta = \frac{l_1}{l_2} \sin \varphi \quad \text{и} \quad \cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \frac{1}{l_2} \sqrt{l_2^2 - l_1^2 \sin^2 \varphi}.$$

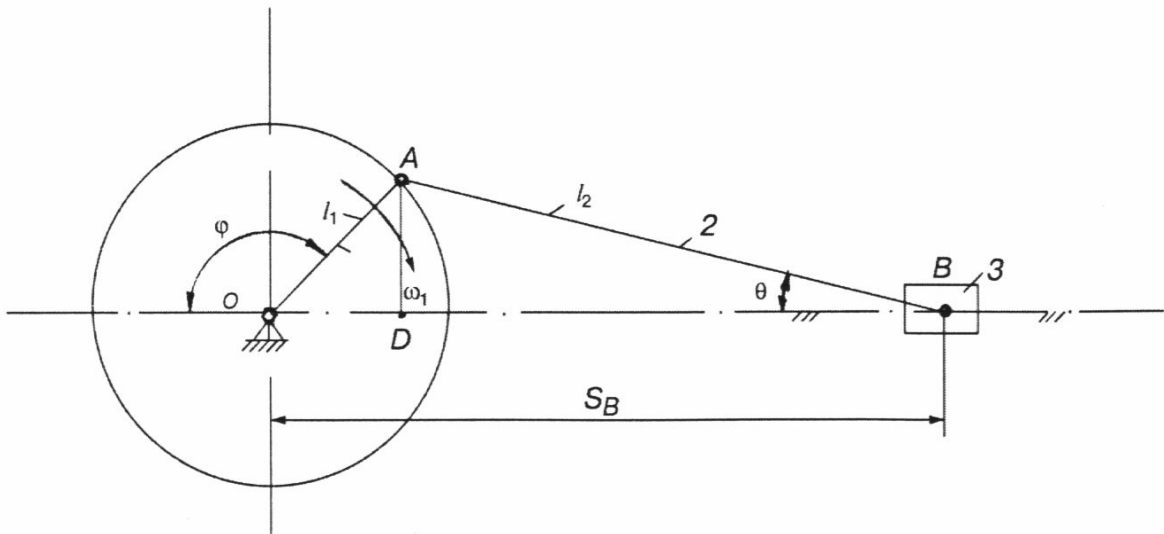


Рис. 2.4

Продифференцировав обе части равенства, получим

$$\cos\theta \frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{l_1}{l_2} \cos\varphi \quad \text{или} \quad \frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{\cos\varphi}{\cos\theta}.$$

Для определения скорости V_B ползуна следует продифференцировать его координату перемещения S_B :

$$\begin{aligned} V_B &= \frac{dS_B}{dt} = \frac{dS_B}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \omega_1 \left(l_1 \sin\varphi - l_2 \sin\theta \cdot \frac{d\theta}{d\varphi} \right) = \\ &= \omega_1 \left(l_1 \sin\varphi - l_2 \sin\theta \cdot \frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{\cos\varphi}{\cos\theta} \right) = \omega_1 l_1 (\sin\varphi - \cos\varphi \cdot \operatorname{tg}\theta). \end{aligned}$$

Подставляя вместо $\operatorname{tg}\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ его значение

$$\frac{l_1 \sin\varphi}{l_2 \frac{1}{l_2} \sqrt{l_2^2 - l_1^2 \sin^2\varphi}},$$

получим

$$V_B = \omega_1 \cdot l_1 \sin\varphi \left(1 - \frac{l_1 \cos\varphi}{\sqrt{l_2^2 - l_1^2 \sin^2\varphi}} \right).$$

Ускорение ползуна определяется дифференцированием полученного выражения скорости:

$$a_B = \frac{dV_B}{dt} = \frac{dV_B}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \omega_1^2 l_1 \left[\cos\varphi + \sin\varphi \cdot \operatorname{tg}\theta - \frac{\cos\varphi}{\cos^2\theta} \cdot \frac{d\theta}{d\varphi} \right].$$

Подставляя вместо $\operatorname{tg}\theta$, $\cos\theta$ и $\frac{d\theta}{d\varphi}$ их значения, найдем общее выражение для ускорения:

$$a_B = \omega_1^2 l_1 \left[\cos \varphi + \frac{l_1 \sin^2 \varphi}{\sqrt{l_2^2 - l_1^2 \sin^2 \varphi}} - \frac{l_1 \cdot l_2^2 \cos^2 \varphi}{(l_2^2 - l_1^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} \right].$$

Как видно из полученного результата, формулы для искомых кинематических параметров имеют весьма громоздкий вид и требуют значительных затрат времени на проведение вычислительных операций. Для подобных расчетов необходимо использование вычислительной техники. По аналогии рассмотренный метод исследования можно применить и для других схем рычажных механизмов.

В литературе описан и несколько иной метод аналитического исследования механизмов, разработанный профессором В.А. Зиновьевым и основанный на составлении векторных уравнений замкнутого контура механизма. Последующее решение этих уравнений аналитическим путем позволяет получить математическое выражение искомых кинематических параметров исследуемых механизмов, аналогичное примеру рассмотренному выше.

Глава 3

ДИНАМИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЗМОВ

3.1. Общие положения

Задача динамики тела или совокупности тел состоит в исследовании их движения под действием приложенных сил, являющихся по существу источником всякого движения. При динамическом исследовании механизма ставится задача определения закона движения его звеньев в зависимости от силовых факторов, вызывающих их движение. Если любая машина или механизм предназначены для совершения полезной работы, а именно работы, затрачиваемой на преодоление сил полезных сопротивлений, то последние и будут определять характер или закон движения звеньев механизма. При этом величина сил полезных сопротивлений не постоянна, а изменяется под действием различных факторов (в первую очередь — обусловленных условиями эксплуатации).

В основу метода динамического исследования механизма положен закон сохранения энергии, сформулированный М.В. Ломоносовым: «Энергия не возникает из ничего и не исчезает бесследно, а переходит из одного вида в другой». Последний удобно записать в форме кинетической энергии, т.е. работа всех внешних сил, действующих в механизме, идет на изменение кинетической энергии его движущихся частей.

$$\Sigma A = E - E_0.$$

Приведенное равенство и будет основным уравнением движения механизма. Таким образом, зная силы, действующие в механизме, нетрудно определить и работу этих сил, а зная массу движущихся звеньев можно определить и их кинетическую энергию.

При динамическом исследовании механизма следует различать три периода его движения (рис. 3.1).

1. *Период разгона* T_p , в течение которого происходит нарастание скорости движения звеньев механизма и соответственно кинетической энергии его звеньев. Необходимым условием для разгона является избыток источника энергии в механизме над его потребителем.

2. *Период установившегося движения* $T_y = \kappa T_{ц}$, характеризующийся постоянством средней угловой скорости ведущего звена механизма ω_{cp} и обеспечиваемый при условии равенства за цикл движения источника энергии и его потребителя.

3. *Период выбега или остановки* T_b , в течение которого происходит снижение скорости движения звеньев механизма и, соответственно, уменьшение их кинетической энергии. Необходимым условием для выбега является недостаток источника энергии для его потребителя.

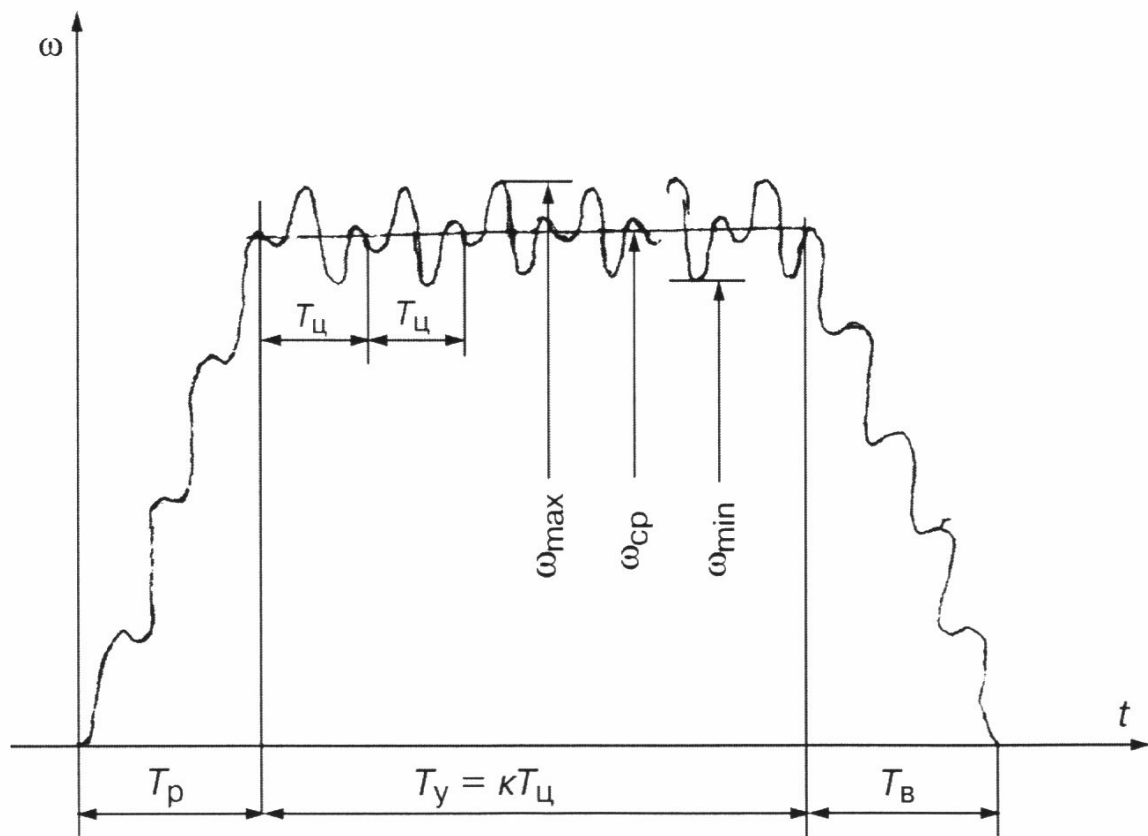


Рис. 3.1

Надо иметь в виду, что периоды разгона и выбега являются весьма кратковременными по сравнению с периодом установившегося движения, и при динамическом исследовании последнему отдается предпочтение, хотя, может быть, и без достаточных оснований. Для решения уравнения движения механизма необходимо знать характер и величину действующих в механизме сил и способы их задания. В зависимости от их природы можно выделить следующие категории сил.

1. *Движущие силы, или моменты сил, являющиеся источником движения*, природа которых определяется типом приводного двигателя. В электрическом двигателе — это силы взаимодействия электромагнитных полей, в двигателе внутреннего сгорания — силы давления газов сгоревшего топлива, в пружинном двигателе — силы упругости гибких элементов и т.д. Указанным силам приписывается положительный знак, так как направление их действия совпадает с направлением движения звена, к которому они приложены.

2. *Силы, или моменты сил полезного сопротивления*, являющиеся по своей природе потребителями энергии двигателя, предназначенного для совершения полезной работы. Данным силам приписывается знак минус, так как направление их действия всегда противоположно направлению движения звена, к которому они приложены.

3. *Силы веса звеньев механизма* являются силами земного притяжения, всегда приложены в центрах тяжести звеньев и направлены к центру земли. Указанные силы дважды меняют свой знак за цикл движения, являясь силами движущими, если направление их действия совпадает с направлением движения и силами сопротивления в случае их несовпадения. Причем работа сил веса звеньев за цикл движения механизма равна нулю, но в пределах цикла они перераспределяют работу сил движущих и сил полезного сопротивления.

4. *Силы вредного сопротивления, или силы трения* в кинематических парах механизма всегда направлены противоположно относительной скорости звена и по своему знаку отрицательны.

Рабочий процесс в цилиндре компрессора происходит за один оборот коленчатого вала (звена 1). При движении поршня справа налево в цилиндре происходит разрежение, открывается впускной клапан и воздух из атмосферы всасывается в полость цилиндра. При этом давление в цилиндре создается ниже атмосферного, которое на диаграмме будет иметь вид прямой параллельной оси абсцисс, принятой за линию атмосферного давления (ЛАД). С изменением направления движения поршня слева направо давление в цилиндре начнет повышаться, впускной клапан — закрываться, при достижении давления расчетного значения открывается выпускной клапан и сжатый воздух выталкивается в воздухоотборник. При следующем изменении движения поршня (справа налево) давление в цилиндре быстро падает, выпускной клапан закрывается, открывается клапан впускной и цикл повторяется. Полученная таким образом диаграмма, называемая *индикаторной*, характеризует изменение давления в цилиндре за цикл движения поршня. По диаграмме легко установить давление в цилиндре для любого положения поршня, а следовательно и ту силу, которая действует на поршень, т.е.

$$P = pF,$$

где P — сила, действующая на поршень в Н;

p — давление в цилиндре в Н/см²;

F — площадь поршня в см².

Зная силы, действующие на звенья механизма, можно определить работу, которую они совершают. На звенья механизма компрессора действует сила полезного сопротивления P^c , приложенная к поршню 3, направленная горизонтально противоположно его движению; сила веса поршня G_3 , приложенная в его центре тяжести S_3 , направленная вертикально вниз; сила G_2 шатуна, приложенная в центре тяжести S_2 , направленная вертикально вниз; сила G_1 , приложенная в центре тяжести S_1 и направленная вертикально вниз; движущий момент M^o , приложенный к валу кривошипа 1, направленный по направлению вращения звена 1.

Для определения работы, совершаемой приложенными силами, воспользуемся известными зависимостями из курса физики, что работа силы равна произведению силы на путь и на косинус угла между направлением силы и направлением перемещения точки ее приложения

$$A = PS \cos(P \wedge S) \text{ (Дж);}$$

и работа, совершаемая моментом силы, равна произведению момента на угол поворота

$$A = M\varphi.$$

Применительно к рассматриваемому механизму составим выражение работы сил в дифференциальной форме:

$$dA^C = P^C dS_B (P \wedge dS_B) + G_3 dS_B \cos(G_3 \wedge dS_B) + G_2 dS_{S_2} \cos(G_2 \wedge dS_{S_2})$$

и, соответственно,

$$dA^M = M^M d\varphi.$$

3.2. Приведение сил и моментов сил в механизме

При динамическом исследовании работу сил и моментов сил по пути точек или звеньев их приложения удобно заменить эквивалентной силой или моментом, приложенным к любой точке механизма или любому его звену, исходя из условия равенства работ, совершаемых реальными силами и моментами по пути точек и звеньев их приложения и приведенных (расчетных, условных) по пути точек и звеньев их приведения. В качестве точки или звена приведения целесообразно выбрать такие, которые не изменяют направление движения в пределах одного цикла работы механизма. В противном случае приведенные силы и моменты будут достигать значений бесконечно больших величин. Такими точками и звеном приведения могут быть точки ведущего звена механизма, со-

вершающего непрерывное вращательное движение. В рассматриваемом примере механизма компрессора этому условию удовлетворяет ведущее звено 1, любая точка которого может быть принята в качестве точки приведения, а само звено — за звено приведения. В соответствии с изложенным составим выражения для работ приведенной силы, приложенной в т. A кривошипа и приведенного момента, приложенного к звену 1.

$$dA^C = P^{\text{пр}} dS_A \cos(P^{\text{пр}} \wedge dS_A) = P^C dS_B \cos(P^C \wedge dS_B) + \\ + G_3 dS_B \cos(G_3 \wedge dS_B) + G_2 dS_{S_2} \cos(G_2 \wedge dS_{S_2}) \\ dA^{\text{п}} = P^{\text{пр}} dS_A \cdot \cos(P^{\text{пр}} \wedge dS_A) = M^{\text{п}} d\varphi_1.$$

Если обе части равенства поделить на dt , то получим

$$\frac{dA^C}{dt} = P^{\text{пр}} \frac{dS_A \cos(P^{\text{пр}} \wedge dS_A)}{dt} = P^C \frac{dS_B}{dt} \cos(P^C \wedge dS_B) + \\ + G_3 \frac{dS_B}{dt} \cos(G_3 \wedge dS_B) + G_2 \frac{dS_{S_2}}{dt} \cos(G_2 \wedge dS_{S_2}) \\ \frac{dA^{\text{п}}}{dt} = P^{\text{пр}} \frac{dS_A \cos(P^{\text{пр}} \wedge dS_A)}{dt} = M^{\text{п}} \frac{d\varphi_1}{dt},$$

где $\frac{dA}{dt}$ — работа в единицу времени — мощность (N);

$\frac{dS_A}{dt}$ — путь в единицу времени — линейная скорость (V_A);

$\frac{d\varphi_1}{dt}$ — угол поворота в единицу времени — угловая скорость (ω_1).

Если выбрать в рассматриваемом примере направление приведенной силы $P^{\text{пр}}$ перпендикулярно радиусу криво-

шпица, то угол $(P^{\text{пр}} \wedge dS_A)$ будет равен нулю и соответственно $\cos(P^{\text{пр}} \wedge dS_A) = 1$. Соответственно $(G_3 \wedge dS_A) = 90^\circ$. Угол $(G_3 \wedge dS_A) \neq 0$ и в конкретном случае подлежит определению.

С учетом сказанного приведенные зависимости соответственно получают вид:

$$N^C = P^{\text{пр}} \cdot V_A = P^C V_B + G_2 \cdot V_{S_2} \cdot \cos(G_2 \wedge V_{S_2})$$

$$N^{\text{д}} = P^{\text{пр}} \cdot V_A = M^{\text{д}} \omega_1.$$

Из первой зависимости определим $P^{\text{пр}}$ от сил полезного сопротивления, из второй — от движущего момента:

$$P_C^{\text{пр}} = P^C \frac{V_B}{V_A} + G_2 \frac{V_{S_2}}{V_A} \cos(G_2 \wedge V_{S_2})$$

$$P_{\text{д}}^{\text{пр}} = M^{\text{д}} \frac{\omega_1}{V_A}.$$

Вместо приведенной силы работу приложенных сил в механизме можно вычислить и с использованием приведенного момента. Если приведенные обе части равенств умножить на длину кривошипа l_{OA} , то получим

$$P^{\text{пр}} l_{OA} = M^{\text{пр}};$$

$$P^C \frac{V_B}{V_A} \cdot l_{OA} = P^C \frac{V_B}{V_A / l_{OA}} = P^C \frac{V_B}{\omega_1};$$

$$G_2 \frac{V_{S_2}}{V_A} \cos(G_2 \wedge V_{S_2}) \cdot l_{OA} = G_2 \frac{V_{S_2}}{V_A / l_{OA}} \cos(G_2 \wedge V_{S_2}) = G_2 \frac{V_{S_2}}{\omega_1} \cos(G_2 \wedge V_{S_2});$$

$$M^{\text{д}} \frac{\omega_1}{V_A} \cdot l_{OA} = M^{\text{д}} \frac{V_A}{V_A} = M^{\text{д}}.$$

С учетом приведенного, получим

$$M_C^{\text{пр}} = P^C \frac{V_B}{\omega_1} + G_2 \frac{V_{S_2}}{\omega_1} \cos(G_2 \wedge V_{S_2});$$

$$M_D^{\text{пр}} = M^D.$$

Вычислив значения $P^{\text{пр}}$ или $M^{\text{пр}}$, можно построить диаграмму изменения этих величин в функции перемещения точки или звена приведения. При этом приведенной силе или моменту от сил полезного сопротивления приписывается знак минус, и приведенной силе (моменту) от сил движущих — знак плюс.

При этом следует иметь в виду, что момент от сил движущих задан только по характеристике, т.е. $M^{\text{дв}} = \text{const}$, а по величине не известен и может быть определен только в процессе динамического исследования механизма (рис. 3.3).

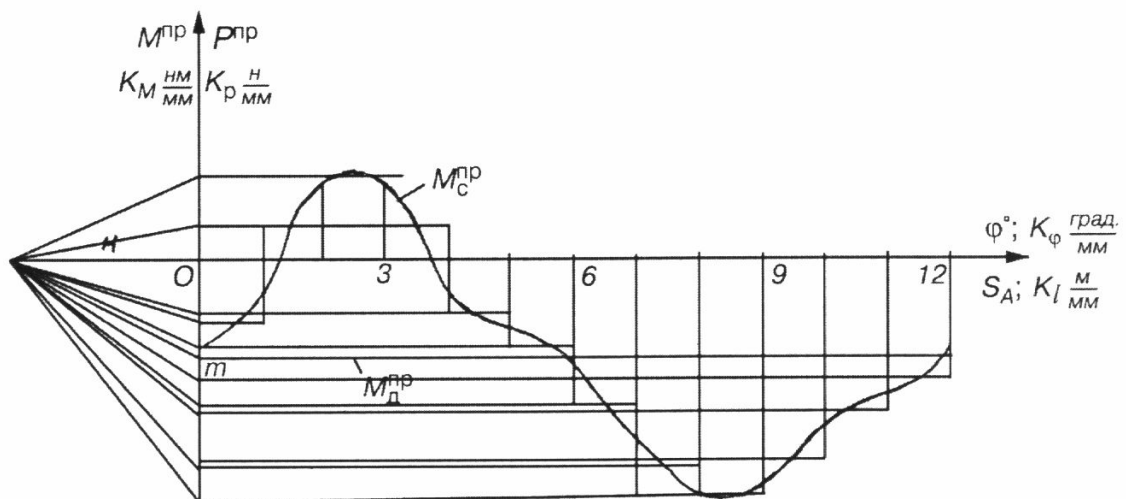


Рис. 3.3

3.3. Построение диаграммы работ

Зная изменение диаграммы приведенных сил или моментов от сил полезного сопротивления, можно определить работу этих сил за цикл движения звена приведения

$$A_C = M_C^{\text{пр}} \cdot \varphi = \int_0^{\varphi} M_C^{\text{пр}} \cdot d\varphi,$$

т.е. для вычисления работы следует проинтегрировать функцию $(M_C^{\text{пр}}, \varphi)$, заданную в виде диаграммы. Последнюю проинтегрировать можно только графически (см. глава 2, разд. 2). Разбив базу диаграммы на участки и выбрав произвольный отрезок интегрирования H , заменим плавную кривую ступенчатой из условия равновеликой площади и построим интегральную ступенчатую кривую (A^C, φ) .

При этом масштаб работы равен произведению масштабов по координатным осям, умноженному на отрезок интегрирования H .

$$K_A = K_M \cdot K_{\varphi} \cdot H \left(\frac{\text{ДЖ}}{\text{мм}} \right).$$

В конце цикла получено значение работы сил полезного сопротивления за весь цикл движения механизма $(A_{\text{ц}}^C)$. Но так как при установившемся движении работа сил полезного сопротивления за цикл $A_{\text{ц}}^C$ должна быть равна работе сил движущих $A_{\text{ц}}^D$, то отрезок, равный $A_{\text{ц}}^C$ на диаграмме соединим с началом координат (рис. 3.4). Полученная прямая будет представлять собой работу сил движущих за цикл движения, так как

$$A^D = M^D \cdot \varphi,$$

где $M^D = \text{const}$ и приведенная зависимость представляет собой уравнение прямой, проходящей через начало координат. По этой прямой можно определить и числовое значение M^D : если из конца отрезка интегрированная H провести параллельную прямую до пересечения с осью ординат, то отсекаемый ею отрезок om в масштабе K_M будет равен движущему моменту (рис. 3.3).

$$M^D = om \cdot K_M.$$

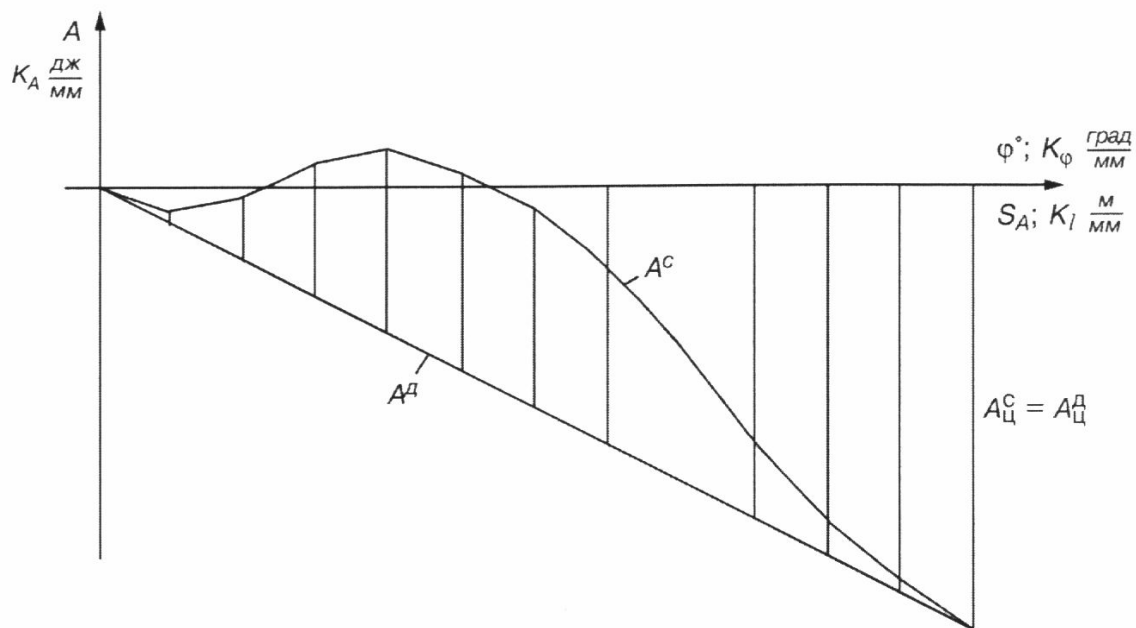


Рис. 3.4

Построив диаграммы работ сил движущих и сил полезного сопротивления, получим, что их значения равны в начале и в конце цикла, что свидетельствует о цикличности установившегося движения. Но в пределах цикла $A^D \neq A^C$, т.е. имеет место избыток работы движущих сил, который должен быть на что-то затрачен, а именно — на изменение кинетической энергии движущихся звеньев механизма.

Вычитая из ординат работ A^D ординаты работ A^C , построим диаграмму избыточных работ.

$$A^D - A^C = \Sigma A.$$

Таким образом, будет получена закономерность изменения работы всех внешних сил, действующих в механизме, т.е. левая часть уравнения движения машины (рис. 3.5).

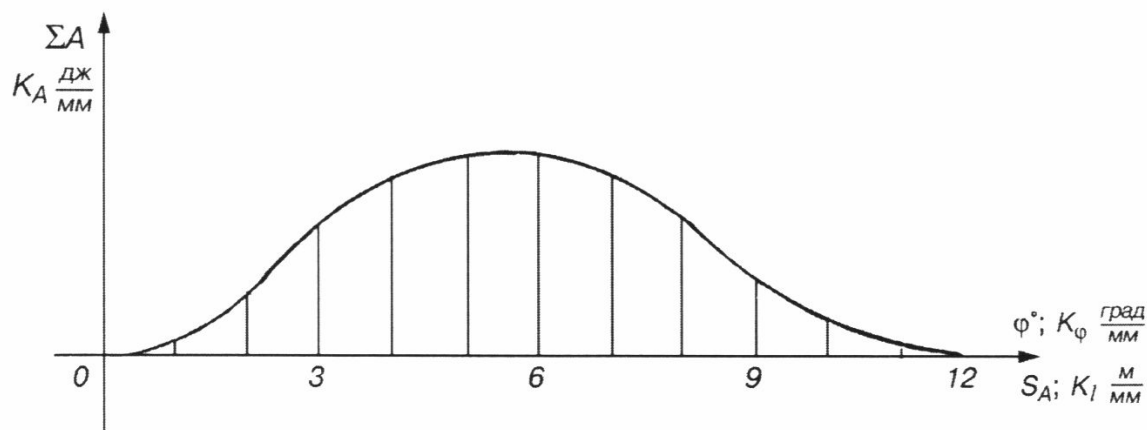


Рис. 3.5

3.4. Кинетическая энергия механизма

Кинетическая энергия механизма равна сумме кинетических энергий его подвижных звеньев. Для кривошипно-ползунного механизма в рассматриваемом примере

$$E = E_1 + E_2 + E_3.$$

Это значение кинетической энергии должно соответствовать сумме работ внешних сил, приложенных к механизму, и выполнить это условие без соответствующего подбора масс звеньев невозможно. При этом условие равенства работ внешних сил, действующих в механизме и кинетической энергии звеньев механизма можно выполнить при подборе массы одного из звеньев, задавшись в то же время массами других звеньев. Исходя из сказанного, пусть выбраны массы или вес звеньев 2 и 3. Тогда кинетическая энергия звена 2 соответственно определится как

$$E_2 = E_2^{\text{П}} + E_2^{\text{В}},$$

поскольку данное звено кривошипно-ползунного механизма совершает плоско-параллельное движение и участвует в поступательном и вращательном движении

$$E_2^{\text{п}} = \frac{m_2 \cdot V_{S_2}^2}{2} = \frac{G_2}{g \cdot 2} (PS_2 \cdot K_V)^2,$$

где G_2 — вес звена 2 в Н,

g — ускорение свободного падения в м/с²,

PS_2 — отрезок плана скоростей в мм, соответствующий скорости V_{S_2} ,

K_V — масштаб плана скоростей в $\frac{\text{м/с}}{\text{мм}}$.

В приведенном выражении для $E_2^{\text{п}}$ изменяется в пределах цикла движения только PS_2 , остальные величины остаются постоянными и их можно объединить одним коэффициентом K_1 . Таким образом, значение кинетической энергии $E_2^{\text{п}}$ для любого положения механизма определится по формуле

$$E_2^{\text{п}} = K_1 (PS_2)^2.$$

При этом $K_1 = \frac{G_2 K_V^2}{2g}$.

По аналогии определяется $E_2^{\text{в}}$:

$$E_2^{\text{в}} = I_{S_2} \frac{\omega_2^2}{2} = I_{S_2} \left(\frac{V_{BA}}{l_{BA}} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{I_{S_2} (ab \cdot K_V)^2}{2 \cdot l_{BA}^2} = K_2 (ab)^2,$$

где $K_2 = \frac{I_{S_2} \cdot K_V^2}{2l_{BA}^2}$.

В приведенных формулах

I_{S_2} — момент инерции звена 2 относительно оси, проходящей через центр тяжести S_2 в кг·м²,

l_{BA} — заданная длина звена 2 в м,

ab — отрезок плана скоростей в мм, относительной скорости V_{BA} .

Кинетическая энергия звена 3 механизма соответственно определится

$$E_3 = \frac{m_3 V_B^2}{2} = \frac{G_3}{g} \cdot \frac{(Pb \cdot K_V)^2}{2} = K_3 (Pb)^2,$$

$$\text{Здесь } K_3 = \frac{G_3 K_V^2}{2g},$$

где G_3 — вес звена 3 в H .

После расчета кинетической энергии звеньев 2 и 3 за цикл движения механизма строится диаграмма ее изменения (рис. 3.6).

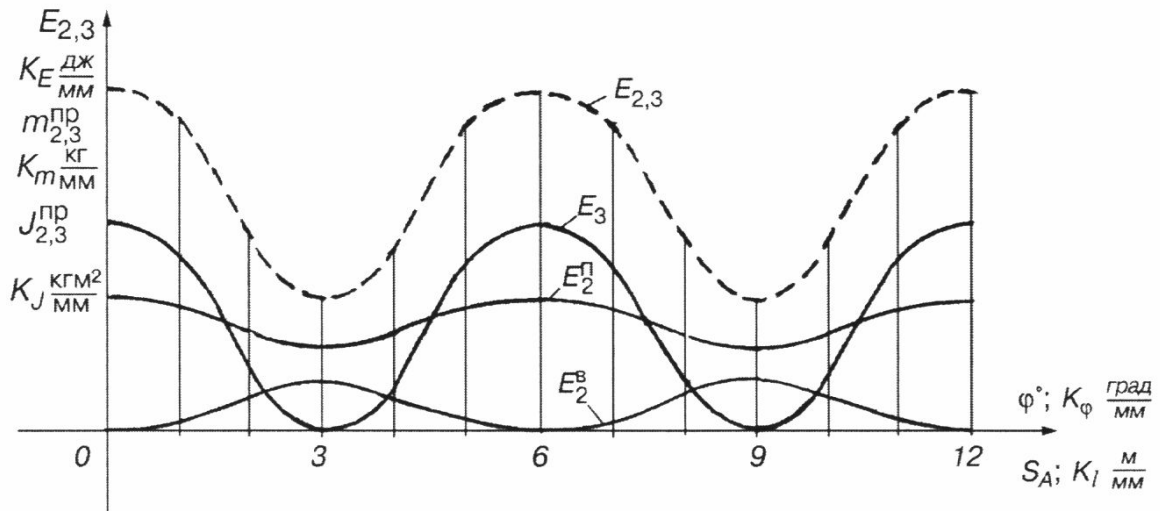


Рис. 3.6

3.5. Приведение масс и моментов инерции звеньев механизма

Наряду с приведением сил и моментов при расчете совершаемой ими работы, удобно пользоваться приведением масс и моментов инерции звеньев при определении их кинетической энергии, исходя из условия равенства кинетических энергий приведенной и приводимой массы звена или

приведенного и приводимого момента инерции звена. В качестве точки или звена приведения также должна быть выбрана такая точка или звено, скорость которых не обращается в нуль в пределах цикла их движения. Приравняв значения кинетической энергии, выраженной через приведенную массу и сосредоточенной в точке A кривошипа и кинетическую энергию приводимых звеньев 2 и 3, получим

$$\frac{m^{\text{пр}}V_A^2}{2} = \frac{m_2V_{S_2}^2}{2} + I_{S_2} \frac{\omega_2^2}{2} + \frac{m_3V_B^2}{2},$$

откуда

$$m^{\text{пр}} = m_2 \left(\frac{V_{S_2}}{V_A} \right)^2 + I_{S_2} \left(\frac{\omega_2}{V_A} \right)^2 + m_3 \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^2.$$

Или, умножив обе части равенства на l_{OA}^2 ,

$$m^{\text{пр}} \cdot l_{OA}^2 = m_2 \left(\frac{V_{S_2}}{V_A} \right)^2 l_{OA}^2 + I_{S_2} \left(\frac{\omega_2}{V_A} \right)^2 l_{OA}^2 + m_3 \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^2 l_{OA}^2,$$

найдем, что

$m^{\text{пр}} \cdot l_{OA}^2 = I_O^{\text{пр}}$ — приведенный момент инерции

$$m_2 \left(\frac{V_{S_2}}{V_A} \right)^2 l_{OA}^2 = m_2 \left(\frac{V_{S_2}}{\omega_2} \right)^2$$

$$I_{S_2} \left(\frac{\omega_2}{V_A} \right)^2 l_{OA}^2 = I_{S_2} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2$$

$$m_3 \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^2 l_{OA}^2 = m_3 \left(\frac{V_B}{\omega_1} \right)^2,$$

и выражение для приведенного момента соответственно получит вид:

$$I_O^{\text{пр}} = m_2 \left(\frac{V_A}{\omega_1} \right)^2 + I_{S_2} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 + m_3 \left(\frac{V_B}{\omega_1} \right)^2.$$

При этом изменение приведенной массы и приведенного момента инерции не зависит от скорости вращения звена приведения, а зависит от отношения скоростей, т.е. от положения механизма.

Характер изменения приведенной массы и приведенного момента инерции будет таким же, как изменение кинетической энергии, только в другом масштабе. Последний можно определить из следующего равенства:

$$E = \frac{m^{\text{пр}} V_{\text{Аср}}^2}{2},$$

где $V_{\text{Аср}} = \omega_{1\text{ср}} \cdot l_{OA}$ — среднее значение скорости точки A .

Выразив приведенное равенство через отрезки диаграммы, получим

$$y_E \cdot K_E = y_m \cdot K_m \frac{V_{\text{Аср}}^2}{2}.$$

Приняв $y_E = y_m$, найдем

$$K_m = K_E \frac{2}{V_{\text{Аср}}^2}.$$

По аналогии кинетическую энергию можно выразить через приведенный момент инерции

$$E = \frac{I^{\text{пр}} \cdot \omega_{1\text{ср}}^2}{2},$$

или

$$y_E \cdot K_E = y_I \cdot K_I \frac{\omega_{1cp}^2}{2},$$

откуда

$$K_I = K_E \frac{2}{\omega_{1cp}^2}.$$

Таким образом, работу всех внешних сил, действующих в механизме, можно заменить работой одной приведенной силы или момента, а кинетическую энергию всех звеньев механизма — соответственно кинетической энергией приведенной массы или приведенного момента (рис. 3.7).

Представленная схема ведущего звена, нагруженная приведенной силой и массой или приведенным моментом силы и приведенным моментом инерции, получила название *динамической модели механизма*. С помощью подобной модели упрощается решение уравнения движения машины, которое можно записать согласно модели в следующем виде:

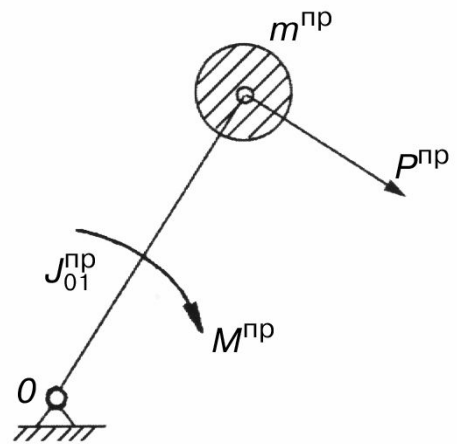


Рис. 3.7

$$P^{пр} \cdot S_A = \frac{m^{пр} V_A^2}{2} - E_0,$$

где $P^{пр} \cdot S_A = \Sigma A$ — избыточная работа всех внешних сил, приложенных к механизму (рис. 3.7);

$\frac{m^{пр} V_A^2}{2}$ — кинетическая энергия звеньев 2 и 3 механизма;

E_0 — начальное значение кинетической энергии звеньев 2 и 3 механизма.

Из приведенного уравнения определим скорость V_A

$$V_A = \sqrt{\frac{2(\Sigma A + E_0)}{m^{\text{пр}}}}.$$

Начальное значение кинетической энергии определяется по начальным параметрам $m_0^{\text{пр}}$ и V_{A_0} . Если начальное значение скорости $V_{A_0} = 0$, то $E_0 = 0$, т.е. движение начинается с нуля. Определив значение скорости V_A за цикл движения, строится график ее изменения.

Если избыточная работа выражена через приведенный момент силы, а кинетическая энергия — через приведенный момент инерции, то уравнение движения механизма запишется в виде

$$M^{\text{пр}} \cdot \varphi_1 = \frac{I^{\text{пр}} \cdot \omega_1^2}{2} - E_0,$$

где $M^{\text{пр}} \cdot \varphi_1 = \Sigma A$ — избыточная работа всех внешних сил, приложенных к механизму.

Из приведенного уравнения найдем

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2(\Sigma A + E_0)}{I^{\text{пр}}}}.$$

Вычисляя ω_1 , за цикл движения, строят график ее изменения.

Для определения ускорения точки или звена приведения можно воспользоваться методом графического дифференцирования диаграммы скорости или аналитическим путем на основе решения уравнения движения механизма. Последнее удобно записать в дифференциальной форме.

$$P^{\text{пр}} \cdot dS_A = d\left(\frac{m^{\text{пр}} V_A^2}{2}\right),$$

откуда

$$P^{\text{пр}} = \frac{d}{dS_A} \left(\frac{m^{\text{пр}} V_A^2}{2} \right).$$

Продифференцировав правую часть выражения, получим

$$P^{\text{пр}} = \frac{1}{2} \left(\frac{dm^{\text{пр}}}{dS_A} V_A^2 + m^{\text{пр}} \frac{2V_A \cdot dV_A}{dS_A} \right).$$

Умножив и поделив второе слагаемое в скобках на dt , найдем

$$m^{\text{пр}} \cdot 2V_A \frac{dV_A}{dS_A} \cdot \frac{dt}{dt} = 2m^{\text{пр}} V_A \frac{dV_A}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dS_A}{dt}},$$

или

$$P^{\text{пр}} = \frac{1}{2} V_A^2 \frac{dm^{\text{пр}}}{dS_A} + m^{\text{пр}} \frac{dV_A}{dt},$$

откуда

$$\frac{dV_A}{dt} = a_A^t = \frac{P^{\text{пр}}}{m^{\text{пр}}} - \frac{V_A^2}{2m^{\text{пр}}} \cdot \frac{dm^{\text{пр}}}{dS_A}.$$

Полученное выражение позволяет определить тангенциальное ускорение точки приведения аналитическим путем. Все величины в этой формуле находятся по соответствующим графикам. Производная $\frac{dm^{\text{пр}}}{dS_A} = \text{tg}\psi$, где $\angle\psi$ — угол наклона касательной с осью абсцисс на графике $(m^{\text{пр}}, S_A)$, рис. 3.6).

По аналогии уравнение движения механизма можно записать через приведенный момент силы и приведенный момент инерции:

$$M^{пр} \cdot d\varphi_1 = d\left(\frac{I^{пр}\omega_1^2}{2}\right).$$

Продифференцировав обе части равенства, получим

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \varepsilon_1 = \frac{M^{пр}}{I^{пр}} - \frac{\omega_1^2}{2I^{пр}} \cdot \frac{dI^{пр}}{d\varphi_1}.$$

3.6. Установившееся движение машины

Как указывалось выше, установившееся движение машины характеризуется цикличностью или повторяемостью движения в каждом цикле, соответствующем отрезку времени, в течение которого совершается отдельная операция рабочего процесса. При этом продолжительность цикла может соответствовать времени одного оборота ведущего звена механизма, части оборота или нескольким оборотам. В силу того, что график изменения избыточной работы характеризуется определенной закономерностью, определяемой величиной приложенных к механизму внешних сил, естественно предположить, что и скорость движения ведущего вала машины будет не постоянной в пределах цикла, а изменяющейся по определенному закону, отклоняясь от своего среднего значения. Наибольшие отклонения скорости от ее среднего значения и определяют неравномерность хода машины. Последняя оценивается *коэффициентом неравномерности* δ (см. рис. 3.1)

$$\delta = \frac{\omega_{1\max} - \omega_{1\min}}{\omega_{1\text{ср}}}.$$

Неравномерность скорости движения оказывает существенное влияние на эксплуатационные качества машины.

При слишком большой неравномерности хода возможно нарушение технологического процесса: ухудшение качества производимой продукции, повышенный брак обрабатываемых изделий, снижение производительности оборудования, повышенный шум и т.д. Поэтому коэффициент неравномерности выбирается опытным путем, из условий эксплуатации, зависимости от назначения машины и предъявляемых к ней требований. Из опыта эксплуатации некоторых типов машин значение коэффициента δ принимается:

Генераторы переменного тока	$1/200 \div 1/300$
Генераторы постоянного тока, прядаильные машины	$1/100 \div 1/200$
Металлообрабатывающие и ткацкие станки	$1/30 \div 1/60$
Насосы, машины ударного действия и т.д.	$1/5 \div 1/30$

3.7. Регулирование периодических колебаний скорости ведущего вала машины маховыми массами

Регулирование периодических колебаний скорости в пределах заданного коэффициента неравномерности δ чаще всего осуществляют с помощью дополнительной детали (маховика), выполненного в виде массивного колеса, устанавливаемого, как правило, на ведущем валу машины. При этом маховик выполняет роль аккумулятора кинетической энергии машины, расходуемой на поддержание заданной неравномерности хода, обусловленной несоответствием суммы работ внешних сил, приложенных к механизму, кинетической энергии его движущихся звеньев. В случае преобладания работы движущих сил над работой сил полезного сопротивления маховик потребляет излишек энергии, а при обратном неравен-

стве он отдает свою энергию. Таким образом, маховик для поддержания заданной неравномерности хода должен обладать определенным моментом инерции, величину которого весьма просто вычислить по методике, предложенной профессором Н.И. Мерцаловым.

Для этого достаточно определить максимальное изменение кинетической энергии ведущего вала машины с маховиком. Из основного уравнения движения машины, записанного в форме

$$\Sigma A = E_1 + E_{2,3} - E_0,$$

в котором неизвестным является E_1 , найдем

$$E_1 = \Sigma A + E_0 - E_{2,3}.$$

Применительно к рассматриваемому примеру механизма компрессора правая часть последнего равенства, исключая E_0 , выражена в виде построенных диаграмм. Вычитая последовательно из ординат ΣA , ординаты $E_{2,3}$ (в одинаковом масштабе), построим диаграмму изменения кинетической энергии ведущего вала машины E_1 за цикл движения, на которой отмечаются точки максимального и минимального ее значений (рис. 3,8).

Разница этих значений в масштабе и будет максимальным изменением кинетической энергии ведущего вала машины $\Delta E_{1\max}$. При этом начальное значение кинетической энергии E_0 не влияет на величину $\Delta E_{1\max}$ и в данном случае может быть неизвестным. С другой стороны, кинетическая энергия ведущего вала машины с маховиком

$$E_1 = I_0 \frac{\omega_1^2}{2},$$

где I_0 — момент инерции звена 1 относительно оси вращения в $\text{кг}\cdot\text{м}^2$;
 ω_1 — действительная угловая скорость звена 1 в с^{-1} .

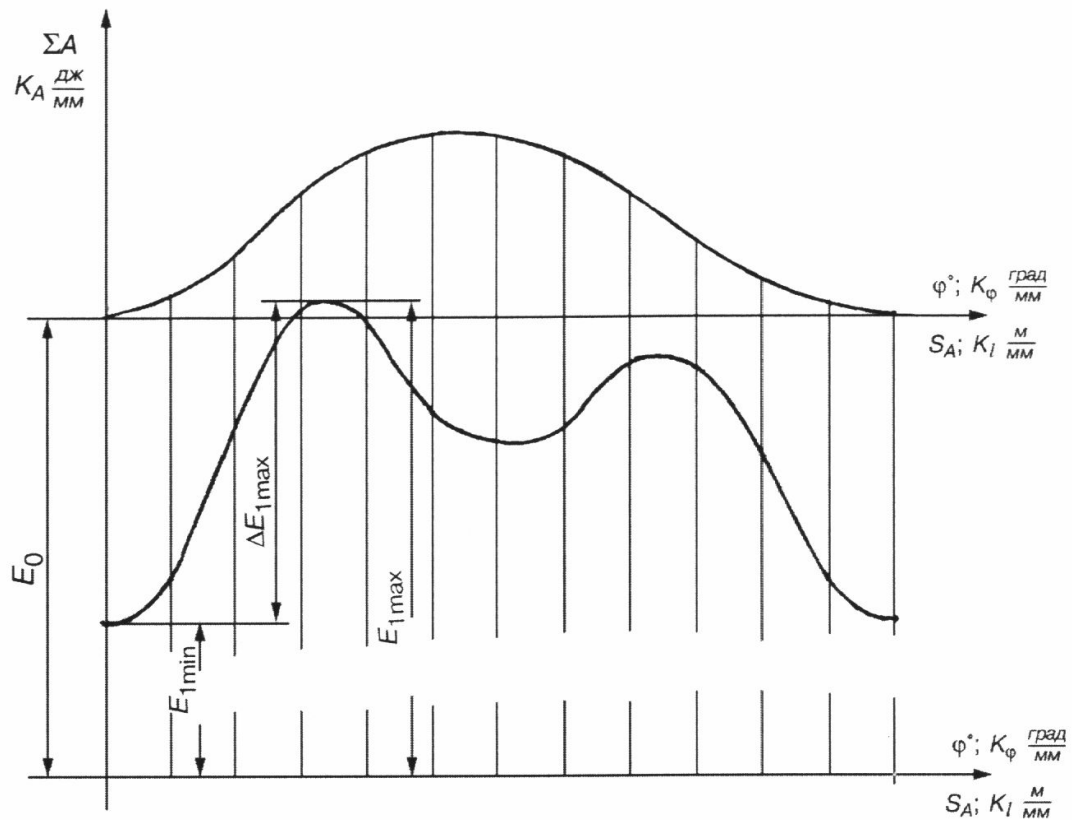


Рис. 3.8

Соответственно, максимальное изменение кинетической энергии звена 1

$$\Delta E_{1\max} = E_{1\max} - E_{1\min} = I_O \frac{\omega_{1\max}^2}{2} - I_O \frac{\omega_{1\min}^2}{2}$$

$$\frac{I_O}{2} (\omega_{1\max}^2 - \omega_{1\min}^2) = \frac{I_O}{2} (\omega_{1\max} + \omega_{1\min})(\omega_{1\max} - \omega_{1\min}).$$

Умножив и поделив полученное выражение на $\omega_{1\text{cp}}$ и подставив вместо

$$\frac{\omega_{1\max} + \omega_{1\min}}{2} = \omega_{1\text{cp}}$$

и

$$\frac{\omega_{1\max} + \omega_{1\min}}{\omega_{1\text{cp}}} = \delta,$$

найдем

$$\Delta E_{1\max} = I_O \omega_{1\text{cp}}^2 \delta,$$

откуда момент инерции маховика

$$I_O = \frac{\Delta E_{1\max}}{\omega_{1\text{cp}}^2 \cdot \delta}.$$

Из формулы следует, что момент инерции I_O прямо пропорционален максимальному изменению кинетической энергии ведущего вала машины $\Delta E_{1\max}$ и обратно пропорционален квадрату средней угловой скорости этого вала $\omega_{1\text{cp}}$ и коэффициенту неравномерности хода δ . Отсюда следует, что для уменьшения размеров маховика его устанавливать нужно на наиболее быстроходном валу и для обеспечения наиболее равномерного движения ведущего вала машины, т.е. при $\delta \rightarrow 0$, момент инерции $I_O \rightarrow \infty$.

Следует иметь в виду, что формула для определения момента инерции I_O является приближенной, так как угловая скорость звена 1 не является средней, а изменяется в пределах цикла в интервале, заданным коэффициентом неравномерности δ . Однако приведенные расчеты показывают, что при значениях $\delta < \frac{1}{20}$ уточнение результата незначительно, а при

$\delta > \frac{1}{20}$ размеры маховика могут быть завышены на 15÷20%.

В этом случае расчет необходимо уточнить.

При определении размеров маховика по найденному моменту инерции I_O следует исходить из следующих соображений. Конструктивно он может выполняться в виде сплошного диска, посаженного на вал или в виде обода, соединенного со ступицей спицами (рис. 3.9).

Наружный диаметр маховика выбирается из условия прочности материала, из которого он будет изготовлен. Так, например, окружная скорость на ободе маховика из чугуна не должна превышать 25–30 м/с, а для стали — не более 50 м/с. Выражая окружную скорость маховика на ободе

$$V_{\max} = \frac{\pi n_1}{30} \cdot \frac{D_{\max}}{2},$$

найдем, что наибольший диаметр маховика

$$D_{\max} = \frac{60V_{\max}}{\pi n_1} \text{ (м)}.$$

Приняв обод маховика за полый цилиндр, остальные размеры можно определить по приближенной формуле, задавшись его шириной b ,

$$I_{\text{об}} = 10\gamma b(D_{\text{н}}^4 - D_{\text{в}}^4) \text{ (кг} \cdot \text{м}^2),$$

где $I_{\text{об}}$ — момент инерции обода маховика в кг·м², принимаемый примерно $(0,74 \div 0,9)I_M$;

γ — плотность материала маховика, принимаемая для стали 7800 кг/м³ и для чугуна 7100 кг/м³;

b — ширина обода в м;

$D_{\text{н}}$ — наружный диаметр обода в м;

$D_{\text{в}}$ — внутренний диаметр обода в м.

Выбранный маховик позволяет определить закон движения ведущего вала машины. Используем для этой цели ди-

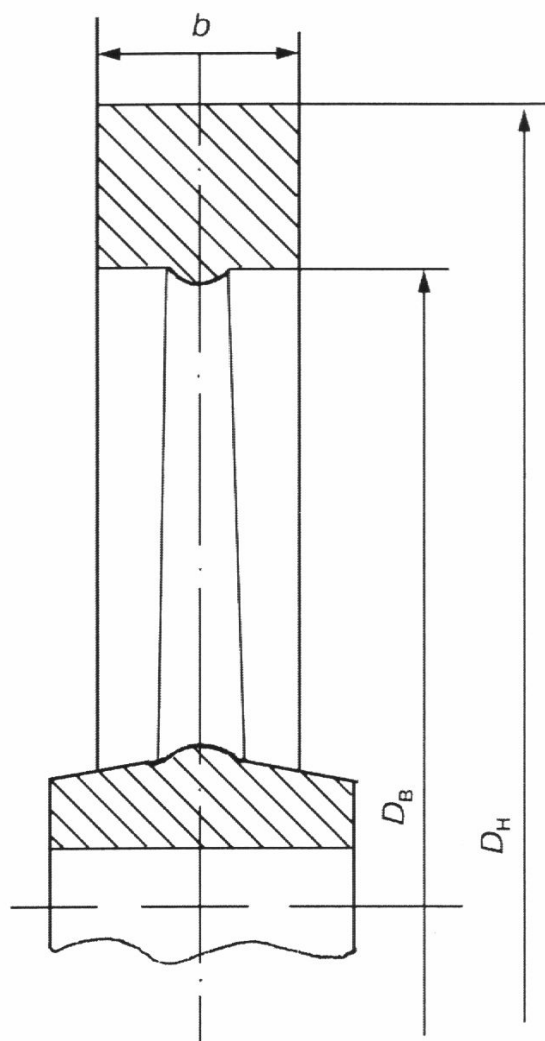


Рис. 3.9

аграмму изменения кинетической энергии ведущего вала машины $(\Delta E_1, S_d)$, в которой ось абсцисс проведена посередине $\Delta E_{1\max}$ и примем положение этой оси за начальное значение кинетической энергии $E_{1\text{нач}}$. Тогда приращение кинетической энергии ΔE_1 можно выразить:

$$\Delta E_1 = E_1 - E_{1\text{нач}} = I_O \frac{\omega_1^2}{2} - I_O \frac{\omega_{1\text{нач}}^2}{2},$$

где ω_1 — текущее значение угловой скорости;
 $\omega_{1\text{нач}}$ — начальное значение угловой скорости.

Или, переписав последнее выражение в виде

$$\Delta E_1 = I_O \frac{\omega_1 + \omega_{1\text{нач}}}{2} (\omega_1 - \omega_{1\text{нач}})$$

и заменив $\omega_1 - \omega_{1\text{нач}} = \Delta\omega_1$ и $\omega_1 = \omega_{1\text{нач}} + \Delta\omega_1$, получим

$$\Delta E_1 = I_O \left(\omega_{1\text{нач}} + \frac{\Delta\omega_1}{2} \right) \Delta\omega_1.$$

Величина $\frac{\Delta\omega_1}{2}$ весьма мала по сравнению с $\omega_{1\text{нач}}$, которой можно пренебречь. Приняв в последнем выражении значение $\omega_{1\text{нач}} = \omega_{1\text{ср}}$, окончательно получим

$$\Delta E_1 = I_O \omega_{1\text{ср}} \Delta\omega_1.$$

Таким образом, диаграмму изменения кинетической энергии ведущего вала машины ΔE_1 приближенно можно принять за график изменения угловой скорости этого же вала $\Delta\omega_1$, только в другом масштабе (рис. 3.10). Последний можно определить, если выражение для ΔE_1 , выразить через отрезки чертежа

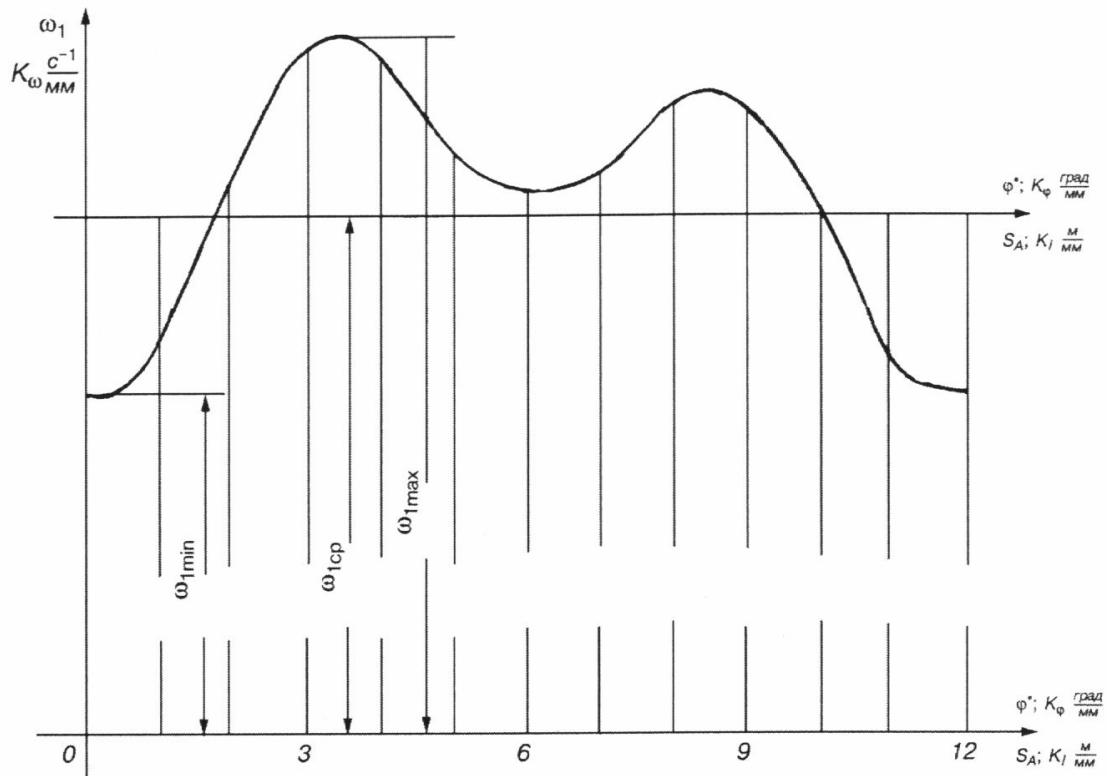


Рис. 3.10

$$y_{\Delta E_1} \cdot K_E = I_O \omega_{1cp} y_{\Delta \omega_1} K_\omega,$$

т.е. отрезки $y_{\Delta \omega_1}$, пропорциональные угловой скорости $\Delta \omega_1$, будут равны отрезкам, пропорциональным кинетической энергии ΔE_1 , если масштаб

$$K_\omega = \frac{K_E}{I_O \omega_{1cp}}.$$

Глава 4

СИЛОВОЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

Любой механизм представляет собой систему движущихся звеньев, предназначенную для выполнения определенной полезной работы. Иными словами, передача движения в подобной системе происходит под действием приложенных к ней сил. Необходимость определения последних диктуется последующими прочностными расчетами звеньев и их сочленений. Для решения подобной задачи должны быть известны силы или моменты полезного (производственного) сопротивления, линейные размеры, веса и моменты инерции звеньев, а также закон движения ведущего звена механизма. При этом на первом этапе определение усилий в кинематических парах механизма возможно произвести только без учета сил трения в сочленениях звеньев, так как для этого нужно знать еще неизвестные силы нормального давления. Силовой анализ тихоходного механизма, движение звеньев которого происходит с небольшими ускорениями, производится из условия равномерного движения механизма в целом и каждого звена в отдельности. В качестве расчетных уравнений используются известные уравнения статики:

$$\Sigma \vec{P}_i = 0; \quad \Sigma M(P_i) = 0.$$

Исследование быстроходных механизмов, ускорения звеньев которых могут достичь значительных величин, усилия в кинематических парах могут многократно превышать статические нагрузки, пренебрегать которыми недопустимо.

Для проведения силового анализа быстроходных механизмов возможно воспользоваться несколькими методами. Их можно разделить на *методы динамического расчета*, основанные на законе Ньютона, и *методы кинетостатического расчета*, в основу которых положен принцип Даламбера.

Первые из них отражают физическую сущность явления и в этом их преимущество, а вторые представляют собой искусственный прием решения динамической задачи методами статки.

4.1. Динамический метод силового анализа механизмов

Из теоретической механики известно, что любую плоскую систему сил, действующих на звено механизма, можно привести к результирующей силе R_S , приложенной в центре тяжести звена и паре сил с моментом M_S (рис. 4.1). При этом сила R_S называется *главным вектором сил*, модуль которой равен произведению массы звена m на ускорение центра тяжести звена a_S

$$\overline{R}S = m\overline{a}S$$

и имеет направление, совпадающее с направлением a_S .

Момент пары сил M_S называется *главным моментом*, модуль которого равен произведению момента инерции звена относительно оси, проходящей через центр тяжести I_S , на угловое ускорение ε

$$M_S = I_S\varepsilon$$

и имеет направление, совпадающее с направлением углового ускорения звена.

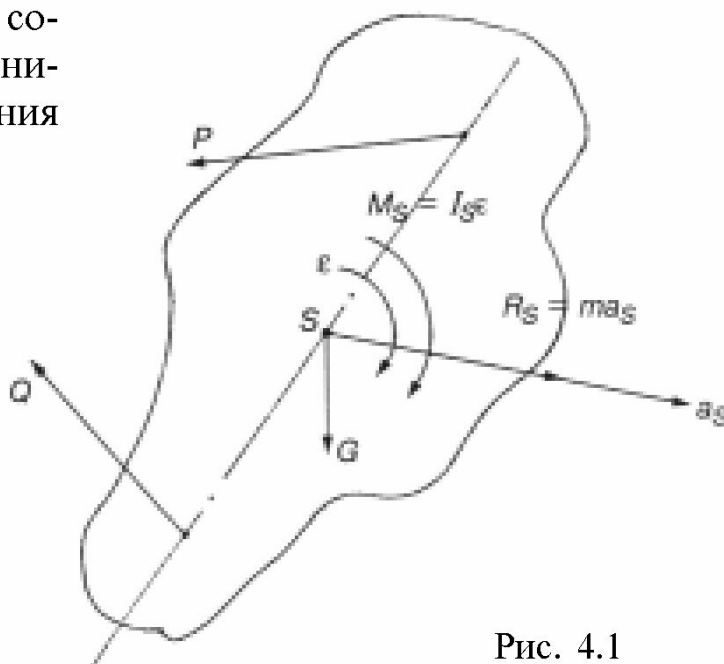


Рис. 4.1

При составлении схемы нагружения звена следует иметь в виду, что усилие во вращательной кинематической паре без учета трения всегда проходит через центр шарнира, и определению подлежит его модуль и направление; в поступательной кинематической паре усилие всегда направлено перпендикулярно траектории движения ползуна и определить необходимо его величину и точку приложения. При силовом исследовании механизмов с высшими кинематическими парами усилия в высших парах без учета трения всегда направлены по нормали к соприкасающимся профилям и приложены в точках их контакта. Определению подлежит только модуль этих усилий.

Для определения усилий в кинематических парах достаточно рассмотреть схему нагружения соответствующего звена механизма (рис. 4.2). Пусть на звено 2 действуют силы:

G_2 — вес звена, приложенный в центре тяжести S_2 ;

P_c — сила полезного сопротивления, заданная по величине и направлению;

Q_{12} — сила в шарнире A , действующая со стороны звена 1 на звено 2, известная по точке приложения и неизвестная по величине и направлению;

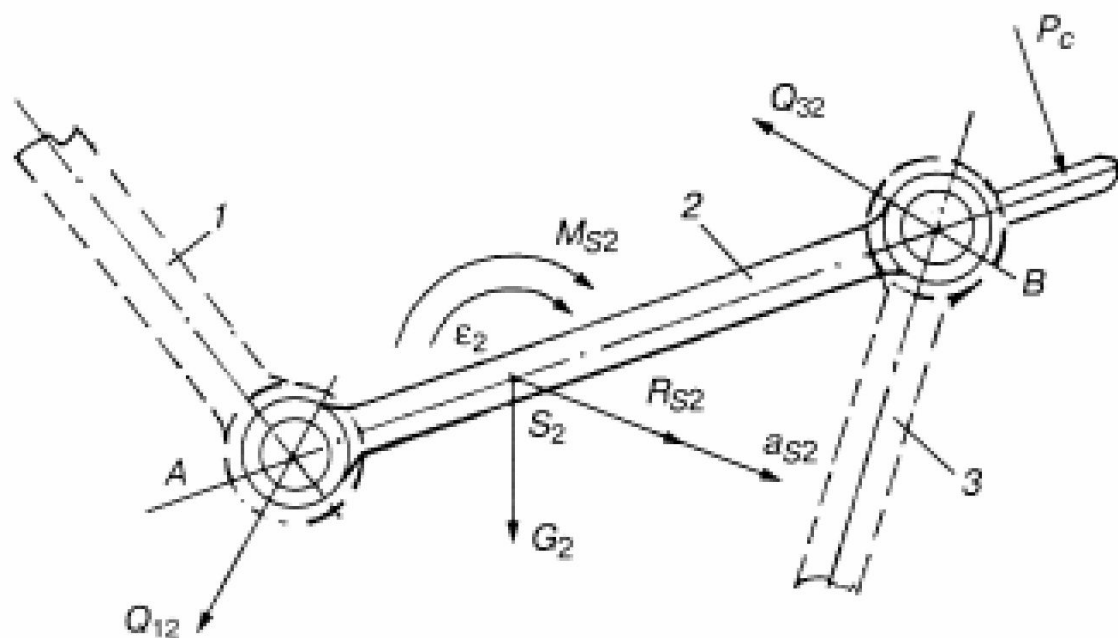


Рис. 4.2

Q_{32} — сила в шарнире B , действующая со стороны звена 3 на звено 2, известная по точке приложения и неизвестная по величине и направлению.

Сводя действующие на звено силы к главному вектору и главному моменту, можно составить векторное уравнение сил и алгебраическое уравнение моментов:

$$\overline{Q}_{12} + \overline{G}_2 + \overline{Q}_{32} + \overline{P}_c = \overline{R}_{S2} = m\overline{a}_{S2}$$

$$\Sigma M_A = M(Q_{32}) + \underline{M(G_2)} + \underline{M(P_c)} = \underline{M(R_{S2})} + \underline{M_{S2}}.$$

В приведенных уравнениях векторы сил, подчеркнутые двумя чертами, известны по модулю и направлению, моменты, подчеркнутые одной чертой, известны по модулю. При этом уравнение моментов составлено без учета знака.

В отдельных случаях систему внешних сил, действующих на звено, можно привести к одной равнодействующей силе, направленной по ускорению центра тяжести звена, модуль которой равен произведению массы звена на ускорение его центра тяжести, а точка приложения его смещена относительно центра тяжести на величину h_s , определяемую из условия

$$h_s = \frac{M_S}{R_S} = \frac{I_S \varepsilon}{R_S}.$$

При этом направление смещения равнодействующей зависит от знака момента (рис. 4.3).

Векторное уравнение сил и алгебраические уравнения моментов для отдельно взятого звена (например, для звена 2 механизма) будут составлены в форме

$$\overline{Q}_{12} + \overline{G}_2 + \overline{Q}_{32} + \overline{P}_c = R_{S2}$$

$$\Sigma M_A = M(Q_{32}) + M(G_2) + M(P_c) = M(R_S).$$

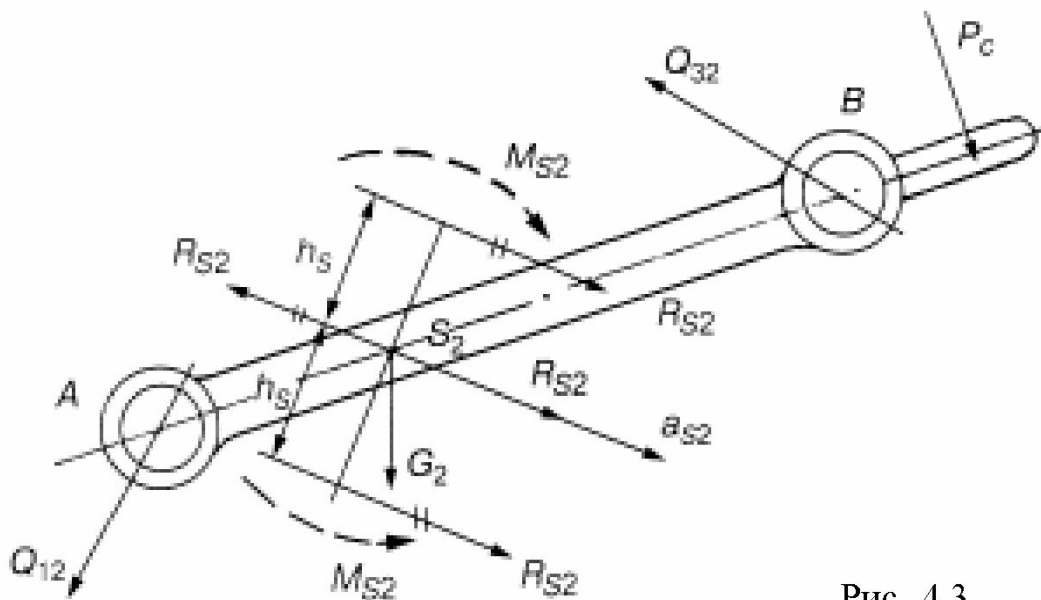


Рис. 4.3

4.2. Кинетостатический метод силового анализа механизмов

Как отмечалось выше, метод кинетостатики, основанный на принципе Даламбера, заключается в том, что к внешним силам, действующим на звено механизма, прибавляется фиктивная сила инерции $\bar{F}_S = -m\bar{a}_S$ и пара сил инерции с моментом $M_{FS} = -I_S \cdot \varepsilon$.

В итоге весь механизм в целом и каждое звено в отдельности могут рассматриваться в условном (статическом) равновесии, так как уравнения динамики формально принимают вид уравнений статики.

На основании этого для силовой схемы звена 2 (рис. 4.4) могут быть составлены следующие расчетные уравнения:

$$\bar{Q}_{12} + \bar{G}_2 + \bar{Q}_{32} + \bar{P}_c + \bar{F}_{S2} = 0$$

и

$$\Sigma M_A = M(Q_{32}) + M(G_2) + M(P_c) + M(F_{S2}) + M_{FS2} = 0.$$

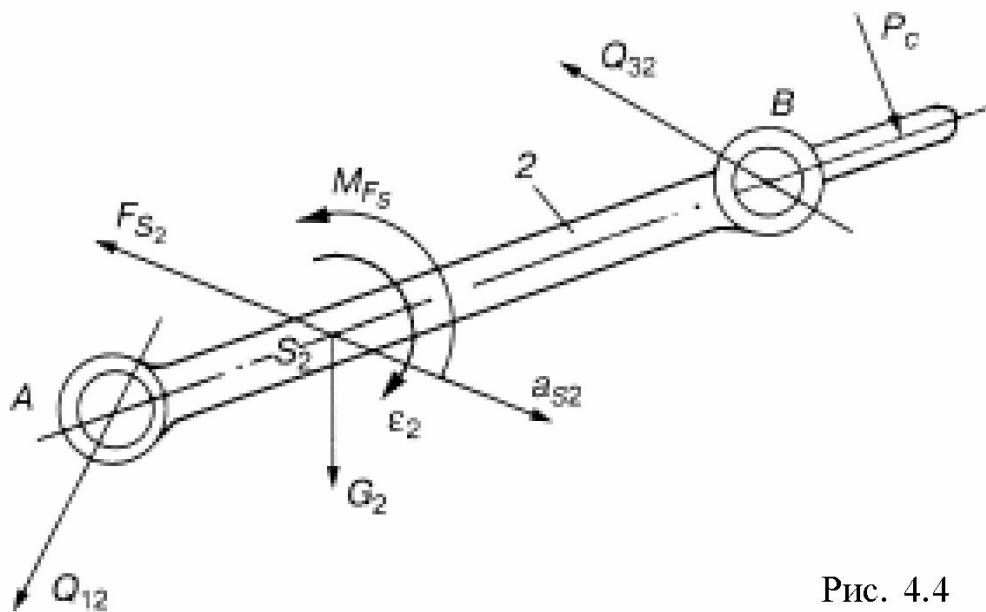


Рис. 4.4

Результирующий вектор сил инерции F_{S_2} прикладывается в центре тяжести звена и направлен против ускорения a_{S_2} ; момент пары сил инерции $M_{F_{S_2}}$ прикладывается к звену 2 и направлен противоположно его угловому ускорению ϵ_2 .

При кинетостатическом расчете, по аналогии с динамическим, результирующий вектор сил инерции F_S и момент пары M_{F_S} , могут быть приведены к одной силе, направленной противоположно ускорению центра тяжести и приложенной в точке, смещенной относительно центра тяжести на величину h_s в направлении, определяемом знаком момента M_{F_S} .

4.3. Силовой анализ механизмов методом замещающих масс

Сущность этого метода заключается в том, что масса звена размещается в нескольких точках, называемых *замещающими*, таким образом, что

а) сумма масс, сосредоточенных в замещающих точках должна быть равна массе звена

$$\sum_1^n m_i = m;$$

б) общий центр замещающих масс должен совпадать с центром тяжести звена S

$$\sum_1^n m_i x_i = 0; \quad \sum_1^n m_i y_i = 0;$$

в) сумма моментов инерции замещающих масс относительно оси, проходящей через центр тяжести звена, должна быть равна моменту инерции звена относительно той же оси

$$\sum_1^n m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum_1^n m_i \rho_i^2 = I_S.$$

Первые два условия обеспечивают *статическую эквивалентность*, а все три условия вместе выражают *динамическую эквивалентность* замещающих масс. Количество точек для размещения замещающих масс может быть разным. При размещении по четырем точкам положение последних может быть выбрано произвольно. Если размещение произвести по трем точкам, то эти точки должны лежать на одной прямой с центром тяжести звена. Замещение по двум точкам возможно при том же условии, но произвольно можно выбрать положение только одной точки.

В качестве замещающих точек следует принимать шарнирные точки и центр тяжести звена. Так, например, для звена AB , совершающего плоско-параллельное движение, в качестве замещающих могут быть выбраны точки A , B и центр тяжести звена S_2 (рис. 4.5).

При размещении замещающих масс в трех точках динамические условия эквивалентности будут составлены в форме:

$$\begin{aligned} m_{2A} + m_{2B} + m_{2S} &= m_2 \\ m_{2A} \cdot l_A &= m_{2B} \cdot l_B \\ m_{2A} \cdot l_A^2 + m_{2B} \cdot l_B^2 &= I_{S_2}. \end{aligned}$$

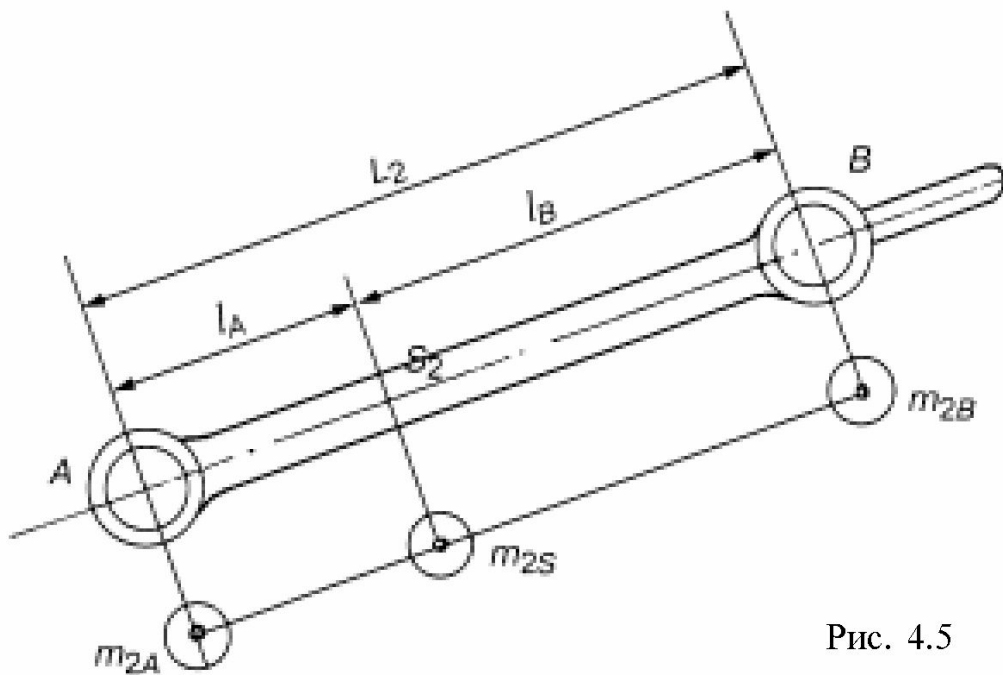


Рис. 4.5

Зная длину звена AB и положение центра тяжести звена, можно определить величину замещающих масс. Решая систему приведенных уравнений, найдем

$$m_{2A} = \frac{I_{S_2}}{l_A L_2}$$

$$m_{2B} = \frac{I_{S_2}}{l_B L_2}$$

$$m_{2S} = m_2 - \frac{I_{S_2}}{l_A l_B}.$$

Расчетная схема звена AB , нагруженного силами Q_{12} , Q_{32} , G_2 и P_c при трех замещающих массах, сосредоточенных в точках A , B и S_2 , будет эквивалентна системе трех векторов R_{24} , R_{2B} и R_{2S} (рис. 4.6).

Расчетное уравнение для определения сил в кинематических парах будет составлено в форме

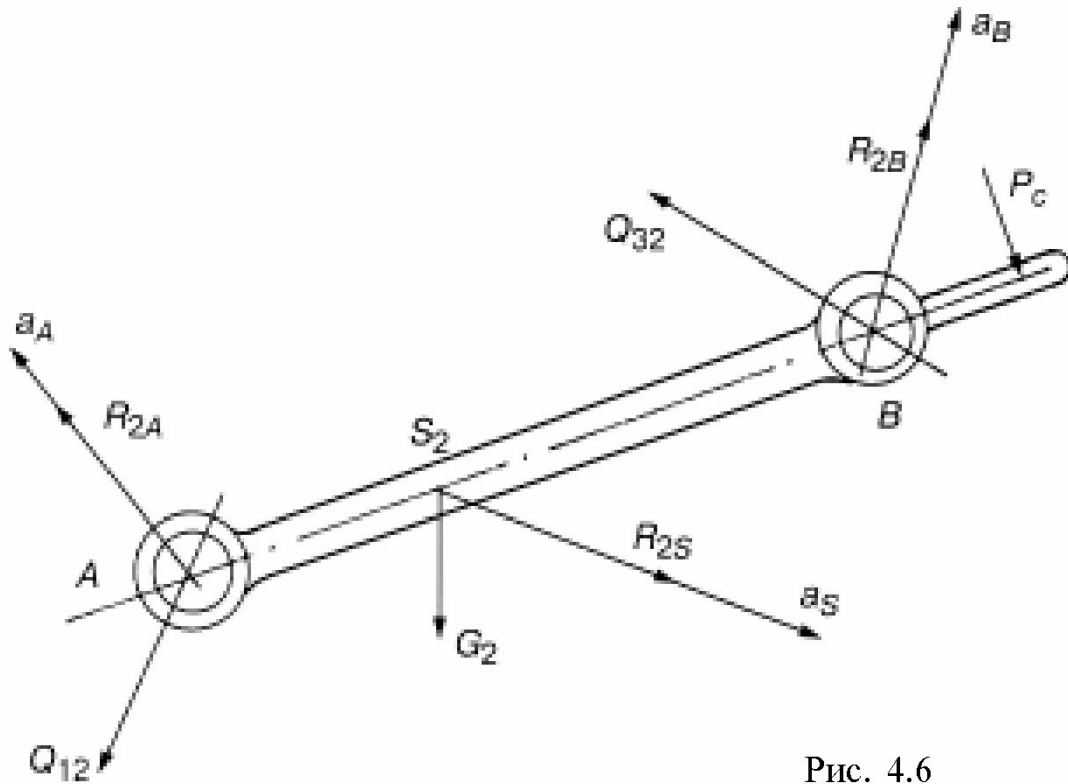


Рис. 4.6

$$\bar{Q}_{12} + \bar{G}_2 + \bar{Q}_{32} + \bar{P}_c = \bar{R}_{2A} + \bar{R}_{2S} + \bar{R}_{2B},$$

где

$$R_{2A} = m_{2A} \cdot a_A$$

$$R_{2S} = m_{2S} \cdot a_S$$

$$R_{2B} = m_{2B} \cdot a_B$$

и, соответственно,

$$\Sigma M_A = M(Q_{32}) + M(G_2) + M(P_c) = M(R_{2S}) + M(R_{2B}).$$

Приведенные уравнения показывают, что при определении усилий в кинематических парах методом замещающих масс не требуется определение углового ускорения звеньев механизма.

При кинетостатическом расчете механизмов методом замещающих масс расчетные уравнения примут вид

$$\overline{Q}_{12} + \overline{G}_2 + \overline{Q}_{32} + \overline{P}_c + \overline{F}_{2A} + \overline{F}_{2S} + \overline{F}_{2B} = 0,$$

где

$$F_{2A} = -m_{2A} \cdot a_A$$

$$F_{2S} = -m_{2S} \cdot a_{S2}$$

$$F_{2B} = -m_{2B} \cdot a_B$$

и, соответственно,

$$\Sigma M_A = M(Q_{32}) + M(G_2) + M(P_c) + M(F_{2S}) + M(F_{2B}) = 0.$$

При этом векторы сил инерции замещающих масс звеньев механизма будут направлены противоположно ускорениям замещающих точек (рис. 4.7).

Замещающими массами целесообразно заменять звенья механизма, совершающие плоско-параллельное движение. К тому же преимущество метода заменяющих масс особенно проявляется при аналитическом определении усилий в кинематических парах, если кинематический анализ механизма выполнен аналитически.

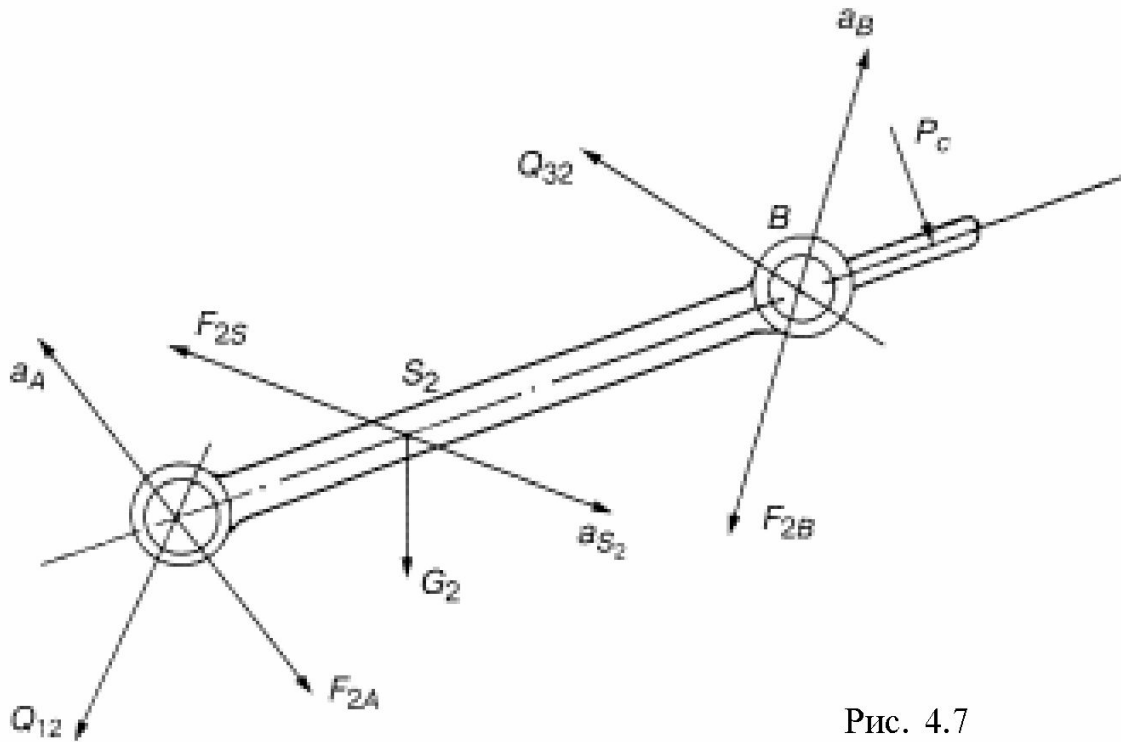


Рис. 4.7

4.4. Силовой анализ механизмов с учетом трения в кинематических парах

В процессе работы любого механизма всегда возникает трение в его подвижных сочленениях или кинематических парах. Это трение можно учесть при силовом анализе механизма, если известны размеры сочленений и силы, возникающие в них, определенные в первом приближении, т.е. без учета трения. При этом учет трения во вращательной кинематической паре производится с помощью момента трения, величина которого равна

$$M_{\text{тр}} = Qf \frac{d}{2},$$

где Q — усилие во вращательной кинематической паре, определенное без учета трения;

f — коэффициент трения во вращательной кинематической паре;

d — диаметр цапфы вращательной кинематической пары.

Направление моментов трения противоположно относительной скорости вращения сочлененных звеньев.

Трение в поступательной кинематической паре определяется с помощью силы трения

$$F = Qf,$$

где Q — усилие в поступательной кинематической паре, определенное без учета трения;

f — коэффициент трения в поступательной кинематической паре.

Направление силы трения противоположно относительной скорости движения сочлененных звеньев.

Уравнения сил и моментов для схемы нагружения звена с учетом трения (рис. 4.8), например, при силовом анализе методом кинетостатики, могут быть записаны в виде

$$\overline{Q}'_{12} + \underline{\underline{\overline{G}_2}} + \underline{\underline{\overline{P}_c}} + \overline{Q}'_{32} + F_{S_2} = 0$$

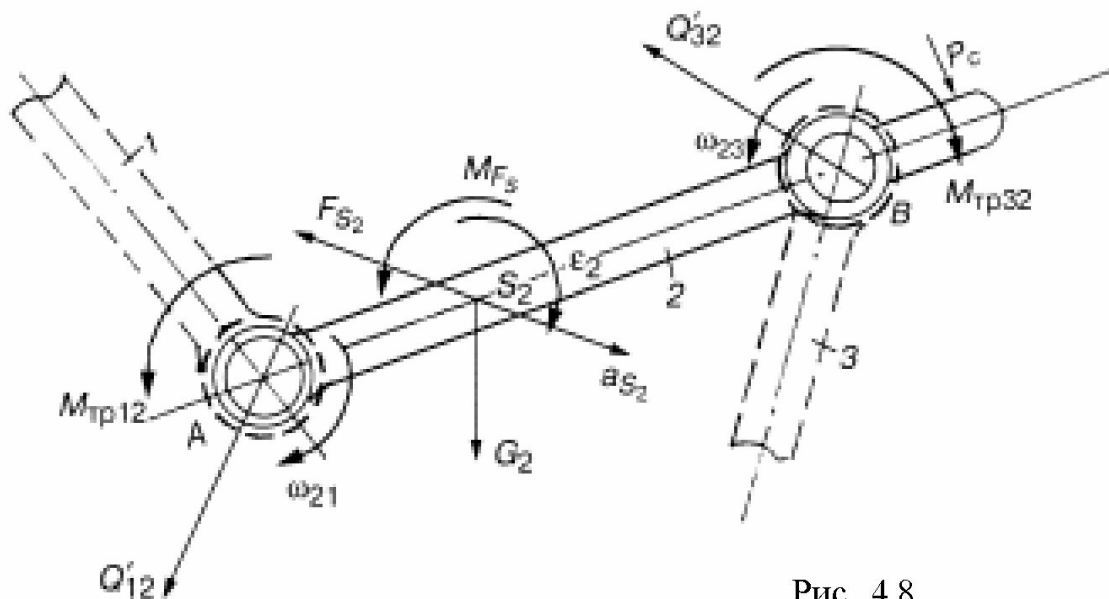


Рис. 4.8

и

$$\Sigma M_A = \underline{M_{\text{тр}12}} + \underline{M(G_2)} + \underline{M(P_c)} + \underline{M(Q'_{32})} + \underline{M_{\text{тр}32}} + M(F_{S_2}) + M_{F_S} = 0.$$

Решая приведенные уравнения определяют новые значения усилий Q'_{12} и Q'_{32} , определенных без учета трения. В то же время новые значения сил Q'_{12} и Q'_{32} нужно использовать для уточнения моментов, новые значения которых $M'_{\text{тр}12}$ и $M'_{\text{тр}32}$ будут отличаться от $M_{\text{тр}12}$ и $M_{\text{тр}32}$. Таким образом процесс уточнения теоретически может продолжаться до бесконечности, и метод определения усилий в кинематических парах с учетом трения носит название — *метод последовательных приближений*. Следует отметить, что уточнение результатов с каждым приближением становится все меньше и на практике достаточно ограничиться первым приближением.

Пример: определить усилия в кинематических парах кривошипно-ползунного механизма (рис. 4.9, а) при следующих исходных данных: число оборотов кривошипа n об/мин, размеры звеньев механизма l_{OA} (м), l_{AB} (м), положение центра тяжести звена 2 — l_{AS_2} (м), центр тяжести звена 3 совпадает с

т. B , центр тяжести звена l совпадает с т. O , положение ведущего звена φ_1 , положение траектории движения ползуна φ_0 , сила полезного сопротивления P_c (Н), момент инерции звена 2 — I_{S_2} кг·м². При определении усилий в кинематических парах использовать метод динамики.

Построив план скоростей и ускорений (рис. 4.9, б, в) по уравнениям

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA}$$

и

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^n + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^t,$$

где

$$V_A = \omega_1 l_{OA} \text{ м/с} \quad \text{и} \quad a_A^n = \omega_1^2 l_{OA} \text{ м/с}^2,$$

определим ускорения центров тяжести звеньев 2 и 3

$$a_{S_2} = \pi S_2 K_a \text{ м/с}^2$$

$$a_{S_3} = \pi S_3 K_a \text{ м/с}^2$$

и угловое ускорение звена 2,

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^t}{l_{BA}} = \frac{1b \cdot K_a}{l_{BA}} 1/\text{с}^2.$$

Вычислим главные векторы звеньев 2 и 3 и главный момент звена 2:

$$R_{S_2} = m_2 a_{S_2} = \frac{G_2}{g} a_{S_2} \text{ Н}$$

$$R_{S_3} = m_3 a_{S_3} = \frac{G_3}{g} a_{S_3} \text{ Н}$$

и

$$M_{S_2} = I_{S_2} \varepsilon_2 \text{ Нм.}$$

Вычертив схему нагружения звеньев 2 и 3, сохранив при этом масштаб построения и положение звеньев (рис. 4.10, а), составим уравнение сил и моментов

$$\underline{Q_{12}^n} + \underline{Q_{12}^t} + \underline{G_2} + \underline{P_c} + \underline{G_3} + \underline{Q_{03}} = \underline{R_{S_2}} + \underline{R_{S_3}}$$

и

$$\Sigma M_B = -Q_{12}^t \cdot AB - G_2 h_{G_2} = -R_{S_2} \cdot h_{R_{S_2}} - M_{S_2}.$$

В уравнениях сил усилие Q_{12} неизвестное по модулю и направлению, разложено на два направления: Q_{12}^t — перпендикулярное звену и Q_{12}^n — совпадающее с направлением звена; усилие Q_{03} — направлено перпендикулярно линии движения ползуна 3.

В уравнении моментов моменты, направленные против часовой стрелки, приняты со знаком минус и соответственно по часовой стрелке — со знаком плюс.

Из уравнения моментов найдем

$$Q_{12}^t = \frac{-G_2 h_{G_2} + R_{S_2} h_{R_{S_2}} + M_{S_2}}{AB}.$$

Решая графически векторное уравнение сил, определим неизвестные усилия Q_{12}^n и Q_{03} (рис. 4,10, б).

Для определения усилия в шарнире В достаточно составить уравнение сил для звена 2 или 3 в отдельности.

Для звена 2:

$$\underline{G_2} + \underline{Q_{12}} + \underline{Q_{32}} = \underline{R_{S_2}}.$$

Для звена 3:

$$\underline{G_3} + \underline{P_c} + \underline{Q_{03}} + \underline{Q_{23}} = \underline{R_{S_3}}.$$

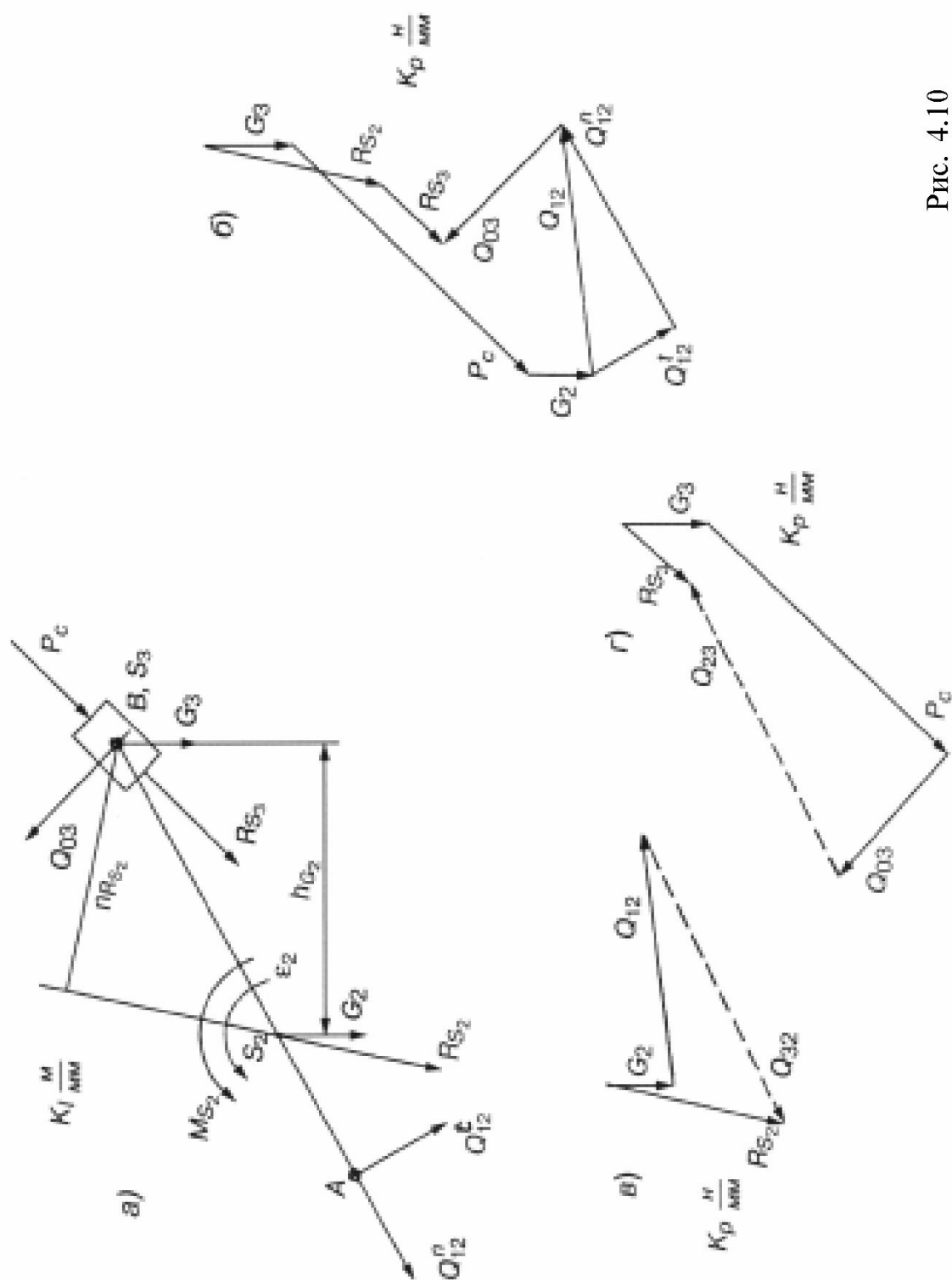


Рис. 4.10

Сравнивая планы сил для звеньев 2 и 3, нетрудно установить, что усилия Q_{23} и Q_{32} равны по модулю, но противоположны по знаку, что подтверждается третьим законом Ньютона (рис. 4,10, в, г).

Для определения усилия в коренном подшипнике ведущего звена механизма, т.е. в шарнире O , необходимо представить схему нагружения звена 1 (рис. 4.11, а). В этой схеме центр тяжести звена S_1 совпадает с центром вращения O , следовательно ускорение a_{S_1} и главный вектор R_{S_1} равны нулю. Кроме того, с целью упрощения расчета предполагается, что ведущее звено вращается с равномерной скоростью, в связи с чем угловое ускорение $\varepsilon_1 = 0$ и соответственно, главный момент $M_{S_1} = 0$. При составлении схемы нагружения ведущего звена необходимо иметь ввиду, что для приведения его в движение к нему должен быть приложен движущий момент, который можно представить в виде произведения

$$M_{\text{уп}}^{\text{дв}} = P_{\text{уп}} \cdot l_{OA},$$

в котором $P_{\text{уп}}$ — уравнивающая сила.

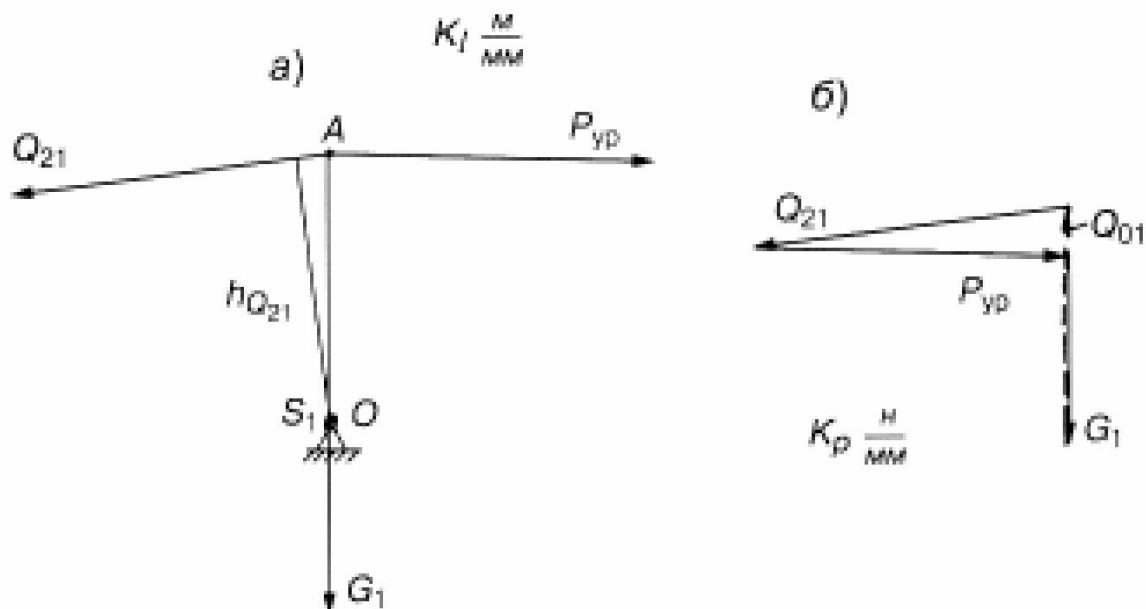


Рис. 4.11

Если $M^{дв}$ неизвестен, то он может быть определен из уравнения моментов

$$\Sigma M_0 = -Q_{21} \cdot h_{Q_{21}} + P^{yp} \cdot OA = R_{S_1} \cdot h_{R_{S_1}} + M_{S_1} = 0$$

$$M^{дв} = P^{yp} \cdot OA = Q_{21} \cdot h_{Q_{21}}.$$

Усилие в кинематической паре O определяется из уравнения сил (рис. 4.11, б)

$$\underline{\underline{Q_{21}}} + \underline{\underline{P^{yp}}} + \underline{\underline{G_1}} + \underline{\underline{Q_{01}}} = \underline{\underline{R_{S_1}}} = 0.$$

Аналогичным образом определяются усилия в кинематических парах механизма методами кинетостатики и замещающих масс. При кинетостатическом исследовании схема нагружения звеньев 2–3 будет иметь вид (рис. 4.12, а).

Уравнения сил и моментов соответственно будут записаны в форме

$$\underline{\underline{Q_{12}^n}} + \underline{\underline{Q_{12}^t}} + \underline{\underline{G_2}} + \underline{\underline{P_c}} + \underline{\underline{G_3}} + \underline{\underline{F_{S_2}}} + \underline{\underline{F_{S_3}}} + \underline{\underline{Q_{03}}} = 0$$

и

$$\Sigma M_B = -Q_{12}^t \cdot AB - G_2 \cdot h_{G_2} + F_{S_2} \cdot h_{F_{S_2}} + M_{F_{S_2}} = 0.$$

Из уравнения моментов находим

$$Q_{12}^t = \frac{-G_2 \cdot h_{G_2} + F_{S_2} \cdot h_{F_{S_2}} + M_{F_{S_2}}}{AB},$$

и из уравнения сил определяем Q_{12}^n и Q_{03} (рис. 4.12, б).

Схема нагружения ведущего звена, а также уравнения сил и моментов будут иметь точно такой же вид при совпадении центра тяжести с осью вращения звена, вращающегося с равномерной скоростью (рис. 4.11, а, б).

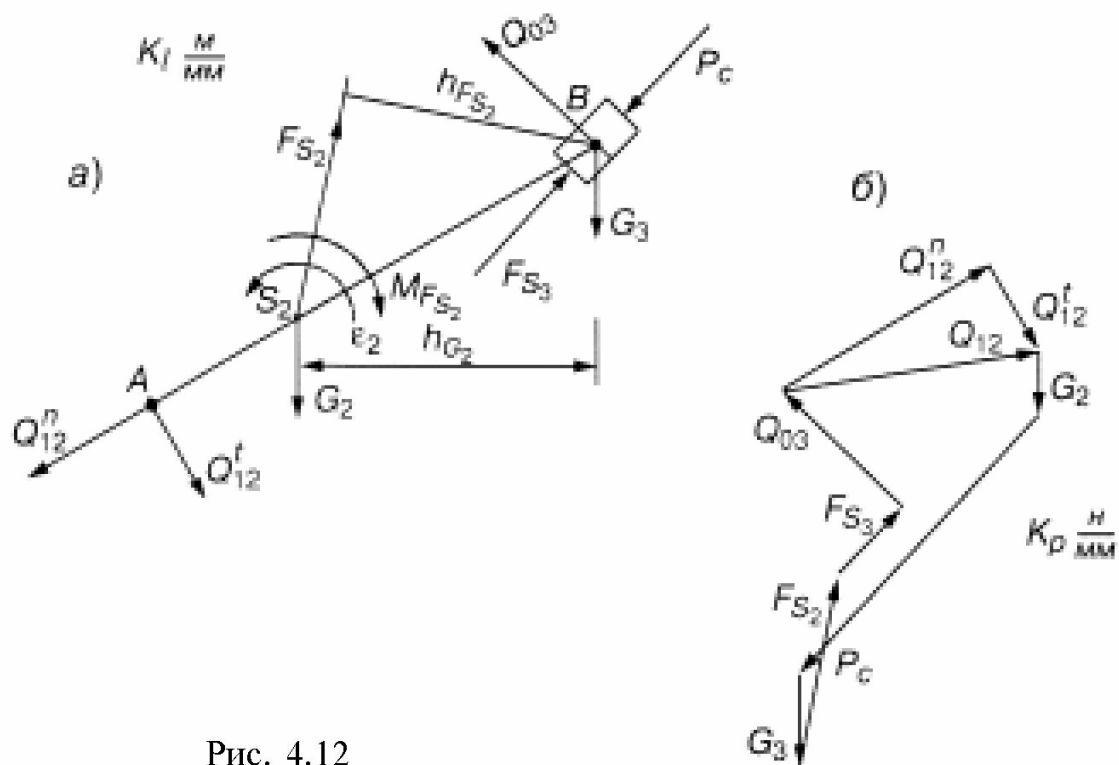


Рис. 4.12

При определении усилий в кинематических парах методом замещающих масс необходимо сосредоточить массу звена 2 в замещающих точках A , S_2 и B , воспользовавшись ранее полученными формулами:

$$m_{2A} = \frac{I_{S_2}}{l_{AS_2} \cdot l_{AB}}$$

$$m_{2B} = \frac{I_{S_2}}{l_{BS_2} \cdot l_{AB}}$$

$$m_{2S} = m_2 - \frac{I_{S_2}}{l_{AS_2} \cdot l_{BS_2}}.$$

Для составления уравнений кинестатики или динамики вычисляются векторы и моменты сил инерции:

$$F_{S_1} = 0$$

$$F_{2A} = -m_{2A} \cdot a_A$$

$$F_{2S} = -m_{2S} \cdot a_{S_2}$$

$$F_{2B} = -m_{2B} \cdot a_B$$

$$F_{S_3} = -m_3 \cdot a_{S_3}$$

и, соответственно,

$$M_{S_1} = 0$$

$$M_{S_3} = 0.$$

Представив схему нагружения звеньев 2 и 3 (рис. 4.13, а), составим уравнение кинетостатики

$$\underline{\underline{Q_{12}^n}} + \underline{\underline{Q_{12}^t}} + \underline{\underline{F_{2A}}} + \underline{\underline{G_2}} + \underline{\underline{F_{2S}}} + \underline{\underline{F_{S_3}}} + \underline{\underline{F_{2B}}} + \underline{\underline{G_3}} + \underline{\underline{P_c}} + \underline{\underline{Q_{03}}} = 0$$

и

$$\Sigma M_B = -Q_{12}^t \cdot AB + \underline{\underline{F_{2A} \cdot h_{F_{2A}}}} - \underline{\underline{G_2 \cdot h_{G_2}}} + \underline{\underline{F_{2S} \cdot h_{F_{2S}}}} = 0.$$

Из уравнения моментов определим

$$Q_{12}^t = \frac{F_{2A} \cdot h_{F_{2S}} - G_2 \cdot h_{G_2} + F_{2S} \cdot h_{F_{2S}}}{AB}.$$

Далее из уравнения сил находим Q_{12}^n и Q_{03} (рис. 4.13, б).

Определение уравновешивающей силы и усилия в шарнире O производится аналогично с ранее рассмотренными методами.

Надо отметить, что усилия в кинематических парах механизма определены без учета сил трения. При необходимости учета последних следует определить силу трения в поступательной кинематической паре и моменты трения во вращательных кинематических парах с последующим учетом их в уравнениях сил и моментов.

Кроме того, необходимо обратить внимание и на то об-

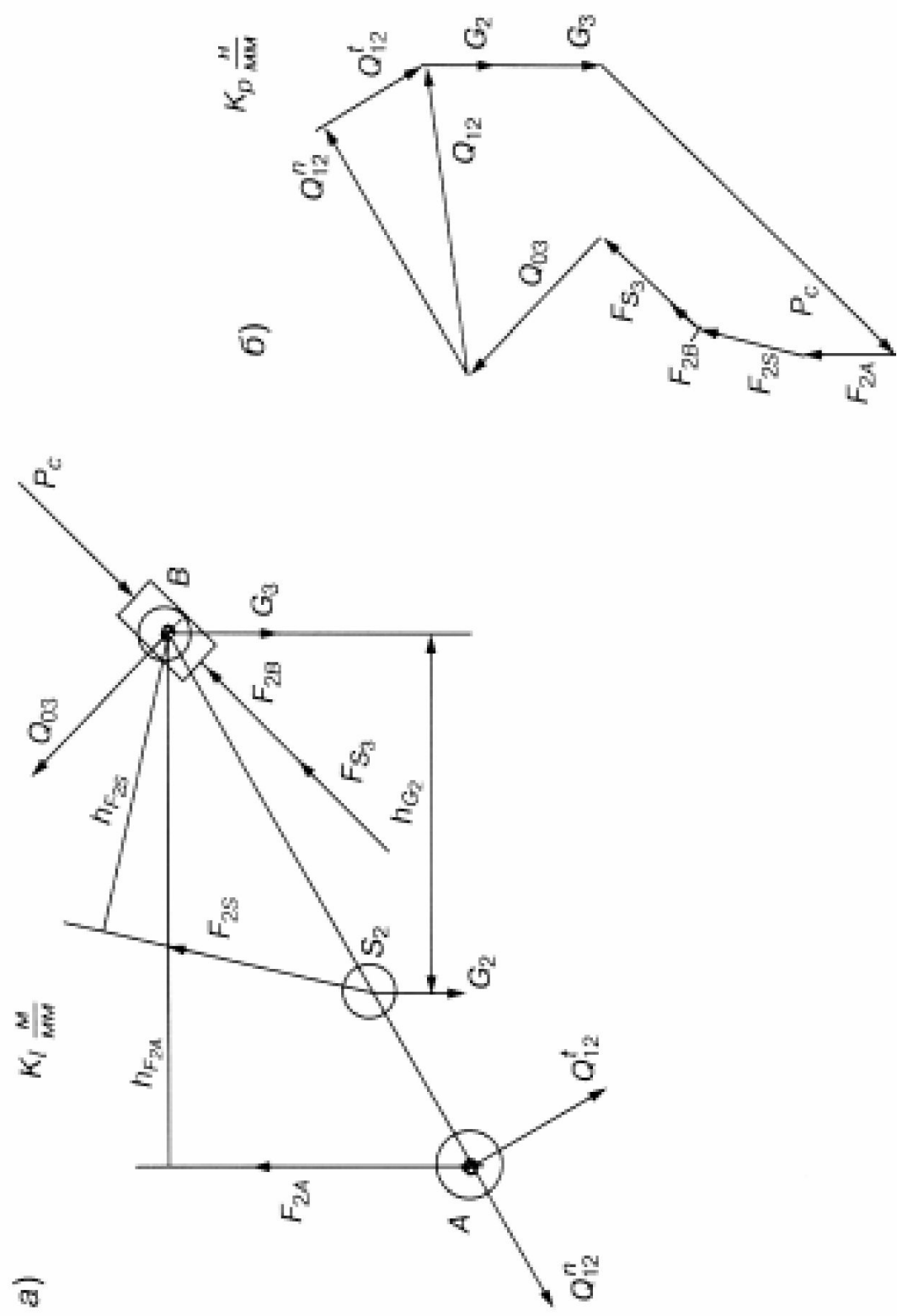


Рис. 4.13

стоятельство, что в данном примере усилия в кинематических парах определены только для заданного положения механизма. С изменением положения последнего могут измениться внешние силы, силы и моменты сил инерции, силы сопротивления, моменты сил трения. Следовательно, изменяются и внутренние силы, т.е. усилия в кинематических парах, как по величине так и по направлению. Поэтому для полной оценки силовой анализ механизма производится за цикл его движения, т.е. за полный оборот ведущего звена. При этом результаты анализа наносятся на графики, по которым устанавливается положение с наиболее тяжелыми условиями работы, используемыми затем для прочностных расчетов элементов механизма и определения его приводной мощности.

Глава 5

КУЛАЧКОВЫЕ МЕХАНИЗМЫ

К кулачковым относятся механизмы, в схемах которых присутствуют низшие и высшие кинематические пары, а одно из звеньев совершает возвратное движение (поступательное или вращательное). Имеются их разные типы, которые различаются между собой по характеру движения звеньев (плоские и пространственные), по конструктивным особенностям ведущего и ведомого звена, по способу замыкания высшей кинематической пары и др. (рис. 5.1).

Звено *1* в кулачковом механизме конструктивно может быть выполнено в виде вращающегося плоского диска некруглой формы, поступательно движущегося ползуна с криволинейным профилем, а также в виде цилиндра или конуса с фасонным срезом или пазом и называется *кулачком*. Кинематически связанное с кулачком звено *2* по своей конструкции встречается заостренным, с контактным роликом, грибовидной или плоской формы и называется *толкателем*. Для уменьшения трения в высшей кинематической паре толкатель нередко снабжают роликом, заменив, таким образом, трение скольжения трением качения.

Кулачковые механизмы получили весьма широкое распространение в силу возможности получения практически любого закона движения ведомого звена, что гораздо сложнее достичь при использовании шарнирно-рычажных механизмов. В то же время, наличие высшей кинематической пары в кулачковом механизме ограничивает их использование в качестве силовых передач из-за повышенного износа или деформации поверхностей высшей пары, ведущих к постепенному искажению закона движения ведомого звена и снижению срока службы механизма.

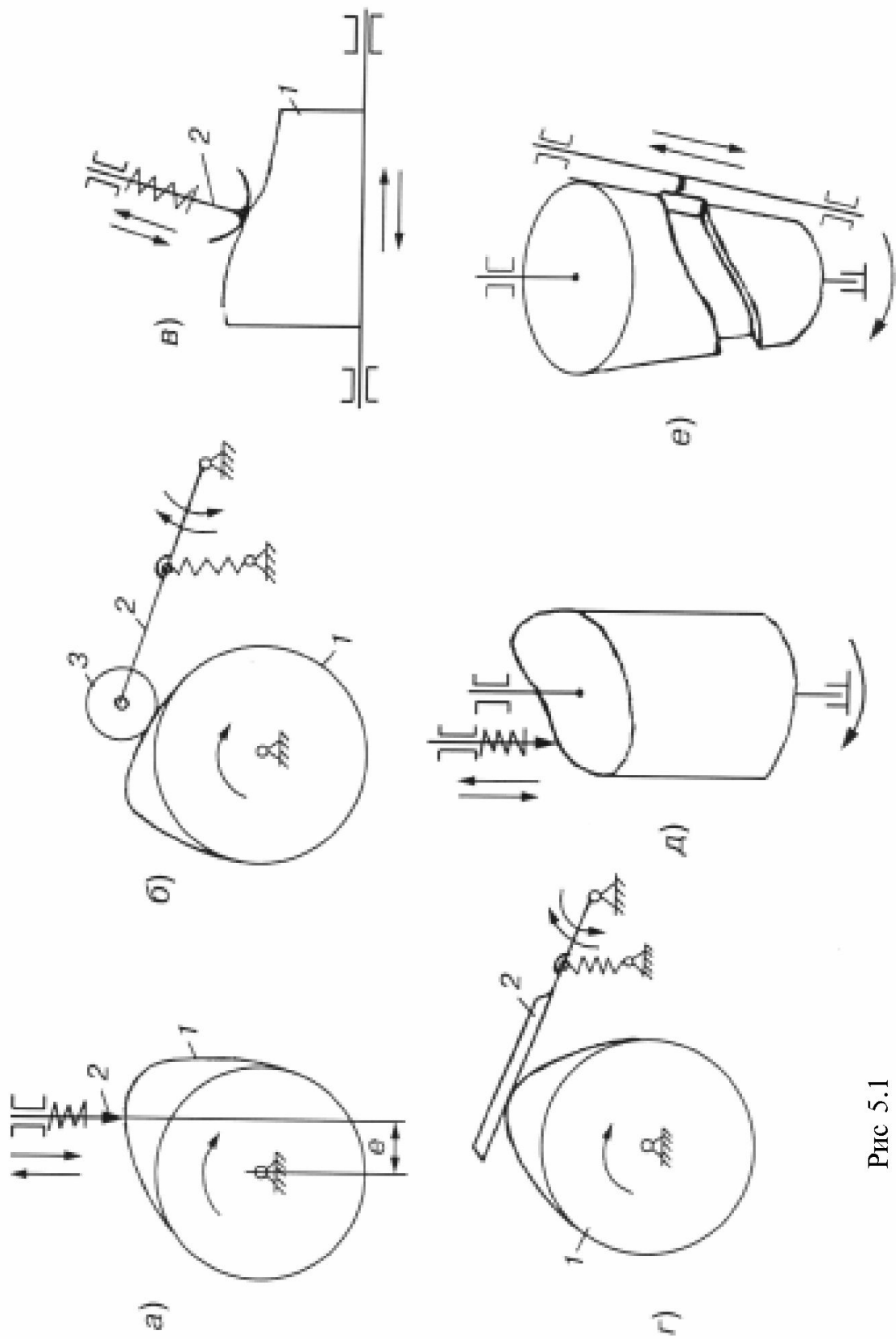


Рис 5.1

5.1. Основные параметры кулачкового механизма

При кинематическом анализе и синтезе кулачковых механизмов следует использовать ряд характерных параметров, присущих данному типу механизмов (рис. 5.2).

Определив степень подвижности кулачкового механизма с поступательно движущимся роликовым толкателем, показанным на схеме, получим

$$W = 3n - 2p_n - p_v = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 1 = 2.$$

Согласно данному результату, в механизме должно быть два ведущих звена: кулачок 1 и ролик 3. Однако движение ролика вокруг своей оси не влияет на закон движения толка-

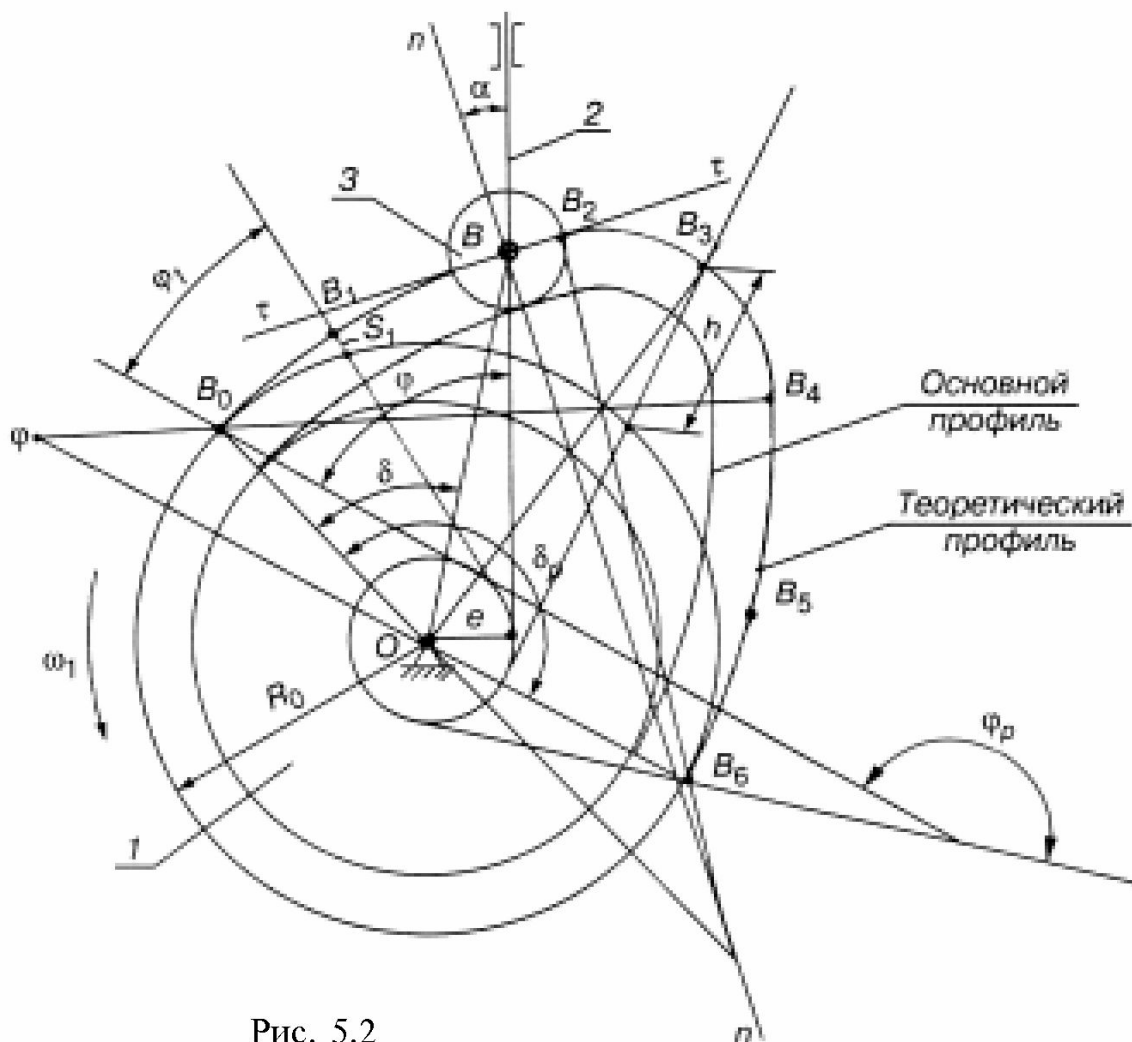


Рис. 5.2

теля. Поэтому при кинематическом исследовании его можно отбросить, толкатель выполнить заостренным, а профиль кулачка заменить равноотстоящим от основного профиля на расстоянии, равном радиусу ролика. Таким образом, в кулачковом механизме с роликовым толкателем различают основной профиль кулачка и, соответственно, *равноотстоящий (теоретический или эквидистантный)* профиль. Если проследить за характером движения толкателя при непрерывном вращении кулачка, то можно выявить два этапа его движения: подъем (движение вверх) и опускание (движение вниз). Все остальное время движения кулачка в пределах цикла или одного оборота толкатель неподвижен. При этом неподвижным он может оставаться как в нижнем, так и в верхнем положении в зависимости от профиля кулачка. Толкатель будет неподвижным, если он будет контактировать с профилем кулачка, очерченным из центра его вращения. Это возможно как при наинижем, так и при наивысшем положении толкателя. В первом случае будет нижний выстой толкателя, а во втором — верхний. Однако профиль кулачка может быть выполнен таким образом, что выстой толкателя будет равен нулю как в нижнем, так и в верхнем его положении или в одном из них, определяемых исходными данными задания.

При исследовании кинематики кулачкового механизма следует различать положение толкателя относительно центра вращения кулачка. Если линия движения толкателя проходит через центр вращения кулачка, то такие механизмы называются *с центрально расположенным толкателем*, если же эта линия смещена относительно центра, то механизм называется *дезаксиальным*. Величина смещения называется *эксцентриситетом (e)* или *дезаксиалом*.

Рабочий участок профиля кулачка определяется центральным углом δ_p , равным $\angle B_0OB_6$ и называемым *рабочим углом профиля кулачка*, в пределах которого происходит движение толкателя.

Наряду с этим вводится понятие *угла поворота кулачка φ* , под которым понимается угол, на который должен повернуться кулачок при переходе точки контакта толкателя с кулач-

ком из одного положения в другое. При этом угол поворота при контакте толкателя с кулачком в пределах всего рабочего участка профиля кулачка φ_p всегда равен рабочему углу профиля кулачка δ_p . В то же время для дезаксиальных кулачковых механизмов, для отдельных участков рабочего профиля $\varphi \neq \delta$.

При проектировании кулачковых механизмов вводятся понятия *рабочего хода толкателя* h , равного его перемещению из наинизшего положения в наивысшее или наоборот и *угла давления* α , образуемого между линией движения толкателя и нормалью $n-n$ к профилю кулачка в точке контакта.

Полный профиль кулачка можно представить состоящим из двух участков, один из которых очерчен по окружности из центра вращения кулачка и носит название его *начальной окружности*, а второй очерчен рядом кривых или прямых линий, выступающих за пределы начальной окружности и называется *рабочим профилем кулачка*. При этом рабочий профиль плавно сопрягается с начальной окружностью радиуса R_0 в точках B_0 и B_6 . Тогда B_3 является наиболее удаленной от центра вращения кулачка, а остальные точки являются промежуточными, количество которых может быть выбрано произвольно при кинематическом исследовании механизма.

5.2. Кинематическое исследование кулачковых механизмов

При непрерывном вращении кулачка толкатель будет совершать движение по определенному закону, определяемому профилем кулачка.

Для построения графика перемещений толкателя нужно знать его положение относительно кулачка при любом угле его поворота (φ). Очевидно, если толкатель будет контактировать с профилем кулачка в точках B_0 и B_6 , то он будет занимать наинизшее положение, и, соответственно, при контакте в т. B_3 он будет находиться в наивысшем положении.

В остальных точках его положение будет промежуточным. Для нахождения отрезков, на величину которых переместится толкатель от своего наинизшего положения, следует поворачивать либо кулачок до совмещения намеченных точек с линией движения толкателя, либо толкатель относительно кулачка до соответствующих точек. Значительно проще второй способ, для реализации которого используется прием обращенного движения, сущность которого заключается в том, что всему механизму сообщается угловая скорость, равная по величине, но обратная по знаку угловой скорости кулачка. При этом кулачок останавливается, а толкатель вместе с направляющей стойкой будет совершать обкаточное движение относительно профиля кулачка, линия движения которого будет оставаться смещенной относительно центра вращения кулачка на величину эксцентриситета. Помещая толкатель в наинизшее положение, т.е. проведя через точку B_0 линию движения толкателя касательно к окружности эксцентриситета, примем точку B_0 за начало координат.

Для определения перемещения толкателя при контакте его с кулачком в точке B_1 , следует провести через эту точку линию движения толкателя касательно к окружности эксцентриситета и замерить отрезок S_1 от точки B_1 до начальной окружности. Угол между линиями движения толкателя, проведенными через точки B_0 и B_1 , будет равен углу поворота кулачка φ_1 . Откладывая его по оси абсцисс в произвольно выбранном масштабе, отмеряем по вертикали соответствующий ему отрезок перемещения S_1 . По аналогии определяются углы поворота кулачка и соответствующие им перемещения толкателя для всех остальных намеченных точек (рис. 5.3).

Масштабы по координатным осям выбираются произвольно

$$K_S = \frac{h}{S_{\max}},$$

где h — ход толкателя в м.

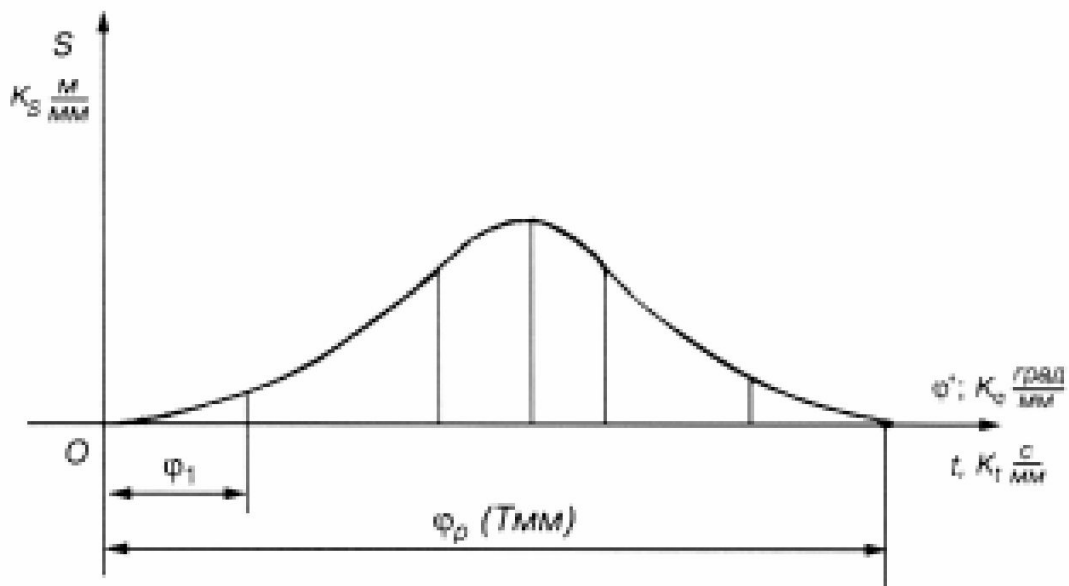


Рис. 5.3

$$K_{\varphi} = \frac{\varphi_p^0}{T} \frac{\text{град}}{\text{мм}}$$

T — база диаграммы в мм

$$t_p = \frac{\varphi_p}{\omega_1} = \frac{\varphi_p^0 \cdot \pi \cdot 30}{180 \cdot \pi \cdot n} = \frac{\varphi_p^0}{6n} \text{ с}$$

$$K_t = \frac{\varphi_p^0}{6nT} \frac{\text{с}}{\text{мм}}$$

При определении скорости и ускорения толкателя можно воспользоваться методом графического дифференцирования диаграммы перемещений (см. глава 2). Однако этот метод допускает значительные погрешности при определении искомых параметров и редко применяется для этой цели. Чаще используется метод заменяющих механизмов, заключающийся-

ся в замене высшей кинематической пары в кулачковом механизме кинематической цепью с низшими кинематическими парами. Сущность метода сводится к следующему: определив степень подвижности цепи, состоящей из высшей кинематической пары, нужно подобрать эквивалентную кинематическую цепь с низшими кинематическими парами.

Пусть задана цепь, состоящая из двух звеньев, образующих высшую кинематическую пару. Степень подвижности такой цепи по формуле Чебышева

$$W = 3n - 2p_{\text{н}} - p_{\text{в}} = 3 \cdot 2 - 1 = 5.$$

В этой цепи количество звеньев $n = 2$, низших кинематических пар $p_{\text{н}} = 0$ и $p_{\text{в}} = 1$.

Эквивалентную цепь с низшими кинематическими парами можно составить, если принять $n = 3$ и $p_{\text{н}} = 2$, т.е.

$$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 0 = 5.$$

Такую цепь схематично можно изобразить, приняв центры кривизны элементов высшей пары за низшие кинематические пары, соединенные общим звеном, к которому присоединены примыкающие рычажные звенья (рис. 5.4).

Используя метод замены высшей кинематической пары кинематической цепью с низшими парами, представим различные схемы заменяющих механизмов. Пусть рабочий профиль кулачка очерчен системой дуг окружности (рис. 5.5). Необходимо построить заменяющий механизм для положения толкателя в точке B_2 , являющейся точкой сопряжения двух дуг профиля кулачка, очерченных из центров A_1 и A_2 . Таким образом, в этом положении толкателя будут два заме-

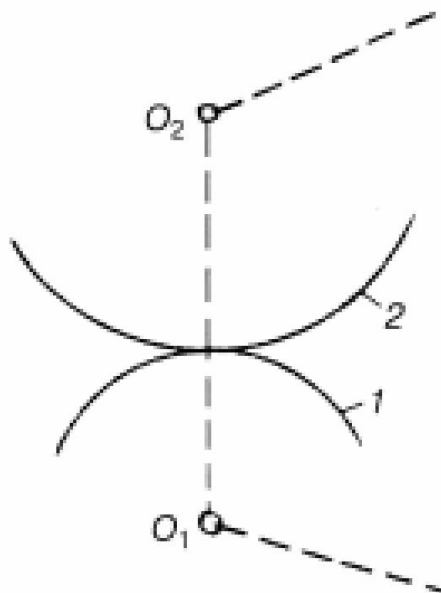


Рис. 5.4

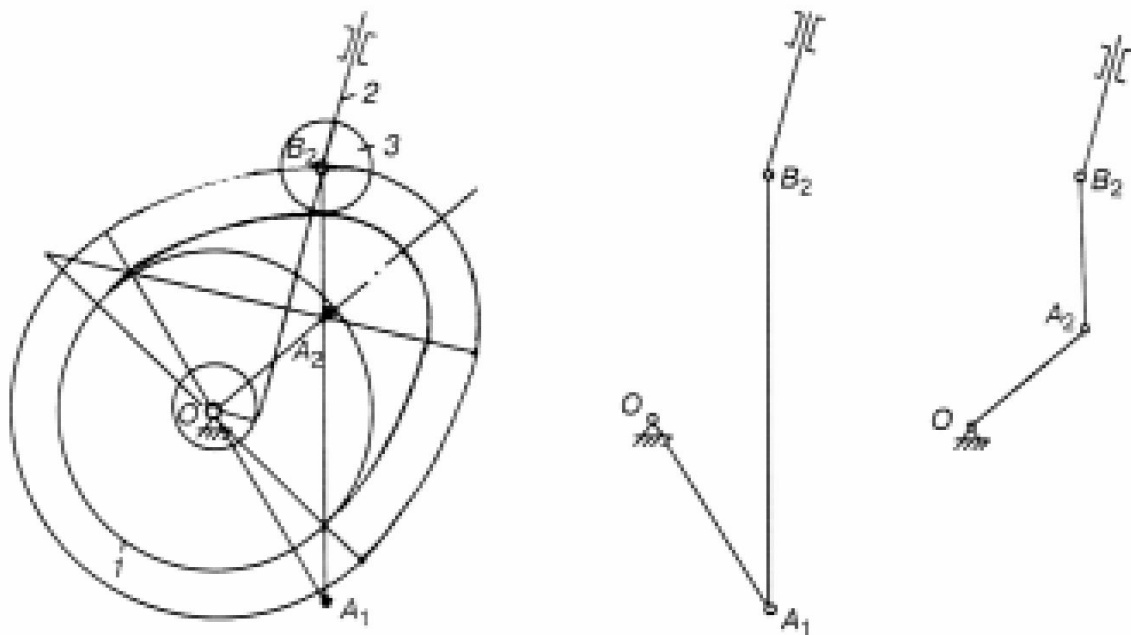


Рис. 5.5

няющих механизма. Для первого из них соединяем центры кривизны элементов высшей пары A_1 и B_2 жестким звеном, а по концам его присоединяем примыкающие звенья A_1O в точке A_1 и толкатель 2 в точке B_2 . Построенный заменяющий механизм представляет собой кривошипно-ползунный механизм со смещенным относительно центра вращения кулачка ползуном. Второй заменяющий механизм для этого же положения толкателя строится аналогичным образом с той разницей, что для него будут другие размеры звеньев. По аналогии могут быть построены заменяющие механизмы для любого положения толкателя, контактирующего с рабочим участком профиля кулачка. Если рабочий участок профиля кулачка выполнен по неизвестной кривой, то на исследуемом участке его можно заменить дугами окружности с достаточной степенью приближения, используя известный прием из геометрии. Для построения заменяющей профиль дуги окружности достаточно взять на кривой две соседние точки по разные стороны от исследуемой, соединить их хордами с исследуемой точкой и через середины хорд провести перпендикуляры до их

пересечения. Полученная точка и будет центром дуги окружности, проходящей через все три точки,

В ряде случаев рабочий профиль кулачка может быть очерчен по прямой линии. При построении заменяющего механизма следует обеспечить возможность прямолинейного относительного движения толкателя относительно кулачка. Это условие может быть выполнено только с помощью кулисного механизма. В качестве примера построим заменяющий механизм, если рабочий профиль кулачка на отдельном участке выполнен по прямой линии (рис. 5.6).

Если кулачковый механизм будет выполнен с качающимся толкателем, то в схемах заменяющих механизмов необходимо заменить поступательно движущийся толкатель на качающийся.

При кинематическом исследовании кулачкового механизма требуется определить его кинематические параметры за весь цикл движения. С этой целью должна быть вычерчена схема кулачкового механизма в масштабе, намечены харак-

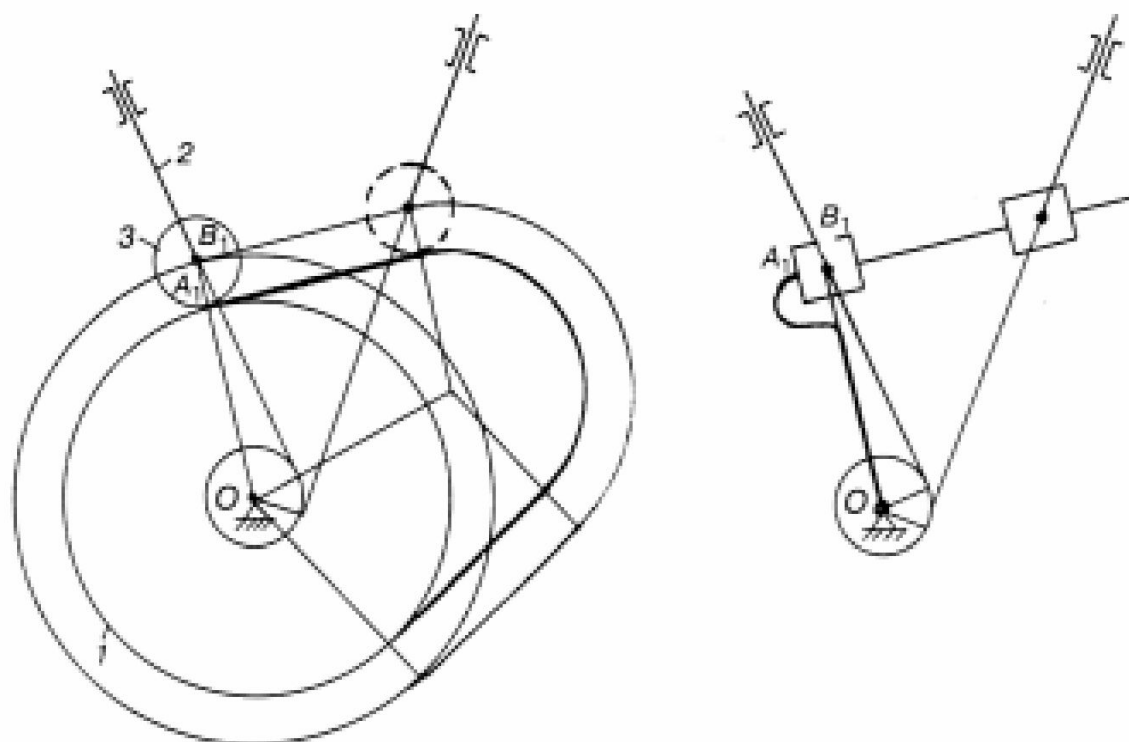


Рис. 5.6

терные точки на рабочем профиле кулачка, для которых определены перемещения, скорости и ускорения толкателя и построены диаграммы их изменения. Саму методику удобно проиллюстрировать на конкретном примере, в качестве которого используем кулачковый механизм с поступательно движущимся роликовым толкателем и профилем кулачка, очерченным системой дуг окружности и прямых участков (рис. 5.7, а). Для исследования наметим ряд точек на теоретическом профиле кулачка $B_0 \dots B_6$ и, воспользовавшись методом обращенного движения, определим положение толкателя в каждой из намеченных точек. Замерив их расстояние до начальной окружности кулачка и отложив их значение по оси ординат диаграммы перемещений толкателя в зависимости от угла поворота кулачка $\varphi_1 \dots \varphi_6$, получим график движения ведомого звена кулачкового механизма (см. рис. 5.9, а). Из построенной диаграммы следует, что в точках сопряжения B_0 и B_6 перемещение равно нулю, а в точке B_3 оно равно максимальному значению, т.е. ходу толкателя h . На участке профиля кулачка постоянного радиуса, очерченного из центра его вращения, толкатель неподвижен, т.е. цикл его движения складывается из рабочего хода и нижнего выстоя. При этом рабочий ход толкателя будет происходить в пределах угла поворота кулачка $\varphi_p = \delta_p$, а нижний выстой — в пределах угла $360^\circ - \varphi_p$.

Определение скоростей и ускорений толкателя в намеченных точках профиля кулачка удобно произвести с помощью заменяющих механизмов. На участке $B_0 - B_2$ профиль кулачка выполнен по прямой линии, и заменяющий механизм будет кулисным. Для определения скорости толкателя в точке B_0 нужно взять две точки, одна из которых будет принадлежать кулачку, а другая — толкателю. Обозначим точку кулачка A_0 , а совпадающую с ней точку толкателя B_0 . Тогда уравнение для определения скорости V_{B_0} запишется в виде

$$\underline{\underline{V_{B_0}}} = \underline{\underline{V_{A_0}}} + \underline{\underline{V_{B_0A_0}}}$$

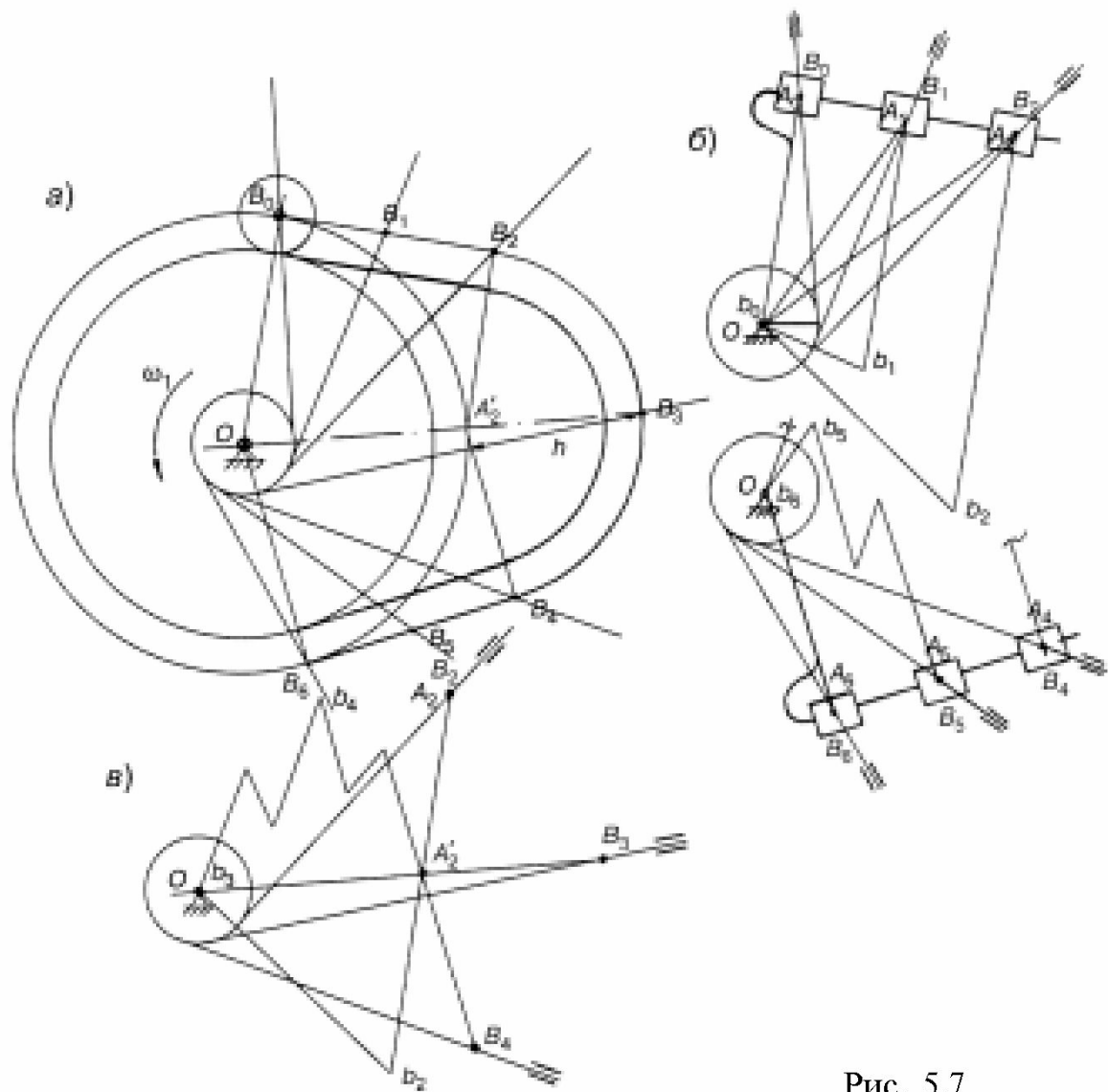


Рис. 5.7

В этом уравнении V_{B_0} известно по модулю и направлению

$$V_{A_0} = \omega_1 \cdot l_{OA_0} \text{ м/с,}$$

$V_{B_0A_0}$ — известно по направлению — параллельно B_0B_2 ;

V_{B_0} — известно по направлению — параллельно линии движения толкателя.

Построим план скоростей повернутым в принужденном масштабе, приняв полюс плана совпадающим с центром вращения кулачка точкой O и отложив скорость V_{A_0} на отрезке равном OA_0 в масштабе

$$K_V = \omega_1 \cdot K_S \frac{\text{м/с}}{\text{мм}},$$

совместив его с направлением этого отрезка, т.е. повернув направление скорости на 90° против ω_1 . Аналогичным образом направление скоростей $V_{B_0A_0}$ будет перпендикулярно кулисе и V_{B_0} — перпендикулярно линии движения толкателя. Из построения следует, что $V_{B_0} = 0$, т.е. в точке сопряжения начальной окружности кулачка с рабочим участком профиля скорость толкателя всегда равна нулю. Аналогичным образом определим скорости толкателя в положениях B_1 и B_2 , которые будут пропорциональны соответственно отрезкам Ob_1 и Ob_2 . Модуль скоростей будет равен

$$V_{B_1} = Ob_1 \cdot K_v, \text{ м/с},$$

$$V_{B_2} = Ob_2 \cdot K_v, \text{ м/с}.$$

Для определения действительного направления скоростей V_{B_1} и V_{B_2} следует отрезки Ob_1 , и Ob_2 повернуть на 90° в сторону вращения ω_1 (рис. 5.7, б).

Определение скоростей на участке B_2B_4 производится с помощью другого заменяющего механизма, а именно — кривошипно-ползунного, в котором длина кривошипа равна отрезку OA'_2 и длина шатуна — отрезку OA'_2B_2 . Следует заметить, что точка B_2 является точкой сопряжения прямолинейного участка профиля с дуговым. Следовательно, в ней должны быть два заменяющих механизма, один из которых кулисный, а второй — кривошипно-ползунный. Для определения скорости толкателя в положении B_2 для кривошипно-

ползунного механизма достаточно построить повернутый план скоростей также в принужденном масштабе по уравнению

$$\underline{\overline{V}_{B_2}} = \underline{\overline{V}_{A_2'}} + \underline{\overline{V}_{B_2A_2'}}.$$

В этом уравнении

$$V_{A_2'} = \omega_1 \cdot l_{OA_2'}.$$

Скорости $V_{B_2A_2'}$ и V_{B_2} известны по направлению. Приняв полюс плана совпадающим с центром вращения кулачка точкой O и отложив скорость на отрезке, равном OA_2' , проводим направление скорости $V_{B_2A_2'}$ из точки A_2' параллельно $A_2'B_2$ и направление скорости V_{B_2} из точки O перпендикулярно линии движения толкателя до их пересечения. Получим искомый план скоростей. Из построения следует, что V_{B_2} для кривошипно-ползунного и кулисного механизмов в точке сопряжения профилей B_2 одинаковы, а относительные скорости различны (рис. 5.7, в).

Для определения скорости толкателя в точке B_3 следует построить план скоростей для кривошипно-ползунного механизма в данном положении по аналогичному уравнению

$$\underline{\overline{V}_{B_3}} = \underline{\overline{V}_{A_2'}} + \underline{\overline{V}_{B_3A_2'}}.$$

Кривошип и шатун в этом положении механизма вытягиваются в одну прямую линию, и план скоростей будет представлять отрезок линии OA_2' , на котором точка b_3 плана будет совпадать с точкой O . Поскольку точка B_3 является наиболее удаленной точкой профиля кулачка от центра его вращения, то в ней происходит смена направления движения толкателя и, следовательно, скорость его движения равна нулю, т.е. $V_{B_3} = 0$.

Определение скоростей толкателя на участке профиля B_4B_6 производится аналогичным образом, с использованием заменяющих механизмов. Найденные значения скорости толкателя в намеченных точках профиля кулачка наносятся на график. При этом полученный закон изменения скорости должен соответствовать производной функции от графика перемещений толкателя. Это означает, что максимальное значение его скорости должно соответствовать точкам перегиба кривой перемещений, а ее нулевое значение — точкам экстремума (см. рис. 5.9, б).

Определение ускорений толкателя в тех же точках профиля кулачка производится также с помощью заменяющих механизмов. С этой целью составляется и решается векторное уравнение для искомого ускорения точки, по аналогии с определением скоростей. При этом план ускорений также удобно построить в принужденном масштабе непосредственно на схеме механизма. В отличие от плана скоростей, последний будет не повернутым и векторы ускорений будут не исходить из полюса, а наоборот, сходиться в нем. Для определения ускорения толкателя в точке B_0 векторное уравнение будет иметь вид

$$\underline{\bar{a}}_{B_0} = \underline{\bar{a}}_{A_0}^n + \underline{\bar{a}}_{B_0A_0}^t + \underline{\bar{a}}_{B_0A_0}^k.$$

В этом уравнении известны по модулю и направлению

$$a_{A_0}^n = \omega_1^2 \cdot l_{OA_0} \text{ м/с}^2$$

и

$$a_{V_{B_0A_0}}^k = 2V_{B_0A_0} \cdot \omega_1 \text{ м/с}^2.$$

Приняв центр вращения кулачка за полюс плана ускорений, отложим ускорение $a_{A_0}^n$ на отрезке, равном OA_0 , направленным к центру вращения кулачка. При этом масштаб построения будет равен

$$K_a = \omega_1^2 \cdot K_l \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}$$

Затем откладываем ускорение $a_{B_0A_0}^k$, которое будет направлено перпендикулярно кулисе к точке B_0 . Последнее легко определяется по правилу Жуковского путем поворота неповернутого вектора $V_{B_0A_0}$ на 90° в сторону вращения кулисы. Отрезок указанного ускорения в масштабе будет равен

$$\frac{a_{B_0A_0}^k}{K_a} = \frac{2V_{B_0A_0} \cdot \omega_1}{K_a} = \frac{2B_0A_0 \cdot K_v \cdot \omega_1}{K_a} = \frac{2B_0A_0 \cdot \omega_1 \cdot K_l \cdot \omega_1}{\omega_1^2 K_l} = 2B_0A_0.$$

Таким образом, отрезок ускорения Кориолиса в принужденном масштабе всегда будет равен удвоенному отрезку относительной скорости. Далее в начало отложенного отрезка проводится параллельно кулисе направление относительного ускорения $a_{B_0A_0}^t$ до пересечения в точке a_0 искомым ускорением a_{B_0} , проведенным из полюса параллельно линии движения толкателя (рис. 5.8, а). Модуль найденного ускорения

$$a_{B_0} = Oa_0 \cdot K_a, \text{ м/с}^2.$$

По аналогии определяются ускорения в других точках прямолинейного участка профиля кулачка B_1 и B_2 .

Определение ускорений толкателя в точках дугового участка профиля проводится с использованием кривошипно-шатунного заменяющего механизма, для которого ускорение a_{B_2} определится по уравнению

$$\underline{\bar{a}_{B_2}} = \underline{\bar{a}_{A_2}^n} + \underline{\bar{a}_{B_2A_2}^n} + \underline{\bar{a}_{B_2A_2}^t}.$$

В приведенном уравнении ускорения $a_{A_2}^n$ и $a_{B_2A_2}^n$ известны по модулю и направлению:

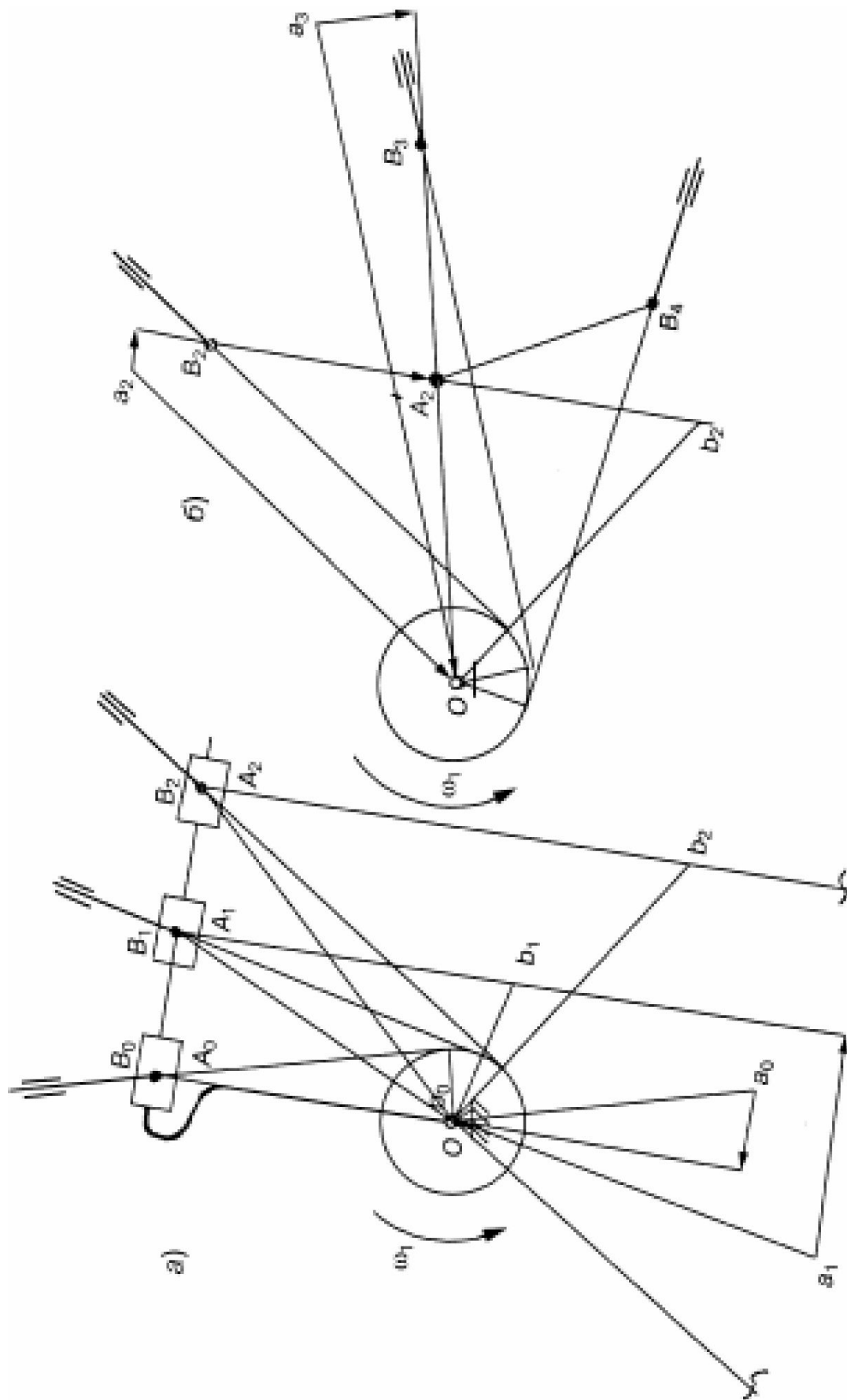


Рис. 5.8

$$a_{A_2}^n = \omega_1^2 \cdot l_{OA_2}'$$

и

$$a_{B_2A_2}^n = \omega_2^2 \cdot l_{B_2A_2}'.$$

Решение этого уравнения производим аналогично предыдущему, составленному для кулисного механизма, графически, непосредственно на схеме механизма в принужденном масштабе. Отрезок, соответствующий ускорению $a_{A_2}^n$, принимаем равным длине кривошипа OA_2' и направленным к центру вращения кулачка. Далее в начало этого отрезка пристраивается отрезок ускорения $a_{B_2A_2}^n$, равный в масштабе среднегеометрическому значению между относительной скоростью $V_{B_2A_2}'$ и длиной шатуна $l_{B_2A_2}'$.

Проводя через начало предыдущего вектора и через полюс известные по направлению векторы ускорений $a_{B_2A_2}^t$ и a_{B_2} до их пересечения в точке a_2 , получим решение приведенного уравнения. Искомое ускорение

$$a_{B_2} = Oa_2 \cdot K_a \text{ м/с}^2.$$

Определение ускорения в точке B_3 производится по аналогичному уравнению, графическое решение которого показано на схеме механизма (рис. 5.8, б). Следует заметить, что при положении толкателя в точках профиля кулачка B_0 , B_3 и B_6 скорость его равна нулю, а ускорение отлично от нуля. Кроме того, в точках сопряжения различных участков профиля ускорение нарастает скачкообразно, а в точках B_2 и B_4 к тому же меняет знак. Последнее обстоятельство отражается на работе кулачкового механизма, так как мгновенное изменение направления ускорения ведет к такому же изменению направления силы инерции и, как следствие — к жесткому удару.

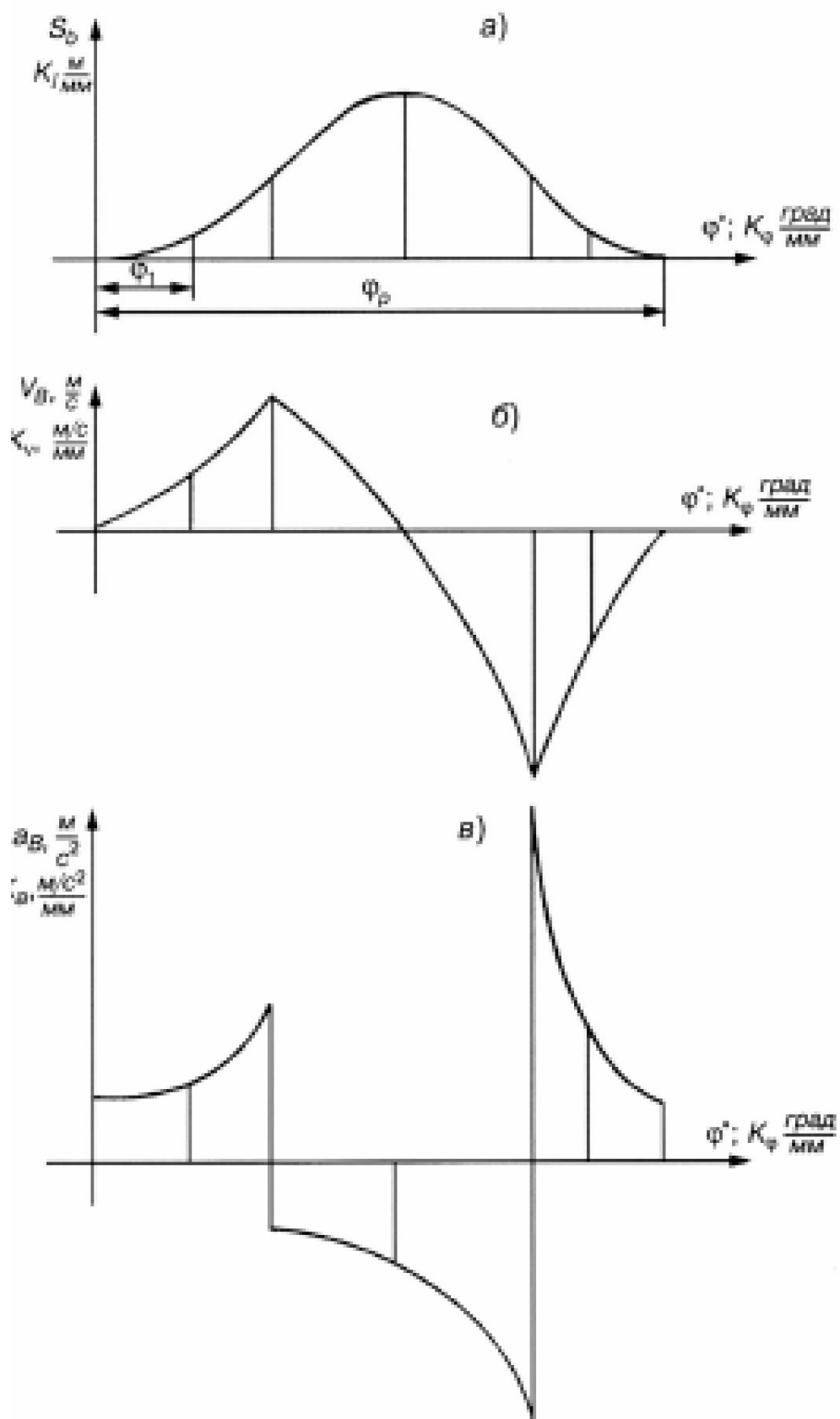


Рис. 5.9

5.3. Синтез кулачковых механизмов

Синтез, или проектирование кулачковых механизмов можно произвести двумя способами в зависимости от типа их толкателя. Если последний имеет плоскую форму (см. рис. 5.1, *з*), то для обеспечения нормальной работы кулачкового механизма, а именно создания непрерывного замыкания (контакта) высшей кинематической пары, необходимо обеспечить выпуклость профиля кулачка на всех его участках, в противном случае будет иметь место искажение закона движения толкателя. При всех других типах толкателя задача синтеза сводится к поиску условия для выбора оптимальных размеров кулачкового механизма, базирующегося на непревышении заданного угла давления при любом положении кулачка в пределах цикла его движения. Для теоретического обоснования данного утверждения необходимо рассмотреть схему сил, действующих в кулачковом механизме. В качестве примера рассмотрим кулачковый механизм с поступательно движущимся заостренным толкателем (рис. 5.10).

При вращении кулачка, нагруженного моментом M , на толкатель передается усилие Q , направленное под углом φ_T по отношению к нормали $n-n$. Кроме того, на толкатель действует сила сопротивления P и реакция направляющих $R' + R''$. Составив векторное уравнение сил, действующих на толкатель

$$\bar{P} + \bar{Q} + (\bar{R}' + \bar{R}'') = 0$$

и решив его графически, найдем соотношение

$$\frac{Q}{P} = \frac{\sin(90 + \varphi_H)}{\sin[180 - (\alpha - \varphi_T) - (90 + \varphi_H)]} = \frac{\cos \varphi_H}{\cos(\alpha + \varphi_T + \varphi_H)}$$

Из полученного соотношения следует, что если значение угла $\alpha + \varphi_T + \varphi_H$ будет равно 90° , при определенном заданном значении силы P получим, что сила $Q = \infty$. Это означает, что

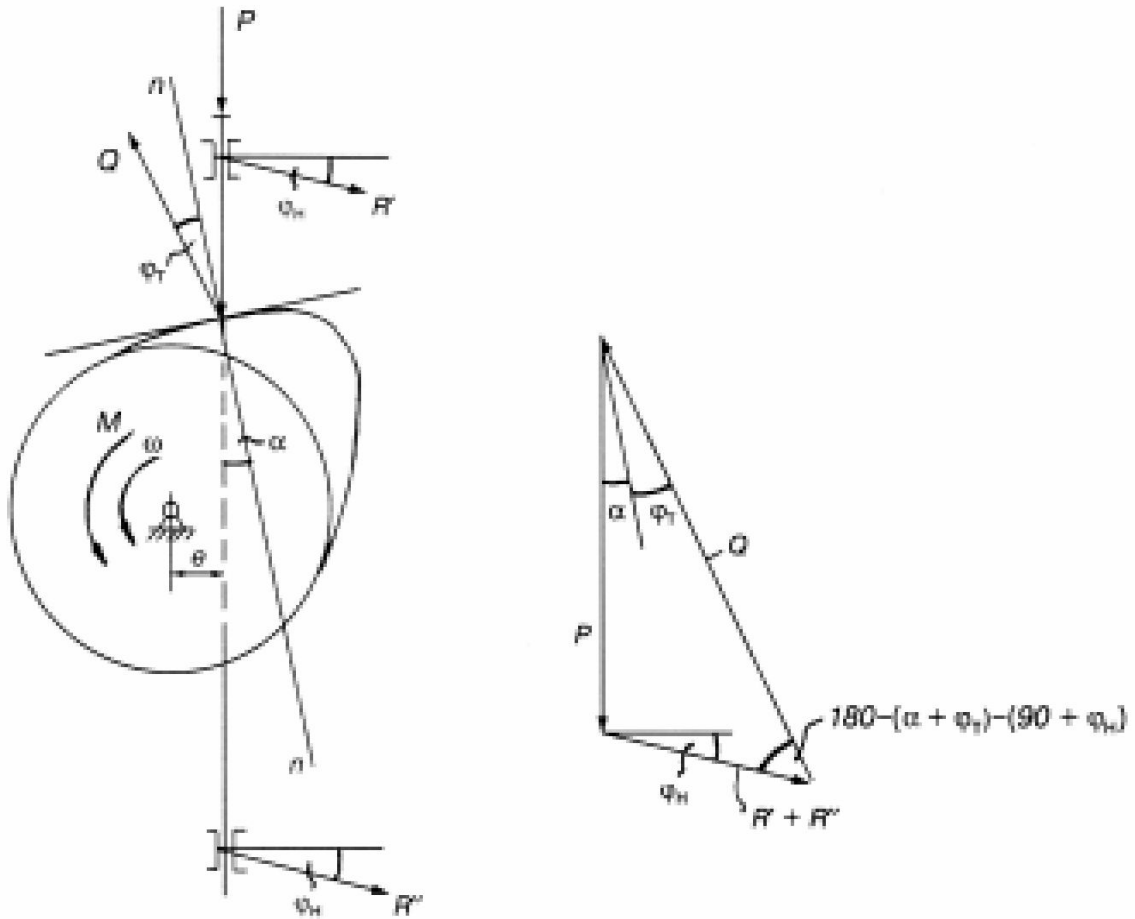


Рис. 5.10

механизм заклинится. Отсюда следует, что угол давления α будет равен углу заклинивания α_3 при

$$\alpha = \alpha_3 = 90 - \varphi_T - \varphi_H.$$

Для определенного соотношения между силами Q и P необходимо угол давления выбрать меньше угла заклинивания, т.е.

$$\alpha < \alpha_3.$$

Однако это неравенство целесообразно ограничить определенными рамками. Если угол давления незначительно меньше угла заклинивания, то отношение $\frac{Q}{P}$ (названное

профессором Л.Н. Решетовым коэффициентом возрастания усилий ϵ) может достигать значительной величины, что повлечет за собой увеличение габаритов кулачкового механизма. Например, если при выбранном угле заклинивания ϵ будет велико, допустим, равное 10, то во столько же раз должно быть больше усилие Q со стороны кулачка для преодоления заданной силы сопротивления P . Это, в свою очередь, должно привести к увеличению габаритов кулачкового механизма для обеспечения его нормальной работы. С другой стороны, если угол заклинивания и соответственно ϵ будут весьма малы, то это обстоятельство также ведет к увеличению габаритов кулачкового механизма. Последнее нетрудно проиллюстрировать на схеме механизма с поступательно движущимся заостренным толкателем (рис. 5.11), из которой следует, что

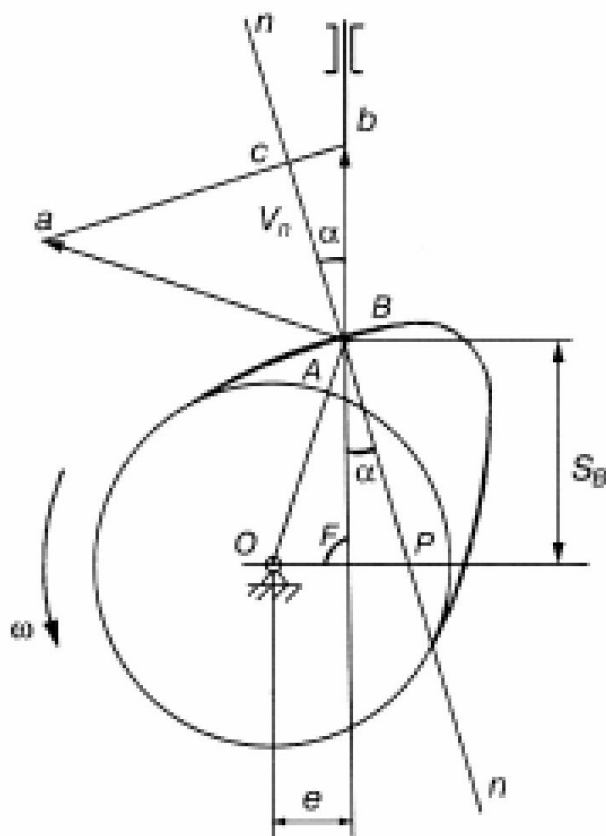


Рис. 5.11

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{PF}{FB} = \frac{OP - e}{S_B},$$

где e — эксцентриситет;

S_B — перемещение толкателя.

В то же время из подобия треугольников Bab и BOP по взаимной перпендикулярности сторон можно записать

$$\frac{OP}{OB} = \frac{V_B}{V_A},$$

откуда

$$OP = \frac{V_B}{\omega_1}$$

или, соответственно,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{V_B}{\omega_1} - e}{S_B}.$$

В общем случае линия движения толкателя может проходить и по другую сторону центра вращения кулачка, соответственно

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{V_B}{\omega_1} \pm e}{S_B}.$$

Из приведенной формулы следует, что закон движения толкателя V_B при определенных значениях ω_1 и e можно осуществить множеством профилей кулачка, меняя S_B и α . Однако чем меньше будет взято α , тем больше потребуется принять S_B , что приведет к увеличению габаритов кулачка и, соответственно, всего механизма. Из этих соображений выгоднее увеличивать угол давления α . Исходя из сказанного, выбранный угол α должен соответствовать оптимальному значению.

Задавшись для этого средним значением коэффициента трения в направляющих толкателя f_n и в высшей кинематической паре f_t , найдем угол заклинивания α_3 и, приняв коэффициент возрастания усилий $\epsilon = 2$, получим, что оптимальное значение угла заклинивания для кулачковых механизмов с поступательно движущимся толкателем целесообразно при-

нять в пределах $30\div 40^\circ$. Для кулачковых механизмов с качающимся толкателем имеет место более благоприятное распределение сил и угол давления можно принять в пределах $40\div 45^\circ$.

5.4. Определение размеров кулачкового механизма

Проектируемый кулачковый механизм должен обеспечить выполнение заданных исходных параметров и соответствовать оптимальным габаритам. Решение этой задачи удобно рассмотреть на примере схемы кулачкового механизма с качающимся толкателем (рис. 5.12), так как поступательно движущийся толкатель можно рассматривать как частный случай качающегося при бесконечно большой его длине. Отметим на схеме точку B контакта толкателя с кулачком, центр вращения толкателя O_2 , центр вращения кулачка O_1 , нормаль $n-n$, угол давления α и точку P пересечения нормали с линией центров. Проведя через точку O_1 прямую, параллельную нормали и отметив на ней точку D пересечения ее с продолжением длины толкателя, нетрудно выразить отрезок BD через параметры механизма. Из рис. 5.12 следует, что треугольники O_1BD и $BV_A V_B$ подобны, на основании последнего можно записать

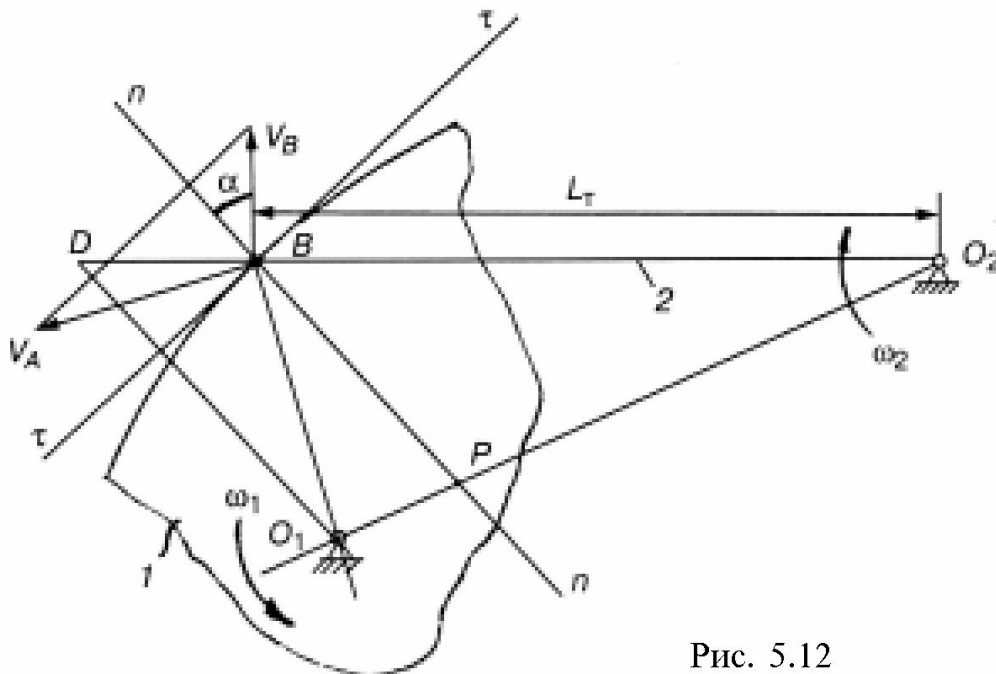


Рис. 5.12

$$\frac{O_1B}{DB} = \frac{V_A}{V_B} = \frac{\omega_1 \cdot O_1B}{\omega_2 \cdot O_2B}$$

или

$$\frac{O_2B}{DB} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2P}{O_1P}.$$

Последнее соотношение известно под названием *теоремы о мгновенном передаточном отношении*, которая формулируется так: общая нормаль, проведенная через точку контакта кулачка с толкателем, делит линию центров на части обратно-пропорциональные угловым скоростям. На основании указанной теоремы можно записать, что отрезок DB можно выразить:

$$DB = \frac{\omega_2 \cdot O_2B}{\omega_1} = \frac{V_B}{\omega_1}.$$

Из последнего выражения следует *теорема о местоположении центра вращения кулачка*, которую можно сформулировать следующим образом: центр вращения кулачка всегда располагается на прямой, проведенной через конец отрезка

кинематического отношения $\frac{V_B}{\omega_1}$ под углом давления α . Рас-

полагается отрезок DB либо слева, либо справа от точки B ; в конкретном случае направление его определяется путем поворота вектора скорости толкателя V_B на 90° в сторону вращения кулачка.

При определении размеров кулачкового механизма необходимо найти оптимальное положение центра вращения кулачка. Для этого должны быть заданы: принципиальная схема проектируемого механизма, закон движения толкателя ($V_B; t$) или ($a_B; t$), ход толкателя h (мм), число оборотов кулачка n (об/мин), угол давления α° , длина толкателя L_T , радиус ролика r_p , режим работы механизма реверсивный. По заданному графику движения толкателя ($V_B; t$) или ($a_B; t$) достраиваются недостающие кинематические диаграммы методом графического интегрирования (рис. 5.13).

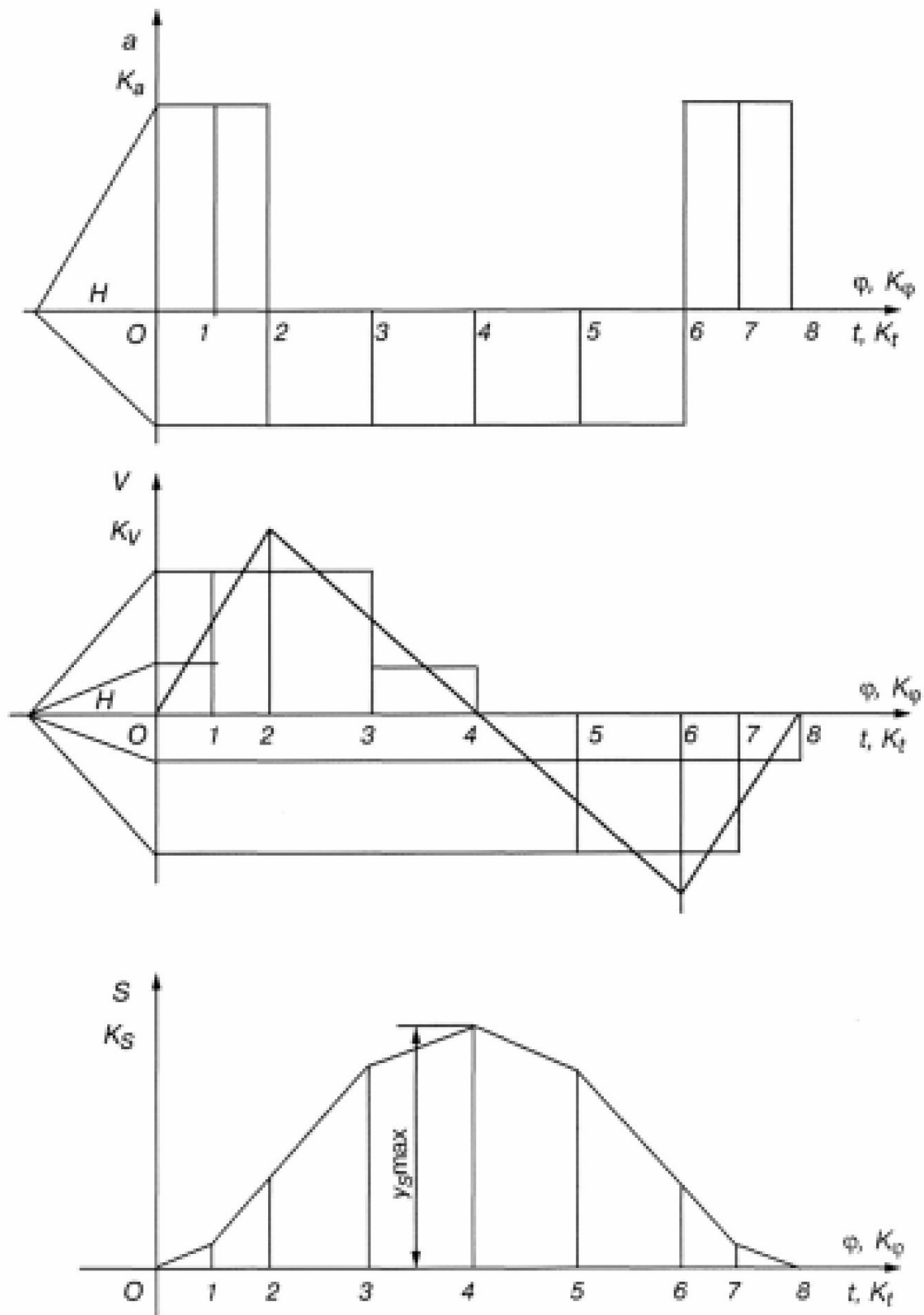


Рис. 5.13

По заданному ходу h толкателя определяется масштаб диаграммы перемещений, скорости и ускорения

$$K_S = \frac{h}{y_{S\max}} \frac{\text{м}}{\text{мм}};$$

$$K_V = \frac{K_S}{H \cdot K_t} \frac{\text{м}}{\text{с} \cdot \text{мм}};$$

$$K_a = \frac{K_V}{H \cdot K_t} \frac{\text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{мм}};$$

$$K_\varphi = \frac{\Phi_p^0}{T} \frac{\text{м}}{\text{мм}};$$

$$K_t = \frac{\Phi_p^0}{6nT} \frac{\text{с}}{\text{мм}}.$$

Центр вращения кулачка определяется по теореме о его местоположении. Но поскольку он зависит от отношения $\frac{V_B}{\omega_1}$, являющегося переменным, определяемого законом изменения скорости, то необходимо построить диаграмму его изменения. Для построения указанной диаграммы отложим длину толкателя L_T и покажем траекторию его движения (рис. 5.14).

Отложив точки 1, 2, ..., 8 на траектории S_B и отрезки кинематического отношения $\left(\frac{V_B}{\omega_1} \right)$ на продолжении толкателя, руководствуясь ранее приведенным правилом, и соединив их концы, получим искомую диаграмму. Для определения положения центра вращения кулачка нужно через концы отрезков кинематического отношения провести прямые под углом давления α . Однако для этого нужно выбрать такие точки диаграммы, чтобы проведенные через них лучи на их пересечении дали оптимальное положение центра вращения кулачка. Та-

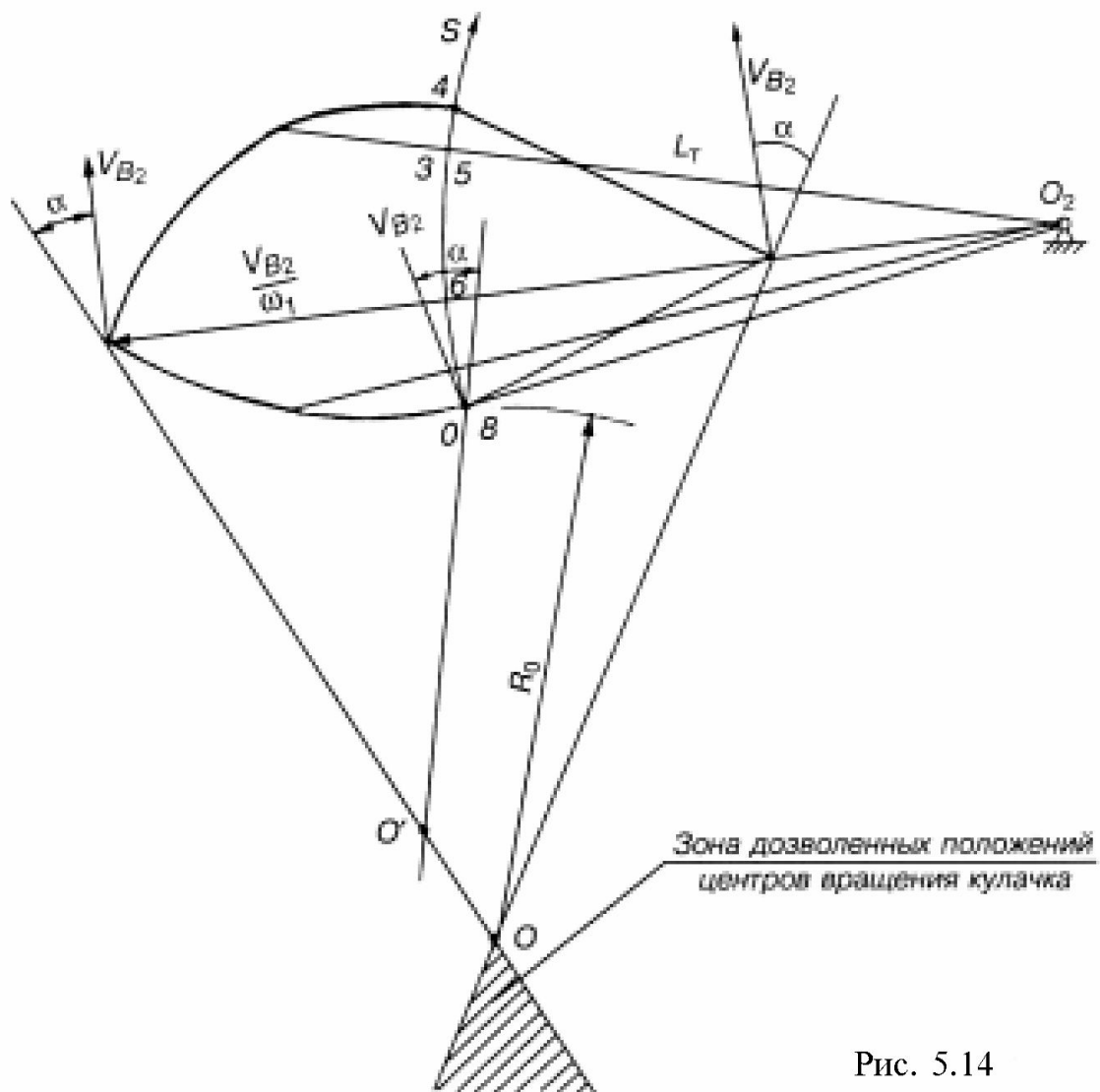


Рис. 5.14

кими точками будут конец отрезка и начальное положение толкателя в точке B_0 . При положении центра вращения кулачка в точке O' угол давления α не будет превышать заданного значения ни в одном из положений толкателя. Правда, это условие выполняется только при одностороннем направлении вращения кулачка. Если же по условиям эксплуатации кулачок должен быть реверсивным, то отрезки $\frac{V_B}{\omega_1}$ нужно откладывать в противоположном направлении, центр вращения кулачка следует выбрать в точке O . При этом расстояние от

точки O до наинизшего положения толкателя будет равно начальному радиусу кулачка R_0 . Положение центра вращения кулачка в точке O будет оптимальным. В то же время центр вращения кулачка можно выбрать и в другой точке, расположенной ниже оптимальной, но в зоне крайних лучей (точка O'' и т.д.). Область, заключенная между крайними лучами является зоной дозволенных положений центров вращения кулачка. Выбирая положение центра в этой зоне, увеличивается начальный радиус кулачка и в то же время уменьшается угол давления.

Проектирование кулачкового механизма с поступательно движущимся толкателем принципиально ничем не отличается от рассмотренного. При этом в исходных данных следует исключить длину толкателя L_T и задать величину эксцентриситета e . В отличие от предыдущей схемы, определение начального радиуса кулачка производится в прямолинейной си-

стеме координат $\left(S_B, \frac{V_B}{\omega_1} \right)$.

5.5. Построение профиля кулачка

Определив радиус начальной окружности R_0 кулачка и межцентровое расстояние O_1O_2 очерчиваем их, выбрав приемлемый масштаб построения (рис. 5.15). На начальной окружности кулачка откладываем рабочий угол поворота φ_p , разделив его пропорционально количеству участков на диаграмме перемещений толкателя. Такой же угол φ_p откладываем на окружности, проведенной радиусом, равным межцентровому расстоянию O_1O_2 , сделав засечки на ней радиусом, равным длине толкателя L_T из каждой точки деления начальной окружности кулачка. Для построения профиля кулачка следует из каждой точки окружности радиуса O_1O_2 провести дуги радиусом, равным длине толкателя L_T , на которых отложить отрезки по хорде, равные ординатам диаграммы перемещений толкателя. Соединив отмеченные точки плавной кривой, получим центральной профиль кулачка. Рабочий про-

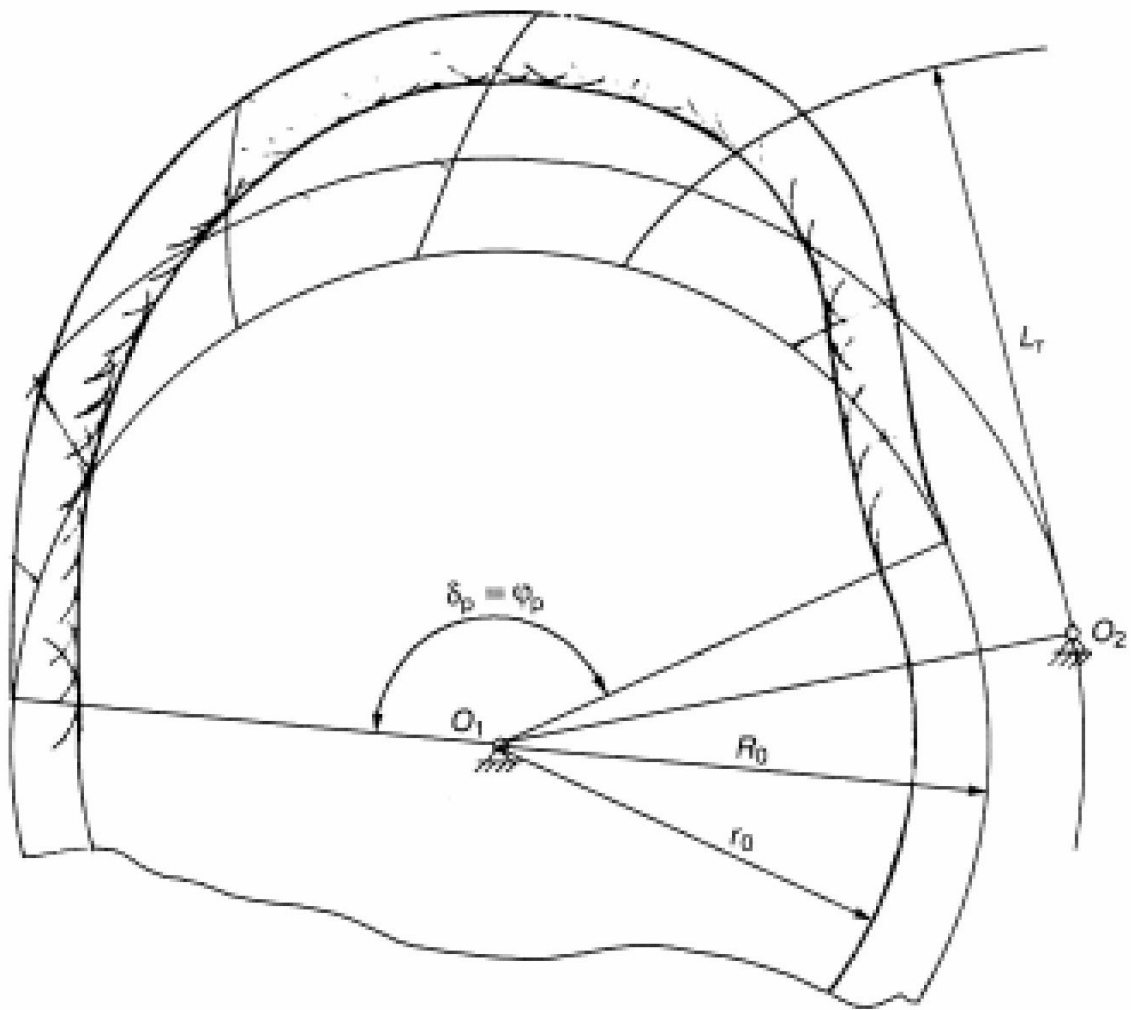


Рис. 5.15

филь кулачка можно построить путем уменьшения центрального профиля на величину радиуса ролика r_p . С этой целью из точек, расположенных на центровом профиле, проводим дуги радиусом r_p , огибающая к которой и будет рабочим профилем кулачка.

Глава 6

ЗУБЧАТЫЕ МЕХАНИЗМЫ

6.1. Общие положения

К *зубчатым* относятся механизмы, звенья которых выполнены в виде зубчатых колес. Они предназначены для передачи движения с одного вала на другой с постоянной или переменной скоростью вращения. Их применение можно встретить в различных отраслях машиностроения и приборостроения.



Рис. 6.1

ния: в транспортных машинах, металлорежущих станках, машинах текстильной, химической и пищевой промышленности, сельскохозяйственном машиностроении, робототехнике и т.д. По своему назначению зубчатые механизмы различают на простые и сложные. К простым относятся механизмы, составленные из двух колес, называемые *зубчатой передачей*, и к сложным относятся механизмы, составленные из большего числа колес. В свою очередь, зубчатые передачи различают по характеру передаточного отношения, расположению осей вращения колес, профилю зуба и другим признакам, указанным на схеме классификации зубчатых передач, предложенной профессором В.А. Гавриленко (рис. 6.1).

6.2. Эвольвента, ее уравнение и свойства

В технике наибольшее распространение получили зубчатые передачи с постоянным передаточным отношением и с профилем зуба, очерченным по эвольвенте. В связи с этим рассмотрим подробнее эту кривую, ее уравнения и свойства. *Эвольвентой* называется траектория движения точки, лежащей на прямой, обкатываемой без скольжения по окружности (рис. 6.2).

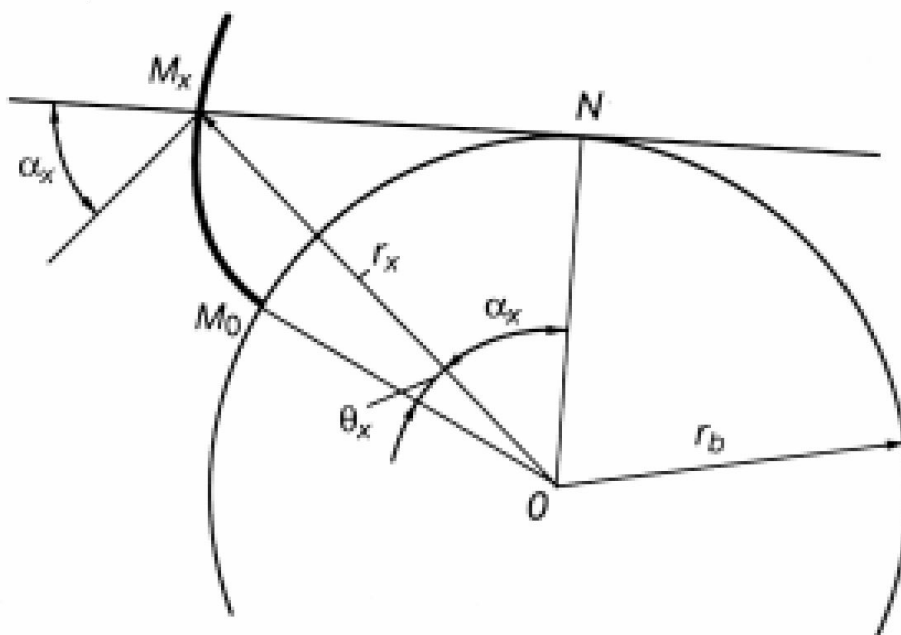


Рис. 6.2

Показанная на схеме окружность называется *основной*, радиус которой r_b , а прямая M_xN , обкатываемая по этой окружности, называется *производящей прямой*. На схеме показаны: $\angle\theta_x$ — эвольвентный угол, $\angle\alpha_x$ — угол давления в точке M_x , r_x — текущий радиус-вектор, точка M_0 — начало эвольвенты на основной окружности. Выразим центральный $\angle M_0ON$ через размеры, показанные на схеме:

$$\theta_x + \alpha_x = \frac{M_0N}{ON}.$$

Но если проследить за процессом образования эвольвенты, то нетрудно установить, что при обкатке прямой по окружности отрезок M_xN в точности уложится на участке дуги M_0N . Таким образом, можно переписать:

$$\theta_x + \alpha_x = \frac{\overline{M_xN}}{ON},$$

или

$$\theta_x + \alpha_x = \operatorname{tg}\alpha_x,$$

откуда

$$\theta_x = \operatorname{tg}\alpha_x - \alpha_x.$$

Полученная зависимость представляет собой соотношение между эвольвентным углом и углом давления в радианах и обозначается как

$$\operatorname{inv}\alpha_x = \operatorname{tg}\alpha_x - \alpha_x,$$

где $\theta_x = \operatorname{inv}\alpha_x$.

Для значений эвольвентного угла составлены таблицы.

С другой стороны, из прямоугольного треугольника OM_xN найдем

$$r_x = \frac{r_b}{\cos \alpha_x}.$$

Полученная система уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{inv} \alpha_x = \operatorname{tg} \alpha_x - \alpha_x \\ r_x = \frac{r_b}{\cos \alpha_x} \end{cases}$$

представляет собой уравнение эвольвенты в параметрической форме.

Отметим некоторые свойства эвольвенты:

1. Эвольвента не имеет точек внутри основной окружности.

2. Эвольвента — симметричная кривая, имеющая две ветви, сходящиеся в точке (возврата) M_0 .

3. Нормаль к эвольвенте является производящей прямой, располагаемой касательно к основной окружности, а отрезок этой прямой от точки эвольвенты (M_x) до точки касания N с основной окружностью представляет собой радиус кривизны эвольвенты в точке M_x .

4. При бесконечном увеличении радиуса основной окружности эвольвента постепенно, теряя свою кривизну, вырождается в прямую линию.

6.3. Элементы зубчатого колеса

Изобразим схему зубчатого колеса с его основными элементами (рис. 6.3).

Зубчатое колесо представляет собой цилиндрический диск с нарезанными по его поверхности зубьями, количество которых составляет z . Расстояние между двумя одноименными точками двух соседних профилей зубьев называется *шагом зубчатого колеса*, который может быть показан по любой окружности с соответствующим индексом.

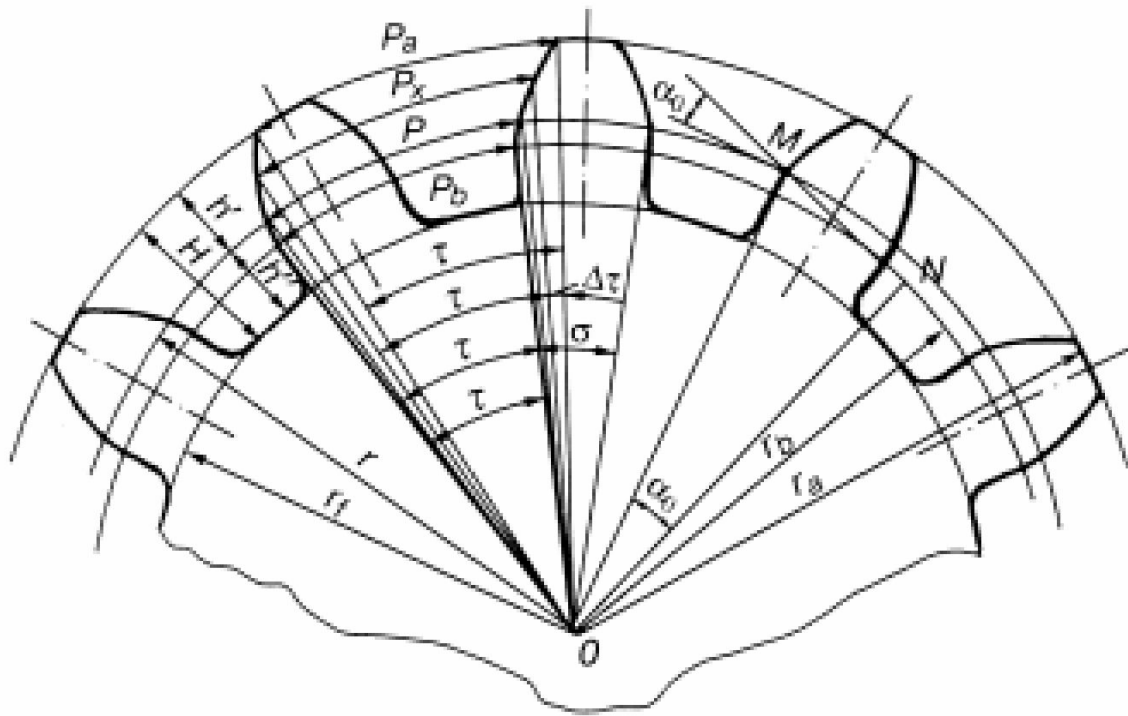


Рис. 6.3

Выразив длину делительной окружности через радиус с одной стороны и через шаг и число зубьев с другой, запишем

$$2\pi r = pz,$$

или

$$2r = d = \frac{p}{\pi} z.$$

Отношение шага зубьев к числу π называется *модулем зубчатого колеса*, таким образом

$$d = mz.$$

Делительную окружность называют *производственной*, так как по ней производится обкатка зуборезного инструмента при изготовлении зубчатого колеса. В силу последнего на этой окружности копируются параметры инструмента: шаг, модуль, угол давления. Поскольку зуборезный инструмент

стандартизован, то по делительной окружности указанные параметры также будут стандартными. Поэтому делительная окружность является окружностью стандартного модуля m и угла давления α_0 . При расчете элементов зубчатого колеса целесообразно параметры его выразить через стандартные параметры инструмента. С этой целью принято считать, что для нормальной высоты головка зуба $h' = m$, а ножка зуба $h'' = 1,25m$ и для укороченной высоты $h' = 0,8m$ и $h'' = m$.

Таким образом, радиус окружности выступов

$$r_a = r + h' = \frac{mz}{2} + m = m \left(\frac{z}{2} + 1 \right),$$

$$d_a = 2m \left(\frac{z}{2} + 1 \right) = m(z + 2).$$

Радиус окружности впадин

$$r_f = r - h'' = \frac{mz}{2} - 1,25m = m \left(\frac{z}{2} - 1,25 \right),$$

$$d_f = 2m \left(\frac{z}{2} - 1,25 \right) = m(z - 2,5).$$

Радиус основной окружности можно определить из треугольника OMN :

$$r_b = r \cdot \cos \alpha_0 = \frac{mz}{2} \cos \alpha_0,$$

$$d_b = 2 \cdot \frac{mz}{2} \cos \alpha_0 = mz \cos \alpha_0.$$

Толщина зуба по делительной окружности для некорригированного зубчатого колеса

$$S = \frac{P}{2} = \frac{\pi m}{2}.$$

Определим угловой шаг по делительной окружности τ . Он будет измеряться длиной дуги, на которую опирается, т.е.

$$\tau = \frac{P}{r}.$$

Но этот угол можно определить и через шаг, и через радиус по другой окружности. Например, по основной окружности, или по окружности выступов, и даже по окружности произвольного радиуса. При этом нетрудно подметить, что угловой шаг, опирающийся на шаг по другим окружностям, не изменится по величине, а только повернется относительно своего исходного положения на какой-то угол $\Delta\tau$. На основании изложенного можно записать

$$\frac{P}{r} = \frac{P_b}{r_b} = \frac{P_a}{r_a} = \frac{P_x}{r_x} = \tau = \text{const.}$$

Из полученного соотношения можно определить шаг по любой окружности. Например, из пропорции

$$\frac{P}{r} = \frac{P_b}{r_b} \quad \text{или} \quad P_b = P \frac{r_b}{r}.$$

Поделив обе части равенства на l и выразив z через угол давления на делительной окружности, найдем

$$m_b = m \frac{r_b}{r_b} \cos \alpha_0 = m \cos \alpha_0.$$

По аналогии

$$\frac{P}{r} = \frac{P_a}{r_a} \quad \text{или} \quad P_a = P \frac{r_a}{r},$$

откуда

$$m_a = m \frac{r_b}{\cos \alpha_a} \frac{\cos \alpha_0}{r_b} = m \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_a},$$

где α_a — угол давления на окружности выступов зубчатого колеса.

Соответственно, для модуля по окружности произвольного радиуса можно записать

$$m_x = m \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_x}.$$

При геометрическом расчете зубчатых передач нередко приходится определять толщину зуба колеса по различным окружностям. Чаще всего встречается, что по делительной окружности толщина зуба S равна ширине впадины U и сумма

$$S + U = P.$$

Такие зубчатые колеса называются *нулевыми*. Но встречаются зубчатые колеса, у которых

$$S \neq U.$$

При $S > U$, зубчатые колеса называются *положительными*, при $S < U$ — *отрицательными*. В общем случае толщину зуба по делительной окружности можно выразить формулой

$$S = \frac{\pi m}{2} + \Delta m,$$

где Δ — коэффициент приращения толщины зуба.

- При $\Delta = 0$ — колесо нулевое,
- $\Delta > 0$ — колесо положительное,
- $\Delta < 0$ — колесо отрицательное.

Найдем зависимость для толщины зуба по окружности произвольного радиуса (рис. 6.4).

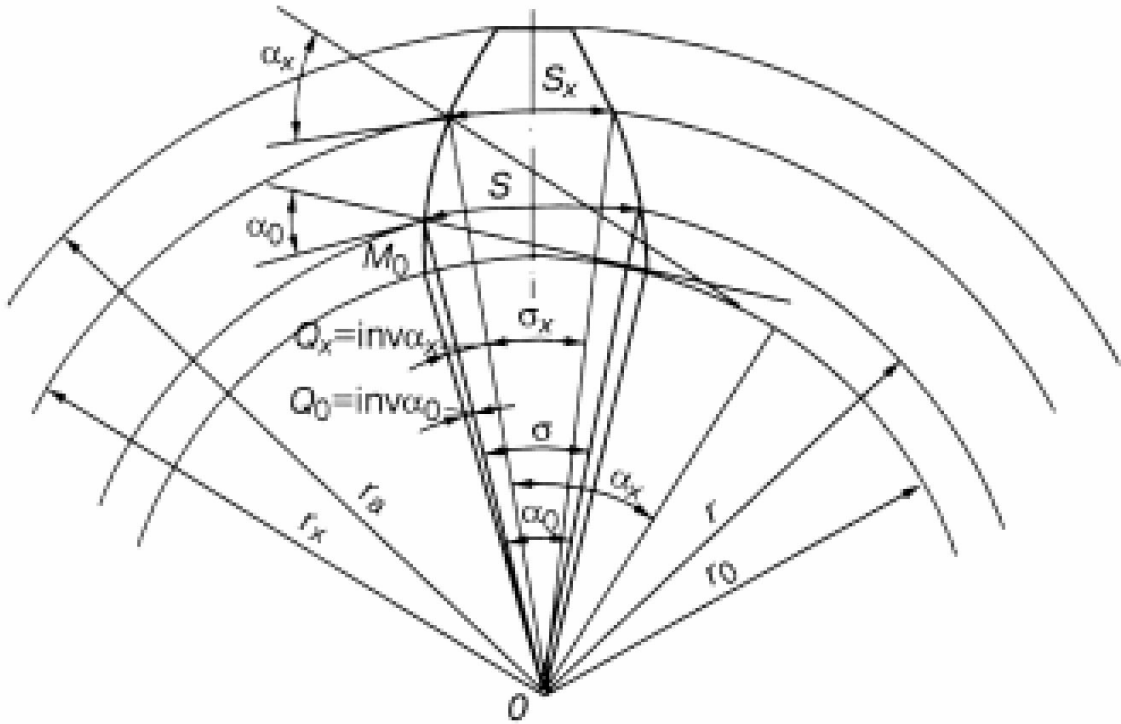


Рис. 6.4

Из схемы толщина зуба $S_x = r_x \sigma_x$, но

$$\sigma_x = \sigma + 2 \operatorname{inv} \alpha_0 - 2 \operatorname{inv} \alpha_x,$$

где угол $\sigma = \frac{S}{r}$

или $\sigma_x = \frac{S}{r} + 2 \operatorname{inv} \alpha_0 - 2 \operatorname{inv} \alpha_x$.

Подставляя полученное значение σ_x в формулу для толщины зуба S_x , получим

$$S_x = r_x \left(\frac{S}{r} + 2 \operatorname{inv} \alpha_0 - 2 \operatorname{inv} \alpha_x \right) = S \frac{r_x}{r} + 2 r_x (\operatorname{inv} \alpha_0 - \operatorname{inv} \alpha_x).$$

Заменив значения входящих в последнюю формулу величин

$$S = \frac{\pi m}{2} + \Delta m,$$

$$r = \frac{mZ}{2},$$

$$r_x = \frac{r_b}{\cos \alpha_x} = \frac{mZ \cos \alpha_0}{2 \cos \alpha_x}$$

и сделав несложные преобразования, окончательно получим

$$S_x = m \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_x} \left[\frac{\pi}{2} + \Delta - Z(\operatorname{inv} \alpha_x - \operatorname{inv} \alpha_0) \right].$$

6.4. Элементы зубчатой рейки

В одном из свойств эвольвенты было отмечено, что при бесконечном увеличении радиуса основной окружности эвольвента вырождается в прямую линию. Соответственно, и зубчатое колесо преобразуется в зубчатую рейку с бесконечным числом зубьев и их профилем, очерченным по прямой линии (рис. 6.5).

Следовательно, окружности зубчатого колеса переходят в прямые линии выступов, впадин и т.д. Угол давления по любой прямой является постоянным и равным α_0 . Шаг зубьев также является постоянным по любой прямой и равным πm . При этом по делительной прямой толщина зуба S равна ширине впадины U . Высота зуба

$$H = 2h' + C.$$

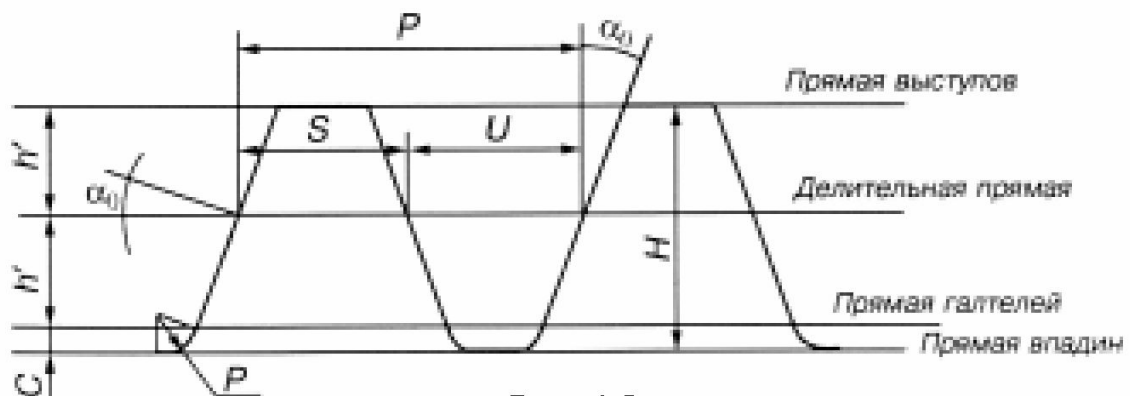


Рис. 6.5

При нормальной высоте зуба $h' = m$ и $C = 0,25m$.

Следовательно, $H = 2m + 0,25m = 2,25m$.

При укороченной высоте зуба $h' = 0,8m$, $C = 0,2m$ и, соответственно,

$$H = 2 \cdot 0,8m + 0,2m = 1,8m.$$

6.5. Эвольвентное зацепление

Зубчатая передача представляет собой многопрофильный кулачковый механизм, в котором движение от одного звена к другому передается соприкасающимися профилями, очерченными по эвольвенте. Из теории кулачковых механизмов известно, что контактируемые профили высшей кинематической пары должны иметь общую нормаль в точке контакта (рис. 6.6).

Если контакт между соприкасающимися профилями происходит в точке K , то общей нормалью для них будет линия $N_1 - N_2$. Но эта же линия будет общей нормалью, если контакт будет происходить и в другой точке, например, в точке K_1 и т.д. На основании теоремы о мгновенном передаточном отношении общая нормаль $N_1 - N_2$ делит линию центров

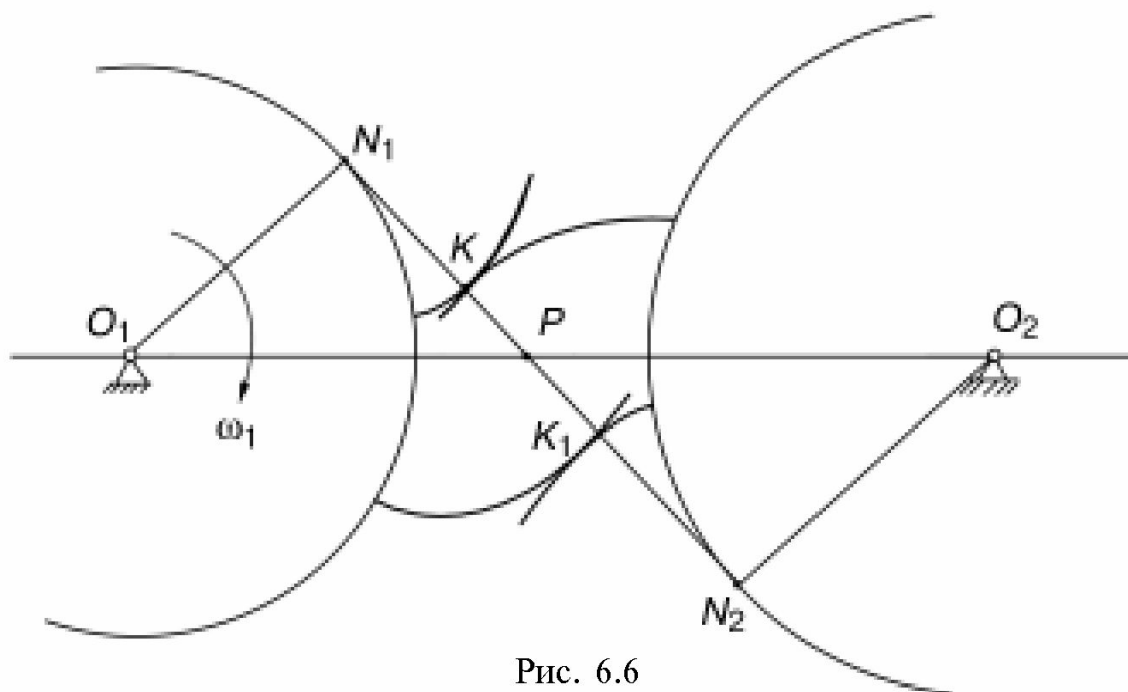


Рис. 6.6

на части, обратно пропорциональные угловым скоростям. Таким образом, передаточное отношение

$$U_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2P}{O_1P} = \text{const},$$

так как положение точки P на линии центров неизменно. Из выше сказанного следует, что эвольвентное зацепление обеспечивает постоянство передаточного отношения.

6.6. Элементы эвольвентного зацепления

К таким элементам относятся параметры, которые характеризуют зацепление в целом. Например, точка P линии центров, названная *полюсом зацепления*. В этой точке происходит перекачивание профилей без их проскальзывания, т.е.

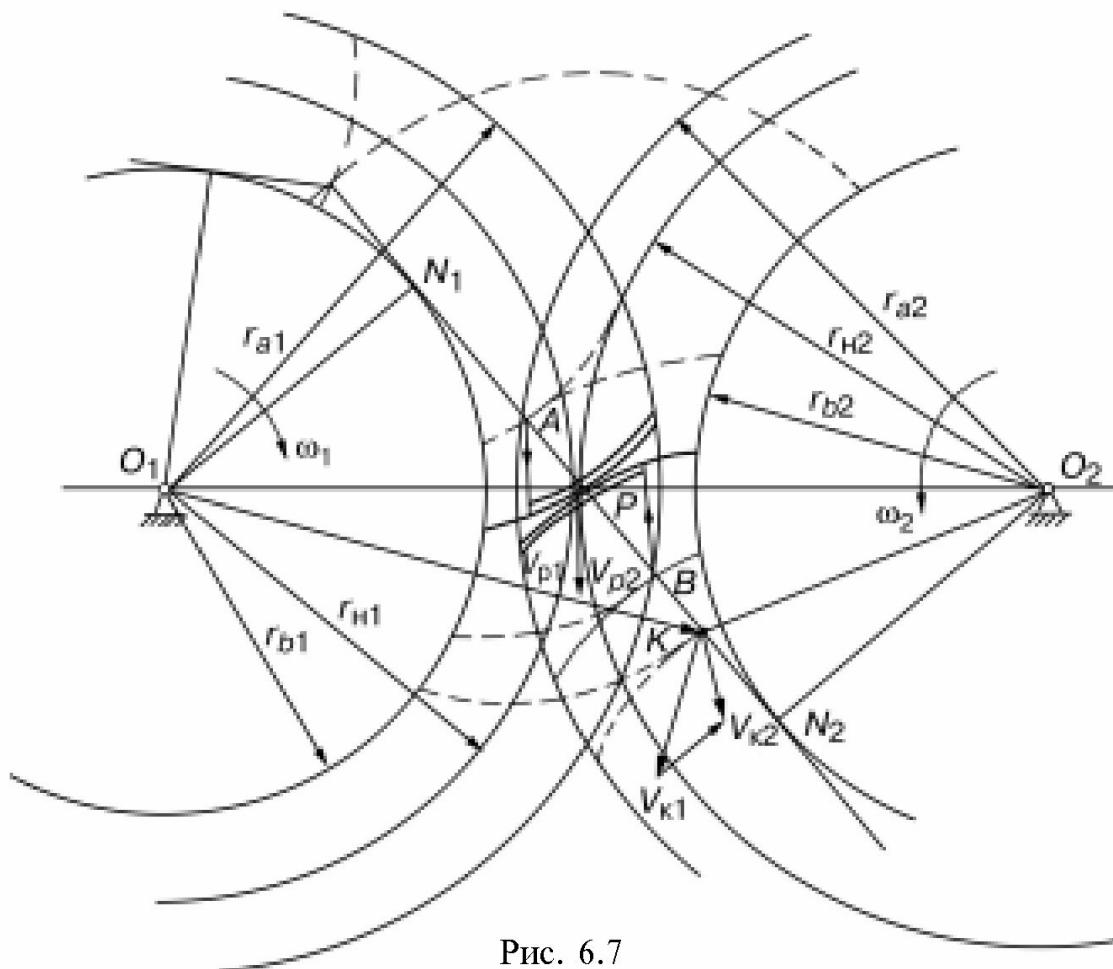


Рис. 6.7

$V_{p_1p_2} = 0$ в отличие от $V_{к1к2} \neq 0$ (рис. 6.7). Если через точку P провести две окружности из центров O_1 и O_2 , то процесс зацепления кинематически можно представить как качение без скольжения одной окружности по другой. Такие окружности называются *начальными*, их радиусы $r_{н1}$ и $r_{н2}$. Как отмечалось ранее, контакт сопряженных пар зубьев происходит на общей нормали $N_1 - N_2$ в пределах отрезка N_1N_2 . За пределами N_1N_2 контакт невозможен, так как сопряженные профили не будут иметь общей нормали, что повлечет к пересечению эвольвент. Таким образом, отрезок общей нормали N_1N_2 называют *теоретической длиной линии зацепления*. Сам процесс зацепления происходит как последовательное перемещение точки контакта сопряженных профилей по линии зацепления от точки начала зацепления до его окончания. Этот отрезок линии зацепления (AB) называется *практической длиной линии зацепления*. При этом профили сопряженных зубьев участвуют в зацеплении не по всей своей высоте. Если процесс зацепления начинается в точке A , в которой впервые встречаются наименьшая точка профиля зуба ведущего колеса и вершина профиля зуба ведомого колеса и заканчивается процесс зацепления в точке B , в которой встречаются вершина профиля зуба ведущего колеса и наименьшая точка контакта профиля зуба ведомого колеса, то активными участками профилей зубьев будут следующие: для ведущего колеса — от точки A до вершины зуба и для ведомого колеса — от точки B до вершины зуба.

Если через точку P провести перпендикуляр к линии центров $O_1 - O_2$, то угол, образуемый этим перпендикуляром с общей нормалью $N_1 - N_2$, называется *углом зацепления* и обозначается α . Значение этого угла определяется из уравнения эвольвенты:

$$\cos\alpha = \frac{r_{b1}}{r_{H1}} = \frac{r_{b2}}{r_{H2}}.$$

Если в качестве начальных окружностей используются делительные окружности, то

$$\angle \alpha = \angle \alpha_0 = 20^\circ.$$

Эвольвентное зацепление обладает весьма важными свойствами: **передаточное отношение передачи не зависит от изменения его межосевого расстояния.** Согласно теореме о мгновенном передаточном отношении,

$$U_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2P}{O_1P},$$

но $O_2P = \frac{r_{b2}}{\cos \alpha}$ и $O_1P = \frac{r_{b1}}{\cos \alpha}$.

Подставляя значения O_2P и O_1P в приведенную формулу, получим

$$U_{12} = \frac{r_{b2}}{r_{b1}},$$

Если межосевое расстояние изменить в сторону увеличения или уменьшения, то изменится положение центра колеса 2 — на O'_2 , полюса зацепления на P' и угла зацепления на α' , и передаточное отношение определяется по формуле

$$U_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O'_2P'}{O'_1P'} = \frac{r_{b1}}{\cos \alpha'} \cdot \frac{\cos \alpha'}{r_{b1}} = \frac{r_{b2}}{r_{b1}}.$$

Независимость передаточного отношения от изменения межосевого расстояния, неизбежно возникающего при изготовлении и монтаже зубчатой передачи, весьма положительно сказывается на обеспечении нормальной работы зубчатой передачи.

6.7. Элементы эвольвентной зубчатой передачи

Эвольвентная зубчатая передача представляет собой зубчатый механизм для передачи непрерывного вращательного движения между двумя валами. Она обладает всеми элемента-

ми и свойствами, присущими эвольвентному зацеплению, но имеет и свои особенности. К последним следует отнести, в первую очередь, размеры зубчатой передачи. Если передача составлена из нулевых колес, то межосевое расстояние передачи складывается из суммы радиусов делительных окружностей колес:

$$a_{\omega} = r_1 + r_2 = \frac{mz_1}{2} + \frac{mz_2}{2} = \frac{m}{2}(z_1 + z_2).$$

При составлении зубчатой передачи из ненулевых колес межосевое расстояние будет складываться из суммы радиусов начальных окружностей (рис. 6.8):

$$\begin{aligned} a_{\omega} = r_{H_1} + r_{H_2} &= \frac{r_{b_1}}{\cos \alpha} + \frac{r_{b_2}}{\cos \alpha} = r_1 \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} + r_2 \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} = \\ &= \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} \left(\frac{mz_1}{2} + \frac{mz_2}{2} \right) = \frac{m}{2} \cdot \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} (z_1 + z_2). \end{aligned}$$

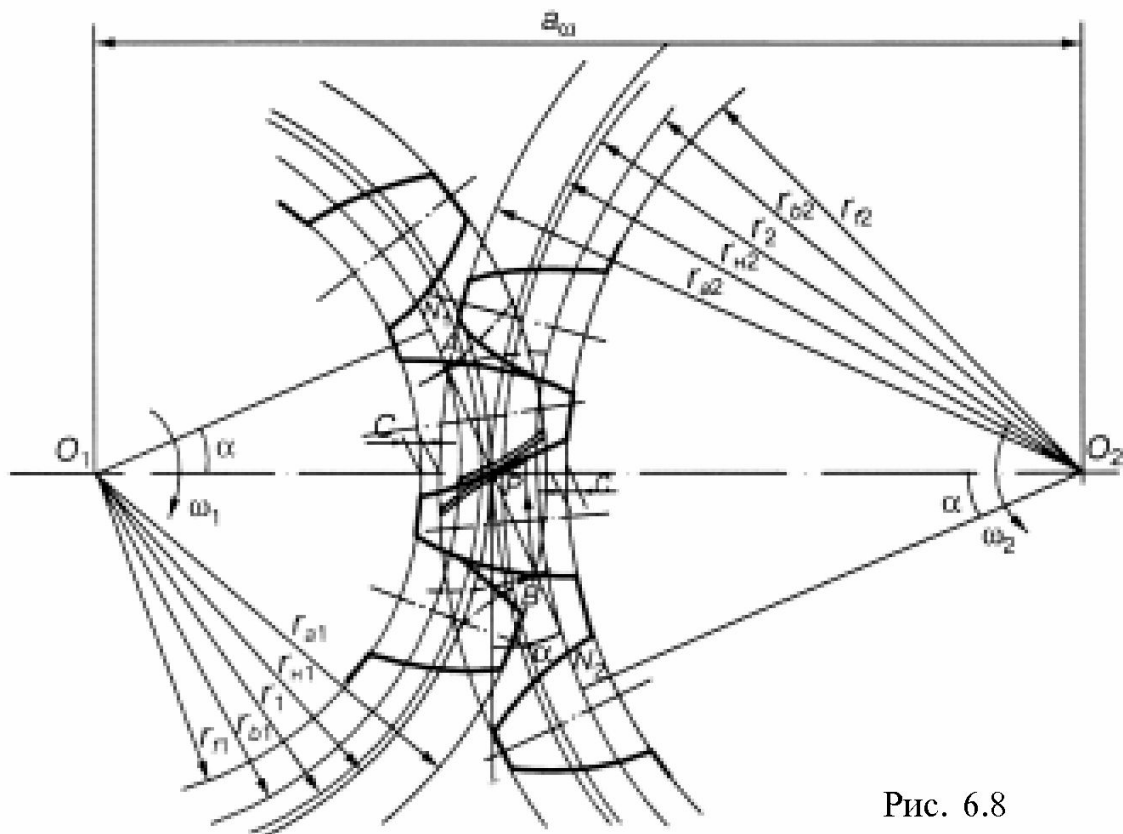


Рис. 6.8

Межосевое расстояние ненулевой передачи удобно выразить и через коэффициент воспринимаемого смещения y (рис. 6.9).

Из схемы передачи следует:

$$a_{\omega} = r_1 + r_2 + ym = \frac{mz_1}{2} + \frac{mz_2}{2} + ym = \frac{m}{2} \cdot \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} (z_1 + z_2).$$

Сократив на m и разрешив выражение относительно y , получим

$$y = \frac{z_1 + z_2}{2} \left(\frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} - 1 \right) = \frac{z_1 + z_2}{\cos \alpha} \cdot \sin \frac{\alpha + \alpha_0}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \alpha_0}{2}.$$

В собранной зубчатой передаче обязательно предусматривается радиальный зазор C , равный расстоянию между окружностью выступов одного колеса и окружностью впадин сопряженного колеса. По нормам ГОСТа принимается

$$C = 0,25m.$$

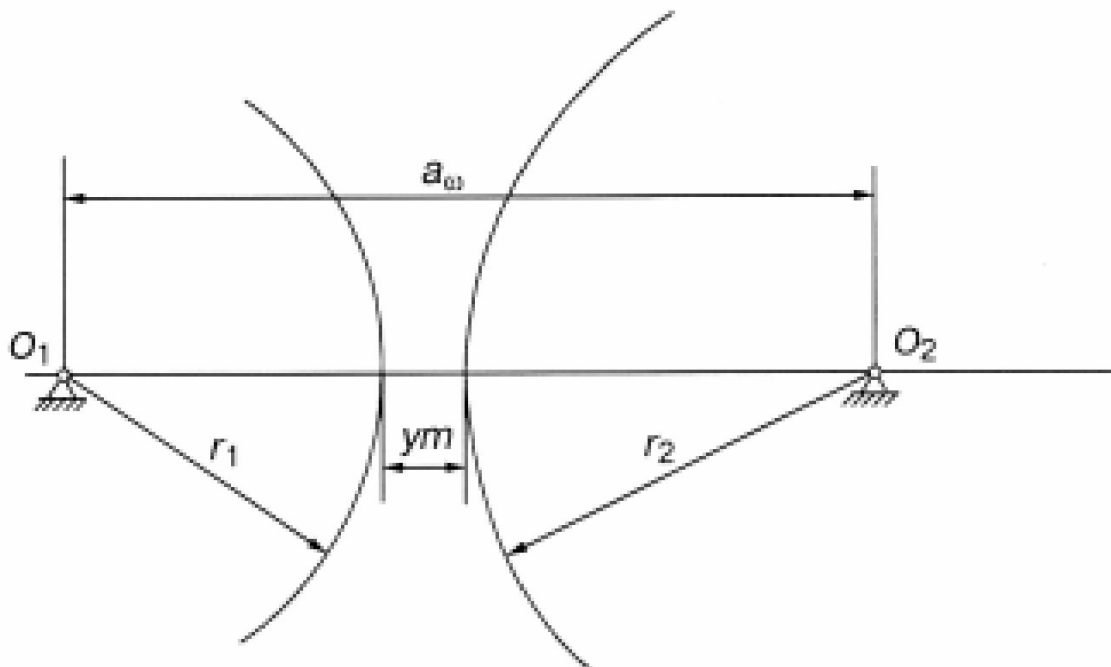


Рис. 6.9

Ранее отмечалось, что при составлении зубчатой передачи из нулевых колес угол зацепления ее равен углу давления на делительной окружности колес $\alpha_0 = 20^\circ$. Для ненулевой зубчатой передачи угол зацепления а удобно определить по основному уравнению зацепления. При этом предполагается, что зацепление является плотным, т.е. без бокового зазора между зубьями колес и, соответственно, должно быть выполнено условие равенства толщины зубьев одного колеса ширине впадины сопряженного колеса по начальным окружностям колес

$$S_{H_1} = U_{H_2},$$

$$U_{H_1} = S_{H_2},$$

откуда шаг зубьев по начальной окружности

$$p_{H_1} = S_{H_1} + U_{H_1}$$

$$p_{H_2} = S_{H_2} + U_{H_2}.$$

С учетом предыдущего

$$P_{H_1} = P_{H_2} = S_{H_1} + S_{H_2}$$

шаг по начальной окружности несложно выразить через шаг по делительной окружности, если учесть, что

$$r_{H_1} = \frac{r_{b1}}{\cos \alpha} = r_1 \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha}.$$

Умножив обе части равенства на 2π и поделив их на z_1 , получим

$$\frac{2\pi r_{H_1}}{z_1} = \frac{2\pi r_1}{z_1} \cdot \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha}$$

или

$$P_{H_1} = P_1 \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} = \pi m \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} = S_{H_1} + S_{H_2}.$$

Правая часть последнего равенства может быть записана с использованием формулы для толщины зуба по произвольной окружности, которая в данном равенстве будет иметь вид:

$$S_{H_1} = m \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} \left[\frac{\pi}{2} + \Delta_1 - z_1 (\operatorname{inv} \alpha - \operatorname{inv} \alpha_0) \right]$$

и

$$S_{H_2} = m \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} \left[\frac{\pi}{2} + \Delta_2 - z_2 (\operatorname{inv} \alpha - \operatorname{inv} \alpha_0) \right].$$

Подставляя приведенные выражения в последнее равенство, после несложных преобразований получим

$$(\Delta_1 + \Delta_2) - (z_1 + z_2)(\operatorname{inv} \alpha - \operatorname{inv} \alpha_0) = 0,$$

откуда

$$\operatorname{inv} \alpha = \operatorname{inv} \alpha_0 + \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{z_1 + z_2}.$$

При расчете ненулевой передачи следует иметь в виду, что модули по делительным окружностям колес являются одинаковыми и равными стандартным значениям. Указанное утверждение следует из равенства шагов по начальным окружностям колес:

$$P_{H_1} = P_{H_2},$$

или

$$\pi m_1 \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} = \pi m_2 \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha}.$$

Последнее равенство возможно только при $m_1 = m_2$.

6.8. Виды зубчатых передач

При геометрическом расчете зубчатых передач различают три их типа: нулевая, положительная и отрицательная (рис. 6.10).

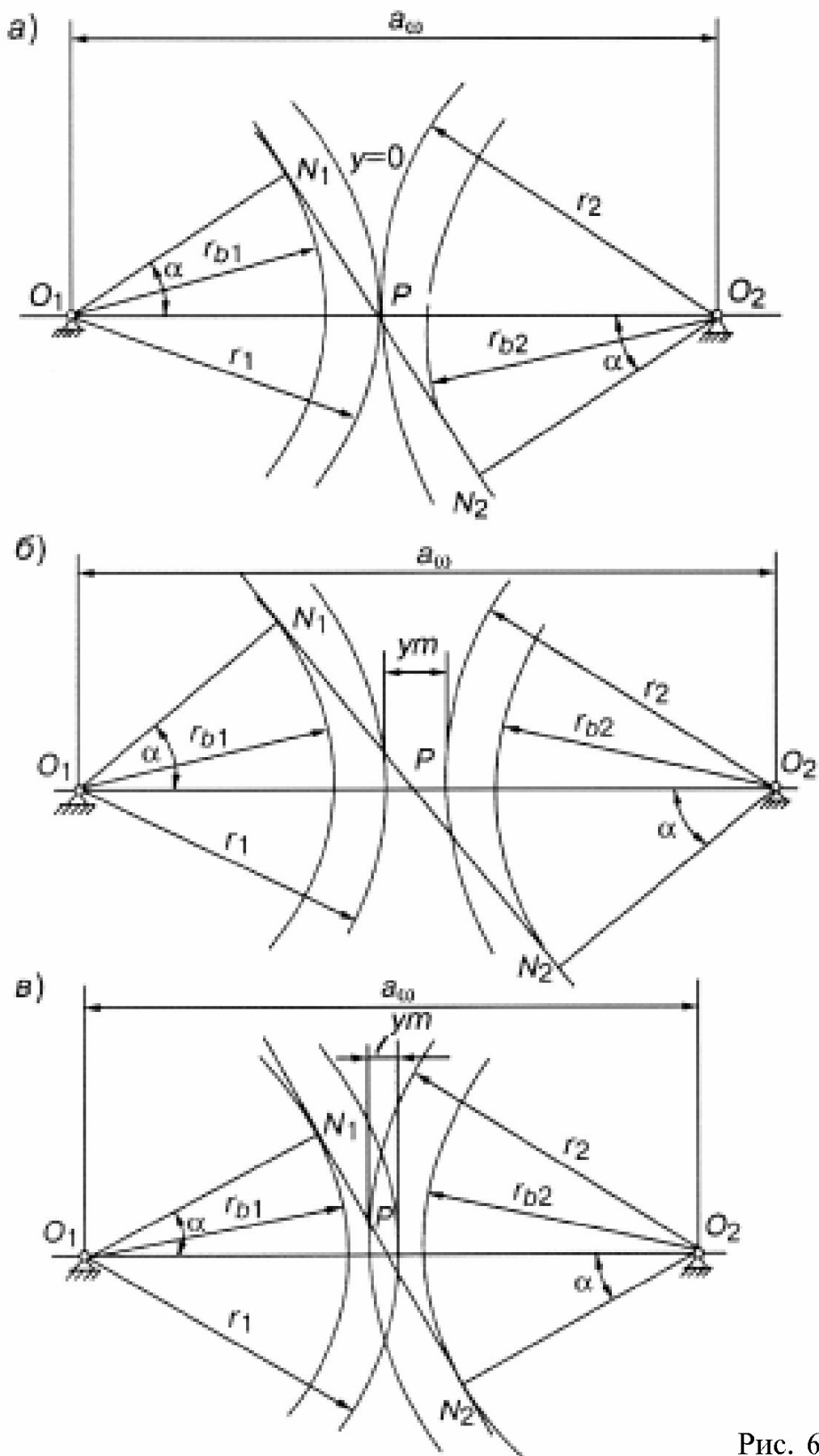


Рис. 6.10

Нулевая зубчатая передача (рис. 6.10, а). Признаком такой передачи является равенство нулю суммарного коэффициента приращения толщины зубьев по делительным окружностям сопряженных зубчатых колес:

$$\Delta_1 + \Delta_2 = 0.$$

Это условие может быть выполнено при $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$, если каждый из коэффициентов равен нулю, или $\Delta_1 + \Delta_2 = 0$, если оба коэффициента равны по модулю, но противоположны по знаку.

Для нулевой передачи угол зацепления $\alpha = \alpha_0$ и коэффициент воспринимаемого смещения $y = 0$.

Положительная зубчатая передача (рис. 6.10, б). В такой передаче суммарный коэффициент приращения толщины зубьев по делительным окружностям сопряженных зубчатых колес

$$\Delta_1 + \Delta_2 > 0.$$

Данное условие может быть выполнено при составлении зубчатой передачи из двух положительных колес, из одного положительного и другого нулевого или отрицательного с коэффициентом приращения толщины зуба по абсолютной величине меньшим положительного колеса.

Для положительной передачи угол зацепления $\alpha > \alpha_0$ и коэффициент воспринимаемого смещения $y > 0$.

Отрицательная зубчатая передача (рис. 6.10, в). Для этой передачи суммарный коэффициент приращения толщины зубьев по делительным окружностям сопряженных зубчатых колес

$$\Delta_1 + \Delta_2 < 0.$$

Зубчатые колеса, составляющие данную передачу, могут быть либо оба отрицательными; либо одно отрицательным, другое нулевым; либо одно отрицательным, а другое положительным с коэффициентом приращения толщины зуба по абсолютной величине меньшим отрицательного колеса.

Угол зацепления отрицательной передачи $\alpha < \alpha_0$; коэффициент воспринимаемого смещения $y < 0$.

6.9. Краткие сведения по изготовлению зубчатых колес

На практике используются два способа изготовления зубчатых колес: *способ копирования* и *способ обката*. Первый из них основан на том, что зуборезному инструменту придается форма впадины зубьев зубчатого колеса, которая переносится на изготавливаемое колесо в процессе его обработки. При этом технология изготовления не играет никакой роли. Это может быть фасонное фрезерование, долбление фасонными

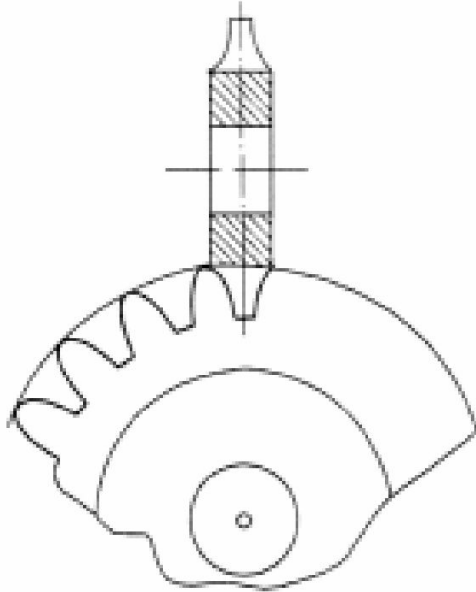


Рис. 6.11

резцами, протяжка, штамповка, отливка и т.д. Так, например, в случае фасонного фрезерования дисковой фрезой, заточенной по форме впадины зубьев колеса, делается проход в ее заготовке. Затем заготовка поворачивается на один угловой шаг; операция повторяется, пока не будет нарезано полностью все колесо (рис. 6.11).

Следует иметь в виду, что форма режущей части фрезы зависит от модуля и числа зубьев нарезаемого колеса, поскольку кривизна эвольвенты определяется радиусом основной окружности

$$r_b = \frac{mZ}{2} \cos \alpha_0.$$

Поэтому точно нарезать впадину можно для колеса только с определенным модулем и числом зубьев, т.е. для каждого колеса фреза должна иметь заточку соответствующей формы, что повлечет за собой значительное удорожание производства. На практике заточку фрезы производят для некоторого ряда чисел зубьев, из которого только одно количество зубьев будет точно соответствовать форме профиля фрезы, а остальные будут соответствовать приближенно.

К недостаткам метода копирования следует отнести и ошибки, связанные с использованием делительной головки при повороте заготовки на угловой шаг. Изготовленное с разным шагом колесо будет работать с повышенным шумом, быстрее изнашиваться и преждевременно выходить из строя. Невысокая производительность изготовления зубчатых колес также не способствует более широкому распространению метода копирования на практике.

Перечисленные недостатки не имеют места при изготовлении зубчатых колес методом обката. Последний принципиально отличен от метода копирования и сводится к обеспечению зацепления зуборезного инструмента с нарезаемым колесом в процессе его изготовления. Зацепление инструмента с заготовкой рассматривается условно, их относительные движения производятся от независимых приводов, согласуются между собой и осуществляются в тот момент времени, когда инструмент разобщен с заготовкой и не происходит снятие стружки. Кинематические схемы обкатки определяются типом зуборезного инструмента и характером относительного движения заготовки.

Схема 1. Зацепление инструментального колеса (долбяка) с заготовкой. Кинематически процесс нарезания зубчатого колеса по этой схеме осуществляется как качение без скольжения станочно-начальной окружности долбяка по делительной окружности нарезаемого колеса (рис. 6.12). При этом долбяку

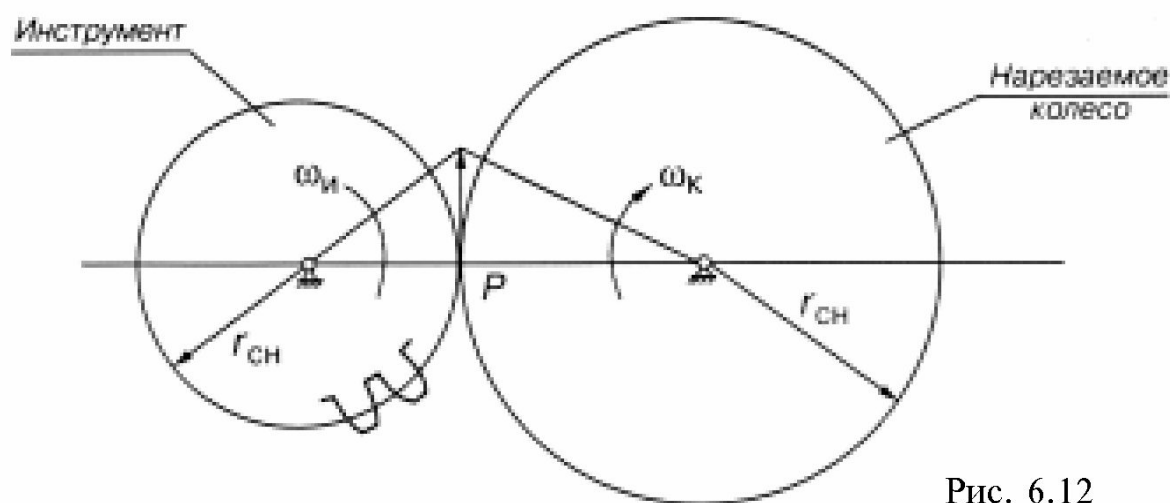


Рис. 6.12

и заготовке сообщаются согласованные вращательные движения от независимых приводов и технологическое движение долбяку для снятия стружки.

Преимуществом этой схемы является возможность нарезания зубчатого колеса как внешнего, так и внутреннего зацепления.

Схема 2. При нарезании по этой схеме в качестве инструмента используется червячная фреза, имеющая реечный профиль зубьев в осевом сечении (рис. 6.13).

При вращении фрезы вокруг своей оси режущие кромки витков перемещаются в осевом направлении, согласуясь с вращательным движением заготовки. Для нарезания зубьев по всей ширине колеса фрезе сообщается технологическое движение вдоль оси заготовки. К преимуществам данной схемы следует отнести достаточно высокую производительность при нарезании зубчатых колес по сравнению с другими схемами.

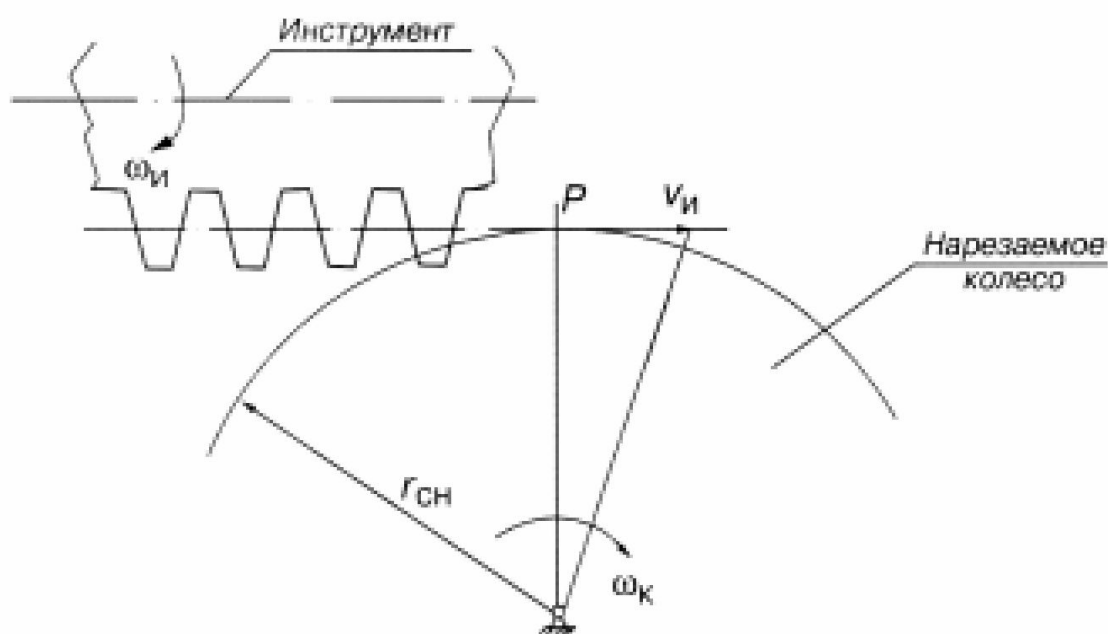


Рис. 6.13

Схема 3. Зуборезный инструмент, используемый для нарезания зубчатых колес по этой схеме, представляет собой гребенку, выполненную в виде инструментальной рейки. Кинематический процесс зацепления нарезаемого колеса с инст-

рументом осуществляется при неподвижном положении рейки, не считая ее технологического движения при снятии стружки с заготовки колеса и обкаточного движения заготовки (рис. 6.14).

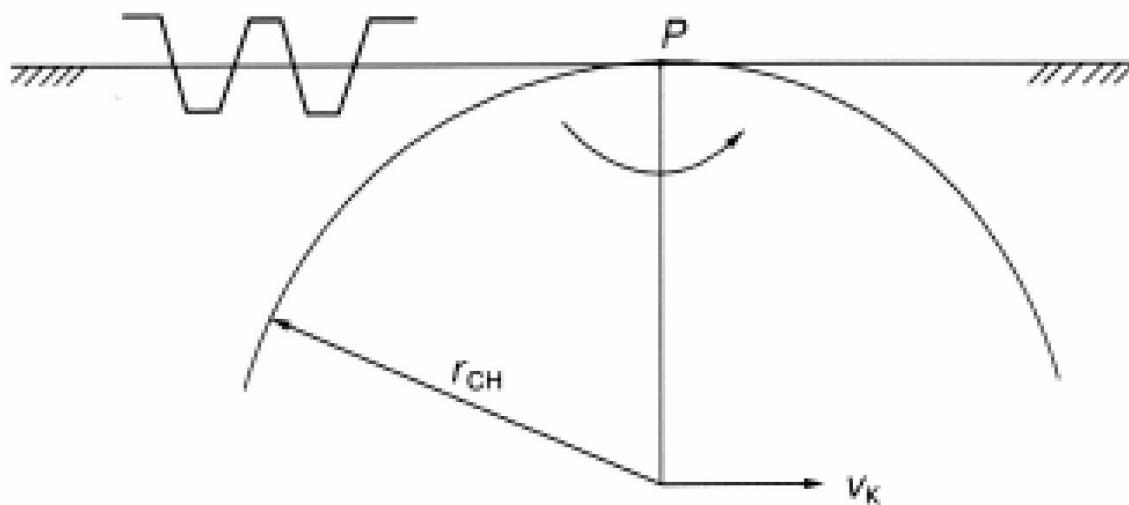


Рис. 6.14

Данная схема является более сложной в технологическом плане и более простой в плане кинематическом.

Элементы зуборезного инструмента реечного типа. Инструментальная рейка имеет параметры, аналогичные зубчатой рейке (см. рис. 6.15), только с увеличенной высотой зуба на размер радиального зазора C (рис. 6.15).

В основании и на вершине зубья инструментальной рейки имеют скругления, радиус которых нетрудно определить по

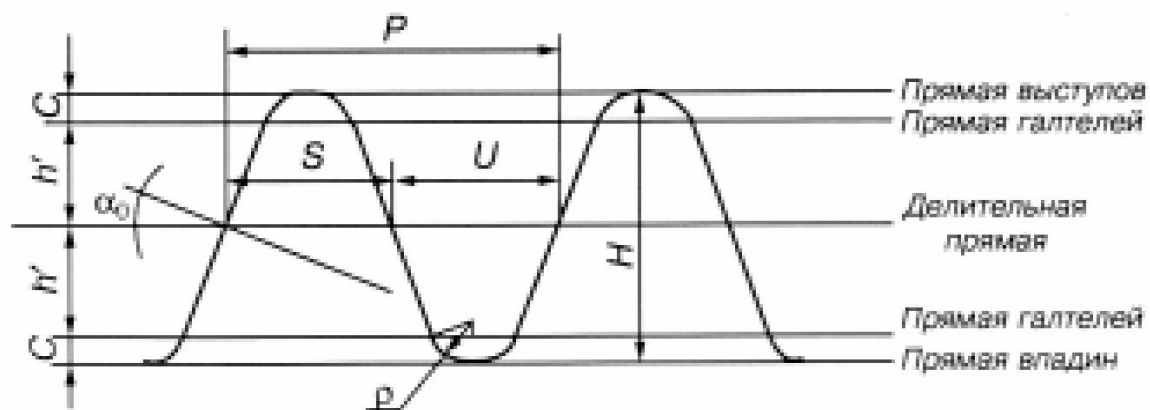


Рис. 6.15

чертежу. Для этого достаточно выразить радиус ρ через радиальный зазор C .

$$C = \rho - \rho \cdot \sin \alpha_0 = \rho(1 - \sin \alpha_0)$$

или

$$\rho = \frac{C}{1 - \sin \alpha_0}.$$

Станочное зацепление нарезаемого колеса с инструментальной рейкой. При нарезании зубчатого колеса инструментальной рейкой последнюю необходимо сориентировать относительно заготовки таким образом, чтобы делительная прямая рейки располагалась касательно делительной окружности колеса (рис. 6.16).

Если колесу сообщить обкаточное движение по делительной прямой, то режущая кромка зуба рейки нарежет эвольвентный профиль зуба колеса. При этом общая нормаль к контактируемым профилям будет представлять собой линию станочного зацепления, а длина перпендикуляра, опущенного из центра колеса на линию зацепления, будет равна радиусу

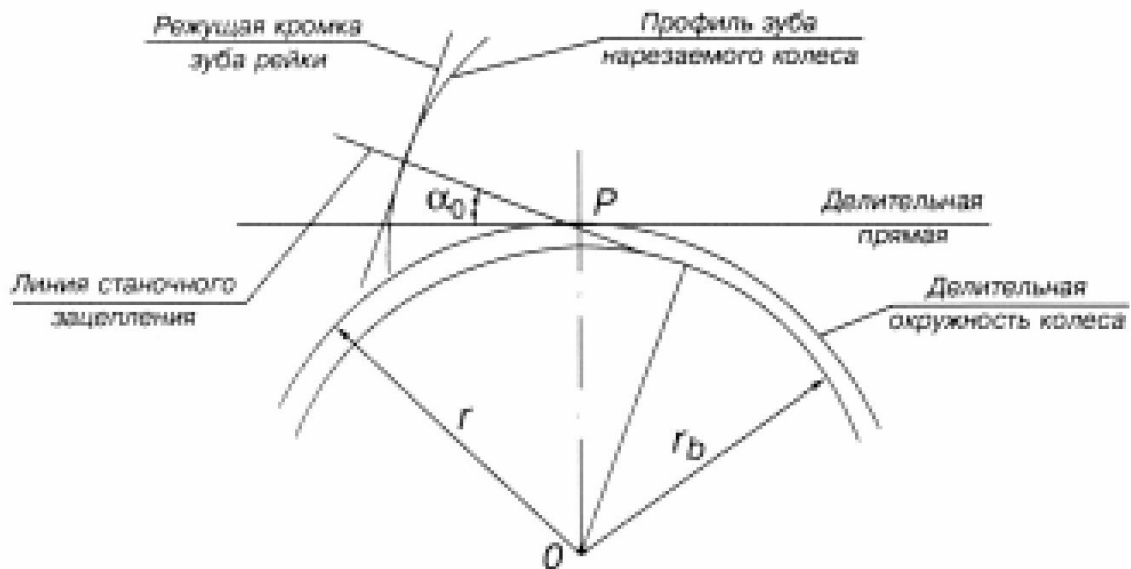


Рис. 6.16

щена от центра вверх на величину xm , в которой x назовем коэффициентом смещения и припишем ему знак плюс. При смещении к центру знак x будет отрицательным. Из схемы следует, что при обкатке делительной окружности нарезаемого колеса по станочно-начальной прямой шаг зубьев рейки переносится на эту окружность без изменения. Но шаг рейки стандартный по любой параллельной прямой, т.е. стандартным будет шаг m , соответственно, модуль по делительной окружности колеса. По аналогии неизменными останутся угол α_0 станочного зацепления и число зубьев Z нарезаемого колеса. В то же время, определенные изменения претерпит профиль зубьев колеса. Это относится, в первую очередь, к неэвольвентной части зуба, которая нарезается галтелью профиля зуба инструмента. При смещении рейки неэвольвентный участок зуба может измениться, что в конечном итоге повлияет на качество зацепления. В станочном зацеплении окружность выступов колеса не должна выходить за пределы прямой галтелей и составлять радиальный зазор с инструментом, равный S . Но в отдельных случаях этот зазор может быть больше S на величину Δym . С учетом последнего можно определить размеры зубчатого колеса.

Радиус окружности выступов

$$r_a = r + sm + h' - \Delta ym = \frac{mz}{2} + xm + m - \Delta ym.$$

Соответственно, для диаметра окружности выступов, полученное выражение следует удвоить:

$$d_a = m(z + 2x + 2 - 2\Delta y).$$

Высота зуба выразится формулой

$$H = m(2 \cdot 1 + 0,25 - \Delta y).$$

При определении толщины зуба по делительной окружности следует иметь в виду, что при обкатке станочно-начальной прямой инструмента по делительной окружности толщине

на зуба равна отрезку прямой ab , заключенному между двумя зубьями зуборезной рейки. Таким образом

$$\bar{S} = ab.$$

На схеме (см. рис. 6.17) отрезок \bar{ab} складывается из двух частей: ширины впадины зубьев рейки по делительной прямой $\frac{\pi m}{2}$ и двух катетов e , заштрихованных треугольников, каждый из которых равен $xmtg\alpha_0$. Следовательно,

$$S = \frac{\pi m}{2} + 2xmtg\alpha_0.$$

Ранее толщина зубьев по делительной окружности была выражена формулой

$$S = \frac{\pi m}{2} + \Delta m,$$

где Δ — коэффициент приращения толщины зуба.

Из сравнения формул следует, что

$$\Delta = 2xtg\alpha_0.$$

С учетом полученной зависимости основное уравнение зацепления запишется в виде:

$$\text{inv}\alpha = \text{inv}\alpha_0 + \frac{2(x_1 + x_2)tg\alpha_0}{z_1 + z_2}.$$

6.10. Подрез зубьев

При рассмотрении эвольвентного зацепления колес отмечалось, что нормальная работа зубчатой передачи возможна при условии, если контакт зубьев будет происходить в пределах участка линии зацепления, ограниченного длиной общей

нормали (N_1N_2). За пределами этого участка будет иметь место интерференция (пересечение) эвольвент, что приведет к заклиниванию зубчатой передачи или подрезу основания зубьев при изготовлении зубчатых колес.

Рассмотрим схему станочного зацепления, в которой будет иметь место контакт зубьев зуборезной рейки с нарезаемым зубчатым колесом за пределами теоретической длины зацепления (рис. 6.18). Пересечение прямой галтели с линией зацепления на схеме происходит в точке B , в которой для рейки и эвольвенты колеса будут разные нормали (для рейки — прямая BN_1 , а для колеса — прямая BN_2). Таким образом, в процессе нарезания зубчатого колеса будет происходить срезание части эвольвентного профиля колеса. Явление подреза основания профиля зуба расценивается как дефект производства, подлежащий устранению при изготовлении колес. Подрез ослабляет основание зуба, уменьшая передаваемую мощность зубчатой передачи и снижает продолжительность зацепления.

Устранить подрез возможно путем коррекции станочного зацепления или изменения параметров нарезаемого колеса. Оказывается, если увеличить размеры зубчатого колеса, не изменяя его модуль, а только количество зубьев, то точку

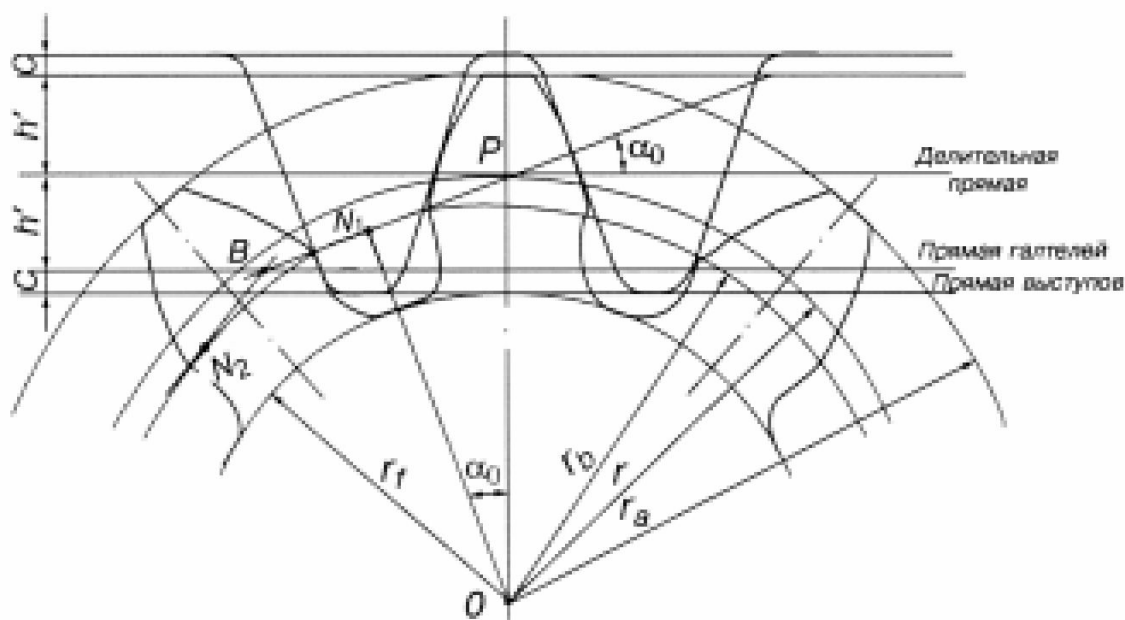


Рис. 6.18

N можно опустить ниже точки B , т.е. выполнить условие (рис. 6.19)

$$NP \geq BP.$$

Из приведенной схемы следует:

$$NP = OP \sin \alpha_0 = r \sin \alpha_0 = \frac{mz}{2} \sin \alpha_0;$$

$$BP = \frac{PE}{\sin \alpha_0} = \frac{(h_a - x)m}{\sin \alpha_0},$$

где h_a — коэффициент высоты профиля зуба.

Подставив значения NP и BP в вышеприведенное неравенство, получим:

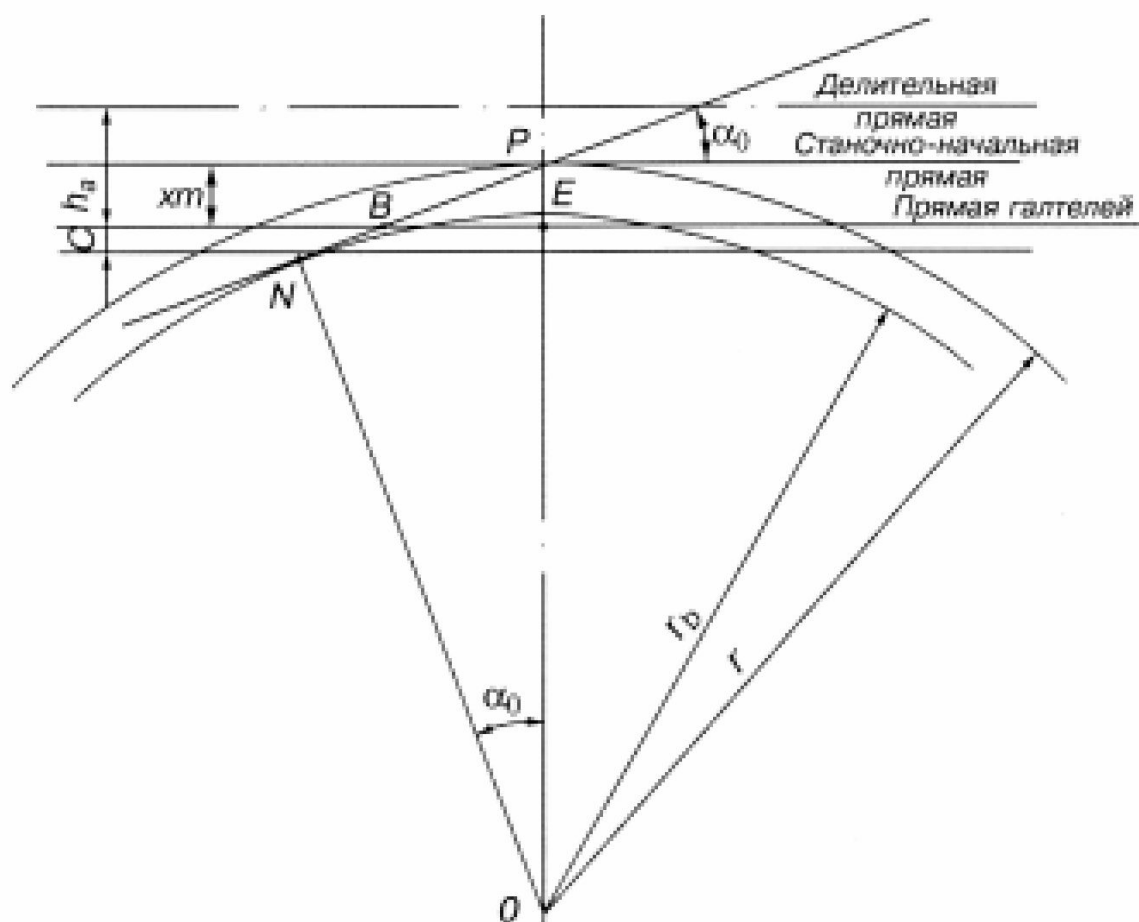


Рис. 6.19

$$\frac{mz}{2} \sin \alpha_0 \geq \frac{(h_a - x)m}{\sin \alpha_0}.$$

После сокращения на m найдем

$$Z \geq \frac{2(h_a - x)}{\sin^2 \alpha_0}.$$

При нарезании нулевого колеса для $x = 0$

$$Z_{\min} \geq \frac{2h_a}{\sin^2 \alpha_0}.$$

Таким образом, без подреза можно нарезать зубчатое колесо, у которого количество зубьев должно быть не менее определенного значения.

При коэффициенте высоты зуба $h_a = 1$ и $\alpha_0 = 20^\circ$

$$Z_{\min} = 17.$$

При $h_a = 0,8$ и $\sin \alpha_0 = 20^\circ$

$$Z_{\min} = 14.$$

Минимальное значение количества зубьев решает проблему устранения подреза, но не решает задачи проектирования компактных механизмов. В ряде случаев целесообразно спроектировать зубчатый механизм с меньшим числом зубьев колес без ущерба для их прочности и при отсутствии подреза. Поставленная задача может быть решена с помощью коррекции станочного зацепления, исходя из следующих соображений: найденное ранее выражение неравенства

$$Z \geq \frac{2(h_a - x)}{\sin^2 \alpha_0}$$

приводим к виду

$$\frac{Z}{2} \cdot \sin^2 \alpha_0 \geq h_a - x,$$

Подставив вместо $\sin^2 \alpha_0 = \frac{2h_a}{Z_{\min}}$, найдем

$$\frac{Z}{2} \cdot \frac{2h_a}{Z_{\min}} \geq h_a - x,$$

откуда

$$x \geq h_a - \frac{Zh_a}{Z_{\min}} = \frac{h_a Z_{\min} - h_a Z}{Z_{\min}} = h_a \frac{Z_{\min} - Z}{Z_{\min}}.$$

Таким образом, подреза можно избежать и при нарезании малозубого колеса с числом зубьев $Z < Z_{\min}$, но при условии обязательной коррекции.

6.11. Заострение зубьев

При нарезании зубчатых колес может возникнуть и другой дефект, помимо подреза основания зубьев — заострение их вершин. Это явление возможно при выборе значительного коэффициента коррекции малозубых колес, что подлежит обязательной проверке при их проектировании. Для этого достаточно воспользоваться формулой для толщины зуба по произвольной окружности, записанной для окружности выступов:

$$S_a = m \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_a} \left[\frac{\pi}{2} + \Delta - Z(\operatorname{inv} \alpha_a - \operatorname{inv} \alpha_0) \right],$$

где Δ — коэффициент приращения толщины зуба, равный $2x \operatorname{tg} \alpha_0$.

По существующим нормам расчетная толщина зубьев по окружности выступов не должна быть менее $0,2m$:

$$S_a = 0,2m.$$

Понятие об уравнительном смещении. Ранее было отмечено, что при станочном зацеплении зазор между окружностью выступов нарезаемого колеса и прямой впадин реечного инструмента может быть больше стандартного зазора $C = 0,25 m$. Необходимость увеличения указанного зазора возникает для обеспечения плотного зацепления зубчатой передачи, с одной стороны, и выполнения условия стандартного радиального зазора — с другой.

Плотность зацепления обеспечивается при межосевом расстоянии

$$a_w = r_1 + r_2 + um.$$

Стандартный радиальный зазор выполняется при межосевом расстоянии

$$a_w = r_{a1} + c + r_{f2}.$$

Приравнивая оба выражения, получим

$$r_1 + r_2 + um = r_{a1} + c + r_{f2}.$$

Раскрывая значения входящих в это равенство величин, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{mz_1}{2} + \frac{mz_2}{2} + um &= m \left(\frac{z_1}{2} + x_1 + h_a - \Delta y \right) + c_a m + r_{a2} - H = \\ &= m \left(\frac{z_1}{2} + x_1 + h_a - \Delta y \right) + c_a m + m \left(\frac{z_2}{2} + x_2 + h_a - \Delta y \right) - m(2h_a + c_a - \Delta y), \end{aligned}$$

где c_a — коэффициент радиального зазора.

Упрощая полученное выражение, найдем

$$\Delta y = x_1 + x_2 - y.$$

Качественные показатели зубчатой передачи. Спроектированная и изготовленная зубчатая передача должна удовлетворять определенным требованиям: она должна быть достаточно компактной, обеспечивать плавность зацепления, обладать

необходимой износостойкостью и прочностью зубьев и т.д. Указанные показатели должны учитываться уже на стадии проектирования при выборе параметров зацепления, материала зубчатых колес, термообработки, способа изготовления. Для сравнения, качество передачи, например, возможно оценивать с помощью коэффициента, как плавность зацепления, износостойкость и прочность. Например, для оценки плавности зацепления удобно воспользоваться коэффициентом перекрытия, износостойкость оценивать коэффициентом скольжения, а прочность — коэффициентом удельного давления.

а) *Коэффициент перекрытия.* Под плавностью зацепления понимается непрерывность контакта сопряженных пар зубьев зубчатой передачи. Кинематически это означает, что при выходе из зацепления одной пары зубьев должна войти в зацепление следующая пара зубьев. Причем каждая последующая пара зубьев должна входить в зацепление с определенным перекрытием. Последнее и оценивается соответствующим коэффициентом. Согласно определению, под коэффициентом перекрытия понимается отношение дуги зацепления T по любой окружности к шагу зубьев по этой же окружности (рис. 6.20).

Дуга зацепления есть участок дуги окружности между двумя положениями эвольвент в момент начала зацепления и его окончания. Если взять дугу зацепления по основной окружности, то по свойству эвольвенты она будет равна рабочему участку линии зацепления AB . Отсюда коэффициент перекрытия ϵ можно выразить:

$$\epsilon = \frac{\check{T}b}{Pb} = \frac{A\bar{B}}{Pb}.$$

Отрезок AB можно представить состоящим из двух частей:

$$AB = AP + PB,$$

где $AP = AN_2 - PN_2$ и $PB = BN_1 - PN_1$.

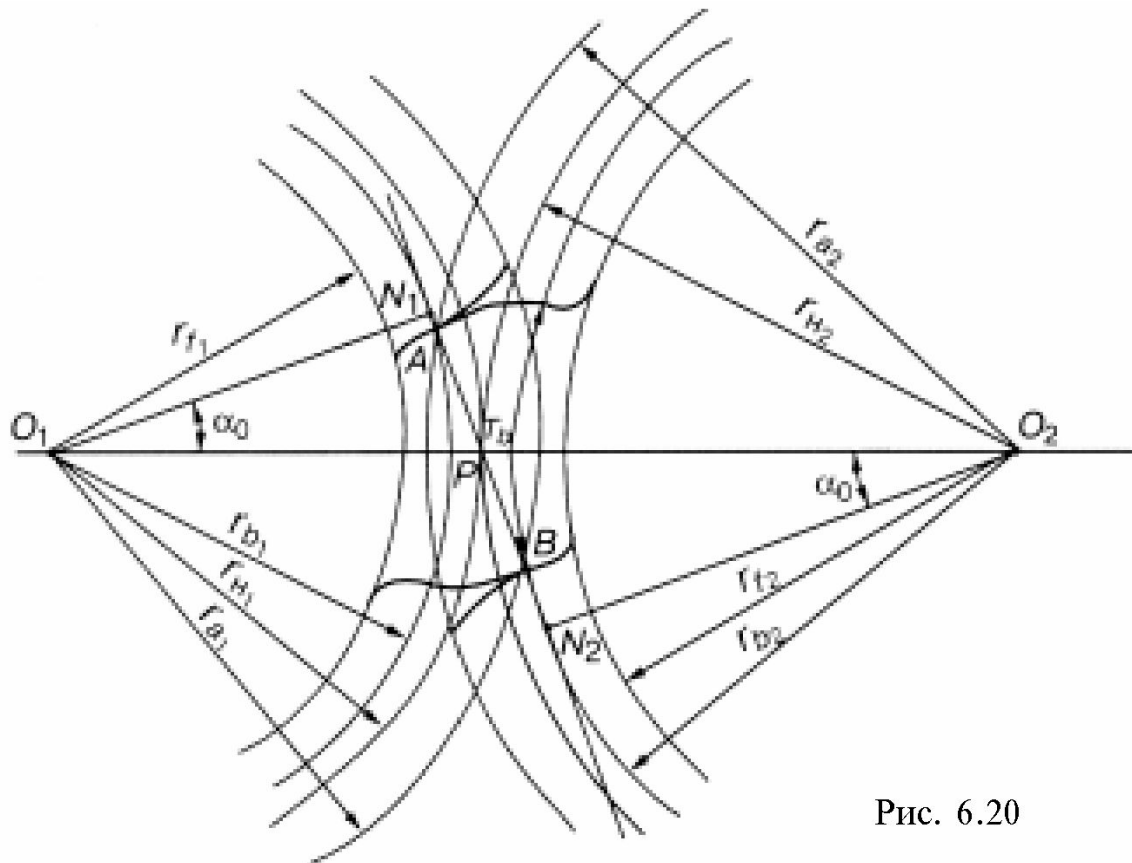


Рис. 6.20

$$AN_2 = \sqrt{r_{a_2}^2 - r_{b_2}^2}$$

$$PN_2 = r_{H_2} \sin \alpha$$

$$BN_1 = \sqrt{r_{a_1}^2 - r_{b_1}^2}$$

$$PN_1 = r_{H_1} \sin \alpha.$$

Подставляя найденные значения в вышеприведенную формулу, получим

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\sqrt{r_{a_1}^2 - r_{b_1}^2} + \sqrt{r_{a_2}^2 - r_{b_2}^2} - (r_{H_1} + r_{H_2}) \sin \alpha}{P_b} \\ &= \frac{\sqrt{r_{a_1}^2 - r_{b_1}^2} + \sqrt{r_{a_2}^2 - r_{b_2}^2} - a_w \cdot \sin \alpha}{\pi m \cdot \cos \alpha} > 1. \end{aligned}$$

Значение коэффициента перекрытия для прямозубой передачи изменяется в пределах

$$1 < \varepsilon < 2.$$

Для нормальной работы зубчатой передачи значение ε должно быть в пределах $1,3 \div 1,5$.

Коэффициент скольжения. При работе зубчатой передачи контактируемые зубья проскальзывают относительно друг друга. Поскольку скольжение происходит под нагрузкой, то это обстоятельство приводит к повышенному износу профилей зубьев. Практика показывает, что их износ пропорционален скорости скольжения и обратно пропорционален скорости смены точки контакта. Тогда коэффициент скольжения λ , можно выразить

$$\lambda = \frac{V_{\text{ск}}}{V_{\text{т}}},$$

где $V_{\text{ск}}$ — скорость скольжения;
 $V_{\text{т}}$ — скорость смены точки контакта.

Опуская промежуточные преобразования, изменение λ , можно представить в виде графика в функции перемещения точки контакта по линии зацепления (рис. 6.21).

Из графика следует, что коэффициент скольжения первого колеса достигает максимального значения в начальный момент зацепления, а для второго колеса — в конце зацепления. При этом максимум λ , приходится на ножку зуба для обоих колес, в силу чего ножки зубьев подвержены более интенсивному износу.

Коэффициент удельного давления. При передаче силового потока зубчатым механизмом, в зубчатых зацеплениях последнего возникают контактные напряжения, величина которых зависит от геометрических параметров зацепления, материала зубчатых колес, передаваемой нагрузки и т.д. Возникающие напряжения в точках контакта зубьев сопряженных колес можно определить по формуле Герца:

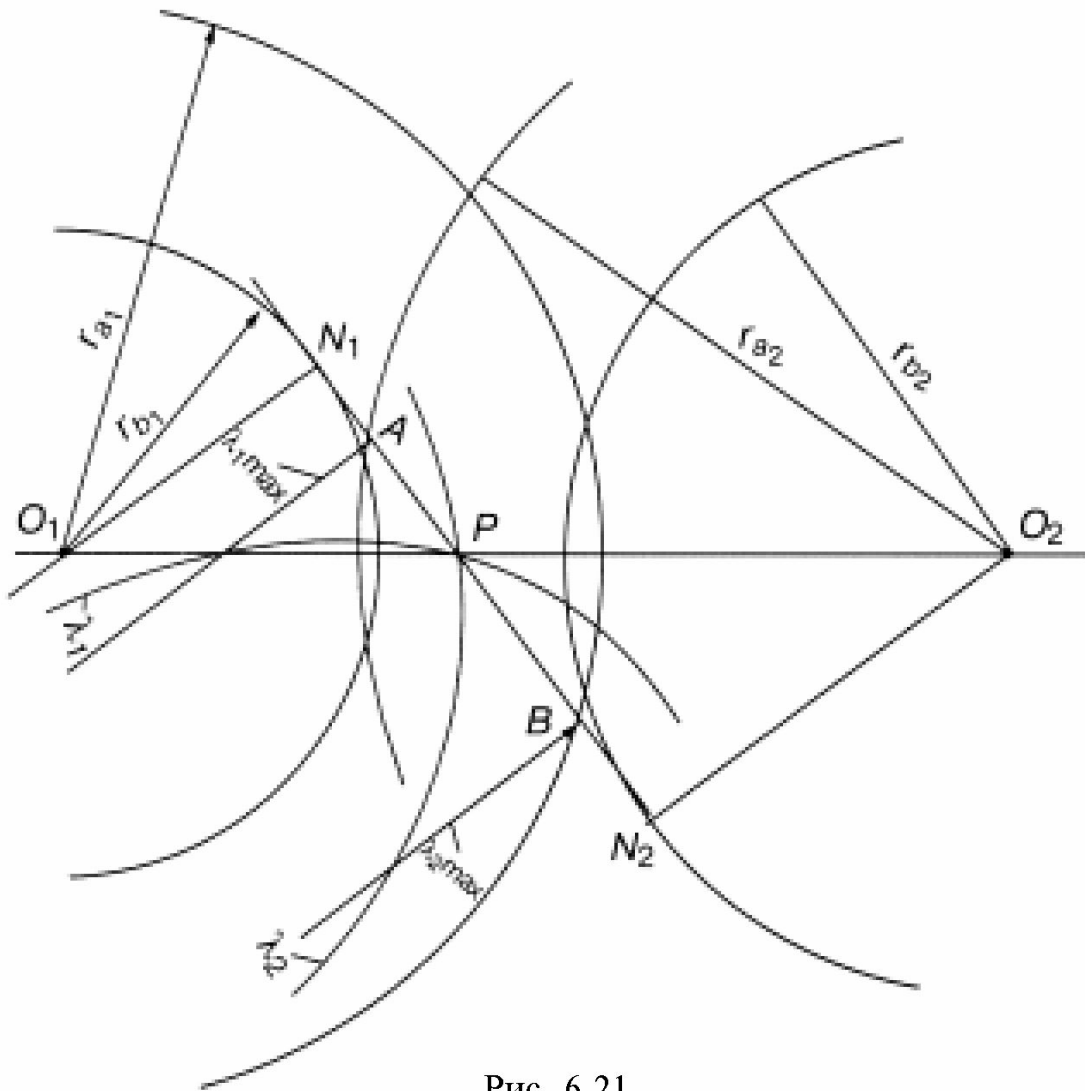


Рис. 6.21

$$\sigma = k \sqrt{\frac{Q^n}{b} E \frac{1}{\rho}},$$

где Q^n — нормальная нагрузка на зуб;
 b — ширина зубчатого колеса;
 E — модуль упругости материала зубчатых колес;
 $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$ — приведенный радиус кривизны профилей зубьев
эвольвентных зубчатых колес.

Выделив из формулы геометрический параметр зацепления $\frac{1}{\rho}$, так называемый коэффициент удельного давления ν ,

можно построить график его изменения в функции перемещения точки контакта по линии зацепления (рис. 6.22).

Из построенного графика следует, что наибольшие контактные напряжения в зубьях передачи возникают в момент входа зубьев в зацепление и выхода их из зацепления. Однако, учитывая, что коэффициент перекрытия зубчатой передачи $\varepsilon > 1$, то в указанных точках в зацеплении одновременно находятся две пары зубьев и напряжения в них будут значительно ниже. Таким образом, за расчетное принимается напряжение, возникающее в полюсе зацепления.

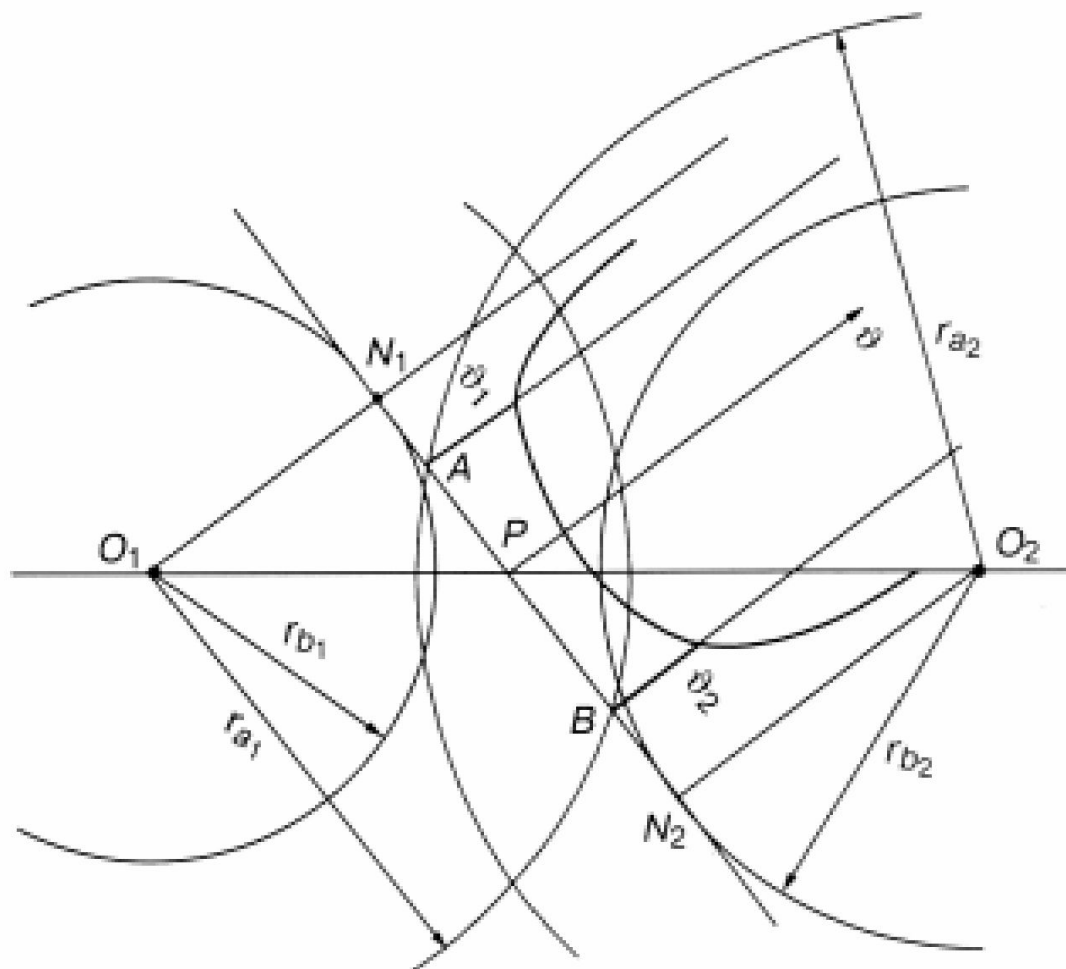


Рис. 6.22

6.12. Кинематическое исследование зубчатых механизмов

В задачу кинематического исследования зубчатых механизмов включаются вопросы определения параметров движения отдельных звеньев, аналогичные при исследовании механизмов других типов. Особенностью подобного анализа является то, что звенья зубчатых механизмов, как правило, совершают равномерное движение, и определение таких параметров, как скорость или ускорение, не представляет интереса. При исследовании зубчатых механизмов важнее знать частоту вращения зубчатых колес или передаточное отношение, под которым понимается отношение угловой скорости ведущего колеса к угловой скорости ведомого колеса, т.е.

$$U_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2}.$$

Для простой зубчатой передачи это отношение можно выразить через параметры передачи (рис. 6.23). Выразив линейную скорость точки P через параметры колеса 1 и через параметры колеса 2, получим

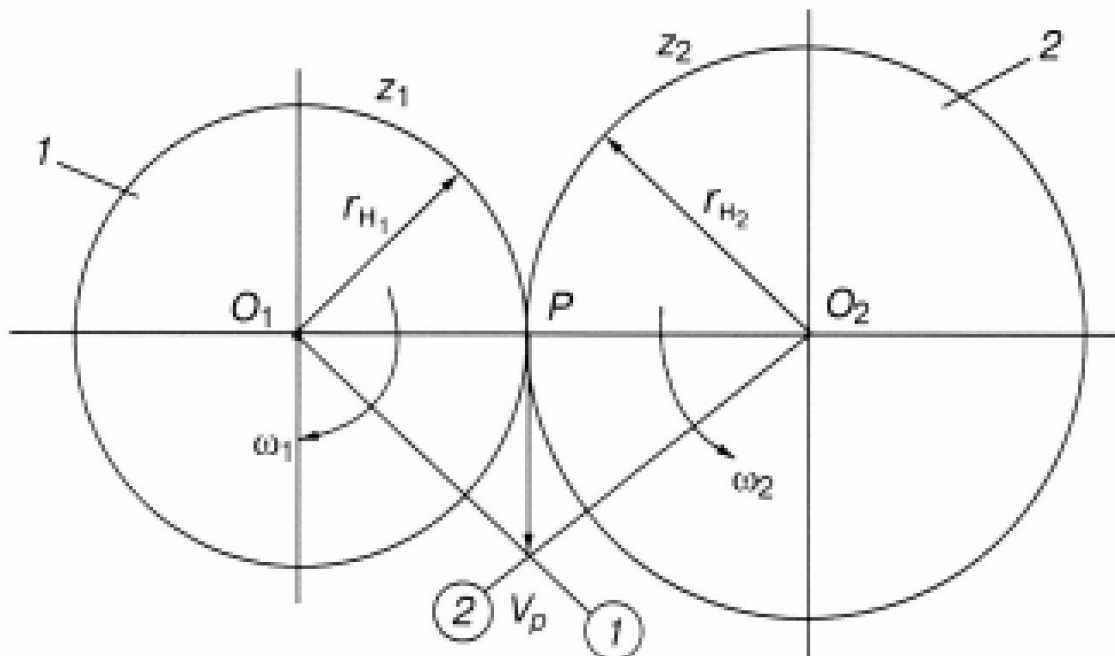


Рис. 6.23

$$V_p = \omega_1 r_{H_1},$$

$$V_p = \omega_2 r_{H_2},$$

откуда $\omega_1 r_{H_1} = \omega_2 r_{H_2}$, или $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{H_2}}{r_{H_1}}$.

Подставив вместо

$$r_{H_1} = \frac{mz_1}{2} \text{ и } r_{H_2} = \frac{mz_2}{2}, \text{ получим } U_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{H_2}}{r_{H_1}} = \frac{z_2}{z_1}.$$

Передаточному отношению цилиндрической зубчатой передачи приписывается знак: минус для внешнего зацепления и плюс для зацепления внутреннего. К *внешнему* относится зацепление, если полюс делит линию центров внутренним образом, и *внутренним* считается зацепление при расположении полюса за пределами межосевого расстояния (рис. 6.24).

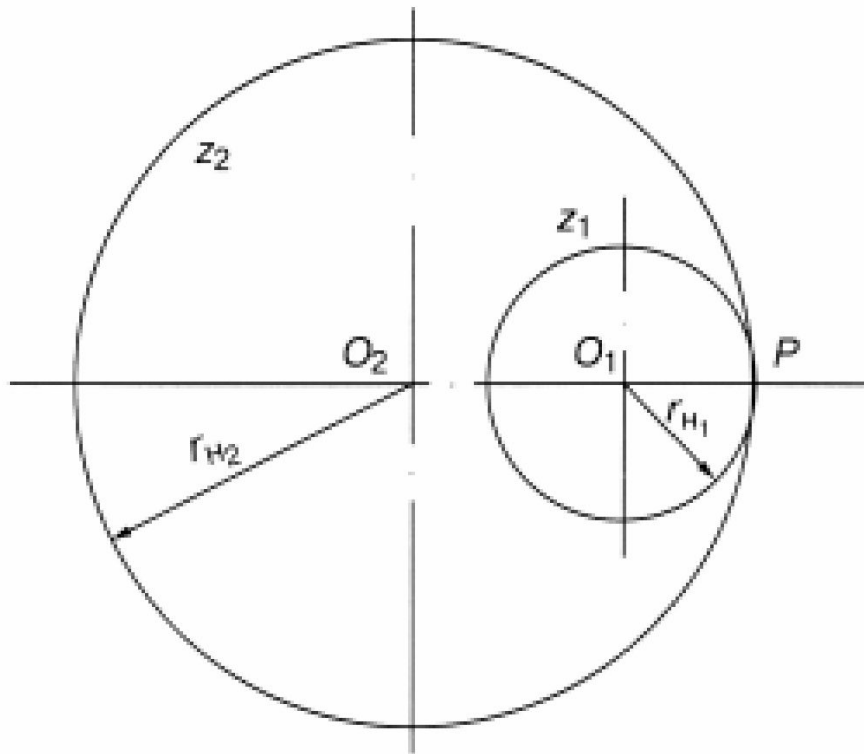


Рис. 6.24

Таким образом,

$$U_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{r_{H2}}{r_{H1}} = \pm \frac{z_2}{z_1}.$$

Если зубчатый механизм состоит из нескольких ступеней передач с неподвижными осями вращения колес, то общее передаточное отношение можно выразить как произведение передаточных отношений отдельных ступеней механизма. Здесь под ступенью понимается одна пара находящихся в зацеплении колес. Проиллюстрируем это на конкретном примере.

Определить передаточное отношение четырехступенчатого редуктора с неподвижными осями вращения колес U_{17} (рис. 6.25).

Согласно схеме искомое передаточное отношение можно выразить как произведение передаточных отношений отдельных ступеней

$$U_{17} = \frac{\omega_1}{\omega_7} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_4} \cdot \frac{\omega_4}{\omega_5} \cdot \frac{\omega_6}{\omega_7}.$$

Учитывая, что зубчатые колеса 2 и 3, а также 5 и 6 закреплены попарно на отдельных валах, то вращение их происходит с одинаковой скоростью, т.е.

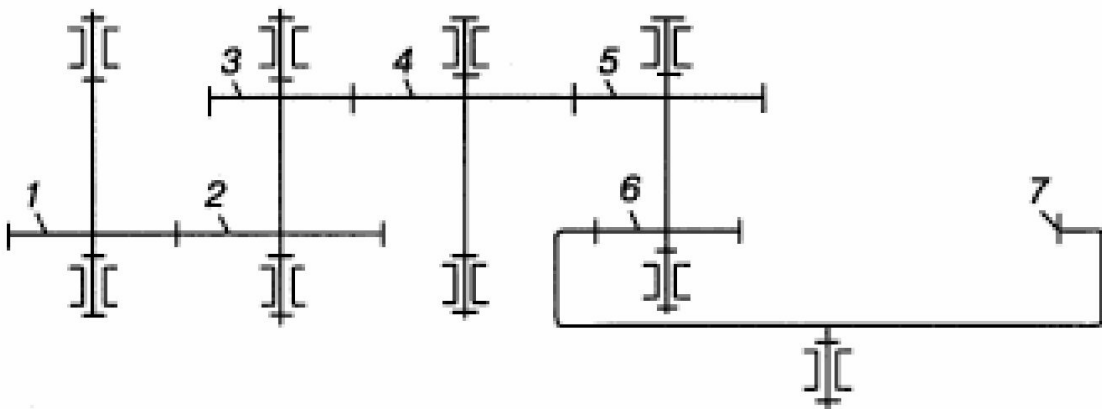


Рис. 6.25

$$\omega_2 = \omega_3,$$

$$\omega_5 = \omega_6.$$

Подставив их значения в формулу и произведя сокращение, получим, что общее передаточное отношение равно отношению угловых скоростей ведущего колеса ω_1 к угловой скорости ведомого колеса ω_7 .

Выражая отношение угловых скоростей через радиусы или числа зубьев колес с учетом знака, получим

$$U_{17} = \left(-\frac{z_2}{z_1} \right) \cdot \left(-\frac{z_4}{z_3} \right) \cdot \left(-\frac{z_5}{z_4} \right) \cdot \left(+\frac{z_7}{z_6} \right) = -\frac{z_2 \cdot z_5 \cdot z_7}{z_1 \cdot z_3 \cdot z_6}.$$

Знак «минус» в формуле означает, что ведомое колесо 7 вращается в направлении, противоположном колесу 1. Кроме того, в конечную формулу передаточного отношения не вошло число зубьев колеса 4 – z_4 . Таким образом, наличие в схеме колеса 4 влияет не на величину передаточного отношения, а на его знак. В технике такие зубчатые колеса называют *паразитными*. Они нередко применяются либо для изменения направления вращения ведомого колеса, либо для получения более компактной передачи при безразличном направлении вращения последнего колеса.

6.13. Планетарные механизмы

Общие сведения. К планетарным относятся зубчатые механизмы с подвижными геометрическими осями зубчатых колес. Простейшая схема такого механизма представлена на рис. 6.26.

Для планетарных механизмов установилась своя терминология:

- колесо 1 — *центральное колесо*;
- колесо 2 — *планетарное колесо (сателлит)*;
- звено H — *водило*.

При этом колесо 1 имеет неподвижную ось вращения. Ось колеса 2 является подвижной, перемещающейся по круговой

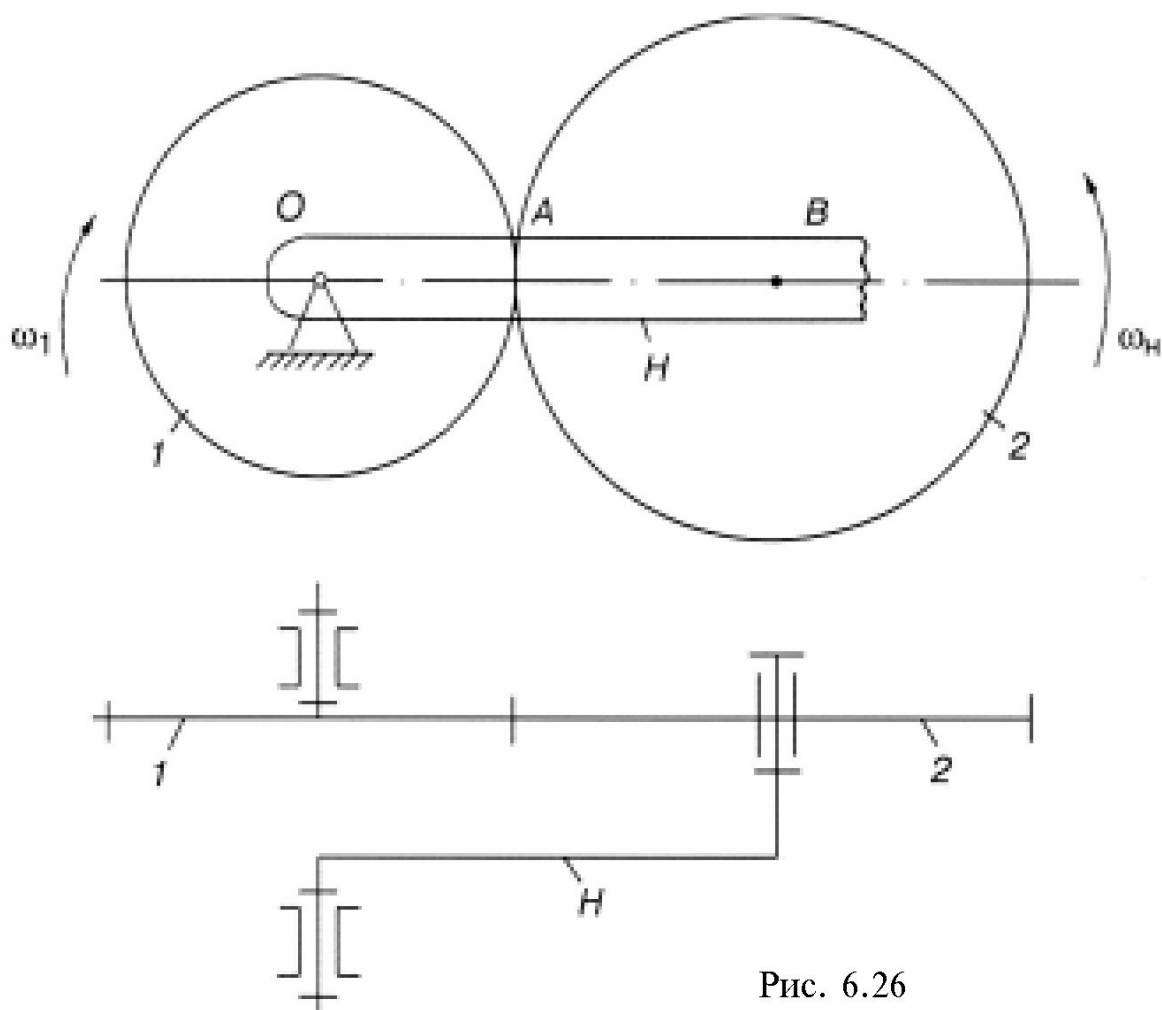


Рис. 6.26

траектории вокруг оси колеса 1 , и ось звена H неподвижна. Степень подвижности такого механизма нетрудно определить по формуле Чебышева:

$$W = 3n - 2p_H - p_B = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 1 = 2.$$

Следует иметь в виду, что планетарные механизмы могут обладать различной степенью подвижности. При $W = 1$ механизм будет называться *планетарным редуктором*, или *мультипликатором*, предназначенным для уменьшения или увеличения числа оборотов от ведущего звена к ведомому. При $W > 1$ механизм называется *дифференциалом*, используемым для сложения или разложения движения.

Для определенности движения такого механизма необходимо задать закон движения двум его звеньям. Пусть это будут колесо 1 и водило H .

При кинематическом исследовании планетарных механизмов ставится задача определения передаточного отношения между различными звеньями. В теории известны четыре способа: *графический, аналитический, силовой и векторный*. Рассмотрим два первых из них. Пусть задана схема планетарного механизма (рис. 6.27). Определим передаточное отношение графическим путем. С этой целью выберем систему координат, совместив ее начало с точкой O и построим треугольники скоростей. По вертикальной оси будем откладывать скорости точек звеньев механизма, а по горизонтали — их размеры в произвольно выбранном масштабе.

Скорость точки A

$$V_A = \omega_1 r_1.$$

Выбрав масштаб скорости $K_V \frac{\text{м/с}}{\text{мм}}$

$$K_V = \frac{V_A \text{ м/с}}{AA' \text{ мм}},$$

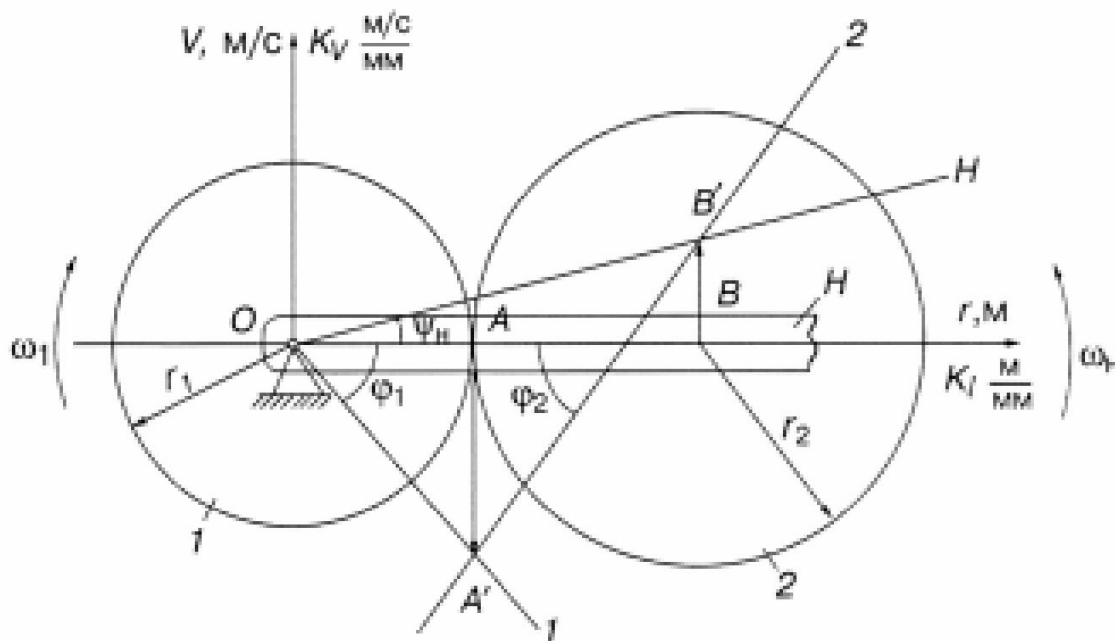


Рис. 6.27

отложим отрезок AA' и построим закон распределения скоростей для колеса 1. Аналогичным образом строим закон распределения скоростей для водила, определив предварительно скорость V_B

$$V_B = \omega_H (r_1 + r_2) \text{ м/с.}$$

$$\text{Отрезок } BB' = \frac{V_B}{K_V} \text{ мм.}$$

Колесо 2 совершает плоско-параллельное движение, закон распределения скоростей для которого также имеет линейный характер и для построения которого достаточно знать скорости каких-либо двух точек, например A и B . Соединяя точки A' и B' , получаем график распределения скоростей для колеса 2. По треугольникам скоростей можно определить угловые скорости. Так, для колеса 1 можно записать

$$\omega_1 = \frac{V_A}{r_1} = \frac{AA'K_V}{OAK_1} = \frac{K_V}{K_1} \text{tg}\varphi_1.$$

Аналогично для водила

$$\omega_H = \frac{V_B}{r_1 + r_2} = \frac{BB'K_V}{OBK_1} = \frac{K_V}{K_1} \text{tg}\varphi_H$$

и, соответственно, для колеса 2 по аналогии

$$\omega_2 = \frac{K_V}{K_1} \text{tg}\varphi_2.$$

Для определения передаточного отношения, например, между колесами 1 и 2

$$U_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\text{tg}\varphi_1}{\text{tg}\varphi_2}.$$

Замерив углы φ_1 и φ_2 и поделив их тангенсы, найдем иско-
мое передаточное отношение.

Аналогичное передаточное отношение можно определить
и между другими звеньями механизма.

Эту же задачу можно решить и аналитическим путем. С
этой целью механизм планетарный следует преобразовать в
простой, т.е. в механизм с остановленным водилом. Для этого
удобно воспользоваться методом обращенного движения, т.е.
всем звеньям сообщить угловую скорость, равную по вели-
чине, но обратную по знаку угловой скорости водила. При
этом водило остановится, а все остальные звенья будут дви-
гаться с суммарной угловой скоростью относительно водила
(рис. 6.28). Таким образом планетарный механизм преобразу-
ют в простой, т.е. в механизм с неподвижными осями враще-
ния колес.

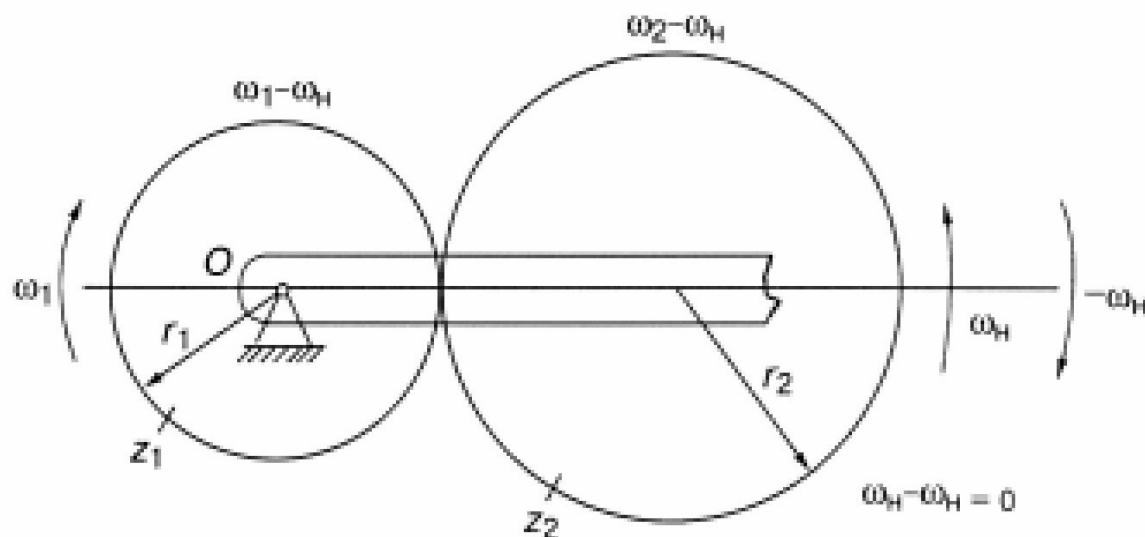


Рис. 6.28

Передаточное отношение между колесами 1 и 2 в общем
случае можно записать в форме

$$\frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_2 - \omega_H} = \pm \frac{r_2}{r_1} = \pm \frac{z_2}{z_1}.$$

При заданных значениях ω_1 , и ω_H можно найти ω_2 , а затем
передаточное отношение для любой пары звеньев механизма.

Метод определения передаточного отношения планетарного механизма удобнее всего проиллюстрировать на конкретном примере.

Пусть задан однорядный планетарный редуктор (рис. 6.29) и требуется определить передаточное отношение U_{1H} между ведущим колесом и водилом.

Найдем искомый параметр сначала графическим путем. Для этой цели построим треугольники скоростей, обозначив предварительно характерные точки механизма. Определив скорость точки A ,

$$V_A = \omega_1 r_1, \text{ м/с,}$$

отложим ее в масштабе и построим треугольник ее изменения. Закон распределения скоростей для колеса 2 также будет иметь линейный характер и строится по известным скоростям двух точек A и C . Треугольник скоростей для водила

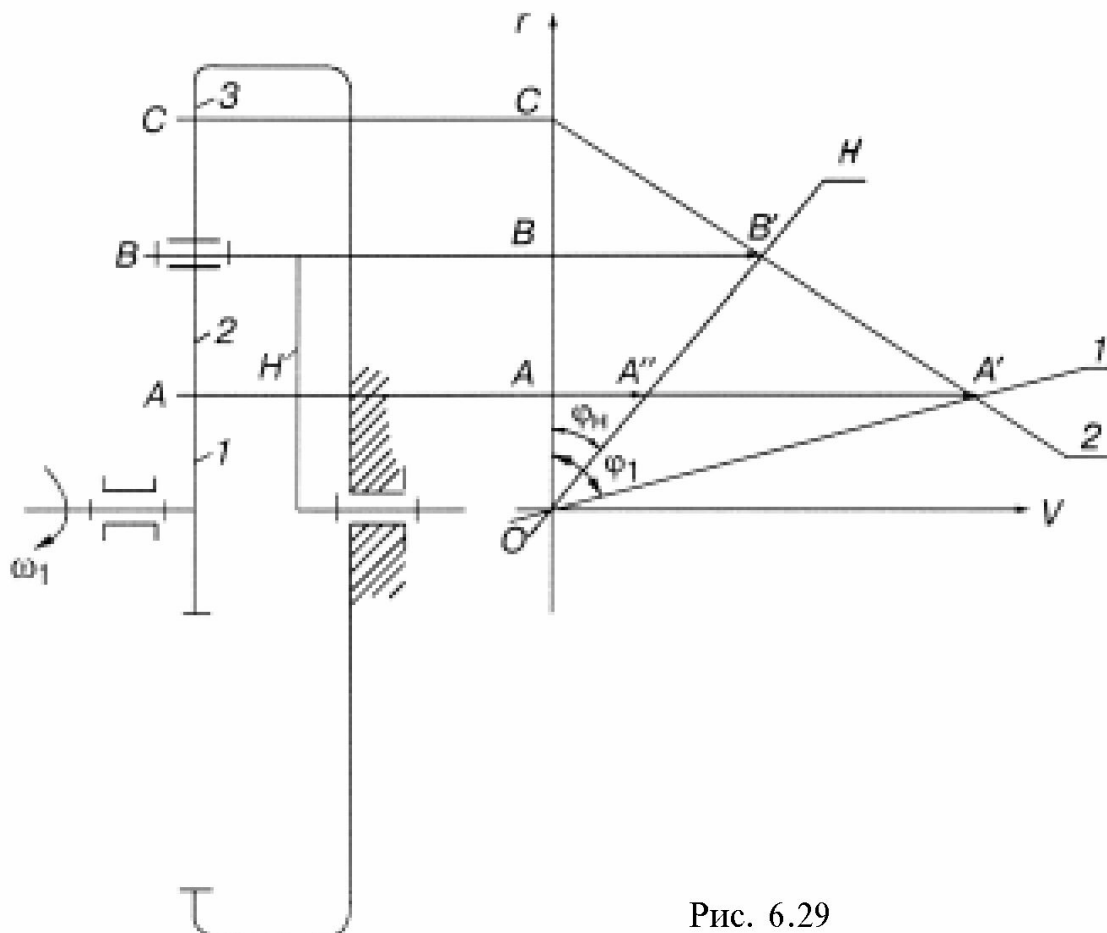


Рис. 6.29

$$\begin{cases} \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_2 - \omega_H} = -\frac{z_2}{z_1}, \\ \frac{\omega_2 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = +\frac{z_3}{z_2}, \end{cases}$$

Решим совместно составленную систему уравнений относительно искомого отношения U_{1H} . Для этого перемножим левые и правые части уравнений

$$\frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = -\frac{z_3}{z_1}.$$

Учитывая, что колесо 3 неподвижно, т.е. $\omega_3 = 0$, после почленного деления на знаменатель, получим

$$-\frac{\omega_1}{\omega_H} + 1 = -\frac{z_3}{z_1}.$$

Или, поменяв знаки на обратные и перенеся единицу за знак равенства, найдем

$$U_{1H} = \frac{\omega_1}{\omega_H} = 1 + \frac{z_3}{z_1}.$$

Аналогичная методика применима для планетарных механизмов, имеющих многорядные схемы, для которых составляются аналогичные уравнения по каждому ряду, и в результате совместного решения находится искомое выражение передаточного отношения.

Синтез планетарных механизмов. При синтезе или проектировании планетарных механизмов в первую очередь ставится задача обеспечения безупречной кинематики, легкости монтажа, компактности и, во вторую очередь, необходимой прочности и износостойкости и т.д. Кинематический синтез предусматривает выполнение трех условий сборки: зацепления, соседства и равного угла между сателлитами (рис. 6.30).

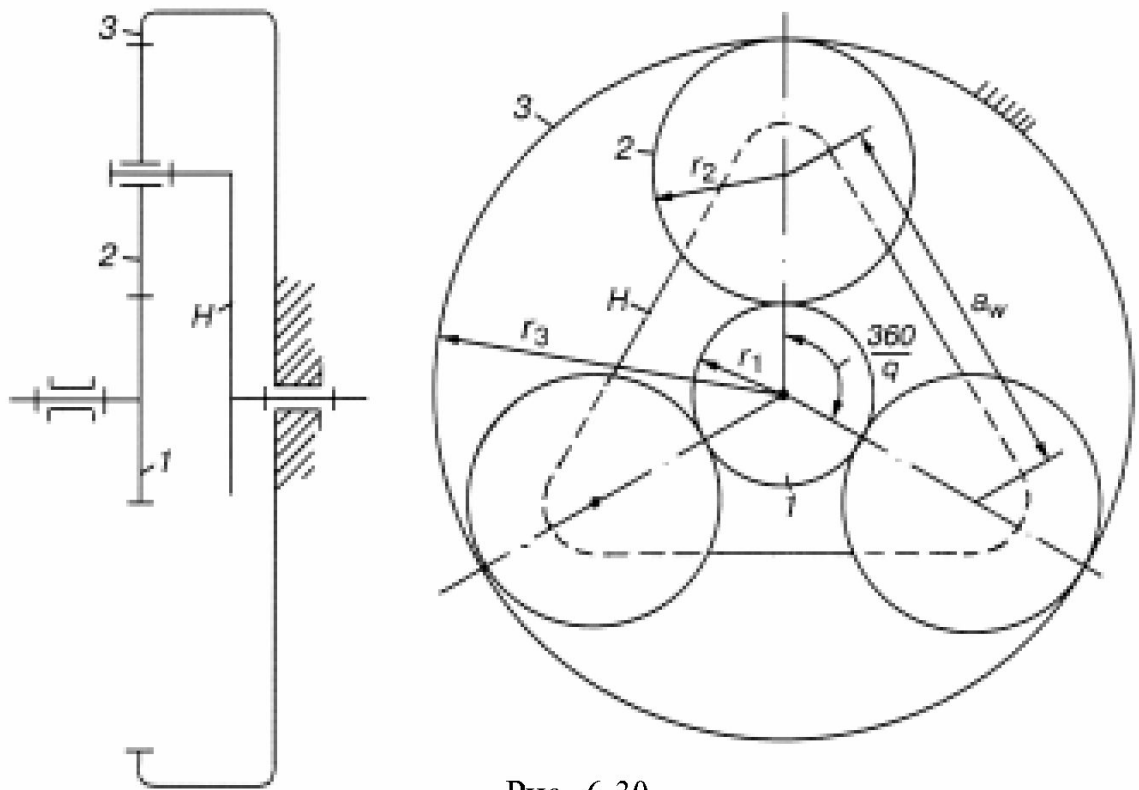


Рис. 6.30

1. Условие зацепления

$$r_1 + r_2 = r_3 - r_2$$

или

$$\frac{mz_1}{2} + \frac{mz_2}{2} = \frac{mz_3}{2} - \frac{mz_2}{2}.$$

После сокращения получим

$$z_1 + z_2 = z_3 - z_2.$$

2. Условие соседства

$$a_w > d_{a2},$$

при этом

$$a_w = 2(r_1 + r_2) \cdot \sin \frac{360}{2q} = 2 \left(\frac{mz_1}{2} + \frac{mz_2}{2} \right) \cdot \sin \frac{180}{q} = m(z_1 + z_2) \cdot \sin \frac{180}{q},$$

$$d_{a2} = m(z_2 + 2),$$

или, окончательно,

$$\sin \frac{180}{q} > \frac{z_2 + 2}{z_1 + z_2}.$$

3. Условие равного угла между сателлитами.

Для вывода этого условия необходимо наметить порядок сборки. Условимся каждый сателлит вводить в зацепление с колесами 1 и 3 в вертикальном положении отверстия водила для монтажа сателлита 2. Первый сателлит устанавливается свободно, а последующие можно установить лишь при условии, если колесо 1, уже находящееся в зацеплении с первым сателлитом, повернется на целое число угловых шагов, т.е.

ту, где τ , где $\tau = \frac{360}{z_1}$ — целое число. Зависимость между углами поворота колеса 1 и водила определяется через передаточное отношение

$$U_{1H} = \frac{\omega_1}{\omega_H} = \frac{\varphi_1}{\varphi_H},$$

откуда

$$\varphi_1 = U_{1H}(\varphi_H + 360n),$$

где n — целое число полных поворотов водила.

Подставляя вместо φ_1 , и φ_H их значение, получим

$$\frac{360}{z_1} \gamma = U_{1H} \left(\frac{360}{q} + 360n \right).$$

После сокращений найдем

$$\gamma = \frac{U_{1H} z_1}{q} (1 + qn).$$

При подборе чисел зубьев удобно составить общее урав-

нение сборки, по которому можно сразу подобрать числа зубьев всех колес планетарного редуктора.

Для этой цели используем составленные уравнения сборки. Из уравнения зацепления найдем

$$2z_2 = z_3 - z_1,$$

или

$$z_2 = \frac{z_3 - z_1}{2}.$$

Из выражения передаточного отношения

$$U_{1H} = 1 + \frac{z_3}{z_1}$$

выразим $z_3 = (U_{1H} - 1)z_1$

и, подставляя его в формулу для z_2 , будем иметь

$$z_2 = \frac{(U_{1H} - 1)z_1 - z_1}{2} = \frac{z_1(U_{1H} - 2)}{2}.$$

Записывая полученное выражение в виде пропорции

$$z_1 : z_2 = 1 : \frac{U_{1H} - 2}{2}.$$

В эту же пропорцию можно ввести и значение для z_3 из формулы передаточного отношения:

$$z_1 : z_2 : z_3 = 1 : \frac{U_{1H} - 2}{2} : U_{1H} - 1.$$

Вводя в последнее выражение условие сборки равного угла между сателлитами, окончательно получим

$$z_1 : z_2 : z_3 : \gamma = \left[1 : \frac{U_{1H} - 2}{2} : U_{1H} - 1 : \frac{U_{1H}}{q} \right] z_1.$$

Умножение первых трех членов правой части на z_1 не изменяет пропорции, и неиспользование второго сомножителя условия сборки $(1 + qn)$ не лишает ее смысла, так как он всегда является целым числом.

Изложенную методику подбора чисел зубьев удобно проиллюстрировать на конкретном примере. Пусть требуется подобрать числа зубьев $z_1; z_2; z_3$ однорядного планетарного редуктора, передаточное отношение которого $U_{1H} = 5,4$ и число сателлитов $q = 3$. При подборе чисел зубьев следует стремиться к использованию некорригированных зацеплений, чтобы не усложнять сборку. Поэтому количество зубьев для внешнего зацепления $z_1 > 17$ и для зацепления внутреннего $z_2 > 20$ и $z_3 > 85$. Подставляя заданные значения U_{1H} и q в общее уравнение сборки, получим

$$z_1 : z_2 : z_3 : \gamma = \left[1 : \frac{5,4 - 2}{2} : 5,4 - 1 : \frac{5,4}{3} \right] z_1 = [1 : 1,7 : 4,4 : 1,8] z_1.$$

Приняв значение $z_1 = 20$, найдем $z_2 = 34$, $z_3 = 88$ и $\gamma = 36$ (целое число).

Произведем проверку условий сборки

$$1. \quad z_1 + z_2 = z_3 - z_2 \\ 20 + 34 = 88 - 34$$

$$2. \quad \sin \frac{180}{q} > \frac{z_2 + 2}{z_1 + z_2}, \\ \sin \frac{180}{3} > \frac{34 + 2}{20 + 34}, \\ 0,866 > 0,67.$$

$$3. \quad \gamma = \frac{U_{1H} z_1}{q} (1 + qn) = \frac{5,4 \cdot 20}{3} (1 + 3n) = 36(1 + 3n) = \\ = \text{целому числу.}$$

$$4. \quad U_{1H} = 1 + \frac{z_3}{z_1} = 1 + \frac{88}{20} = 5,4.$$

Литература

1. Артоболовский И.И. Теория механизмов и машин, 1988.
2. Фролов К.В. и др. Теория механизмов и машин, 1987.
3. Попов С.А. Курсовое проектирование по теории механизмов и механике машин, 1986.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Глава 1. Структура механизмов	4
1.1. Основные понятия и определения	4
1.2. Степень подвижности механизма	9
1.3. Структурный анализ плоских шарнирно-рычажных механизмов	13
1.4. Кинематическое исследование шарнирно-рычажных механизмов	19
Глава 2. Различные методы кинематического исследования механизмов	31
2.1. Метод повернутых планов	31
2.2. Метод кинематических диаграмм	37
2.3. Аналитический метод кинематического исследования	43
Глава 3. Динамическое исследование механизмов	47
3.1. Общие положения	47
3.2. Приведение сил и моментов сил в механизме ...	52
3.3. Построение диаграммы работ	55
3.4. Кинетическая энергия механизма	58
3.5. Приведение масс и моментов инерции звеньев механизма	60
3.6. Установившееся движение машины	66
3.7. Регулирование периодических колебаний скорости ведущего вала машины маховыми массами ..	67
Глава 4. Силовой анализ механизмов	74
4.1. Динамический метод силового анализа механизмов	75
4.2. Кинетостатический метод силового анализа механизмов	78
4.3. Силовой анализ механизмов методом замещающих масс	79
4.4. Силовой анализ механизмов с учетом трения в кинематических парах	84

Глава 5. Кулачковые механизмы	96
5.1. Основные параметры кулачкового механизма ..	98
5.2. Кинематическое исследование кулачковых механизмов	100
5.3. Синтез кулачковых механизмов	115
5.4. Определение размеров кулачкового механизма	119
5.5. Построение профиля кулачка	124
Глава 6. Зубчатые механизмы	126
6.1. Общие положения	126
6.2. Эвольвента, ее уравнение и свойства	127
6.3. Элементы зубчатого колеса	129
6.4. Элементы зубчатой рейки	135
6.5. Эвольвентное зацепление	136
6.6. Элементы эвольвентного зацепления	137
6.7. Элементы эвольвентной зубчатой передачи	139
6.8. Виды зубчатых передач	143
6.9. Краткие сведения по изготовлению зубчатых колес	146
6.10. Подрез зубьев	153
6.11. Заострение зубьев	157
6.12. Кинематическое исследование зубчатых механизмов	164
6.13. Планетарные механизмы	167
Литература	179