

ОПД.Ф.02.03 ТЕОРИЯ МАШИН И МЕХАНИЗМОВ
ЧАСТЬ 1
Курс лекций

Содержание

Модуль 1. СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ И СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ	3
1. Введение в теорию механизмов и машин. Предмет и задачи курса ТММ	3
2. Структура механизмов	4
2.1. Основные понятия теории механизмов и машин	4
2.2. Классификация кинематических пар	5
2.3. Кинематические цепи и кинематическая схема механизма	7
2.4. Степень подвижности механизма	8
2.5. Структурный анализ плоских механизмов	12
2.6. Замена в плоских механизмах высших пар низшими	13
2.7. Классификация механизмов (виды механизмов)	14
2.8. Синтез шарнирного четырехзвенника	19
2.9. Синтез зубчатых механизмов	22
3. Манипуляторы и промышленные роботы	35
3.1. Виды манипуляторов и промышленных роботов	35
3.2. Структура и геометрия манипуляторов	36
3.3. Рабочий объем манипуляторов и классификация движения захвата	38
3.4. Структурный синтез манипуляторов	39
3.5. Зоны обслуживания, угол и коэффициент сервиса	39
Модуль 2. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ	40
1. Кулачковые механизмы	40
1.1. Кинематический анализ кулачковых механизмов методом диаграмм	40
1.2. Угол передачи движения, его определение	42
1.3. Синтез кулачковых механизмов	43
2. Кинематика зубчатых передач	44
2.1. Передаточное отношение последовательного ряда колёс	44
2.2. Передаточное отношение ступенчатого ряда колёс	45
2.3. Передаточное отношение планетарных и дифференциальных механизмов	45
2.4. Графический метод кинематического исследования зубчатых механизмов	48
2.5. Синтез планетарных механизмов	51
3. Кинематический анализ рычажных механизмов	54
3.1. Построение положений механизма и траекторий его точек	54
3.2. Определения аналогов величин скоростей и ускорений	55
3.3. Связь между аналогами и величинами скоростей и ускорений	56
3.4. Аналог скорости и ускорения главного звена	56
3.5. Аналог относительной скорости двух точек M и N	57
3.6. Аналог относительного ускорения точек звена	57
3.7. Построение полярных планов аналогов скоростей	58
3.8. Построение планов аналогов скоростей методом эюр	60
3.9. Определение аналогов ускорений в механизме	63
3.10. Определение скоростей и ускорений методом построения кинематических диаграмм	66
3.11. Кинематическое исследование рычажных механизмов аналитическим методом	70

Модуль 1.

СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ И СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ

1. Введение в теорию механизмов и машин. Предмет и задачи курса ТММ

Развитие современной науки и техники неразрывно связано с созданием новых машин, повышающих производительность и облегчающих труд людей.

Целью создания машины является увеличение производительности и облегчения физического труда человека путем замены человека машиной.

Ведущей отраслью современной техники является машиностроение. По уровню развития машиностроения судят о развитии производительных сил в целом.

Прогресс машиностроения в свою очередь определяется созданием новых высокопроизводительных и надежных машин. Решение этой важной проблемы основывается на использовании результатов многих научных дисциплин и, в первую очередь, теории механизмов и машин (ТММ).

ТММ – наука об общих методах исследования свойств механизмов и машин и проектирование их систем.

Наиболее развита в настоящее время та ее часть, которая называется теорией механизмов.

Механизмом – называется устройство для преобразования механического движения твердых тел.

Другая часть ТММ составляет теория машин.

Она изучает методы проектирования схем машин, которые являются общими для машин различных областей техники. Обе части ТММ неразрывно связаны между собой, т.к. механизмы составляют основу почти любой машины.

Машина - есть устройство, выполняющее механические движения для преобразования энергии, материалов и информации с целью замены или облегчения физического и умственного труда человека.

ТММ базируется на законах и положениях теоретической механики и решает две основные задачи – анализа и синтеза механизмов.

Задачи анализа – изучение методов исследования существующих механизмов.

Задачи синтеза – создание методов проектирования механизмов, удовлетворяющих высоким требованиям современной техники.

Каждая из названных задач рассматривает следующие вопросы:

- структура и классификация механизмов;
- кинематическое исследование механизмов;
- динамическое исследование механизмов.

В связи с интенсивной автоматизацией производственных процессов в курс ТММ введен раздел «Основы теории машин автоматов», который включает:

- системы управления машин – автоматов;
- манипуляторы и промышленные роботы.

2. Структура механизмов

2.1. Основные понятия теории механизмов и машин

Механизм есть система тел, предназначенная для преобразования движения одного или нескольких твердых тел в требуемые движения других тел. Если в преобразовании движения, кроме твердых тел участвуют жидкие или газообразные вещества, то механизм называется соответственно, гидравлическим или пневматическим.

Основным признаком механизма является преобразование механического движения.

Звенья механизмов

Механизм состоит из многих деталей совершающих целесообразное движение. Детали механизма, имеющие общее движение и не меняющие своей конфигурации называются звеньями механизма.

Однако детали механизма могут состоять из отдельно изготовленных частей. Например: шатун двигателя внутреннего сгорания (ДВС) состоит из более десятка неподвижно соединенных между собой частей (тело шатуна, крышка, втулка, вкладыш, болты, гайки, шплинты). Все эти части совершают одно и тоже движение, поэтому объединяются в одно звено и на схеме изображаются в виде отрезка без изображения конструктивных особенностей.

Входные и выходные звенья механизмов

В каждом механизме имеется стойка, т.е. звено принятое условно за неподвижное.

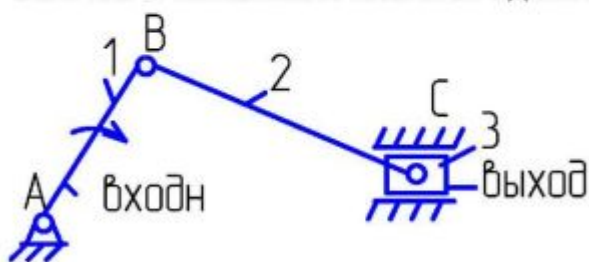
Например: в металлорежущем станке все основные звенья движутся относительно станины. Она является стойкой.

Из подвижных звеньев выделяют входные и выходные звенья.

Входным звеном называется звено, которому сообщается движение, преобразуемое механизмом в требуемые движения других звеньев.

Выходным звеном называется звено, совершающее движение, для выполнения которого предназначен механизм.

Обычно в механизме имеется один вход и один выход.



Вход получает движение от двигателя, и выход соединяет с рабочим органом машины.

Однако есть механизмы, имеющие несколько входов и выходов.
 Например: в автомобильном дифференциале имеется один вход и два выхода.
 Вход соединяется с двигателем, а выход с колесами.

Ведущие и ведомые звенья

Ведущим звеном механизма называют одно звено, для которого элементарна работа внешних сил, приложенных к нему, является положительной.

Ведомым звеном называется звено, для которого элементарная работа внешних сил, приложенных к нему, является отрицательной или равна нулю.

Кинематические пары

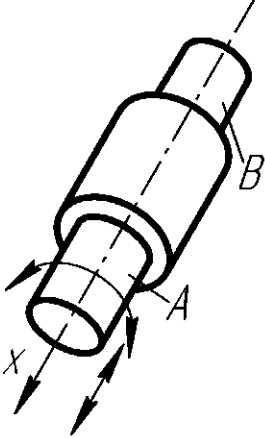
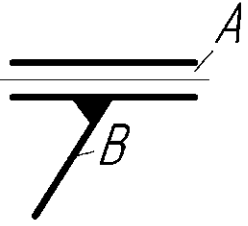
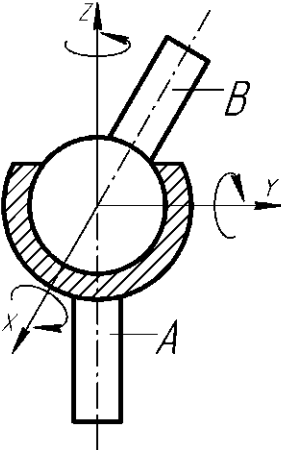
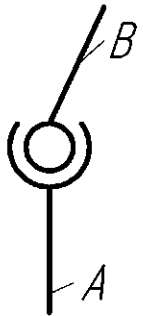
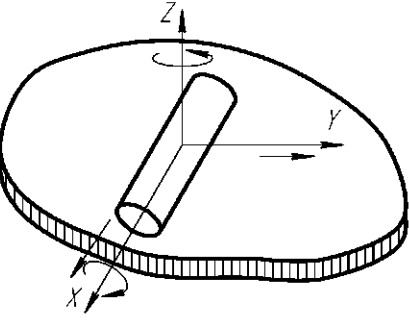
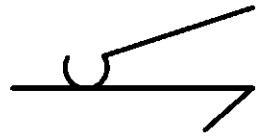
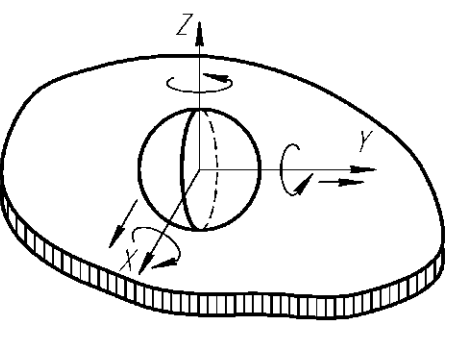
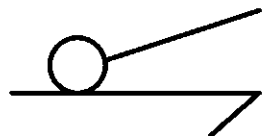
Подвижное соединение двух соприкасающихся звеньев, допускающее их относительное движение называется **кинематической парой**.

2.2. Классификация кинематических пар

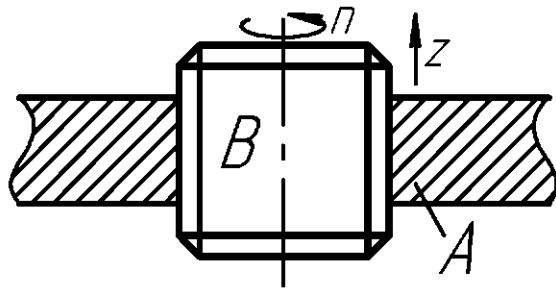
Все кинематические пары подразделяются по числу степеней свободы на одно-, двух-, трех-, четырех-, пятиподвижные.

Таблица №1

Число степеней свободы	Класс пары	Название	Рисунок	Условное изображение
1	2	3	4	5
1	5	Поступательная		
1	5	Вращательная		
1	2	3	4	5

2	4	Цилиндрическая		
3	3	Сферическая		
4	2	Цилиндр-плоскость		
5	1	Шар-плоскость		

Возможное движение звеньев кинематических пар при определении степени подвижности должна быть независимыми. Так винтовая кинематическая пара



допускает 2-а движения – вращательное и поступательное, однако эти движения зависят друг от друга ($z=tП$; где t - шаг винта), поэтому эту кинематическую пару нужно рассматривать как одноподвижную.

Кинематические пары делятся на низшие и высшие.

Кинематическая пара, которая образована звеньями, соприкасающимися по поверхности, называется низшей кинематической парой.

Кинематическая пара, которая образована звеньями, соприкасающимися только по линии или в точке, называется высшей кинематической парой.

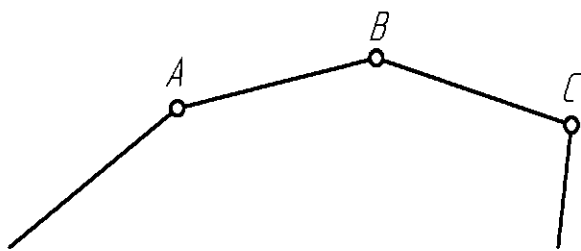
2.3. Кинематические цепи и кинематическая схема механизма

Кинематической цепью называется связанная система звеньев, образующих между собой кинематические пары.

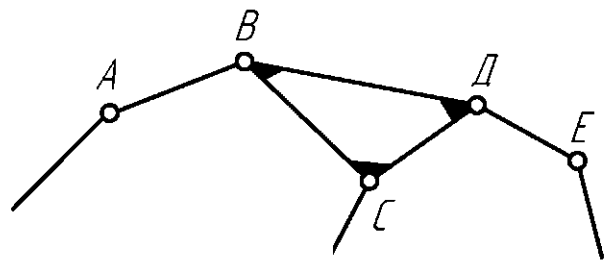
Кинематические цепи делятся на простые и сложные.

Простой кинематической цепью называется такая цепь, у которой каждое звено входит не более чем в две кинематические пары.

Сложной кинематической цепью называется цепь, в которой имеется хотя бы одно звено входящее более чем в две кинематические пары.



Простая кинематическая цепь

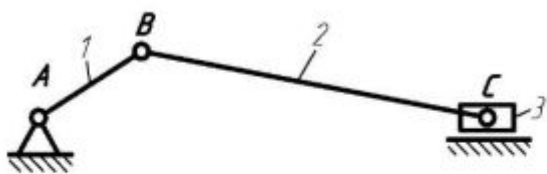


Сложная кинематическая цепь

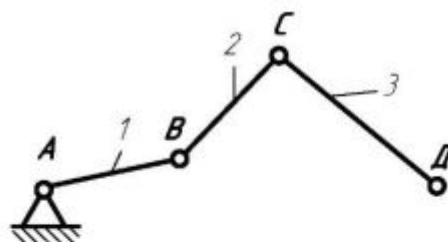
Простые и сложные кинематические цепи делятся на замкнутые и незамкнутые.

Замкнутой кинематической цепью называется цепь, каждое подвижное звено которой входит, по крайней мере, в две кинематические пары.

Незамкнутой кинематической цепью называется цепь, в которой есть звенья, входящие только в одну кинематическую пару.



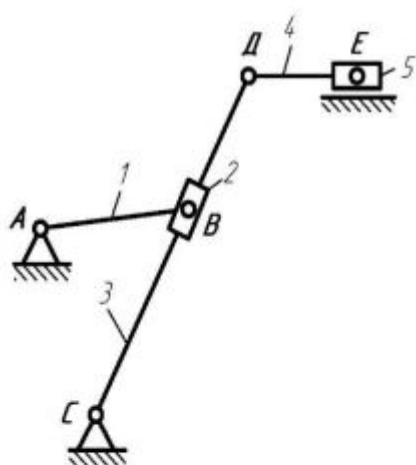
Замкнутая



Незамкнутая

Кинематической схемой механизма называется его изображение в выбранном масштабе с применением условных обозначений, установленных ГОСТом, звеньев и кинематических пар.

Схема позволяет определить движение ведомых звеньев по заданному движению ведущих.

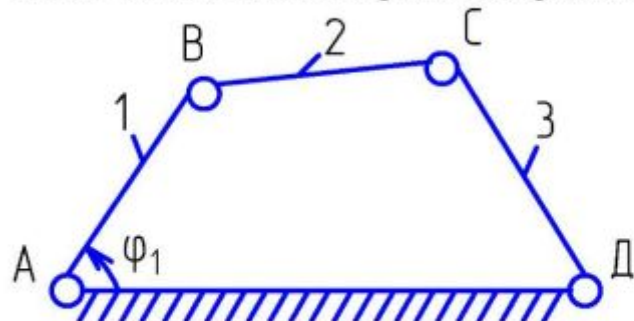


AB – ведущее звено, т.е. звено движение которого задано.

2.4. Степень подвижности механизма

Обобщенной координатой механической системы (механизма) называется независимая координата однозначно определяющая положение системы в пространстве.

Число обобщенных координат определяет число степеней свободы системы.



Свободное твердое тело (звено) в пространстве обладает 6 степенями свободы, т.е. оно может совершать 3 независимых поступательных движения вдоль взаимно-перпендикулярных осей и 3 вращательных движения вокруг тех же осей.

Если же звено входит в кинематическую пару, то на относительное движение его, т.е. на движение по отношению ко второму звену, входящему в эту пару накладываются определенные ограничения. Эти ограничения называются условиями связи - S.

По числу условий связи, накладываемых на относительные движения звеньев, пары подразделяются на классы.

Класс кинематической пары соответствует числу условий связи, накладываемых на относительное движение звеньев, входящих в эту пару.

В зависимости от способа соединения звеньев в кинематическую пару число условий связи может меняться от 1 до 5.

Поэтому все кинематические пары можно разделить на 5 классов.

К I классу относятся пары, накладывающие на относительное движение звеньев одно условие (5-ти подвижные пары).

Ко II классу относятся пары, накладывающие два условия (4-х подвижные) и т.д. Если на движение звена в пространстве, не наложено ни каких условий связи, то оно обладает 6 степенями свободы.

Тогда, если число звеньев кинематической цепи - K, то общее число степеней свободы, которым обладают K звеньев до их соединения в кинематическую цепь - $6K$

$N=6K$ (степень свободы) до соединения в кинематическую цепь.

Соединение звеньев в кинематическую цепь накладывает различное число связей на относительное движение звеньев, зависящее от класса пар.

Если число пар

I класса - p_1	IV класса - p_4
II класса - p_2	V класса - p_5
III класса - p_3	

то из $6k$ степеней свободы, которыми обладали звенья до их вхождения в кинематические пары, необходимо исключить те степени свободы, которые отнимаются вхождением звеньев в кинематические пары.

Тогда число степеней свободы N, которым обладает кинематическая цепь будет равно:

$$N = 6k - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1 \quad (1)$$

Если одно из звеньев кинематической цепи будет неподвижным, то общее число степеней свободы цепи уменьшится на 6 и число степеней свободы W относительно неподвижного звена будет равно:

$$W = N - 6 \quad (2)$$

Число W степеней свободы кинематической цепи относительно стойки называется числом степеней неподвижности (степенью неподвижности) кинематической цепи.

Подставляя (1) во (2):

$$W = 6(k-1) - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1$$

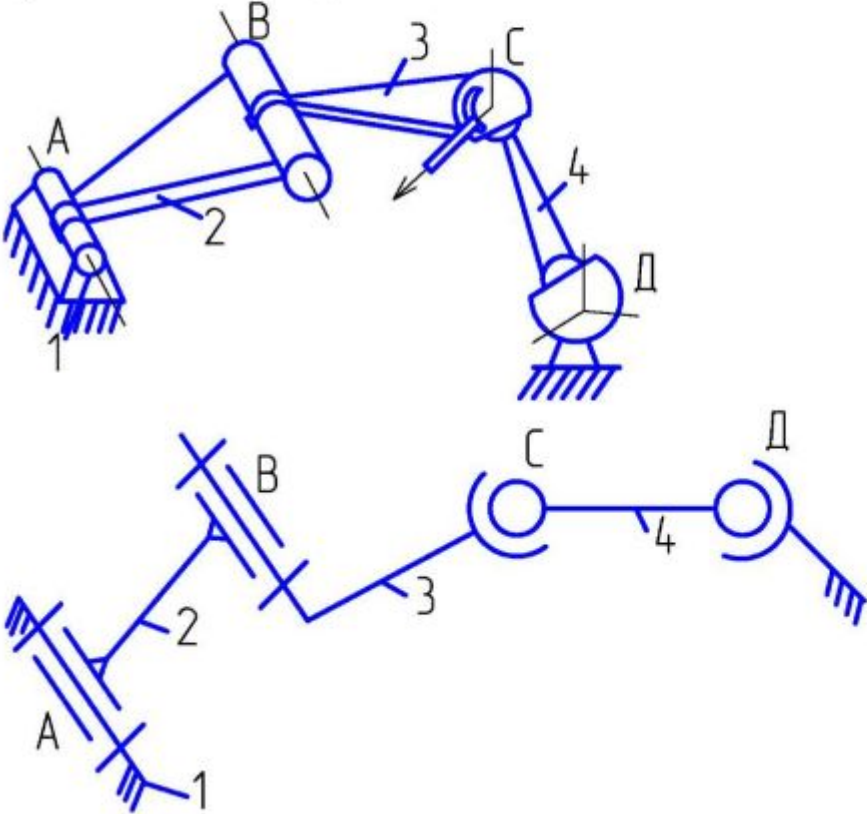
если обозначить $(k-1)$ через n то получим:

$$W = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1$$

где n - число подвижных звеньев кинематической цепи.
 Это равенство носит название формулы подвижности или
 Сомова-Малышева.

формула

а) кинематическая цепь



б) её схема

- Звенья 1 и 2 - входят в к.пару А (V кл.)
- 2 и 3 - в пару В (V кл.)
- 3 и 4 - в пару С (IV кл.)
- 4 и 5 - в пару D (III кл.)

$$\begin{aligned}
 p_5 &= 2 \\
 p_4 &= 1 \\
 p_3 &= 1 \\
 p_2 &= 0 \\
 p_1 &= 0 \\
 n &= 3
 \end{aligned}$$

Подставим в формулу и получим
 $W = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1 = 6 \cdot 3 - 5 \cdot 2 - 4 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 18 - 10 - 4 - 3 = 1$
 Степень свободы (подвижности) механизма показывает, сколько надо задать независимых координат, чтобы характеризовать положение любого звена механизма относительно стойки.

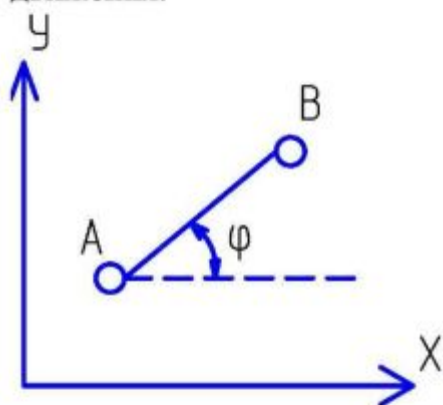
Если механизм обладает $W = 1$, то при заданном движении одного из звеньев (ведущего) все остальные звенья будут иметь вполне определенные движения. Если $W=2$, то определенность движения звеньев может быть обеспечена или двумя ведущими звеньями имеющим по одному независимому движению, или одним ведущим звеном, имеющим 2 независимых движения (двухподвижных).

Выделим формулу для определения числа степеней свободы плоского механизма, звенья которого совершают движения параллельно одной какой-либо плоскости.

В этом случае из 6 движений, которое каждое отдельное звено может совершать в пространстве, исключаются 3 движения - одно поступательное и два вращательных.

Следовательно, звено в плоскости может совершать только 3 движения.

При этом условии в состав плоских кинематических цепей могут входить лишь кинематические пары 4 и 5-го классов, т.е. кинематическая пара 5 кл. лишает 2-х из 3-х оставшихся движений, а кинематическая пара 4 кл. - 1 простейшего движения.



$$W = (6 - 3)n - (5 - 3)p_5 - (4 - 3)p_4 - (3 - 3)p_3$$

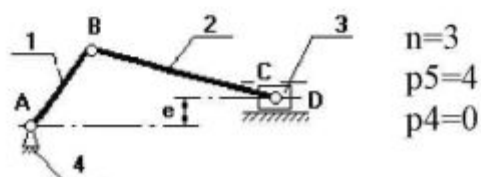
то степень подвижности плоского механизма:

$W = 3n - 2p_5 - p_4$ - структурная формула плоского механизма или формула Чебышева.

В состав плоских механизмов пары 1, 2 и 3 кл. входить не могут.

Кинематические пары 5 кл. входящие в состав плоского механизма могут быть в 2-х видах: - либо в виде вращательной пары либо в виде поступательной пары. (т.е. низшие).

Кинематические пары 4 кл. - являются высшими кинематическими парами имеющими 2 степени свободы.



$$W=3.3-2.4=1$$

2.5. Структурный анализ плоских механизмов

При структурном анализе механизма необходимо:

Вычертить кинематическую схему механизма.

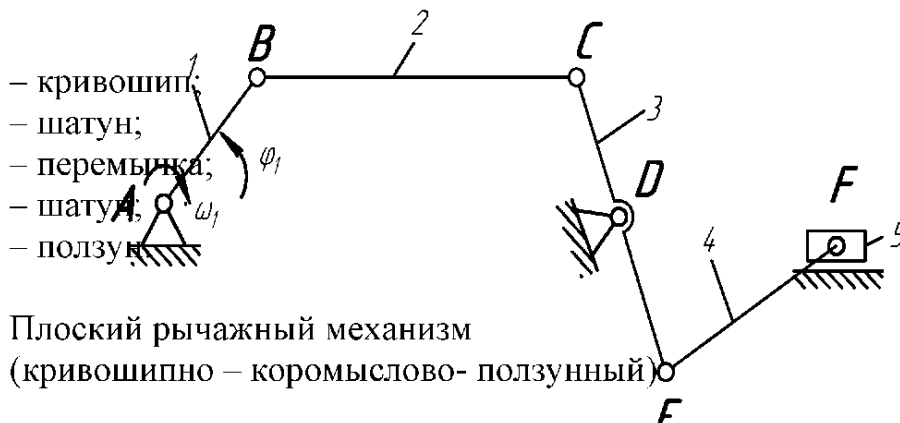
Назвать механизм.

Назвать звенья, определить ведущее (ведомое) и входное звенья.

Определить кинематические пары и классифицировать их.

Определить число степеней свободы.

Пример:



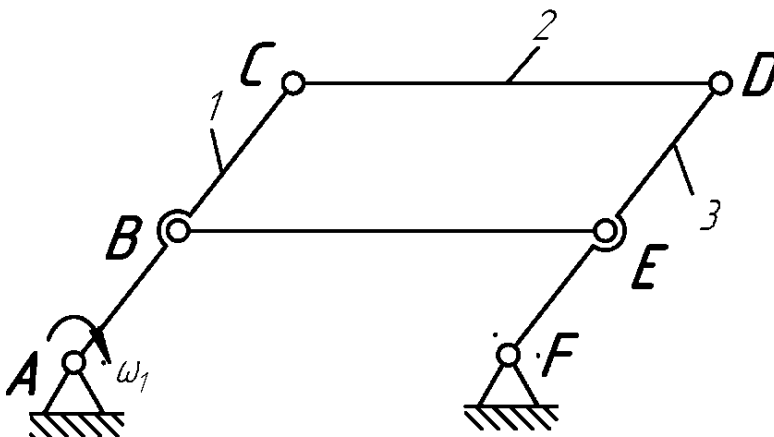
Число одноподвижных кинематических пар $p_1=7$ (шесть вращательных, одна поступательная).

Все кинематические пары низшие:

$$W = 3n - 2p_1 - 1p_2 = 3 \times 5 - 2 \times 7 - 1 \times 0 = 1$$

Следовательно, для определения положения механизма необходимо знать одну обобщенную координату (например - ϕ_1).

Примечание: некоторые механизмы имеют избыточные связи, т.е связи, устранения которых не влияет на движение механизма. Эти связи необходимо учитывать при определении степени подвижности механизма.



$$W = 3n - 2p_1 - p_2 + q \quad (3)$$

Звено 4 с кинематическими парами В и Е образуют избыточную связь $q=1$.

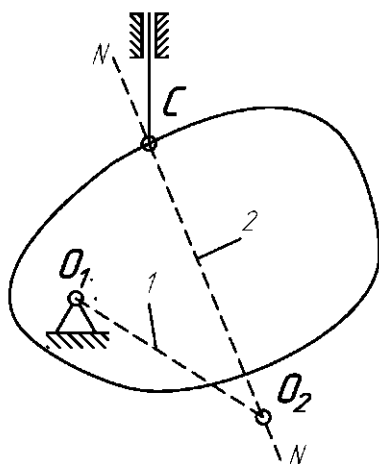
$$W = 3 \times 4 - 2 \times 6 - 0 + 1 = 1$$

2.6. Замена в плоских механизмах высших пар низшими

При изучении структуры и кинематики плоских механизмов удобно заменять высшие пары низшими.

При этом необходимо, чтобы механизм, полученный после такой замены, обладал прежней степенью подвижности и чтобы сохранялись относительные в рассматриваемом положении движения все его звеньев.

Пример: Задана кинематическая схема кулачкового механизма имеющего



высшую кинематическую пару образованную кулачком и острием толкателя. Необходимо осуществить замену высшей кинематической пары на низшую.

Кулачковый механизм образован соприкосновением элементов кривой образующей кулачок и точкой толкателя.

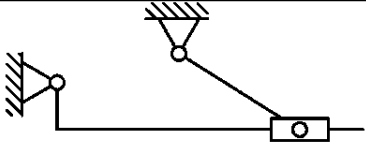
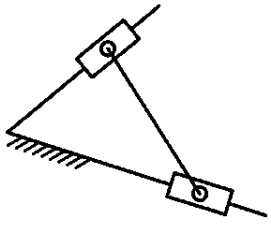
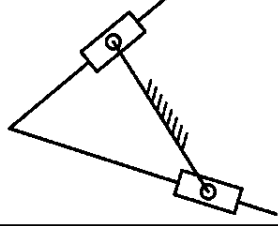
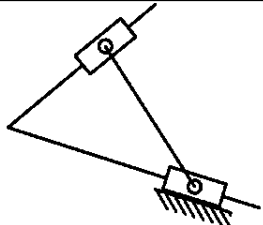
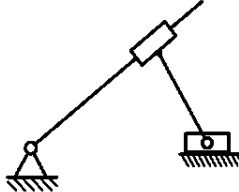
Центр кривизны кулачка находится в точке O_2 , а центр кривизны толкателя в точке C .

Соединив центр кривизны O_2 с осью вращения кулачка O_1 и с точкой C получим четырехзвенный

механизм имеющий три вращательные и одну поступательную кинематическую пары.

Подвижность кулачкового механизма $W = 3n - 2p_1 - p_2 = 3 \times 2 - 2 \times 2 - 1 = 1$ а четырехзвенного механизма $W = 3 \times 3 - 2 \times 4 = 1$, то замена высшей пары низшими равнозначна.

Название кинематической цепи	№№ п/п	Название механизма	Схема
Четырехзвенная кинематическая цепь с одной поступательной парой	1	Кривошипно-ползунный механизм	

	2	Кулисный механизм	
Четырехзвенная кинематическая цепь с двумя смежными поступательными парами	3	Однокулисный механизм	
	4	Двухкулисный механизм	
	5	Синусный механизм	
Четырехзвенная кинематическая цепь с двумя несмежными поступательными парами	6	Тангенсный механизм	

2.7. Классификация механизмов (виды механизмов)

Образование механизмов путем наложения структурных групп

Виды механизмов:

Рычажные механизмы

Кулачковые механизмы

Зубчатые механизмы

Клиновые механизмы

Винтовые механизмы

Фрикционные механизмы

Гидравлические механизмы

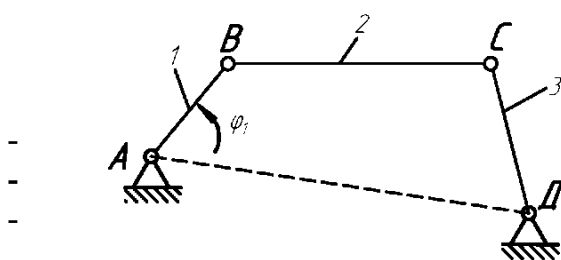
Пневматические механизмы

Механизмы с электрическим устройством

Все механизмы, составленные только из твердых тел, разделяются на две большие группы: механизмы с низшими парами и механизмы с высшими парами.

Механизмы с низшими парами называют стержневыми или рычажными.

Рычажные механизмы

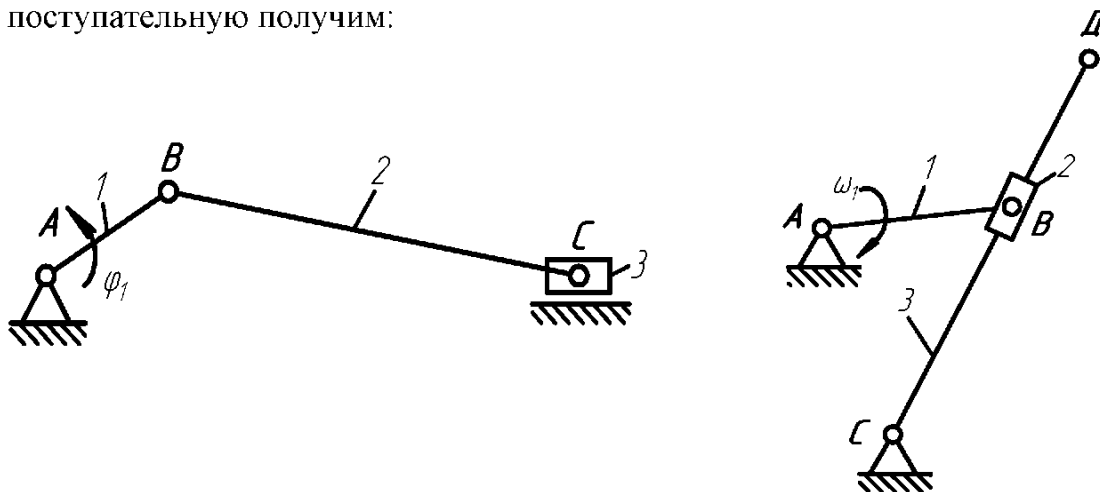


Простейшие рычажные механизмы состоят из 4-х звеньев, включая стойку и делятся на:
 - кривошипно – коромысловые;
 - кривошипно – ползунные;
 - кулисные.

Шарнирный четырехзвенник может быть 3-х видов:

- кривошипно – коромысловый;
- двухкривошипный;
- двухкоромысловый.

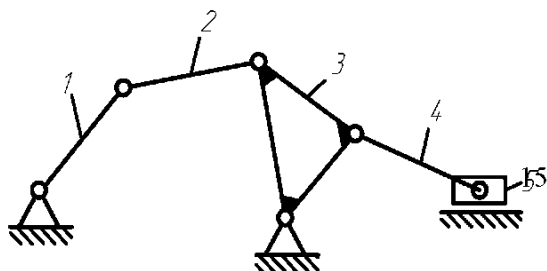
Заменяя в шарнирном четырехзвеннике одну вращательную пару на поступательную получим:



Кривошипно –ползунный механизм

Кулисный механизм

Остановимся на рассмотрении основного принципа образования механизмов, который был разработан русским ученым Л.В. Ассуром.



Нетрудно установить определенную закономерность процесса образования механизма.

Любой механизм имеет одно неподвижное звено (стойку).

Механизм должен иметь число ведущих звеньев, равное числу его степеней подвижности.

В нашем механизме имеется одно ведущее звено 1, т.к. $W=1$.

Так как после присоединения ведомых звеньев 2,3,4 и 5 число степеней подвижности всего механизма осталось равным $W=1$, то, следовательно, кинематическая цепь, состоящая из ведомых звеньев 2,3,4 и 5 обладает нулевой степенью подвижности относительно тех звеньев, к которым эта цепь присоединяется.

Группой Ассура будем называть кинематическую цепь с нулевой степенью подвижности относительно тех звеньев, с которыми входят в кинематические пары свободные элементы ее звеньев, и не распадающиеся на более простые цепи, обладающие также нулевой степенью подвижности.

В нашем периоде звенья 2,3,4 и 5 хотя и обладают нулевой степенью подвижности, но не являются группой, т.к. распадается на две кинематические цепи, состоящие из звеньев 2,3 и 4,5 каждая из которых обладает нулевой степенью подвижности.

$$W_{гр.(2,3)} = 3n - 2p_1 = 3 \times 2 - 2 \times 3 = 0$$

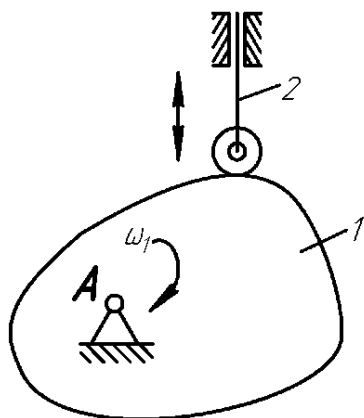
$$W_{гр.(4,5)} = 3n - 2p_1 = 3 \times 2 - 2 \times 3 = 0$$

Следовательно, механизм образован присоединением к ведущему звену 1 и стойке 0 двух групп: первой группы, состоящей из звеньев 2 и 3 и второй группы, состоящей из звеньев 4 и 5.

Кулачковые механизмы

Кулачковые механизмы служат для сообщения ведомому звену

периодического движения по заданному закону, обусловленному профилем кулачка.



- кулачок вращающийся вокруг точки А
- поступательно движущийся толкатель

Кулачковые механизмы применяются в машинах автоматах, прядильных машинах, ДВС, и т.д.

Основные виды кулачковых механизмов

Кулачком называется звено, которому принадлежит элемент высшей кинематической пары, выполненный в виде поверхности переменной

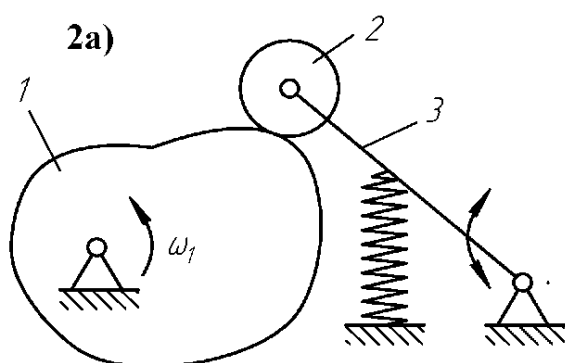
кривизны. Механизм, в состав которого входит кулачок, называется кулачковым механизмом.

В рассмотренных ранее зубчатых механизмах каждый зуб может рассматриваться как кулачок. Выходное звено кулачковых механизмов, как правило, совершает возвратное движение.

Прямолинейно движущееся выходное звено кулачкового механизма называется толкателем, а качающееся – коромыслом.

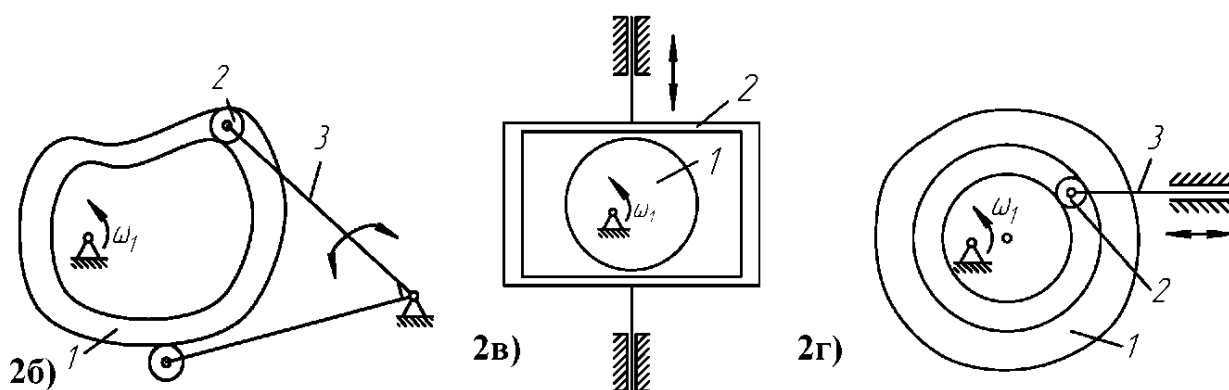
Для уменьшения трения о поверхность кулачка выходное звено часто снабжают роликом.

Постоянное соприкосновение звеньев в высшей паре обеспечивается или силовым, или геометрическим замыканием.



При силовом замыкании постоянное прижатие звеньев происходит под действием пружины, силы тяжести и т.д. (рис. 2а)

При геометрическом замыкании возможность отрыва одного звена от другого устраняется введением дополнительной (избыточной) геометрической связи.

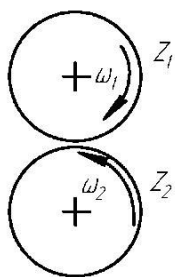


Одним из наиболее распространенных способов геометрического замыкания является применение пазового кулачка (рис. 2б).

Трудность точного выполнения паза и устранения ударов ролика привели к появлению двухдисковых кулачков (рис. 2в).

Вместо двухдисковых кулачков выполняют диаметральный кулачок (рис. 2г).

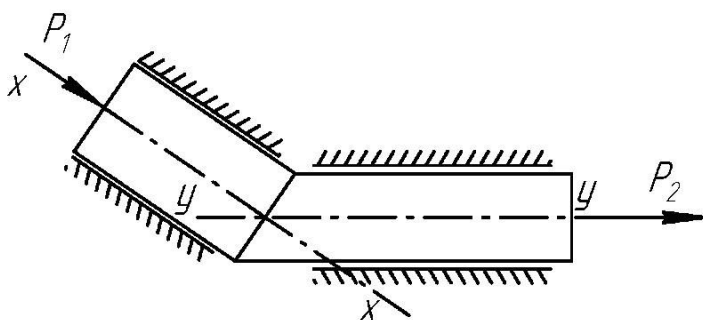
3. Зубчатые механизмы.



Зубчатые механизмы применяются для передачи вращательного движения между валами посредством зубчатого зацепления.

Зубчатые механизмы наиболее широко применяются в технике и имеют большое количество видов.

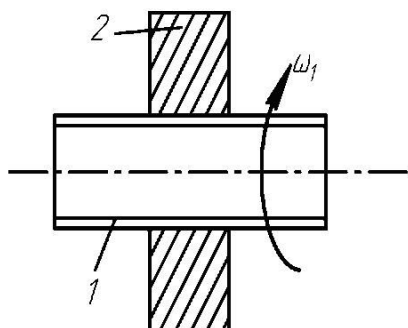
4. Клиновые механизмы



К клиновым механизмам относятся механизмы, в которых звенья обладают только поступательным движением.

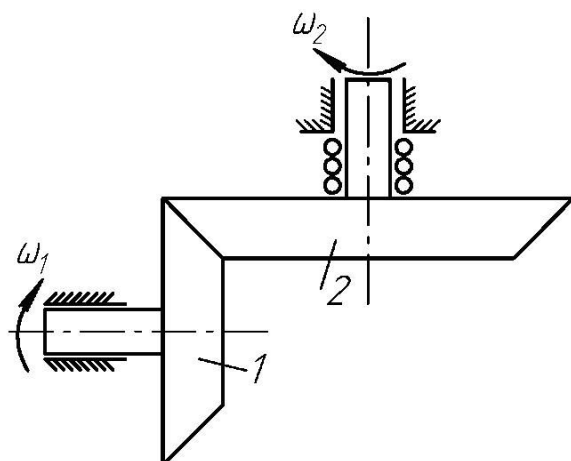
Поступательное движение звена 1 в направлении x-x называется поступательное движение звена 2 в направлении y-y при этом увеличивается усилие на выходном звене ($P_2 > P_1$)

5. Винтовые механизмы.



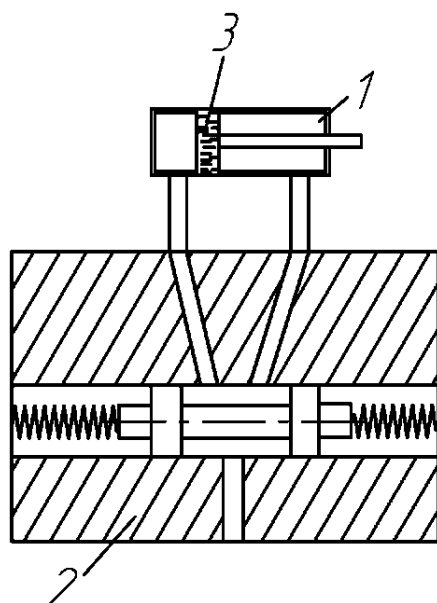
К винтовым механизмам относятся механизмы, звенья которых имеют винтовые движения (связывают между собой вращательное и поступательное движения).

6. Фрикционные механизмы.



Во фрикционных механизмах передача движения от ведущего звена к ведомого осуществляется по средствам сил трения. Эти механизмы используются в муфтах, в вариаторах.

7. Гидравлические механизмы.



1. – гидроцилиндр

2. – управляющий

3. – поршень

В гидравлических механизмах для осуществления поступательного или вращательного движения исполнительного звена используется энергия находящаяся под давлением жидкости.

8. Пневматические механизмы.

Пневматические механизмы –

осуществляют движение исполнительного звена за счет энергии сжатого воздуха.

9. Механизмы с электрическим устройством.

Механизмы с электрическим устройством используются в качестве элементов, работающих на принципе воздействия электрических полей (электрические реле).

2.8. Синтез шарнирного четырехзвенника

Пусть заданы (рис. 2.1) длина стойки l_4 , угловые координаты входного звена 1 в трех положениях: $\varphi = \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и соответствующие угловые координаты выходного звена 3: $\gamma = \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Нужно найти длины звеньев l_1, l_2, l_3 .

Рассмотрим векторный контур ABCDA, для которого в любом положении механизма $\vec{l}_1 + \vec{l}_2 = \vec{l}_4 + \vec{l}_3$. Проецируя этот контур на координатные оси X и Y, имеем:

$$\begin{cases} l_1 \cdot \cos \varphi + l_2 \cdot \cos \theta = l_4 + l_3 \cdot \cos \gamma, & (2.4) \\ l_1 \cdot \sin \varphi + l_2 \cdot \sin \theta = l_3 \cdot \sin \gamma. & (2.5) \end{cases}$$

Исключим угол θ , решив уравнения (2.4) и (2.5) относительно слагаемых, содержащих θ , возведя полученные равенства в квадрат и сложив их:

$$\ell_2^2 = \ell_1^2 + \ell_3^2 + \ell_4^2 + 2\ell_3\ell_4 \cos \gamma - 2\ell_1\ell_4 \cos \varphi - 2\ell_1\ell_3 \cos(\varphi - \gamma).$$

После деления на $2\ell_2\ell_4$ и замены текущих значений углов φ и γ на заданные φ_i и γ_i (индекс $i=1, 2, 3$) получим систему трех линейных уравнений:

$$\frac{\ell_1}{\ell_4} \cos(\varphi_i - \gamma_i) + \frac{\ell_1}{\ell_3} \cos \varphi_i + \frac{\ell_2^2 - \ell_1^2 - \ell_3^2 - \ell_4^2}{2\ell_3\ell_4} = \cos \gamma_i,$$

или

$$p_1 \cos(\varphi_i - \gamma_i) + p_2 \cos \varphi_i + p_3 = \cos \gamma_i, \quad (i=1, 2, 3), \quad (2.6)$$

где неизвестными являются безразмерные параметры:

$$p_1 = \frac{\ell_1}{\ell_4}; p_2 = \frac{\ell_1}{\ell_3}; p_3 = \frac{\ell_2^2 - \ell_1^2 - \ell_3^2 - \ell_4^2}{2\ell_3\ell_4}. \quad (2.7)$$

Из системы (2.6) находим, p_1, p_2, p_3 , а затем согласно (2.7) находим искомые длины звеньев по формулам:

$$\ell_1 = p_1\ell_4; \ell_3 = \frac{\ell_1}{p_2}; \ell_2 = \sqrt{2\ell_3\ell_4 p_3 + \ell_1^2 + \ell_3^2 + \ell_4^2}.$$

Задачу синтеза шарнирного четырехзвенника по трем положениям выходного звена и соответствующим углам поворота входного звена решают методом обращения движения. В этом случае заданы длины звеньев ℓ_4, ℓ_3 , координаты выходного звена 3 в трех положениях $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ и углы поворота входного звена $(\varphi_2 - \varphi_1)$ и $(\varphi_3 - \varphi_1)$. Требуется найти длины звеньев ℓ_1, ℓ_2 и начальную угловую координату (в положение 1) φ_1 .

Положение шарнира В по заданным условиям находят путем сообщения всему механизму относительно центра А угловой скорости $(-\omega_1)$. В результате звено АВ в системе координат A_{123} станет неподвижной, а вместо него в противоположном направлении будет вращаться стойка AD_1 (рис. 2.2). Для второго и третьего положения механизма угловыми координатами стойки по отношению к оси абсцисс будут $(\varphi_2 - \varphi_1)$ и $(\varphi_3 - \varphi_1)$. Положение шарнира С является определенным по отношению к стойке и найдется путем построения заданных углов $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ (точки C_1, C_2, C_3). Длина шатуна ВС для трех заданных положений одна и та же $(BC = BC_i, i=1, 2, 3)$, поэтому точки C_i должны находиться на окружности, описанной из центра В. Следовательно, положение неизвестной точки В найдется, если точки C_i соединить двумя прямыми C_1C_2 и C_2C_3 , провести через их середины E_{12}, E_{23} перпендикуляры и найти точку

пересечения последних. При аналитическом решении для получения формул координат x_i, y_i точек C_i кинематическая цепь AD_iC_i представленного в виде суммы двух векторов \bar{l}_4 и \bar{l}_3 . Координаты точек C_i определяются проекциями указанной векторной цепи на координатные оси:

$$\begin{aligned} x_i &= l_4 \cos(\varphi_i - \varphi_1) + l_3 \cos[\gamma_i - (\varphi_i - \varphi_1)]; \\ y_i &= -l_4 \sin(\varphi_i - \varphi_1) + l_3 \sin[\gamma_i - (\varphi_i - \varphi_1)]. \end{aligned}$$

Координаты точки В найдем из системы уравнений окружности, описанной из центра В радиусом l_2 :

$$(x_i - x_B)^2 + (y_i - y_B)^2 = l_2^2; i = 1, 2, 3. \quad (2.8)$$

Система (2.8) трех уравнений с тремя неизвестными x_B, y_B и l_2 после несложных преобразований для исключения x_B^2 и y_B^2 сводится к линейной.

По координатам x_B и y_B определяют искомые параметры кинематической схемы механизма:

длину входного звена 1:

$$l_{AB} = l_1 = \sqrt{x_B^2 + y_B^2};$$

длину шатуна ВС:

$$l_{BC} = l_2 = \sqrt{(x_1 - x_B)^2 + (y_1 - y_B)^2}$$

(как расстояние между точками В (x_B, y_B) и $C_1(x_1, y_1)$);

начальную угловую координату входного звена:

$$\varphi_1 = \arctg \frac{y_B}{x_B}.$$

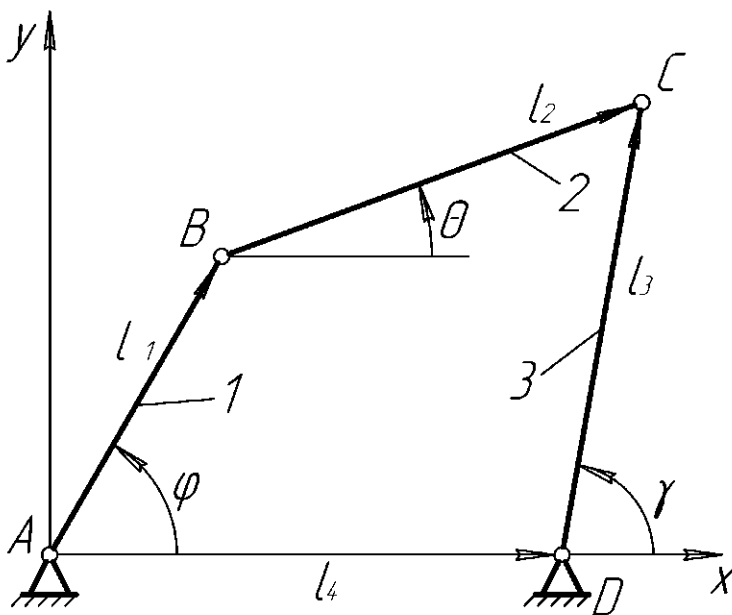


Рис. 2.1

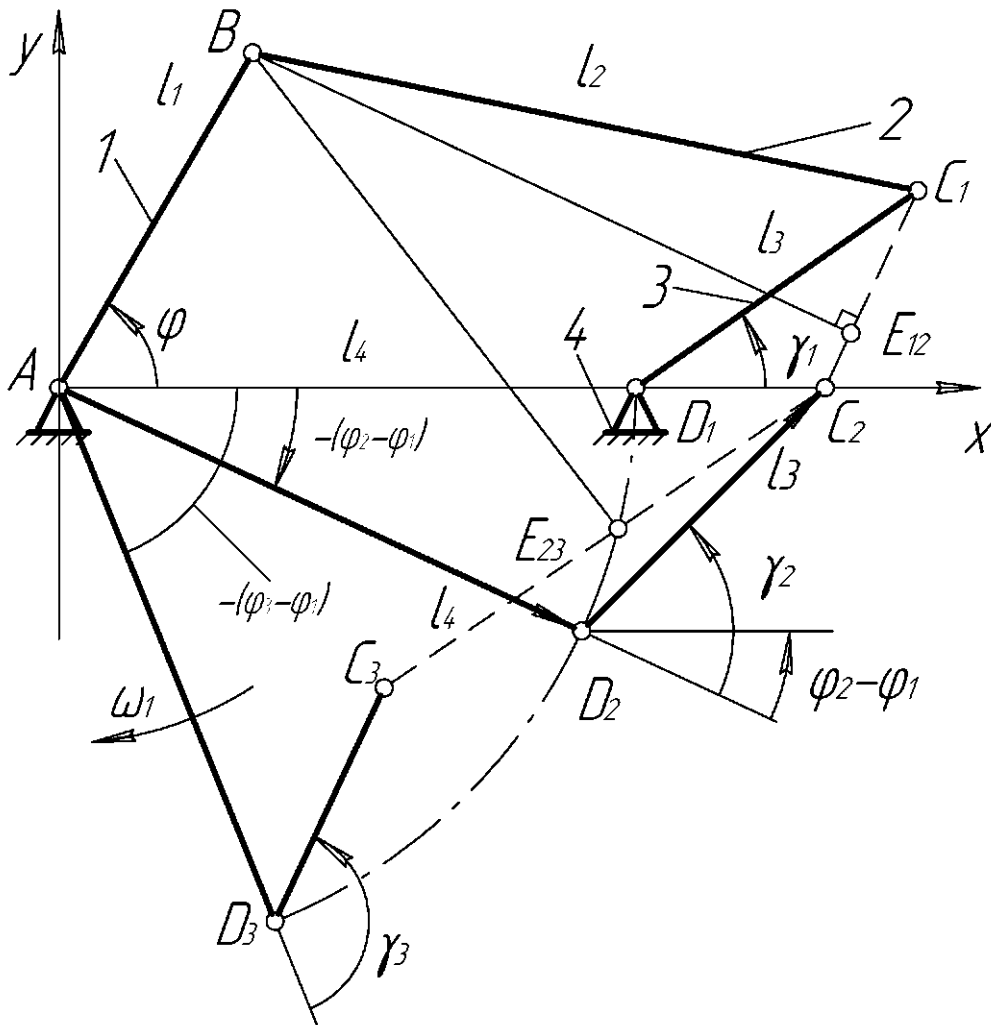


Рис. 2.2

2.9. Синтез зубчатых механизмов

Основная теорема зацепления

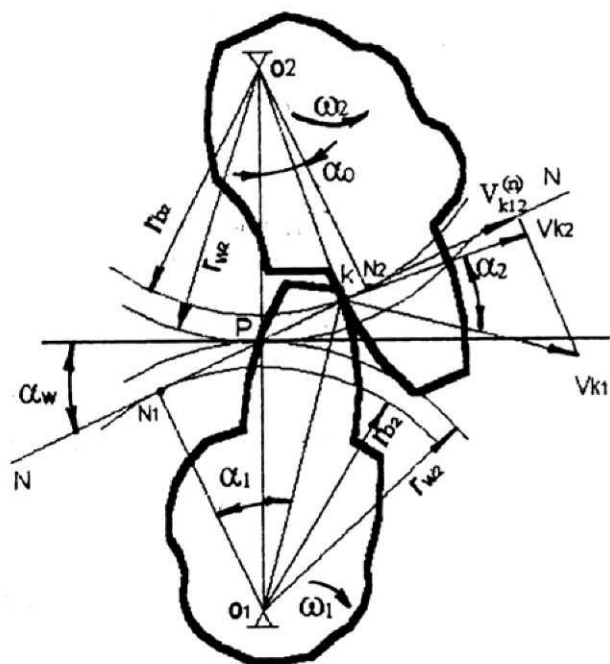
Основную теорему зацепления рассмотрим на примере двух зубчатых колес (рис. 2.35). Профили зубьев двух колёс, соприкасаются в точке К. Колёса вращаются вокруг точек O_1 и O_2 в направлениях указанных стрелками.

Скорость точки К в системе первого колеса: $V_{K1} = \omega_1 * O_1K$ (2.41)

Скорость точки К в системе второго колеса: $V_{K2} = \omega_2 * O_2K$ (2.42).

Они различны по величине и направлению.

Давление между двумя твёрдыми телами передаётся по общей нормали N-N, следовательно, непрерывная передача движения возможна только лишь в том



случае, если проекции скоростей точек контакта обоих профилей на общую нормаль будут одинаковы по величине и направлению. При $V_{k2} > V_{k1}$ будет происходить размыкание зацепления, чего допускать нельзя; при $V_{k2} < V_{k1}$ происходит внедрение зуба одного колеса в зуб другого колеса другой (тем более нельзя допускать), следовательно, скорости должны быть равны $V_{k2}^n = V_{k1}^n$

Рис. 2.35

$$V_{k1}^n = V_{k1} * \cos \alpha_1$$

$$V_{k2}^n = V_{k2} * \cos \alpha_2,$$

так как $V_{k1}^n = V_{k2}^n$,

$$\text{то } V_{k1} * \cos \alpha_1 = V_{k2} * \cos \alpha_2$$

или учитывая (2.41) получим: $\omega_1 * O_1K * \cos \alpha_1 = \omega_2 * O_2K * \cos \alpha_2$ (2.43)

Из точек \$O_1\$ и \$O_2\$ опустим перпендикуляры \$O_1N_1\$ и \$O_2N_2\$ на общую нормаль N-N

$$r_{b1} = O_1N_1 = O_1K * \cos \alpha_1,$$

$$r_{b2} = O_2N_2 = O_2K * \cos \alpha_2$$

следовательно, подставив в формулу (2.43) получим: $O_1N_1 * \omega_1 = O_2N_2 * \omega_2$

$$\text{откуда } \omega_1 = \frac{O_2N_2}{O_1N_1} * \omega_2 \quad (2.44)$$

Соединим центры вращения профилей линией \$O_1O_2\$; и точку пересечения с общей нормалью N-N обозначим P.

Из подобия треугольников \$N_1PO_1 \sim N_2PO_2\$ следует: $\frac{O_2N_2}{O_1N_1} = \frac{O_2P}{O_1P}$, учитывая формулу (2.44) получим:

$$U_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2P}{O_1P} = \frac{r_2}{r_1}$$

это равенство выражает основную теорему зацепления: общая нормаль $N-N$ к сопряженным профилям, вращающимся относительно центров O_1 и O_2 , делит линию центров O_1 и O_2 на части обратно пропорциональные угловым скоростям этих профилей.

Итак: если точка P неподвижна, то передаточное отношение звеньев будет постоянно. Точка P называется полюсом зацепления. Она является мгновенным центром относительного вращения звеньев 1 и 2. Окружности с центрами O_1 и O_2 проходящие через полюс называются начальными. При работе колёс катятся одна по другой без скольжения. Следовательно, как вытекает из формулы (2.44), они представляют собой центроиды колёс.

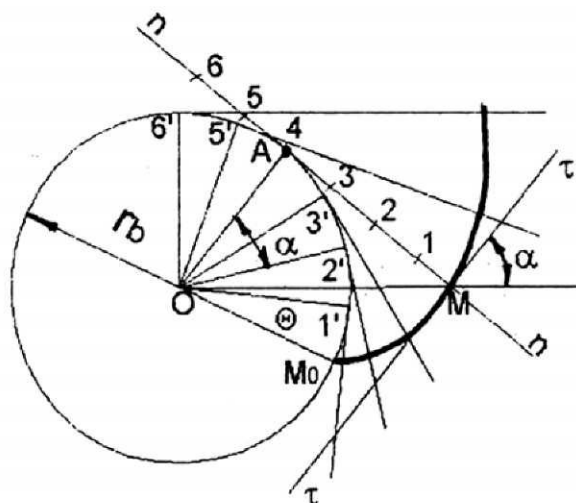
Угол α_w , составленный общей нормалью $N-N$ к профилям зубьев (линией зацепления) и общей касательной к начальным окружностям называется углом зацепления (углом давления).

По теореме зацепления всегда можно проверить, являются ли два профиля находящихся в зацеплении зубьев сопряженными. Для этого проводим к ним общую нормаль и выясняем, проходит ли она через полюс зацепления.

Требование сопряженности профилей удовлетворяется, если профили являются эвольвентными, циклоидными и в некоторых других случаях. В эвольвентном зацеплении угол α_w постоянный. В большинстве случаев угол $\alpha_w = 20^\circ$.

Образование эвольвенты и её свойства

Эвольвентой круга называют кривую, которая описывает любую точку прямой, перекатывающейся без скольжения по окружности. При этом прямую обычно называют производящей, а окружность - основной $гб$. Пусть производящая прямая (рис. 2.36) $n-n$ показана в положении, когда она касается основной окружности в точке A и требуется построить



эвольвенту, описываемую $t. M$.

Делим отрезок AM на равные части и откладываем на $гб$ дуги равные соответствующим частям отрезка AM : $4'3' = 43$; $3'2' = 32$ и так далее.

Через полученные точки проводим касательные и откладываем на них отрезки, последовательно уменьшая длину каждого отрезка на одну часть. Соединяя концы отложенных отрезков, получаем эвольвенту.

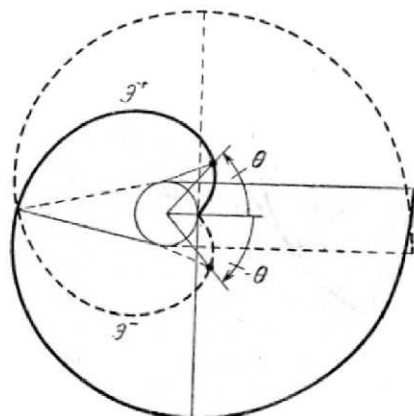
Уравнение эвольвенты получим из условия перекатывания производящей прямой по $гб$ $AMo =$

AM (2.45).

Рис. 2.36

Обозначим через α острый угол между касательной $\tau-\tau$ к эвольвенте и радиус-вектором эвольвенты OM . Этот угол называется углом профиля. Угол, образованный начальным радиус-вектором эвольвенты OM_0 и её текущим радиусом OM называется эвольвентным углом (θ). Тогда условие (2.45) принимает вид: $rb(\alpha+\theta)=rb \cdot \operatorname{tg} \alpha$ или $\theta=\operatorname{tg} \alpha-\alpha$. Функция $\operatorname{tg} \alpha-\alpha$ называется инвалютой и обозначается "inv", то есть уравнение может быть записано $\theta=\operatorname{inv} \alpha$. Радиус-вектор эвольвенты находится из треугольника OAM

$$R = \frac{r_b}{\cos \alpha}$$



Эвольвента имеет две ветви (рис. 2.37): положительная ветвь \mathcal{E}^+ ($\theta > 0$) получается при перекачивании прямой против хода часовой стрелки, отрицательная \mathcal{E}^- ($\theta < 0$) - при перекачивании по ходу часовой стрелки.

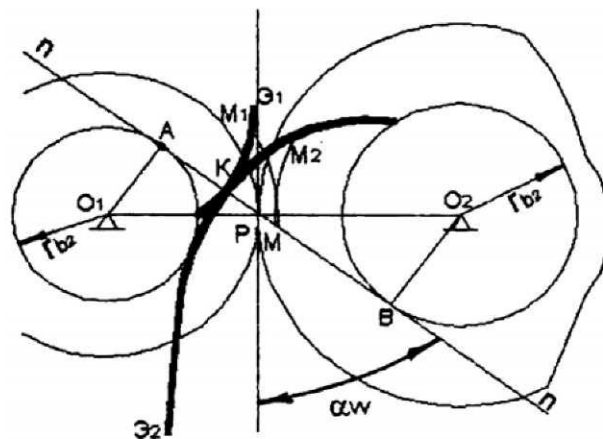
Рис. 2.37

Основные свойства эвольвенты

1. Каждая ветвь эвольвенты вполне определяется радиусом основной окружности rb и начальной точкой M_0 .
2. Эвольвента не имеет точек внутри основной окружности.
3. Нормаль к любой точке эвольвенты направлена по касательной к основной окружности.
4. Центр кривизны эвольвенты лежит в точке касания нормали с основной окружностью rb .

Эвольвентное зацепление

Пусть профиль зуба звена 1 очерчен по эвольвенте rb_1 , а профиль зуба звена 2 по эвольвенте rb_2 . Поместим центры этих окружностей в точку O_1 и точку O_2 и приведём эвольвенты в соприкосновение в точке K . Нормаль к эвольвенте \mathcal{E}_1 в точке K должна быть касательной к rb_1 , а нормаль \mathcal{E}_2 - касательной к rb_2 . В точке касания нормаль должна быть общей к обоим профилям и, следовательно, точка K лежит на общей



касательной к основным окружностям. При вращении звеньев 1 и 2 точка касания эвольвент перемещается по отрезку АВ этой касательной, так как вне отрезка АВ эвольвенты не могут касаться, то есть иметь общую нормаль. Отсюда следует, что линия зацепления эвольвентных профилей совпадает с общей нормалью к ним и лежит на отрезке АВ общей касательной к основным окружностям. Точка Р – полюс зацепления занимает неизменное положение, следовательно центры в относительном движении представляют собой окружности с радиусами $r_{w1} = l_{o1}$ и $r_{w2} = l_{o2}$ соответственно. По свойству центроид начальные окружности при движении звеньев перекатываются без скольжения. Итак, при эвольвентном зацеплении передаточное отношение имеет постоянную величину

$$U_{12} = \pm \frac{r_{w1}}{r_{w2}}$$

Знак (-) относится к внешнему зацеплению, знак (+) относится к внутреннему зацеплению.

Из треугольника О1АР и треугольника О2ВР следует:

$$r_{b1} = \cos \alpha_w * r_{w1}$$

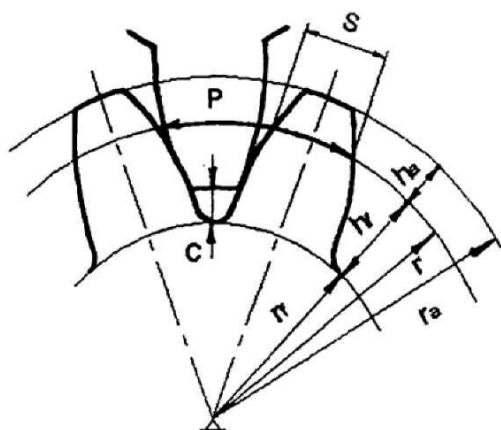
$$r_{b2} = \cos \alpha_w * r_{w2},$$

следовательно, $U_{12} = \pm \frac{r_{b1}}{r_{b2}}$ отсюда можно сделать выводы:

1. При эвольвентном зацеплении изменение межосевого расстояния не влияет на величину передаточного отношения, вследствие неизменности радиусов основных окружностей. При изменении межосевого расстояния изменятся лишь радиусы r_w и угловые зацепления α_w .
2. При эвольвентном зацеплении передаточное отношение, согласно основной теории имеет постоянную величину.
3. При внешнем зацеплении эвольвентные профили являются сопряжёнными только в пределах отрезка АВ линии зацепления. Линией зацепления (АВ) называется геометрическое место точек соприкосновения профилей боковых поверхностей зубьев колес, принадлежащее неподвижному пространству. Точки М1 и М2 - сопряженные. Точки, касающиеся друг друга на линии зацепления, называются сопряжёнными. Точки А и В - теоретические границы зацепления, за этими точками зацепление допускать нельзя - наступит заклинивание передачи.

Основные размеры зубчатых колёс с эвольвентным профилем

Эвольвентные профили удовлетворяют условию синтеза зубчатого зацепления - получению заданного U_{12} . Выполнение дополнительного условия синтеза зависит от размеров зубьев. Эти размеры удобно задавать в долях, какой - либо одной линейной величины. Выразим длину некоторой окружности, имеющей диаметр d через число зубьев Z .



$\pi \cdot d = P \cdot Z$,
 где: P - окружной шаг, то есть расстояние, измеренное по дуге окружности диаметром d между двумя соответствующими точками соседних зубьев.

Отсюда: $d = \frac{P}{\pi} \cdot Z$ или $d = m \cdot z$

где, m – отношение окружного шага к числу π , называется модулем зуба. Модуль зуба выбирается из ряда рациональных чисел от 0,05 до 100. Делительной окружностью называется окружность, для которой модуль имеет стандартную величину, она является базовой для определения размеров зубьев. Иногда начальные окружности r_W и делительные окружности r совпадают, но при этом надо иметь в виду их принципиальное отличие. Делительная окружность - есть характеристика одного зубчатого колеса, а начальные окружности дают характеристику зацепления двух зубчатых колес, и диаметры этих окружностей зависят от межосевого расстояния.

Делительная окружность делит зуб на две части: головку и ножку. Делительной головкой зуба называется часть зуба расположенная между делительной окружностью r и окружностью вершин r_a . Ножкой зуба называется часть зуба расположенная между делительной окружностью r и окружностью впадин r_f .

Различают внешние и внутренние зубья. У внешних, окружность вершин находится снаружи окружности впадин, а у внутренних, внутри окружности впадин.

h_a - высота головки зуба;

h_f - высота ножки зуба.

$h = h_a + h_f$ - общая высота

$h_f > h_a$, так как между окружностями вершин одного зуба и окружностями впадин другого зуба должен быть зазор называемый радиальным зазором (C).

Для нормальных колёс высоты зуба $h_a = m$; $h_f = 1,25m$. Для укороченных зубьев: $h_a = 0,8m$. Радиальный зазор $C = 0,25m$.

Каждый зуб очерчен двумя симметрично расположенными профилями.

Расстояние между этими профилями, измеренное по какой - либо окружности называется толщиной зуба. Толщина по делительной окружности обозначается S .

Способы нарезания зубчатых колёс

Применяются два основных способа нарезания зубчатых колес: копирование и обкатка (огибание). Существуют и другие способы, такие как отливка, накатка, при которой зубья образуются без дополнительной обработки, но они не обеспечивают высокую точность изготовления зубчатых колёс.

По способу копирования специальной дисковой (рис. 2.38) или пальцевой фрезой (б) прорезают впадины, вследствие чего впадина соответствует очертаниям инструмента. После того как очередная впадина прорезана и закончился холостой ход фрезы, заготовку поворачивают на угол:

$$\tau = \frac{360^\circ}{Z} ; \quad \tau = \frac{2\pi}{Z} \text{ - угловой шаг.}$$

Недостатки: метод малопроизводителен, низкая точность нарезания колёс, сложный инструмент, необходима большая номенклатура инструмента.

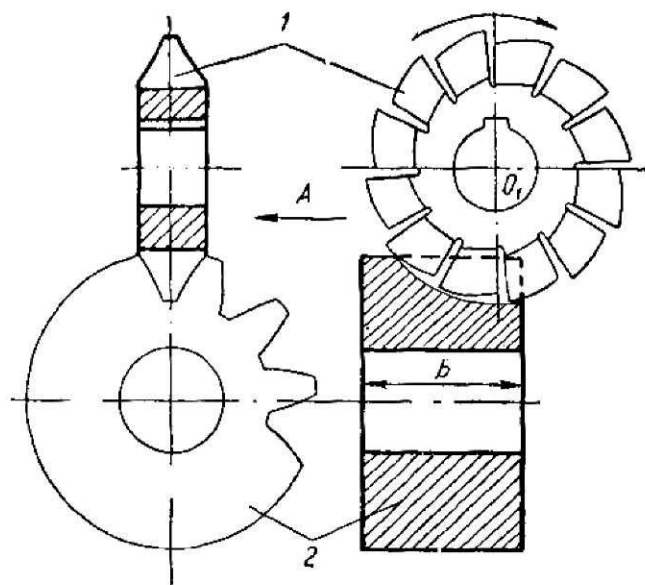


Рис. 2.38

Рассмотрим метод обкатки. Если режущий инструмент выполнить в виде зубчатой рейки (рис. 2.39), то методом обката им можно нарезать зубчатое колесо с эвольвентным профилем зубьев.

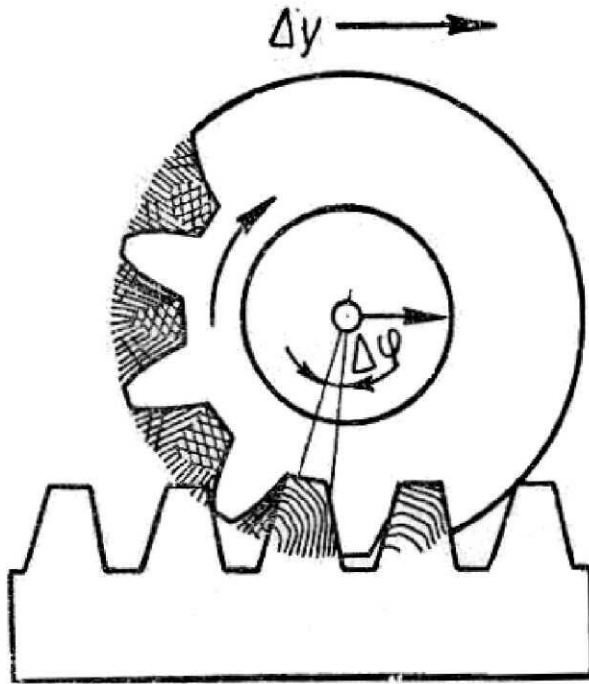


Рис. 2.39

Рассмотрим контур зубьев рейки (2.40), который называется исходным, так как он служит основой для определения форм и расположения режущих кромок.

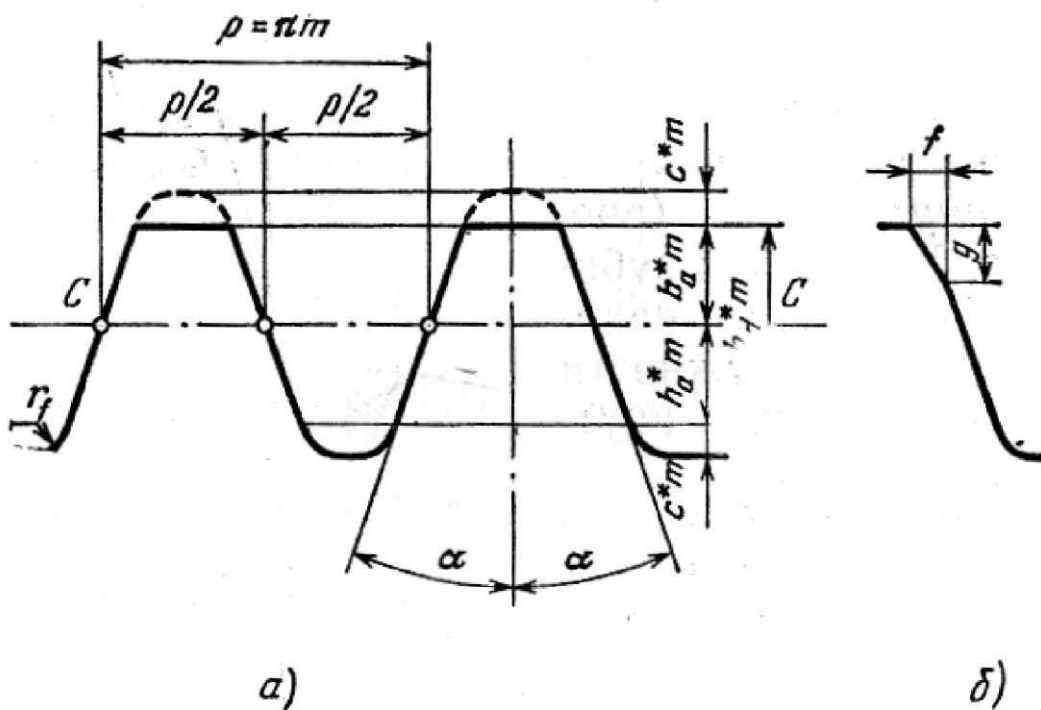


Рис. 2.40

Профиль зуба режущего инструмента отличается от исходного профиля тем, что высота головки увеличена на C^*m , то есть на величину радиального зазора, так как головка зуба рейки вырезает ножку зуба в заготовке. Этот контур называют производящим.

Прямая (С-С) проходящая по середине общей высоты зуба называется средней прямой (иногда делительной);

$h_a^* = 1$ (коэффициент зуба).

$C^* = 0,25$) При обкатке режущим инструментом, заготовке сообщается такое относительное движение, какое имели бы они в зацеплении.

Существуют следующие разновидности метода обкатки.

Режущий инструмент выполняют в виде зубчатой рейки (рис. 2.39).

преимущество: простота инструмента и высокая точность изготовления зубчатых колес.

2. Режущий инструмент выполнен в виде зубчатого колеса, высота головки которого $h_a = 1,25m$, который носит название долбяк (рис. 2.41).

преимущество: можно нарезать зубчатые колеса с внутренними и наружными зубьями.

3. Режущий инструмент выполнен в виде червячной фрезы (рис. 2.42),

продольное сечение которой имеет вид зубчатой рейки

преимущество: непрерывность процесса, процесс более производительен.

недостаток: можно нарезать зубья только с внешним зацеплением.

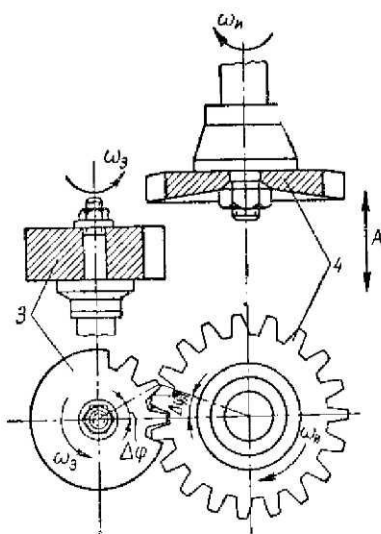


Рис. 2.41

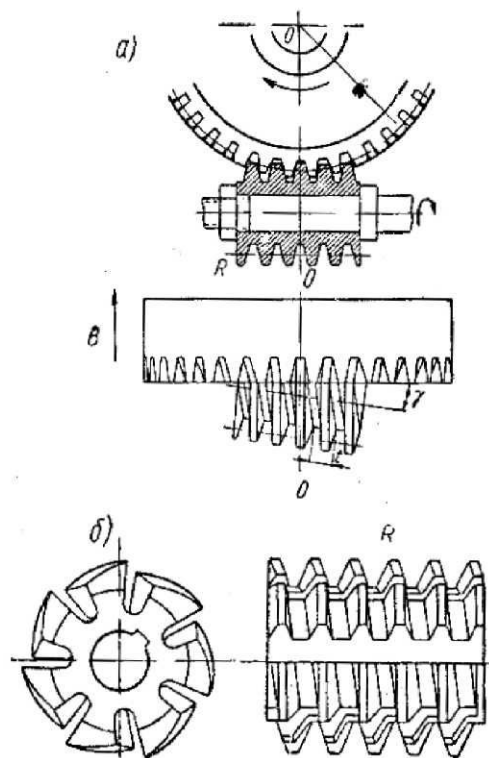


Рис. 2.42

Нулевые, положительные и отрицательные зубчатые колёса и передачи

Возможны три варианта расположения средней линии инструментальной рейки относительно делительной окружности колеса.

1. Средняя прямая производительного контура С-С касается делительной окружности заготовки (рис. 2.43 б). Средняя линия катится без скольжения по делительной окружности равной ширине впадины рейки по средней линии. $S=0.5\pi m$. Это колесо называется колесом с равноделенным шагом.

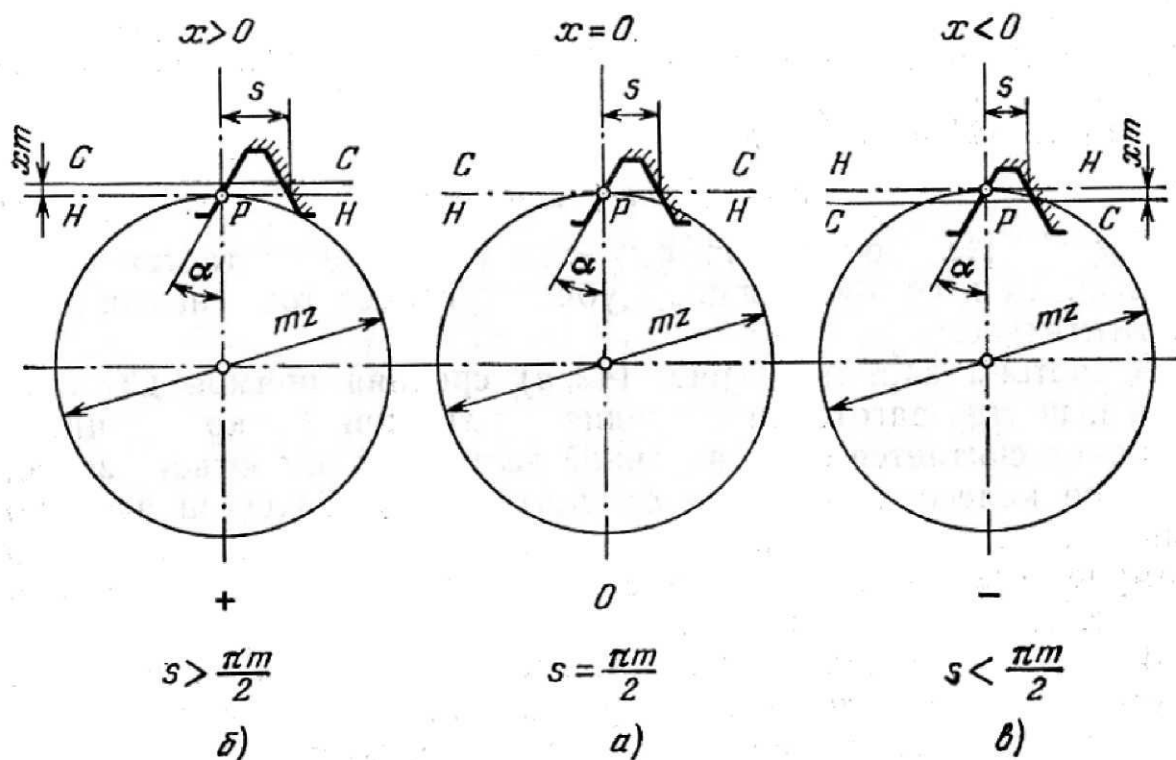


Рис. 2.43

2. Средняя линия С-С смещена (поднята) на величину $X \cdot m$, где X - коэффициент смещения (рис. 2.43 а). По делительной окружности катится без скольжения начальная окружность Н-Н, отстоящая от средней прямой линии на $X \cdot m$. Толщина зуба по делительной окружности оказывается больше ширины впадины, что соответствует увеличению ширины впадины производящего контура начальной прямой Н-Н. Из рисунков следует:

$$S = 0.5\pi m + 2Xm \operatorname{tg}\alpha. \quad (2.46)$$

Коэффициент смещения X в этом случае считается положительным.

3. Средняя прямая С-С смещена к центру на величину Xm , при чем коэффициент смещения X считается отрицательным (рис. 2.43в).

Толщина зуба по делительной окружности тоже определяется по формуле (2.46) и вследствие того, что $X < 0$, оказывается меньше, чем у колеса с равноделенным шагом.

Зубчатые колеса, нарезанные со сдвигом рейки, называются исправленными колесами. Колеса, нарезанные с положительным сдвигом, называют положительными. А нарезанные с отрицательным сдвигом -

отрицательными. Колеса, нарезаемые без сдвига, называют нулевыми колесами.

Для того чтобы, определить к какой из этих групп относится зубчатое колесо, надо определить толщину его зубьев по делительной окружности.

В зависимости от смещений каждого колеса можно получить три типа передач отличающихся расположением начальных и делительных окружностей.

I тип (рис. 2.44а). Эти окружности совпадают если передачи удовлетворяют условию $X_1 + X_2 = 0$, передача называется нулевой, то есть, передачи, составленные из колес без смещения и передачи в которых отрицательное смещение одного колеса равно по абсолютной величине положительному смещению другого колеса (равносмещенные).

Межосевое расстояние в этих передачах $a = 0,5 * m * (Z_1 + Z_2)$ называется делительным межосевым расстоянием, а угол зацепления α равен углу профиля производящего контура.

II тип (рис. 2.44б). В передачах, у которых по делительным окружностям толщина зуба одного колеса больше ширины впадины другого, для зацепления без бокового зазора межцентровое расстояние a_w должно быть больше a .

Соответственно увеличивается и угол α_w .

III тип (рис. 2.44в). Аналогично для передач, у которых по делительной окружности толщина зубьев одного из колес меньше впадины другого, имеем $a_w < a$. Эти передачи получаются при $X_1 + X_2 < 0$.

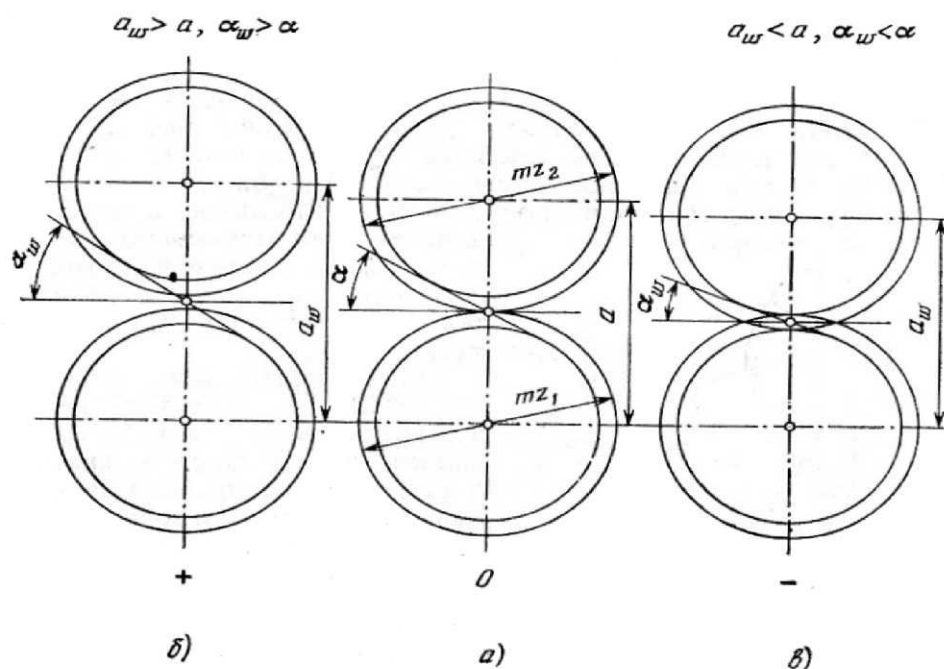


Рис. 2.44

Геометрический расчет зубчатых передач при заданных смещениях X_1 и X_2

Для вычисления a_w и α_w определяем сначала толщину зуба по начальной окружности. Из (рис. 2.45) с учетом уравнения эвольвенты $\Theta = \text{inv}\alpha$ имеем:

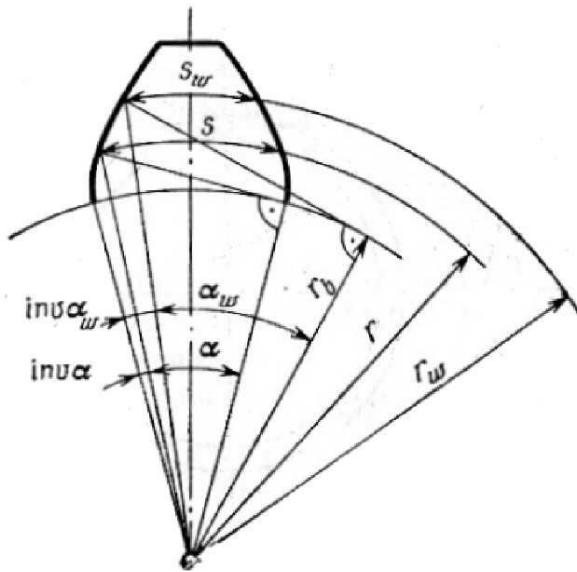
$$S_w = r_w \left(\frac{s}{r} + 2\text{inv}\alpha - \text{inv}\alpha_w \right)$$


Рис. 2.45

Подставив значение толщины зуба по делительной окружности:

$$S = 0,5\pi m + 2Xm * \text{tg}\alpha$$

и учитывая $r = mZ/2$ и $r_w = P_w Z/2\pi$,

где P_w - шаг по начальной окружности получаем:

$$S_w = \frac{P_w}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + 2X * \text{tg}\alpha + Z(\text{inv}\alpha - \text{inv}\alpha_w) \right] \quad (2.47).$$

Для начальных окружностей сумма толщин зубьев равна шагу

$$S_{w2} + S_{w1} = P_w$$

Отсюда с учетом формулы (2.47)

$$\text{inv}\alpha_w = \text{inv}\alpha + \frac{[2(X_1 + X_2)\text{tg}\alpha]}{[Z_1 + Z_2]}$$

по таблице определяем α_w .

Радиусы начальных окружностей определим из $\Delta N_1 O_1 P$

$$r_{w1} = O_1 P = \frac{r_{b1}}{\cos\alpha_w} = \frac{m * Z_1}{2} * \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_w}$$

из $\Delta N_2 O_2 P$

$$r_{w2} = O_2 P = \frac{r_{b2}}{\cos\alpha_w} = \frac{m * Z_2}{2} * \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_w}$$

$$a_w = r_{w1} + r_{w2} = \frac{m}{2} * (Z_1 + Z_2) * \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_w}$$

Радиусы впадин r_{f1} получаются из условия, что делительная головка режущего инструмента, равная по высоте $(h_a^* + C^*)m$, при обработке проходит внутрь делительной окружности на величину $(h_a^* + C^* - X)m$.

Отсюда:

$$r_{f1} = 0.5\pi Z_1 - (h_a^* + C^* - X)m = 0.5\pi Z_1 - 1.25m + X_1m,$$

где $h_a^* = 1$, $C^* = 0.25$,

$0.5\pi Z_1$ - делительная окружность,

$1.25m$ - высота ножки,

X_1m - смещение рейки.

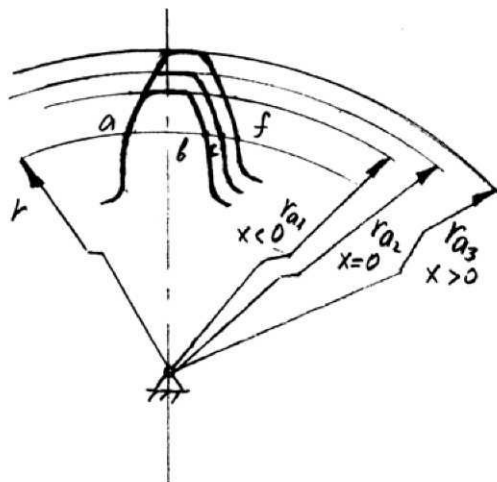
Радиусы вершин r_a получаются из условия получения радиального зазора C^*m .

$$r_{a1} = a_w - r_{f2} - C^*m = a_w - r_{f2} - 0.25m$$

$$r_{a2} = a_w - r_{f1} - 0.25m$$

Влияние смещения инструмента на форму зубьев

Рассмотрим профили зубьев 3х колес имеющих одинаковые числа зубьев, нарезанные одним и тем же инструментом, но с различными смещениями: $X_1 < X_2 < X_3$.



1. По мере алгебраического увеличения X толщина зуба у основания увеличивается, а у вершины уменьшается, то есть коэффициент смещения влияет на форму зуба.
2. У положительных колес используется участок эвольвенты наиболее удаленный от её основания, обладающий большими радиусами кривизны. Это способствует уменьшению износа и контактных напряжений на боковой поверхности зуба.
3. Положительное смещение X способствует устранению подреза зубьев, который наблюдается при нарезании зубчатых колес с малым числом зубьев инструментальной рейкой.

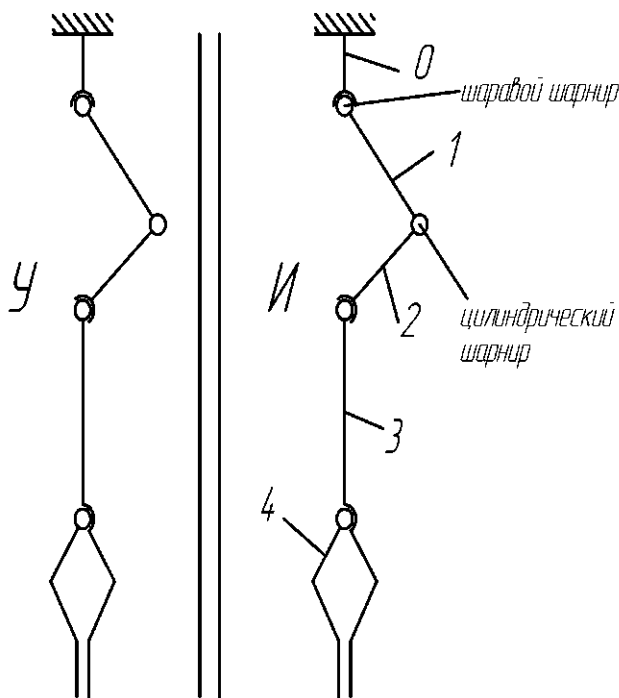
3. Манипуляторы и промышленные роботы

3.1. Виды манипуляторов и промышленных роботов

Манипулятором называют техническое устройство, предназначенное для воспроизведения рабочих функций руки человека.

Первые конструкции манипуляторов не только по назначению но и по

внешнему виду напоминали руку человека.



На рисунке представлена схема копирующего манипулятора, состоящего из управляющего (У) и исполнительного (И) механизмов.

Оба механизма совершенно идентичны, причем в следствие механической, электрической или какой – либо другой связи движение звеньев исполнительного механизма повторяет (копирует) движения звеньев

управляющего механизма.

Манипулятор образован из пространственной незамкнутой кинематической цепи. Звенья этой цепи по аналогии с рукой человека имеет следующие названия:

- 0 – корпус
- 1 – плечо
- 2 – предплечье
- 3 – кисть или захват
- 4 – палец.

Рассматриваемый манипулятор имеет 7 степеней свободы, т.к. число степеней свободы незамкнутой кинематической цепи равно сумме подвижных кинематических пар. Звено 4 (палец) при рассмотрении структуры, кинематики и динамики манипулятора объединяется со звеном 3. в дальнейшем появились манипуляторы с большим числом звеньев и кинематических пар, и внешнее сходство с рукой человека стало утрачиваться.

Во всех вариантах сохранилось назначение манипулятора – воспроизводить пространственные движения, подобные движениям рук человека.

Копирующие манипуляторы применяются теперь во многих областях техники для выполнения операций в условиях исключающих возможность присутствия человека (радиоактивность, вакуум, высокая t_0C , повышенное давление, вредное химическое производство и т.д.)

В зависимости от вида системы управления различают манипуляторы с ручным управлением и манипуляторы с автоматическим управлением.

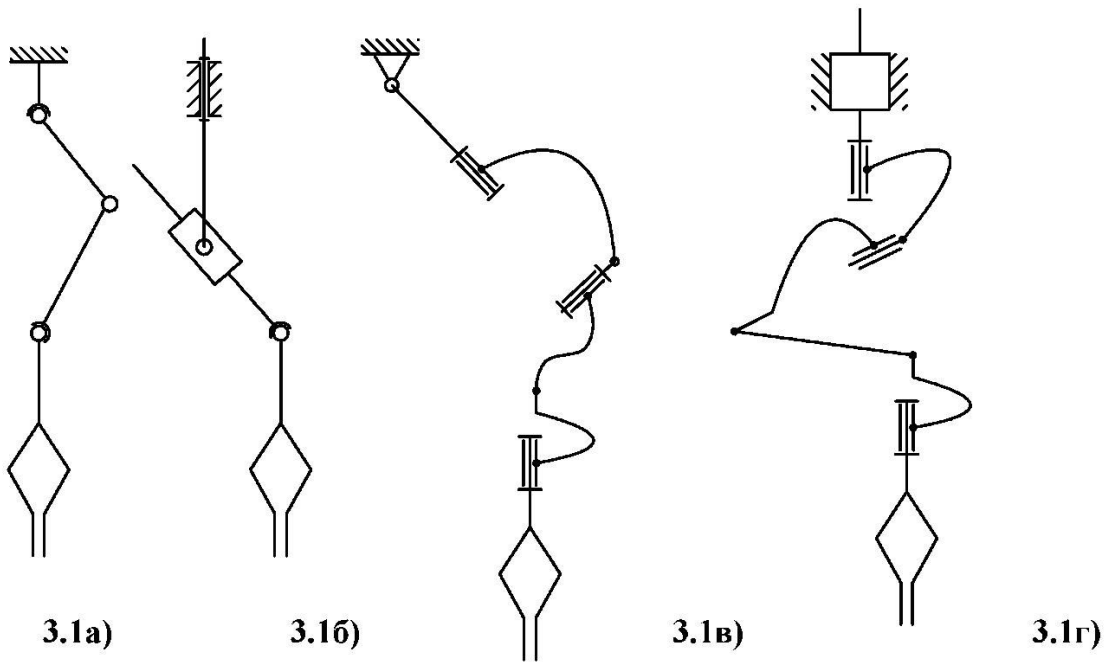
В манипуляторах с ручным управлением оператор, воздействуя на звенья управляющего механизма, приводит в движение звенья исполнительного механизма. При этом предельные усилия и перемещения исполнительного механизма ограничиваются возможностями оператора. От этого недостатка свободы, манипуляторы с сервоприводом, часто выполняются с дистанционным управлением.

В манипуляторах с автоматическим управлением, звенья исполнительного механизма получают движение от сервопривода, работающих по заданной программе подобно станкам с программным управлением. Управляющий механизм служит в этом случае только для выработки программы работ исполнительного механизма. Все действия оператора, связанные с перемещением звеньев управляющего механизма, преобразуются посредством датчиков перемещения в электрические и механические сигналы и записываются на магнитную ленту.

Полученная программа может многократно использоваться для управления манипуляторами.

3.2. Структура и геометрия манипуляторов

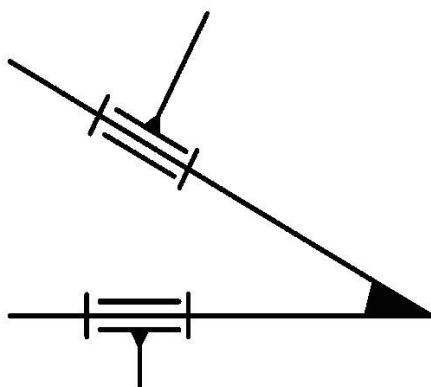
Структурные схемы кинематических цепей манипуляторов довольно разнообразны. Они отличаются числом звеньев, видами и расположением кинематических пар различной подвижности, числом степеней свободы.



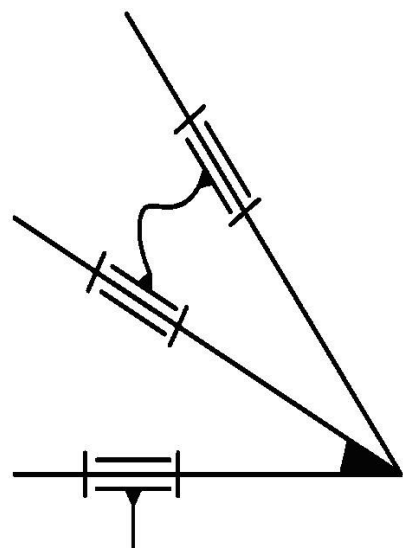
На рис. 3.1 (а,б,в,г) показаны четыре схемы, применяемые в отечественных и зарубежных манипуляторах. Простейший пространственный манипулятор (рис.3.1-а) имеет три пары подвижных звеньев, одну вращательную и две сферические пары. Если надо обслуживать большой рабочий объем, применяются манипуляторы с одной поступательной, одной сферической и двумя вращательными парами (рис.3.1-б).

Обычно сферические пары заменяются кинематическими соединениями, составленные из вращательных пар, оси которых пересекаются. Например: на (рис.3.1-в) показана схема манипулятора с шестью степенями свободы, в состав которого входят только вращательные пары.

Число степеней свободы может быть и больше 6. Например, на (рис.3.1-г) показана схема манипулятора с числом степеней свободы равным 8, при одной поступательной, одной цилиндрической и пяти вращательных парах. Во многих конструкциях манипуляторов сферические пары заменяются кинематическими соединениями, состоящими из двух дополнительных и 3-4 вращательных пар, оси которых пересекаются в одной точке.

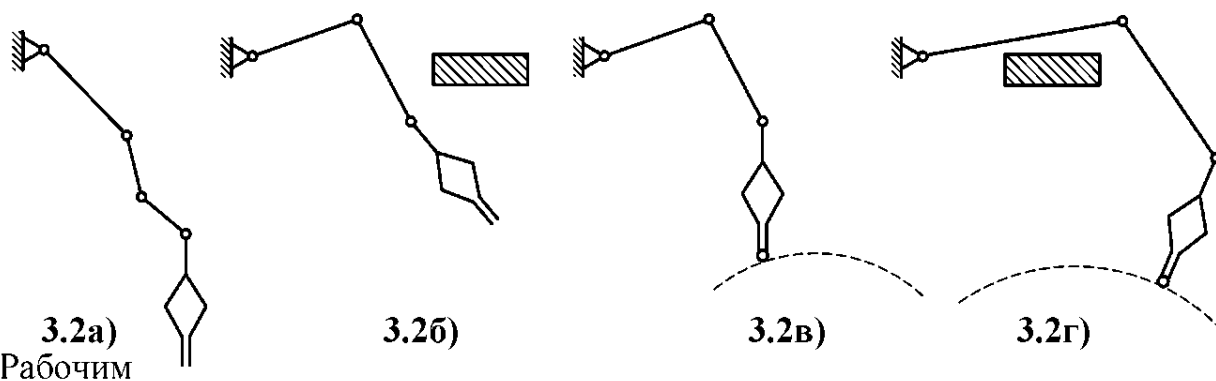


*Карданный шарнир
(двухподвижное сферическое соединение)*



Трехподвижное сферическое соединение

3.3. Рабочий объем манипуляторов и классификация движения захвата



объемом манипулятора называется объем, ограниченный поверхностью, огибающей все возможные положения захвата. Однако не все части этого объема одинаково удобны для выполнения заданных движений захвата. В связи с этим движения захвата подразделяют на 4 класса.

К первому классу относятся движения в свободном рабочем объеме (рис.3.2-а)

Движение в несвободном пространстве (рис.3.2-б), при котором часть рабочего объема занята некоторым твердым телом, относится ко второму классу. К третьему классу относятся движения, согласованные со связями, наложенными на объект манипулирования (рис.3.2-в). Наконечник к четвертому классу относятся движения, совершенные в несвободном пространстве при несвободном объекте манипулирования (рис.3.2-г).

Возможность выполнения заданных движений захвата различных классов определяется не только числом степеней свободы манипуляторов, но и расположением кинематических пар.

Влияние расположения кинематических пар манипулятора на его маневренность.

Под маневренностью манипулятора понимается его число степеней свободы при неподвижном захвате. Одну степень маневренности имеет манипулятор, показанный на (рис.3.1-а), т.к. при неподвижном захвате его звенья могут вращаться вокруг оси, проходящей через центры сферических пар. В манипуляторе по схеме, показанной на (рис.3.1-б), при неподвижном захвате маневренность равна нулю, т.е. каждому положению захвата соответствует единственное расположение всех звеньев. Манипулятор по схеме (рис.3.1-в), также не имеет маневренности. Однако одному и тому же положению захвата могут соответствовать два различных варианта расположения звеньев. Что позволяет оператору обходить некоторые препятствия в рабочем объеме.

Сравнение различных схем манипуляторов показывает, что маневренность зависит не только от числа степеней свободы захвата, но и от расположения

кинематических пар. Повышение маневренности манипулятора позволяет выполнять движения более высоких классов и увеличивает свободу действия оператора при выполнении маневров.

3.4. Структурный синтез манипуляторов

Структурный синтез манипуляторов, т.е. определение числа звеньев, числа кинематических пар различной подвижности и их расположения, представляет значительные трудности из-за большого числа степеней свободы. Например, уже для манипулятора с тремя степенями свободы, если применять только вращательные и поступательные пары, получается 8 возможных комбинаций расположения этих пар. Поэтому при структурном синтезе манипуляторов с числом степеней свободы 6 и более все возможные варианты можно получить только с использованием ЭВМ. Для сравнения этих вариантов необходимо иметь коэффициенты, определяющие их кинематические и динамические свойства, а также коэффициенты, характеризующие возможность и удобство выполнения разнообразных типовых операций, для выполнения которых предназначен манипулятор. Кинематические и динамические коэффициенты для каждого варианта схемы могут быть найдены на основании общих методов кинематического и динамического анализа.

3.5. Зоны обслуживания, угол и коэффициент сервиса

Зоной обслуживания (рабочей зоной) называется часть рабочего объема манипулятора. В которой можно выполнить данную операцию, характеризуемую расположением захвата по отношению к объекту манипулирования. Для каждой точки объема манипулятора можно определить некоторый телесный угол ψ , внутри которого захват можно подвести к этой точке. Этот угол называется углом сервиса.

Отношение $\frac{\Psi}{4\Pi} = \theta$ называется коэффициентом сервиса в данной точке. Значение этого коэффициента может меняться от 0 до 1.

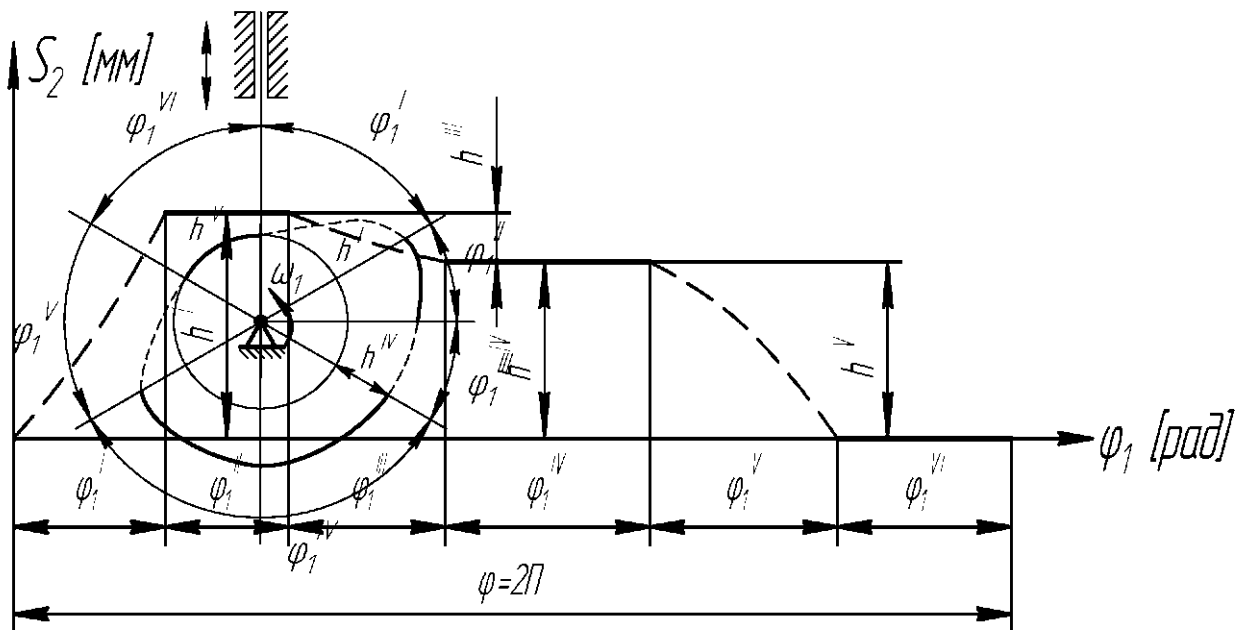
Модуль 2. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

1. Кулачковые механизмы

1.1. Кинематический анализ кулачковых механизмов методом диаграмм

Рассмотрим некоторую типовую функцию положения толкателя заданную графически $S_2 = f(\varphi_1)$.

Пусть угол поворота кулачка $\varphi = 2\pi$ соответствует полному циклу движения механизма. На угле φ_{II} происходит подъем толкателя на величину hI .



Далее, на угле поворота φ_{III} толкатель имеет выстой. На угле поворота φ_{III} происходит опускание толкателя на величину $h_{III} = hI - h_{IV}$. На угле поворота φ_{IV1} толкатель имеет второй выстой. На угле поворота φ_{VI} он опускается на величину hV , и на угле φ_{VII} толкатель имеет вновь выстой.

Углы φ_{II} , φ_{III} , φ_{III1} , ... носят название фазовых углов. Участки кривой $S_2 = f(\varphi_1)$ соответствующие

Рис. 1

фазовым углам называются фазой подъема, фазами выстоя, фазой опускания.

Нетрудно видеть, что в углах φ_{III} , φ_{IV1} , φ_{VI1} соответствующих фазам выстоя, профиль кулачка должен быть очерчен по дугам окружностей с радиусами $r+hI$;

$r+h_{IV}$ и k , где k – наименьший радиус кулачка.

На рисунке был рассмотрен кулачковый механизм с поступательно движущимся звеном, не все определения и положения применимы и для кулачковых механизмов с коромыслом. В этих случаях диаграмма движения задается в виде функции $\varphi_2 = f(\varphi_1)$.

Рассмотрим несколько диаграмм аналогов ускорений, определяющих законы движения ведомых звеньев.

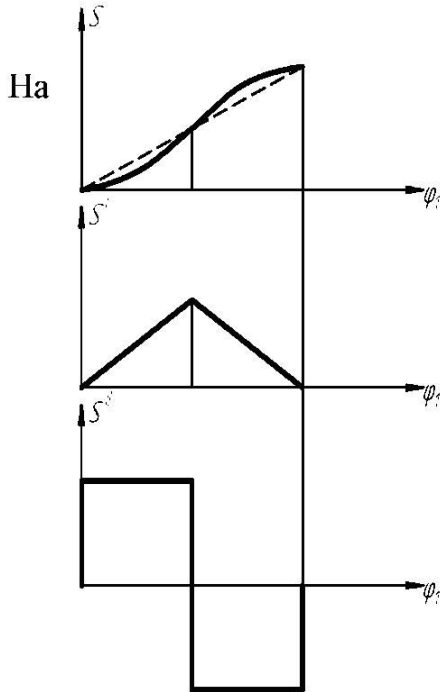


Рис. 2

(рис.2 в) показана диаграмма аналога постоянного ускорения. Соответственно (рис.2.47б,а) аналог скорости пути. Представленный этими диаграммами закон определяет равноускоренное движение ведомого звена.

Диаграмма аналога ускорения имеет разрывы, определяющие мягкий удар. Для быстроходных механизмов такой закон неприемлем из-за больших сил инерции толкателя как коромысла.

При скачкообразном изменении диаграммы аналога ускорений толкатель получает мягкий удар, происходящий из-за резкого изменения динамических нагрузок, вызывающих упругие колебания.

Избежать скачки ускорений (рис. 4) можно при треугольной диаграмме аналогов ускорения.

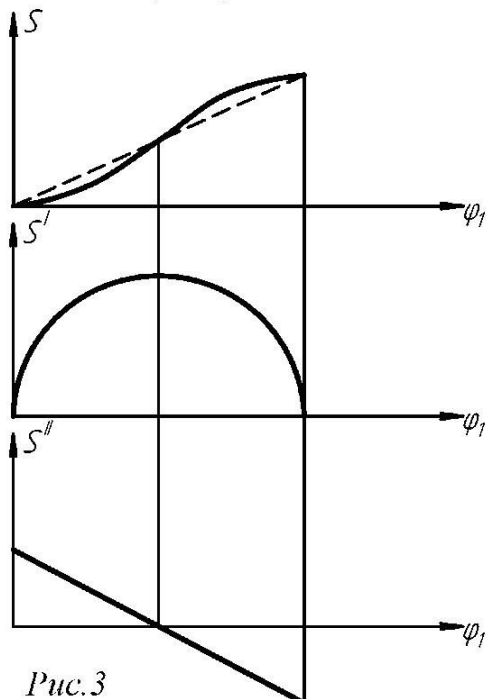


Рис.3

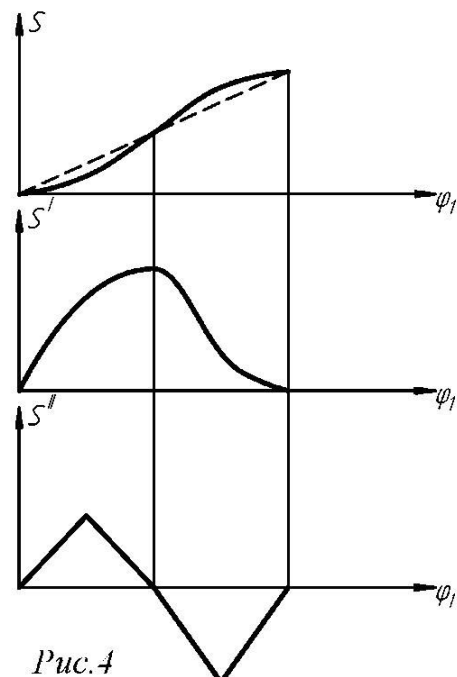


Рис.4

Диаграмма аналога ускорения, (рис.2.50) показывает, что в середине движения нет скачка ускорения, но в начале и в конце движения имеются.

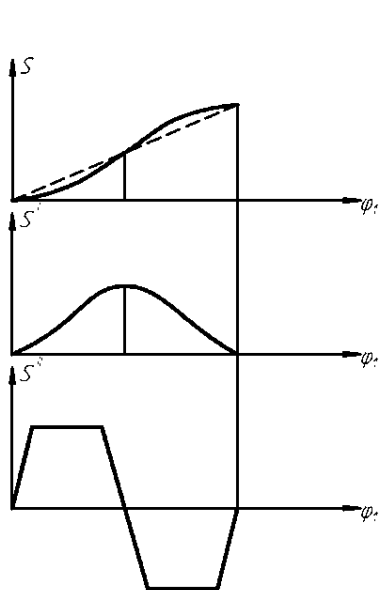


Рис. 5

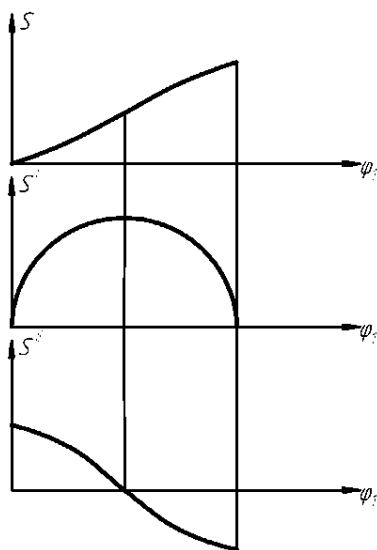


Рис. 6

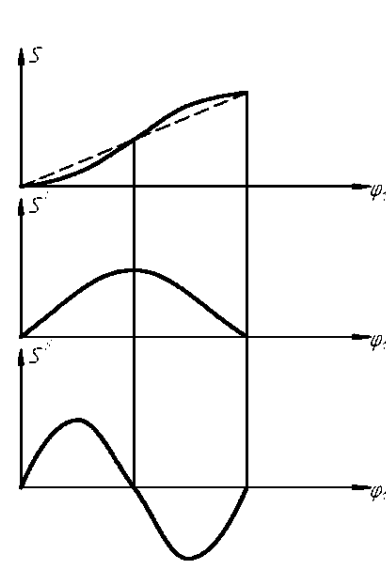


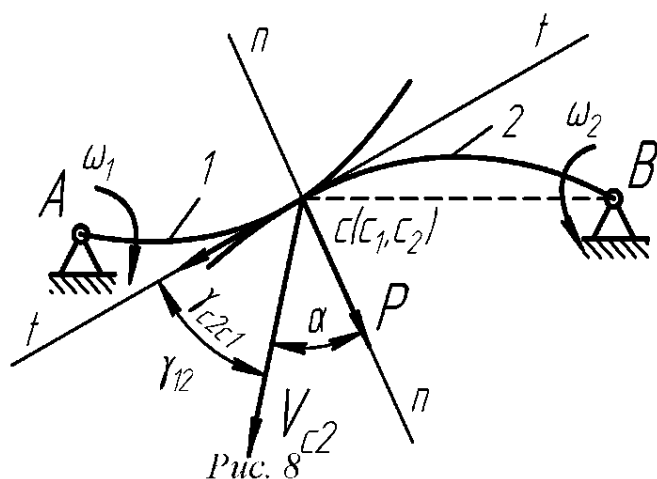
Рис.7

Удачным законом движения считается трапециидальный (рис. 2.51)

Значительное распространение получили диаграммы аналогов ускорения, изменяющихся по законам тригонометрических функций.

Ускорение, изменяющееся по косинусоидальному закону, вызывает мягкий удар (рис. 7) При синусоидальном законе ударов нет.

1.2. Угол передачи движения, его определение



Пусть звено 1 (Рис. 8) со звеном 2 образуют высшую кинематическую пару в точке касания С.

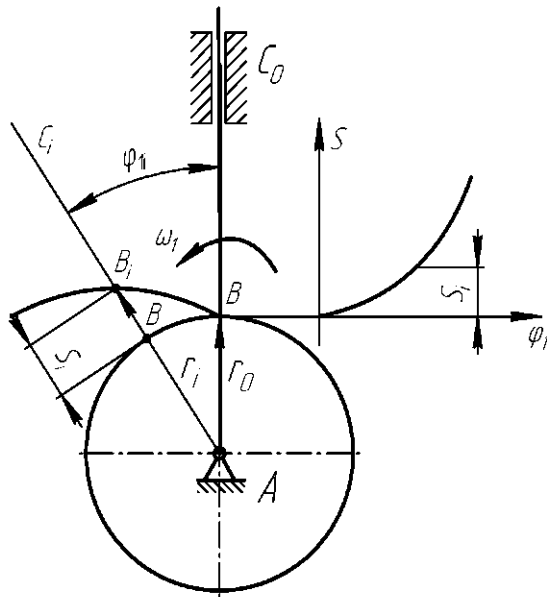
При этом на звено 2 действует сила Р направленная по нормали n-n (т.е. сила трения между звеньями не учитывается, в случае учета реакция отклонится на угол трения).

Тогда угол между нормалью n-n и направлением скорости V_{C2} называется углом движения, а угол,

касательную по углам α тах. Пересечение этой касательной с направлением OS движения толкателя определяет точку O – центр вращения кулачка.

Рис. 10

Если выбрать центр $O1$ правее указанной линии, то будет получен механизм с эксцентрично поставленным толкателем. В этом случае механизм получается несимметричным и поэтому без особой надобности применять не следует. Задачу об определении формы профиля кулачка решают методы обращения движения.



Применяя этот метод, надо условно остановить кулачок, а ведомое звено и стойку заставить двигаться с угловой скоростью, равной и противоположной направлению угловой скорости кулачка. На (рис. 11) представлена схема механизма с центрально поставленным толкателем. Пусть минимальный радиус кулачка уже определен и, как известно наинизшее положение толкателя.

Рис. 11

В обращенном движении кулачок неподвижен, а осевая линия $AC0$ вращается против движения часовой стрелки с угловой скоростью кулачка.

Кроме того, толкатель движется относительно направляющих по закону, заданному диаграммой $S=f(\varphi_1)$. В условном обращенном движении осевая линия поворачивается на угол φ_1 и переходит в положение AC_i ; точка B перемещается вдоль оси AC_i на величину S_i и оказывается в точке B_i . Величина радиуса – вектора r_i профиля кулачка в новом положении равна $r_i = r_0 + S_i$

Описанным способом можно найти искомый профиль кулачка.

2. Кинематика зубчатых передач

2.1. Передаточное отношение последовательного ряда колёс

(рис. 1.2)

Особенностью этого ряда является то, что каждое колесо имеет свою собственную ось вращения.

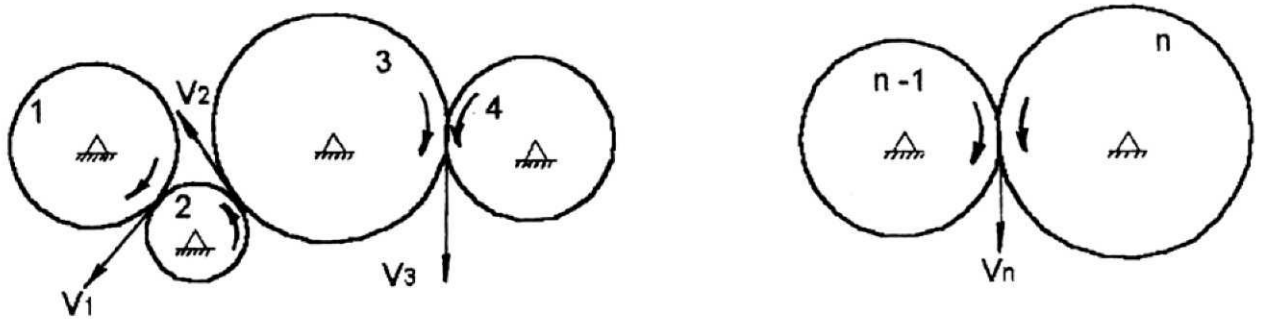


Рис. 12

$V_1 = V_n$ так как перекачивание происходит без скольжения.

$$r w_1 * \omega_1 = r w_n * \omega_n \quad \omega_1 / \omega_n = r w_n / r w_1 = z_n / z_1 \quad U_{1,n} = z_n / z_1 \quad U_{1,n} = \frac{z_n}{z_1} (-1)^m$$

где: m — число внешних зацеплений. Внутреннее зацепление не меняет направление вращения.

Этот ряд колёс служит для передачи вращения в случае, когда колёса расположены далеко друг от друга (большое межцентровое расстояние).

2.2. Передаточное отношение ступенчатого ряда колёс

(рис. 13)

Этот ряд отличается тем, что колёса на осях помещаются блоками, то есть

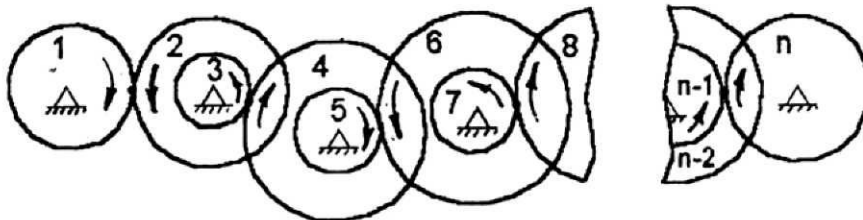


Рис. 13

на каждой оси закреплено по два колеса число колёс в этом ряду всегда четное. Применяя все выкладки как для последовательного ряда, можно сделать вывод, что передаточное отношение равно произведению передаточных отношений отдельных ступеней этого ряда.

$$U_{1n} = U_{1,2} * U_{3,4} * U_{5,6} \dots U_{(n-1)} * (-1)^m$$

Этот ряд применяется для получения большого передаточного отношения или для значительного увеличения (уменьшения) момента.

2.3. Передаточное отношение планетарных и дифференциальных механизмов

(рис. 14)

Звенья, вращающиеся вокруг неподвижной оси, называются основными или центральными.

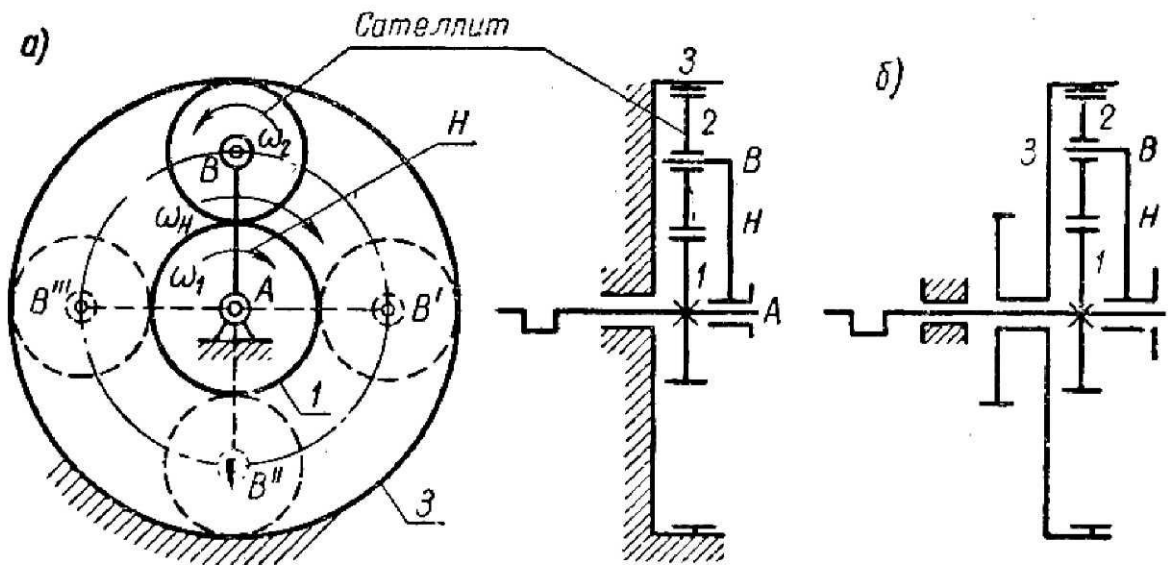


Рис. 14

Центральное колесо 1 называется солнечным, а неподвижное 3 - коронным или корончатым. Зубчатое колесо 2 имеющее подвижную ось называется сателлитом. Звено Н называется водилом или поводком. Механизмы, в состав которых входят зубчатые колеса с подвижными осями называются планетарными или дифференциальными.

Планетарными (рис. 14 а) называются механизмы, имеющие одну степень свободы. Дифференциальные (рис. 14 б) механизмы имеют две и более степени свободы.

Эти механизмы обязательно должны быть соосными, то есть оси солнечных колёс должны располагаться на одной и той же прямой линии.

Рассмотрим дифференциальный механизм (рис. 15).

$$W=3n-2P_5-P_4;$$

где: $n=4$; $P_5=4$; $P_4=2$.

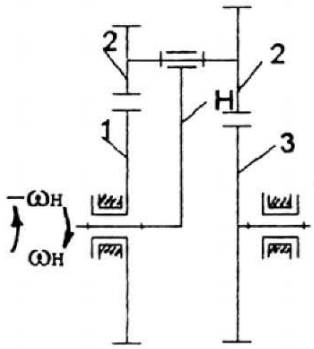
$W = 3*4-2*4-2=2$, таким образом определённость в движении звеньев этого механизма будет в том случае, если будут известны законы движения двух его ведущих звеньев.

Так как сателлиты имеют подвижные оси, то использовать формулы для расчёта передаточного отношения механизмов с неподвижными осями не представляется возможным. В этом случае прибегают к методу инверсии (метод обращённого движения).

Будем рассматривать движение всех колёс относительно водила. Всем звеньям зададим вращательное движение с угловой скоростью ω_H водила, но в обратном направлении ($-\omega_H$) и найдём скорости всех звеньев механизма. Для этого вычтем угловую скорость водила из всех угловых скоростей колёс.

Рис. 15

Таблица 2.



№ Звеньев	Скорость звена в действительном движении (до инверсии)	Скорость звена в обращённом движении (после инверсии)
Колесо 1	ω_1	$\omega_1^{(n)} = \omega_1 - \omega_H$
Колесо 2	ω_2	$\omega_2^{(n)} = \omega_2 - \omega_H$
Колесо 2'	ω_2	$\omega_2^{(n)} = \omega_2 - \omega_H$
Колесо 3	ω_3	$\omega_3^{(n)} = \omega_3 - \omega_H$
Звено Н	ω_H	$\omega_H^{(n)} = \omega_H - \omega_H$

Механизм, полученный в результате инверсии (остановки водила) называется обращённым (рис. 16). В результате получили обычную зубчатую передачу с неподвижными осями.

$$U_{1,3}^{(n)} = \frac{\omega_1^{(n)}}{\omega_3^{(n)}} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = \frac{n_1 - n_H}{n_3 - n_H} \quad (1)$$

Эту зависимость (1) называют формулой Виллиса для дифференциальных механизмов.

Если бы было n - колёс, то:

$$U_{ns}^{(n)} = \frac{\omega_n - \omega_H}{\omega_s - \omega_H} = \frac{n_n - n_H}{n_s - n_H}$$

где s – солнечное колесо.

Дифференциальный механизм никакого определённого передаточного отношения не имеет, если ведущим является одно из звеньев (колесо или водило), и приобретает определённость, если ведущих колёс будет два.

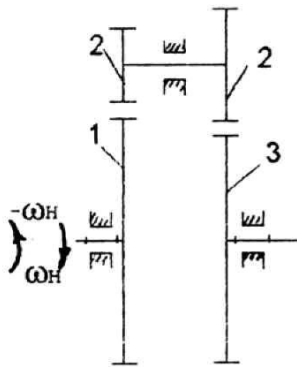


Рис. 16

Передаточное отношение $U_{1.3}^{(n)}$ обращённого механизма можно рассчитать, зная числа зубьев колёс.

$$U_{1.3}^{(n)} = U_{1.2}^{(n)} * U_{2.3}^{(n)} * (-1)^m = \frac{Z_2}{Z_1} * \frac{Z_3}{Z_2} * (-1)^m$$

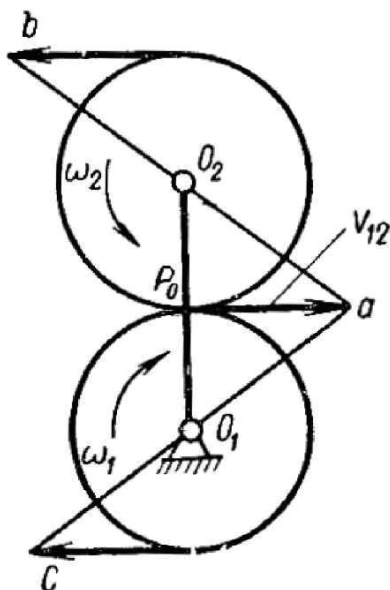
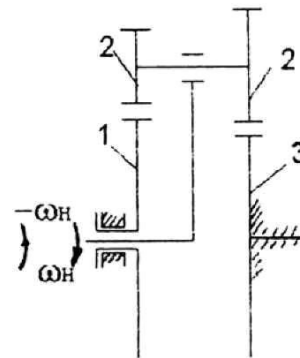
У планетарных механизмов (рис. 2.29) одно из центральных (основных) колёс неподвижно, тогда формула Виллиса примет вид:

$$U_{1.3}^{(n)} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = 1 - U_{1H}$$

$$U_{1H} = 1 - U_{1.3}^{(n)}$$

или в общем случае: $U_{mn} = 1 - U_{ns}^{(n)}$

Рис.17



Передаточное отношение планетарного механизма от любого n -го колеса равно 1 минус передаточное отношение от этого же самого колеса к солнечному колесу, при неподвижном водиле.

2.4. Графический метод кинематического исследования зубчатых механизмов.

Рассмотрим простую зубчатую передачу, состоящую из двух зубчатых колёс внешнего зацепления.

Скорость общей точки Р определим по формуле $V_{12} = \omega_1 * r_1$, (м\с),

где $r_1 = O_1P * \mu_1$ (м).

Из точки Р к прямой O_1O_2 построим отрезок Ра изображающий в масштабе μ_V скорость точки Р.

$$V_{12} = \overrightarrow{Pa} * \mu_V$$

$$\mu_V = \frac{V_{12}}{Pa} \quad (\text{м/с/мм})$$

точку а соединим с точкой O_1 , прямой линией. Продолжив эту линию до пересечения с прямой линией перпендикулярной к O_1O_2 , получим точку С. Прямая ас является планом линейных скоростей v_1 (тэтэ-линией) для точек первого колеса, т.е. геометрическим местом концов векторов скоростей точек этого колеса.

Треугольник O_1Pa - называется треугольником линейных скоростей для колеса 1.

Прямая aO_2 , является планом линейных скоростей v_2 для звена 2 (тэтэ-линией)

Определим угловую скорость 1 колеса

$$\omega_1 = \frac{V_{12}}{r_1} = \frac{Pa * \mu_V}{O_1P * \mu_1} = \frac{\mu_V}{\mu_1} * \text{tg } v_1 \quad (2)$$

$$\omega_2 = \frac{\mu_V}{\mu_1} * \text{tg } v_2$$

Аналогично из треугольника aPO_2 :

То есть, тангенсы углов наклона тэтэ-линий треугольников линейных скоростей пропорциональны угловым скоростям соответствующих колёс.

Следовательно, передаточное отношение будет равно:

$$U_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\text{tg } v_1}{\text{tg } v_2}$$

Если тэтэ-линии, т.е. углы v_1 , и v_2 откладываются в одну сторону от линий центров (по часовой стрелке или против неё), то передаточное отношение положительное (колёса вращаются в одну сторону).

В противном случае передаточное отношение отрицательное (колёса вращаются в разные стороны).

Построим картину угловых скоростей (рис. 18). Перпендикулярно к линии центров проведём прямую линию β - β .

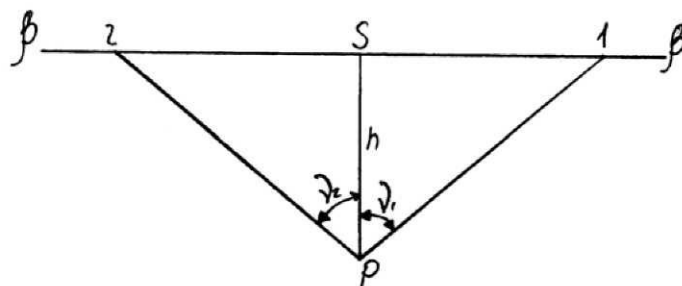


Рис. 18

Выберем на этой прямой произвольную точку S, проведём через неё параллель к линии центров и отложим вниз от точки S произвольный отрезок SP=h (мм). Из точки P, как из полюса, проведём лучи, параллельные тэта-линиям 1 и 2. Эти лучи пересекут прямую β-β в точках 1 и 2. Рассмотрим треугольник SP1:

$$\operatorname{tg} \nu_1 = \frac{S1}{h}$$

$$\omega_1 = S1 * \frac{\mu_V}{\mu_1 * h}$$

Подставив эту формулу в зависимость (2.40) получим:

Обозначив $\frac{\mu_V}{\mu_1 * h} = \mu_\omega$, получим $\omega_1 = S1 * \mu_\omega$

$$U_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{S1}{S2}$$

аналогично, $\omega_2 = S2 * \mu_\omega$, тогда передаточное отношение:

Таким образом, передаточное отношение - это отношение отрезков на картине угловых скоростей (или чисел оборотов в минуту). Допустим, что построенная картина выполнена в масштабе μп, т.е. является картиной чисел

оборотов в минуту, так как $\omega = \frac{\pi}{30}$, следовательно:

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= \overrightarrow{S1} * \mu_n \\ n_2 &= \overrightarrow{S2} * \mu_n \end{aligned} \right\}$$

$$\mu_n = \frac{30 * \mu_\omega}{\pi} = \frac{30 * \mu_V}{\pi * \mu_1 * h}$$

Рассмотрим кинематическое исследование на примере планетарного механизма (рис. 19).

Определим скорость 1 колеса:

$$V_a = \omega_1 * r_1,$$

Выбрав масштаб μв, откладываем отрезок P12 а. Если соединить точку а с точкой А, то получим тэта-линию колеса 1. Точка P23 третьего колеса неподвижна, т.е. VP23 = 0. Следовательно, и сателлит 2 в этой точке имеет скорость равную нулю. Таким образом, положение тэта-линии сателлита 2 определяется двумя точками а и P23. Точка В принадлежит и сателлиту и водилу, поэтому линейную скорость получим, спроектировав точку В на тэта-линию 2. Соединив, точки А и В получим тэта-линии водила Н.

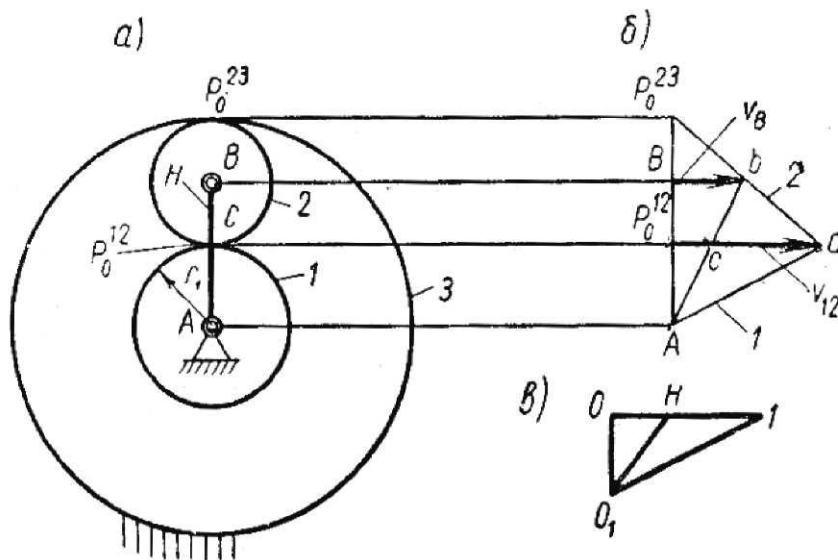
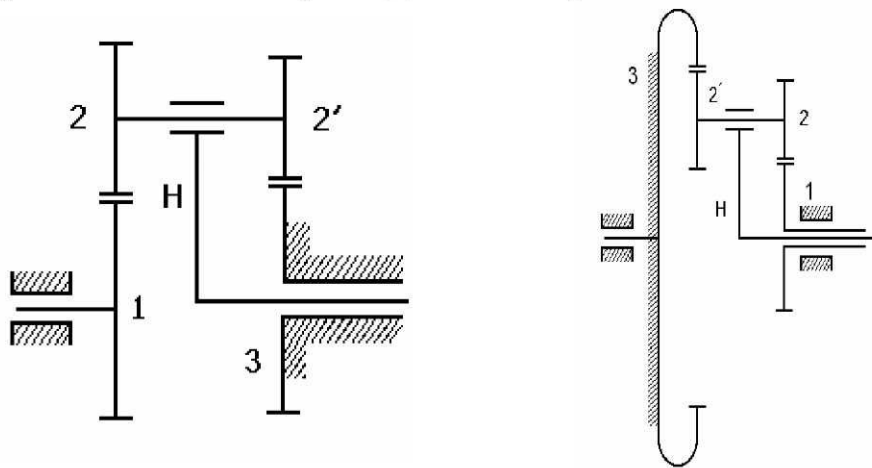


Рис. 19

2.5. Синтез планетарных механизмов

Синтез планетарных механизмов - это определение числа зубьев колёс механизма, исходя из заданного передаточного отношения.

Подбор чисел зубьев должен быть произведён так, чтобы удовлетворялись условия соосности, соседства и сборки.



а)
Рис. 20

б)

Условие соосности заключается в том, чтобы геометрические оси ведущего и ведомого валов совпадали. Для механизма образованного двумя внешними зацеплениями (рис. 20 а) межосевое расстояние определяется по формуле:

$$a = a_{12} = a_{2'3}$$

$$a = m_{12} * \frac{z_1 + z_2}{2} = m_{2'3} * \frac{z_{2'} + z_3}{2}$$

где m_{12} и $m_{2'3}$ модули зубчатых зацеплений пар колес 12 и 2'3 соответственно.

$$\frac{m_{12}}{m_{2'3}} = \lambda$$

Обозначим

$$\lambda(z_1 + z_2) = z_{2'} + z_3$$

Получим уравнения соосности :

Для механизма образованного двумя парами зубчатых колёс, одна - с внешним, а другая - с внутренним зацеплением (рис. 20 б) межосевое расстояние:

$$a_{12} = a_{2'3}, \quad \text{то есть} \quad m_{32'} * \frac{z_3 - z_{2'}}{2} = m_{12} * \frac{z_2 + z_1}{2}$$

Следовательно, условие соосности для этого случая: $\lambda(z_3 - z_{2'}) = z_2 + z_1$.

Условие соседства заключается в том, чтобы окружности вершин сателлитов

(рис. 21) не касались и не пересекались, то есть $a_{22'} > 2r_a$, r_a - радиус выступов сателлита.

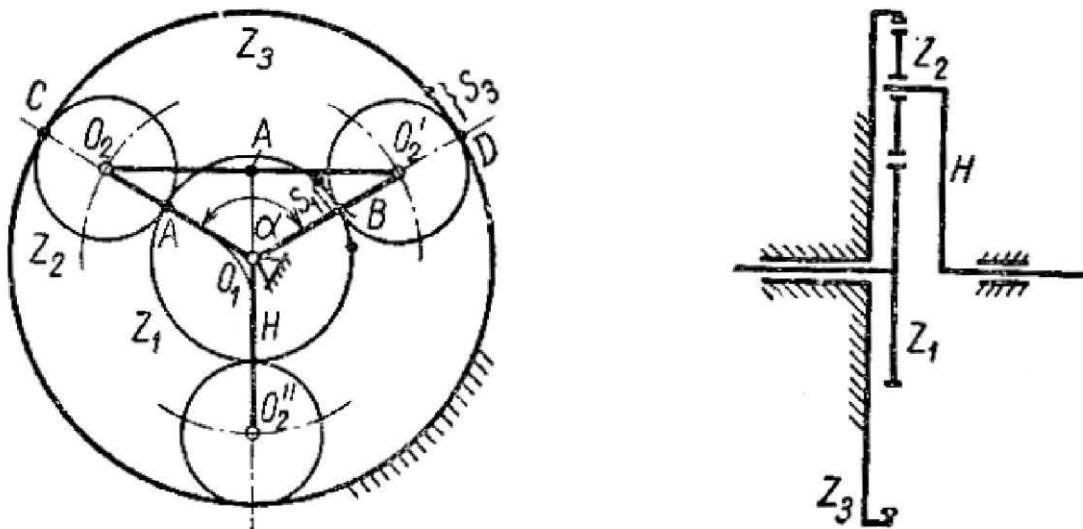


Рис. 21

Межосевое расстояние между сателлитами, не входящими в зацепление между собой:

$$2r_a = mz_2 + 2h = mz_2 + 2mf = m(z_2 + 2f),$$

где, f -коэффициент высоты головки зуба. $f=1$

$$a_{22'} = 2 * a_{12} * \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

где: $\beta = \frac{2\pi}{k}$; k -число сателлитов

После подстановки выражения межосевого расстояния пары зубчатых колёс 1 и 2

$$a_{12} = \frac{z_1 + z_2}{2} * m, \text{ получим}$$

$$a_{22'} = (z_1 + z_2) * m * \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = (z_1 + z_2) * m * \sin\left(\frac{\pi}{k}\right)$$

Следовательно, условие соседства можно записать:

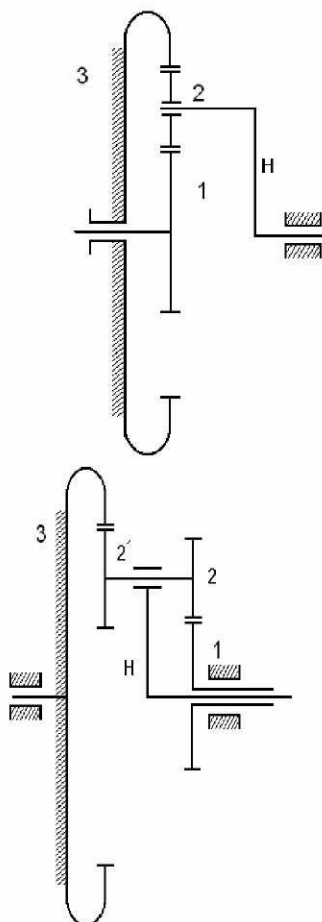
$$(z_1 + z_2) * m * \sin\left(\frac{\pi}{k}\right) > (z_2 + 2)$$

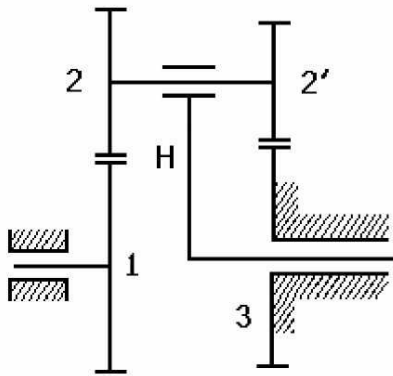
Условие сборки требует, чтобы зубья каждого сателлита вошли в зацепление с обоими центральными колёсами. Для планетарных механизмов условие сборки определяется по формулам, соответствующим типу механизма (рис. 22):

$$a) \frac{z_3}{k} + \frac{z_1 \cdot z_{2'}}{k \cdot z_2} = C$$

$$б) \frac{z_3}{k} - \frac{z_1 \cdot z_{2'}}{k \cdot z_2} = C$$

$$в) \frac{z_1 + z_3}{k} = C$$





а)

б)

в)

Рис. 22

3. Кинематический анализ рычажных механизмов

Задача кинематического исследования механизма состоит в определении:

1. Положений механизма в различные моменты времени.
2. Траекторий некоторых точек механизма.
3. Величин линейных и угловых скоростей всех точек механизма.

3.1. Построение положений механизма и траекторий его точек

Для изучения движения механизма необходимо знать его кинематическую схему и основные размеры.

Кинематической схемой называют его изображение в выбранном масштабе

$$\mu_l = \frac{l}{\bar{l}}$$

где l – истинная длина звена в метрах,

\bar{l} – изображение этого звена на чертеже в миллиметрах.

с применением условных обозначений звеньев и кинематических пар.

Схема позволяет определить движение ведомых звеньев по заданному движению ведущих.

Кинематические пары обозначают большими буквами латинского алфавита.

Звенья обозначают арабскими цифрами, начиная с кривошипа.

При проектировании механизма обычно бывают заданными схема механизма и условия, которые могут быть самого различного характера.

Проектирование начинается с выбора размеров звеньев наиболее полно удовлетворяющих поставленным условиям. Выбор размеров звеньев путем решения задачи с одним из условий называется синтезом механизма. Синтез

механизмов см. Кореняко "Курсовое проектирование по теории механизмов и машин".

Планом механизма называется графическое изображение в масштабе μ_l кинематической схемы механизма, соответствующее определенному положению главного звена.

При построении планов механизма сначала следует найти его крайние положения, соответствующие возвратному движению точек ведомого звена. В механизме четырёхтактного двигателя внутреннего сгорания (рис. 2.3) одно крайнее положение ведомого звена 3 (ползуна) находят, производя на направляющей X-X засечку дугой радиусом, равным длине кривошипа OA и шатуна AB (положение 0) из центра вращения кривошипа. Второе крайнее положение находим, производя засечку из центра вращения кривошипа радиусом, равным разности длин шатуна AB и кривошипа AO (положение 6). За начальное положение механизма удобно принять одно из крайних положений.

Если требуется построить 12 положений механизма, то окружность, описываемую точкой A кривошипа, начиная от начального положения, делят на 12 равных частей. Соответствующие положения остальных звеньев (2,3) находят путем засечек из точки B на направляющую механизма.

Соединяя между собой соответствующие точки в каждом из положений, получаем двенадцать планов механизма.

Построение траектории какой-либо точки механизма производят следующим образом:

В начерченных положениях механизма отмечают положения точки траектория, которой должна быть построена.

Найденные положения точки соединяют последовательно между собой плавной кривой (рис. 23) точка S.

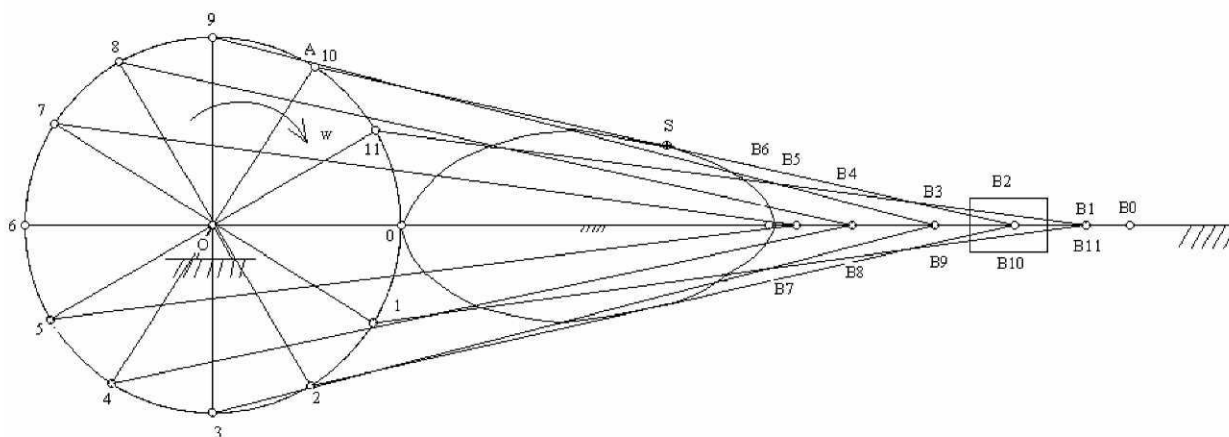


Рис. 23

3.2. Определения аналогов величин скоростей и ускорений

Аналог линейной скорости какой-либо точки M есть

$$\bar{V}_M = \frac{d\bar{r}_M}{d\varphi_1}$$

где \bar{r}_M – радиус-вектор, определяющий положение точки М на ее траектории,

φ_1 – обобщенная координата,

$d\varphi_1$ – элементарный угол поворота главного звена.

Аналог линейного ускорения точки М

$$\bar{A}_M = \frac{d\bar{V}_M}{d\varphi_1}$$

где \bar{V}_M – линейная скорость точки М.

Аналог угловой скорости

$$\Omega_K = \frac{d\varphi_K}{d\varphi_1}$$

где $d\varphi_K$ – элементарный угол поворота звена "К".

Аналог углового ускорения

$$E_K = \frac{d\Omega_K}{d\varphi_1}$$

3.3. Связь между аналогами и величинами скоростей и ускорений

Линейная скорость выразится через аналог скоростей так

$$v_M = V_M \cdot \omega$$

Линейное ускорение выразится через аналог скорости и ускорения

$$a_M = \omega_1^2 \cdot \left(A_M + \frac{\varepsilon_1}{\omega_1} \cdot V_M \right)$$

Угловая скорость выразится через аналог угловой скорости следующим образом

$$\omega_K = \Omega_K \cdot \omega$$

Угловое ускорение выразится через аналог угловой скорости и ускорения

$$\varepsilon_K = \omega_1^2 \cdot \left(\Omega_K \frac{\varepsilon_1}{\omega_1^2} + E_K \right)$$

Отношение элементарных углов поворотов двух звеньев называется передаточным отношением

$$\frac{d\varphi_K}{d\varphi_1} = \Omega_K = i_{K1}$$

3.4. Аналог скорости и ускорения главного звена

Аналог угловой скорости главного звена, т.е. $K=1$

$$\Omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt} = 1 = const$$

$$\varepsilon_1 = \frac{d\Omega}{dt} = 0$$

$$V_A = \frac{dr_A}{dt} = \text{т.к. } r_A = const, \text{ то } V_A = r_A = \overline{OA}$$

т.е. аналог линейной скорости точек главного звена равен расстоянию от точки вращения до МЦВ.

Аналог повернутой на 90° скорости точки М

$$\overline{U}_M = \overline{V}_M = \overline{MP}_1$$

(2.18)

где \overline{MP}_1 – расстояние от точки М до МЦВ.

3.5. Аналог относительной скорости двух точек М и N

$$\overline{U}_{MN} = \overline{U}_M - \overline{U}_N \quad (3)$$

Возьмем какое-либо звено MN (рис. 24), вращающееся вокруг полюса P.

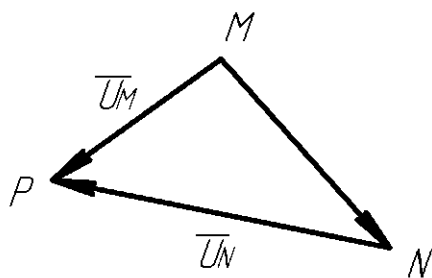


Рис. 24

Из (3) ясно, что аналог повернутой относительной скорости равен расстоянию между точками т.к. $\overline{U}_M = \overline{U}_N + \overline{U}_{MN}$

3.6. Аналог относительного ускорения точек звена

Полный аналог относительного ускорения

$$\overline{A}_{BC} = \overline{A}_{BC}^n + \overline{A}_{BC}^r$$

Аналог центростремительного (нормального) ускорения A_{BC}^n найдем по формуле

$$\overline{A}_{BC}^n = \Omega_1^2 \cdot BC = BC$$

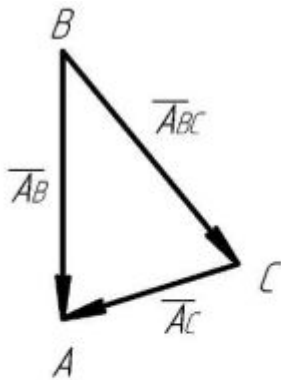


Рис. 25

и примем равным отрезку BC т.к. $\Omega = 1$

Аналог вращательного ускорения $\vec{A}_{BC}^r = E_1 \cdot BC = 0$ т.к. $\omega_1 = const$ тогда

$$\vec{A}_{BC} = \vec{BC}$$

т.е. аналог относительного ускорения двух точек главного звена равен расстоянию между этими точками.

В то же время $\vec{A}_{BC} = \vec{A}_B - \vec{A}_C$ отсюда

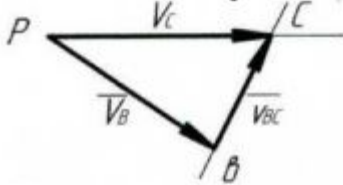
$$\vec{A}_B = \vec{A}_{BC} - \vec{A}_C$$

следовательно аналоги абсолютных ускорений точек B и C сходятся в т. A, которая называется полюсом поворота (рис. 25).

Если известен полюс поворота, то аналог ускорения любой точки находят как расстояние от этой точки до полюса поворота.

3.7. Построение полярных планов аналогов скоростей

Полярным планом скоростей механизма называется совокупность векторов линейных скоростей, отложенных из одной точки, называемой полюсом.



Рассмотрим построение полярного плана аналогов скоростей для кривошипно-ползунного механизма, (рис. 26).

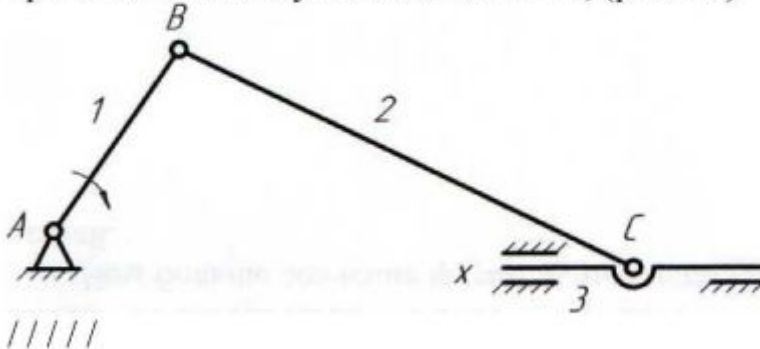


Рис. 26

Из полюса Р – точки произвольно выбранной на чертеже, откладываем аналог скорости точки В. Направление этого вектора перпендикулярно кривошипу, длина его равна длине кривошипа.

Для нахождения аналога скорости точки С напишем два векторных уравнения.

$$\begin{cases} \vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{V}_{CB} \\ \vec{V}_C \parallel X-X \end{cases}$$

В этих уравнениях вектор \vec{V}_B уже известен аналог относительной скорости точки С вокруг В следует направить перпендикулярно радиусу вращения ВС. Решив совместно эти два уравнения получаем на полярном плане аналог скорости точки С – \vec{V}_C .

Решение этих уравнений производится в такой последовательности:

Из конца вектора \vec{V}_B проводим прямую перпендикулярную отрезку ВС на механизме.

Из полюса Р проводим прямую параллельную направляющей х–х ползуна С. Пересечение указанных прямых линий определяет конец аналога скорости точки С.

Отрезок, соединяющий буквы плана скоростей (bc) изображает аналог относительной скорости.

Величина скорости точек В и С:

$$v_B = V_B \cdot \omega_1 = Pb \cdot \mu_l \cdot \omega_1$$

$$v_C = V_C \cdot \omega_1 = PC \cdot \mu_l \cdot \omega_1$$

Итак, план скоростей является планом скоростей в масштабе

$$\mu_v = \omega_1 \cdot \mu_l$$

Рассмотрим построение полярного плана аналогов скоростей для кулисного механизма, (рис. 27).

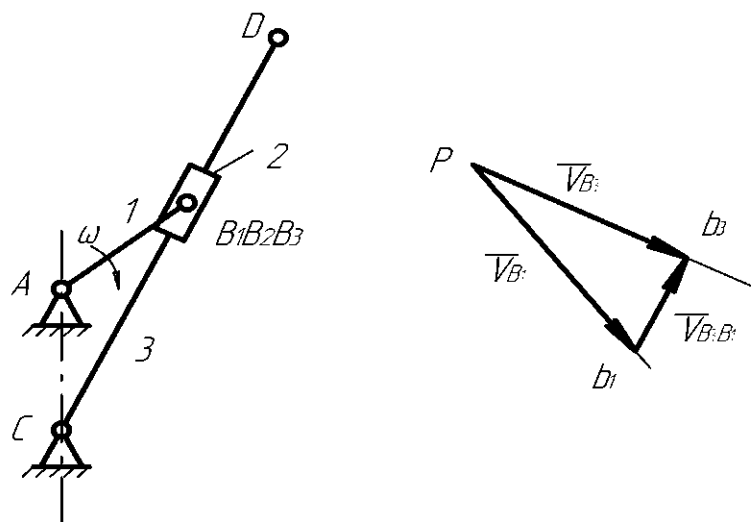


Рис. 27

Вектор аналога скорости V_1 , принадлежащей кривошипу направлена перпендикулярно кривошипу. Из произвольного выбранного полюса P откладываем этот вектор Pv_1 в размере равном длине кривошипа.

Векторы аналогов скоростей точек V_1 и V_2 равны, т.к. объединены вращательной кинематической парой, т.е. $\overline{V_{B_2}} = \overline{V_{B_1}}$.

Для нахождения вектора скорости точки V_3 , принадлежащей кулисе, запишем систему векторных уравнений

$$\begin{cases} \overline{V_{B_3}} = \overline{V_{B_1}} + \overline{V_{B_3B_1}} \\ \overline{V_{B_3}} \perp CD \end{cases}$$

В этих уравнениях вектор $\overline{V_{B_3B_1}}$ - это релятивная (относительная скорость) точки V_3 относительно V_2 . Направлена эта скорость по кулисе, решив совместно эти два уравнения получаем точку " b_3 ", $\overline{Pb_3}$ - вектор аналога скорости точки V_3 .

Аналог скорости точки D найдется из пропорции

$$\frac{\overline{Pd}}{\overline{pb_3}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CB}}$$

Аналог угловой скорости кулисы $\overline{\Omega_3}$ найдем из выражения, тогда $\overline{\Omega_3} = \frac{\overline{Pb_3}}{\overline{BC}}$
 Угловая скорость кулисы определится по формулам

$$\omega_3 = \overline{\Omega_3} \cdot \omega_1 = \frac{\overline{V_{B_3}}}{\overline{BC}} \cdot \omega_1 = \frac{\overline{Pb_3}}{\overline{BC}} \cdot \omega_1$$

Истинная скорость точек механизма найдем через аналог скоростей, как $v_{B_3} = V_{B_3} \cdot \omega_1 = V_{e_3} \cdot \mu_l \cdot \omega_1$ и т.д.

3.8. Построение планов аналогов скоростей методом эюр

Рассмотрим определение скоростей подобным методом в четырехзвеннике ABCDE, (рис. 28).

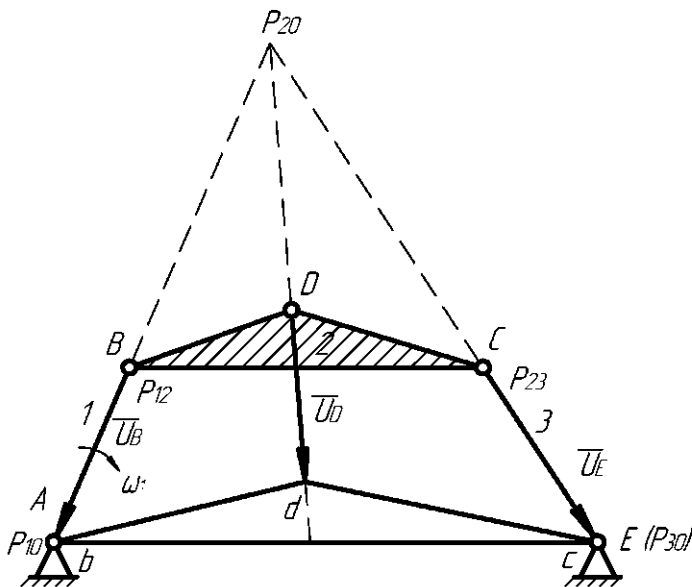


Рис. 28

На схеме механизма, вычерченной в масштабе μ_l , отмечаем МЦОВ (P_{10} , P_{20} , P_{30}). Затем откладываем вектор аналога повернутой скорости точки В первого звена так, чтобы $\overline{UB} = \overline{AB}$. Аналог скорости точки В первого звена равен аналогу скорости точки В второго звена, имея вектор \overline{UB} переходим к нахождению аналога скорости точки С второго звена. Направление повернутой скорости \overline{UC} совпадает с линией, соединяющей точку С с МЦОВ (P_{20}) этого звена. Начало вектора в самой точке С, конец на эюре $ec \parallel BC$. Вектор аналога повернутой скорости точки D совпадает по направлению с линией, соединяющей эту точку с P_{20} . Начало вектора лежит в точке D, конец на эюре $ed \parallel BD$.

Итак \overline{AB} - изображение аналога скорости \overline{UB}

Скорость точек В, С, и D определяется как

$$\overline{v_B} = \overline{UB} \cdot \mu_l \cdot \omega_1$$

$$\overline{v_D} = \overline{UD} \cdot \mu_l \cdot \omega_1$$

$$\overline{v_C} = \overline{UC} \cdot \mu_l \cdot \omega_1$$

Аналог угловой скорости найдем из выражения

$$\overline{\Omega_2} = 1 - f = 1 - \frac{\overline{db}}{\overline{AB}}$$

$$\overline{\Omega_3} = \frac{\overline{UC}}{\overline{CE}}$$

Рассмотрим пример построения плана аналогов скоростей методом эюр для кулисного механизма, (рис.29)

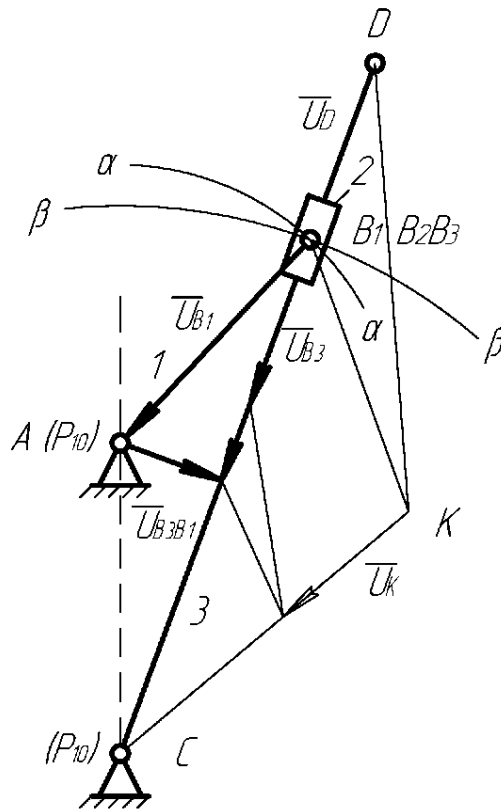


Рис. 29

Кривошип АВ совершает вращательное движение вокруг неподвижной оси А.

Кулиса 3 совершает колебательное движение вокруг центра С.

Наносим МЦВ всех звеньев (P10 P30). Точка В2 ползуна совершает вращательное движение вместе с точкой кривошипа В1 поэтому $\bar{U}_{B1} = \bar{U}_{B2}$. Направление аналога повернутой скорости точек В1 и В2 совпадает с направлением кривошипа, начало вектора – в точке В, конец – в МЦОВ – P10.

Скорость точек В3 и В1 разные, т.к. траектории их разные.

Точка В1 перемещается по траектории $\alpha - \alpha$, точка В3 – по траектории $\beta - \beta$.

Эти скорости связаны следующим соотношением:

$$\bar{U}_{B3} = \bar{U}_{B1} + \bar{U}_{B3B1}$$

Где \bar{U}_{B3B1} - вектор относительной повернутой аналога скорости точек В3 относительно В1 на плане этот вектор необходимо направить перпендикулярно направляющей кулисы.

И в то же время абсолютная скорость точки В3, вращающейся вокруг неподвижного центра P30, направлена $\parallel CD$, т.е. радиусу вращения.

Тогда аналог повернутой скорости

$$\bar{U}_{B3} \parallel CD$$

Решая совместно эти два уравнения, находим конец вектора \bar{U}_{B3} .

Аналог повернутой скорости точки D находим с помощью вспомогательной точки К, произвольно отмеченной и принадлежащей звену 3. Вектор

повернутой скорости этой точки направлен по линии проходящей через МЦОВ звена 3 и саму точку К. Начало вектора – в точке К, конец – на эмпуре $^{вк} \parallel BK$. Далее соединим точку К с точкой D. Вектор аналога повернутой скорости точки D направлен по звену 3, начало – в точке D, конец на эмпуре $^{dk} \parallel DK$. Таким же способом можно найти вектор повернутой скорости центра тяжести звена 3.

Скорость точек определяют как

$$v = \bar{U} \cdot \mu_l \cdot \omega$$

Аналог угловых скоростей определяем

$$\Omega_1 = \frac{\bar{U}_{B1}}{AB} = 1$$

$$\Omega_3 = \frac{\bar{U}_{B3}}{B_3C}$$

3.9. Определение аналогов ускорений в механизме

Рассмотрим построение плана аналогов ускорений для кривошипно-ползунного механизма, (рис. 30)

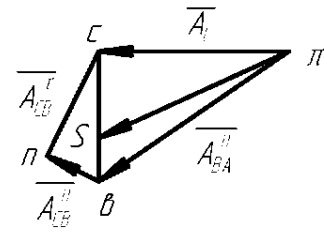
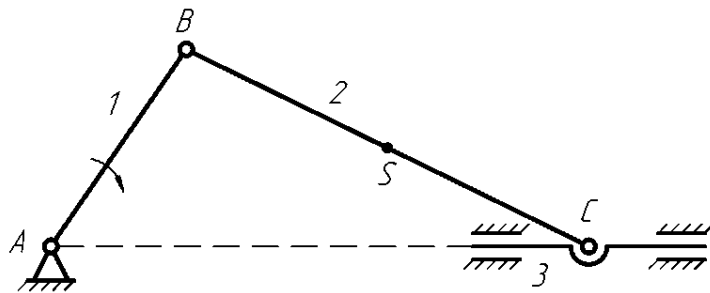


Рис. 30

Определяем сначала аналоги угловых скорости звеньев. Они могут быть определены с помощью МЦВ звена, либо с помощью построения полярного плана аналогов скоростей.

$$\Omega_2 = \frac{\bar{V}_{CB}}{CB}$$

Затем строим план аналогов ускорений в такой последовательности:

От произвольно выбранного полюса откладываем вектор

центростремительного ускорения точки В A_{BA}^n в размере кривошипа АВ в направлении от В к А.

Для определения вектора аналога абсолютного ускорения точки С решаем совместно 2 векторных уравнений

$$\begin{cases} \bar{A}_C = \bar{A}_B + \bar{A}_{CB}^n + \bar{A}_{CB}^r \\ \bar{A}_C \parallel X - X \end{cases} \quad (2.25)$$

Здесь вектор аналога центростремительного относительного ускорения $\overline{A_{CB}^n} = \Omega_2^2 \cdot \overline{CB}$ и направление его совпадает с направлением СВ от С к В (центру вращения звена). Конец вектора обозначаем "п". Из п проводим вектор аналога тангенциального ускорения до пересечения с направлением вектора аналога абсолютного ускорения $\overline{A_c} \parallel X-X'$. Точка пересечения этих двух направлений и даст нам конец вектора аналога абсолютного ускорения точки С ($\overline{A_c}$).

Величина аналога ускорения определится так

$$A_B = \overline{A_B} \cdot \mu_l$$

$$A_C = \overline{A_C} \cdot \mu_l$$

Величина ускорения определится так

$$a_a = A_a \cdot \omega_1^2 = \overline{A_a} \cdot \mu_l \cdot \omega_1^2$$

$$a_c = A_c \cdot \omega_1^2 = \overline{A_c} \cdot \mu_l \cdot \omega_1^2$$

Вектор аналога ускорений точки S2 определится построением точки S2 на плане аналогов ускорений.

Аналоги угловых ускорений звеньев определяются из равенств

$$\overline{E_2} = \frac{\overline{A_{CB}^a}}{\overline{CB}} = \frac{nc}{\overline{CB}}$$

Угловое ускорение звена определится как

$$\varepsilon_2 = \overline{E_2} \cdot \omega_1^2$$

Рассмотрим построение плана ускорений для кулисного механизма, (рис. 31)

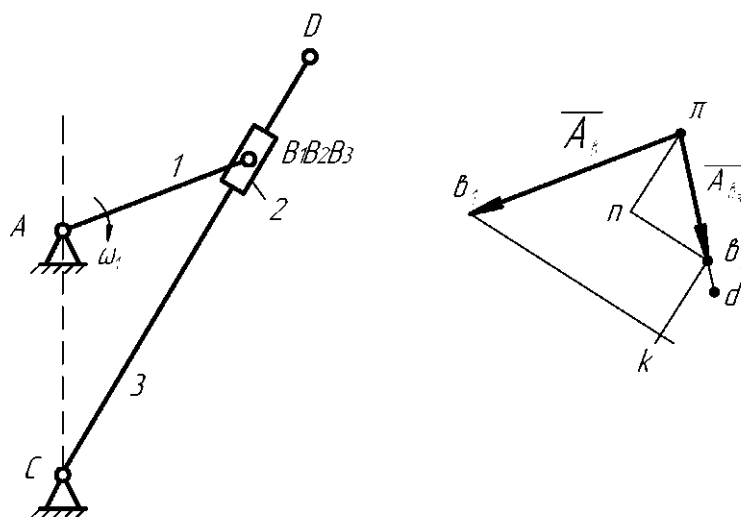


Рис. 31

Порядок построения плана:

Из полюса π откладываем вектор аналога центростремительного ускорения точку В1, направление которого совпадает с направлением кривошипа, а длина равна радиусу кривошипа

$$\overline{A}_{B_1} = \overline{A}_{B_1A} = \overline{\pi B_1}$$

Аналог ускорение точки В2 ползуна равен ускорению точки В1, т.к. они соединены вращательной парой.

Ускорение точки В3, принадлежащей кулисе находим, решив совместно два векторных уравнения

$$\overline{A}_{B_3} = \overline{A}_{B_2} + \overline{A}_{B_3B_2}^k + \overline{A}_{B_3B_2}^r$$

$$\overline{A}_{B_3} = \overline{A}_{B_3C}^n + \overline{A}_{B_3C}^r$$

где, $\overline{A}_{B_3B_2}^k$ - изображение на чертеже аналога кориолисова ускорения.

Аналог кориолисова ускорения находится по формуле

$$\overline{A}_{B_3B_2}^k = 2 \cdot \Omega_3 \cdot \overline{V}_{B_3B_2} = 2 \cdot \frac{p\theta_3}{CB} \cdot \theta_3 \theta_1$$

Вектор кориолисова ускорения всегда перпендикулярен кулисе и направлен в ту же сторону, что и аналог повернутой относительной скорости $\overline{U}_{B_3B_2}$,

если $\Omega_k < 0$. Если $\Omega_k > 0$ (то есть вектор \overline{U}_{B_3} направлен от центра вращения),

то кориолисово ускорение направлено в сторону противоположную $\overline{U}_{B_3B_2}$.

Если пользоваться полярным планом аналогов скоростей, то для нахождения

направления $\overline{A}_{B_3B_2}^k$ нужно аналог относительной скорости $\overline{V}_{B_3B_2}$ повернуть на 90° в сторону вращения кулисы.

$\overline{A}_{B_3B_2}^r$ - изображение аналога релятивного ускорения, направленного по кулисе.

Из конца вектора \overline{A}_{B_1} проводим вектор $\overline{A}_{B_3B_2}^k$. Из конца последнего проводим прямую линию, параллельную кулисе. Эта прямая определяет

геометрическое место релятивного ускорения $\overline{A}_{B_3B_2}^r$.

В соответствии со вторым векторным уравнением из полюса π откладываем вектор аналога центростремительного ускорения точки В3 относительно С, причем

$$A_{B_3C}^n = \Omega_3^2 \cdot \overline{CB} = \left(\frac{p\theta_3}{CB} \right)^2 \cdot \overline{CB}$$

и совпадает с кулисой, то есть $\overline{\pi m} \parallel BC$. Затем из конца вектора $\overline{\pi m}$ проводим прямую линию перпендикулярно кулисе, эта прямая является направлением

аналога вращательного ускорения $A_{B_3C}^n$.

Точку пересечения последней линии с направлением релятивного ускорения обозначим " θ_3 ". Таким образом, отрезки

$$\begin{aligned} \overline{\pi\omega_3} &= \overline{A_{B_3}} & \overline{\pi\omega_1} &= \overline{A_{a_1}} \\ \overline{\pi\omega_3} &= \overline{A_{B_3C}^n} & \overline{\pi\omega_1} &= \overline{A_{B_3C}^n} \\ \overline{\omega_1\kappa} &= \overline{A_{B_3B_1}^k} & \overline{\kappa\omega_3} &= \overline{A_{B_3B_1}^r} \end{aligned}$$

Аналоги ускорения найдутся следующим образом

$$\begin{aligned} A_{B_3} &= \overline{A_{B_3}} \cdot \mu_l \\ A_{B_1} &= \overline{A_{B_1}} \cdot \mu_l \quad \text{и т.д.} \end{aligned}$$

Величина ускорений найдется так

$$\begin{aligned} a\omega_3 &= A_{B_3} \cdot \omega_3^2 \\ a\omega_1 &= A_{B_1} \cdot \omega_1^2 \quad \text{и т.д.} \end{aligned}$$

Аналог углового ускорения кулисы

$$E_3 = \frac{\overline{A_{B_3C}^e}}{\overline{B_3C}} = \frac{\overline{n\omega_3}}{\overline{B_3C}}$$

величина углового ускорения равна

$$\varepsilon_3 = \omega_1^2 \cdot \overline{E_3}$$

3.10. Определение скоростей и ускорений методом построения кинематических диаграмм

Кинематической диаграммой принято называть зависимость какого-либо параметра движения звена от времени или параметра перемещения ведущего звена, представляемую графически кривой в прямоугольной системе координат.

Наивысший интерес представляют графики перемещения S , скорости V , ускорений W ведомых звеньев. В качестве параметра перемещения S ведущего звена могут быть выбраны, либо угол поворота φ , либо одна из координат принадлежащей ему точки. Эти параметры связаны с параметром времени.

Как известно, функции S, V и W движения какой-либо точки могут быть определены при помощи дифференцирования или интегрирования.

Построение диаграммы перемещения.

Строим 12 положений.(см.рис. 23)

За начало отсчета принимаем положение поршня Bo .

Затем, выбрав систему координат sb, t по оси абсцисс откладываем отрезок L (мм) соответствующий времени T одного оборота кривошипа.

Откладываем $Y_1 = kBoB_1$; $Y_2 = kBoB_2$ и т.д., где BoB_1 ; BoB_2 и т.д. отрезки, отражающие перемещения $t.B$ на планах механизма.

k -коэффициент кратности ординат графика $S_b = S_b(t)$ и отрезков изображающих перемещения BoB_1, BoB_2 $t.B$ на планах механизма.

Между масштабом плана механизма и масштабом ординат диаграммы перемещений существует зависимость:

$$\mu_s = \frac{1}{k} \mu_l$$

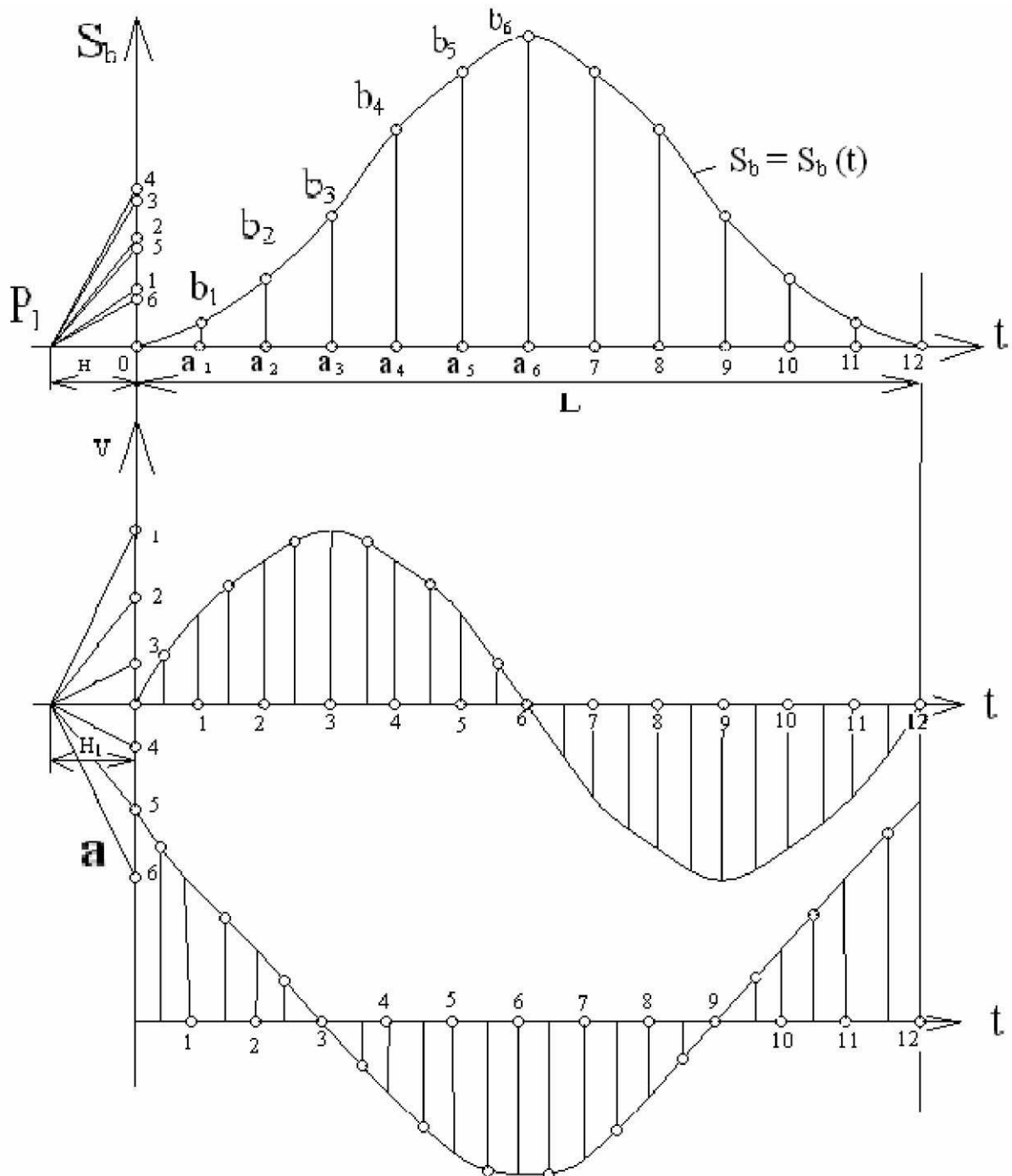


Рис.32
Масштаб времени, откладываемого по оси абсцисс:

$$\mu t = \frac{T}{L} \quad (\text{сек./мин.})$$

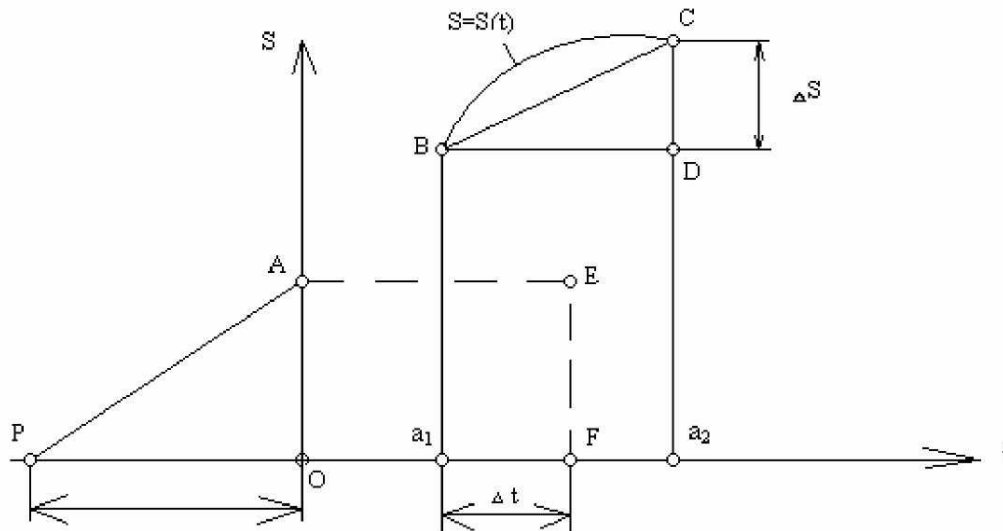
где T - время одного оборота ведущего звена в секундах.

Если число оборотов кривошипа $=n$ (об/мин), то

$$\frac{T}{n} = \frac{60}{n} \quad (\text{сек}), \quad \text{при этом} \quad \mu = \frac{60}{nT} \quad (\text{сек./мин.})$$

Аналогично строится график угловых перемещений звена совершающее вращательное движение. В этом случае по оси ординат откладываются отрезки пропорциональные величинам угловых перемещений.

Построение графиков скорости и ускорения по графику перемещения.



Построение графиков $V=V(t)$ и $a=a(t)$ по графику $S=S(t)$ осуществляется методом графического дифференцирования, сущность которого заключается в следующем.

Пусть есть перемещение некоторой точки за малый промежуток времени. Проведем секущую BC , а из полюса P , выбранного произвольно на расстоянии H от начала координат луч, параллельный BC . Из подобия PAO и $ВОД$ следует:

$$\frac{\overline{OA}}{H} = \frac{\overline{CD}}{D} \implies \overline{OA} = \frac{H \cdot \overline{CD}}{D} \quad *H$$

Действительное значение перемещения за время отображается отрезком:

$$\overline{CD} = \frac{\Delta S}{\mu s}$$

отрезок оси абсцисс $\overline{BD} = \frac{\overline{\Delta t}}{\mu t}$ -отображает длительность интервала времени в масштабе.

Подставив эти значения \overline{CD} и \overline{BD} в равенство найдем:

$$\overline{OA} = \frac{\overline{\Delta S}}{\Delta t} * \frac{\mu}{\mu s} * H \quad (4)$$

отношение представляет среднее значение скорости движения точки на пути длиной ΔS , то следует:

$$V_{cp} = \frac{\overline{OA}}{H} = \frac{\mu s}{\mu t * H} \quad (2.30)$$

Если принять масштаб скорости $V = \frac{\mu s}{\mu t * H}$

то из равенства (4) отрезок \overline{OA} отображает величину средней скорости движения точки.

Допуская некоторую погрешность, считают, что это среднее значение скорости соответствует среднему мгновению промежутка t , т.е. точке F . При изложенном способе дуга BC заменилась хордой BC . Допустима также замена дуги соответствующим отрезком касательной. В обоих случаях результаты получаются с погрешностью.

(Рассмотрим на примере рис. 32)

График ускорения строится аналогично, путем дифференцирования графика V . При этом новое полюсное расстояние $H1 \neq H$

Определение масштаба графика a получаем, заменив величину $\mu s \rightarrow \mu V$ а вместо $H \rightarrow H1$

$$\mu a = \frac{\mu V}{\mu t * H1}$$

Вследствие двукратного дифференцирования, диаграммы a могут получиться со значительными искажениями.

3.11. Кинематическое исследование рычажных механизмов аналитическим методом

Аналитическое исследование дает возможность получить зависимости кинематических параметров механизма и, следовательно, достичь более точных результатов, чем при графическом методе. В настоящее время этот метод получает все большее распространение благодаря внедрению в практику ЭВМ.

Аналогии скоростей и ускорений, при кинематическом исследовании механизмов, скорости и ускорения ведомых звеньев и точек, удобно выражать в функции поворота φ или перемещения S ведущего звена.

Функцией положения ведомого звена называется зависимость его перемещения от перемещения ведущего звена. Вид функции положения зависит от схемы механизма, а значения постоянных, которые входят в нее - от размерных параметров механизма. Для того чтобы составить функцию положения механизма, следует рассмотреть фигуру, которую образуют оси его звеньев. Из геометрических свойств этой фигуры находят искомую зависимость.

Аналогом скорости точки называется первая производная радиуса - вектора точки по обобщенной координате.

Аналогом ускорением точки называется вторая производная радиуса - вектора точки по обобщенной координате механизма.

Кинематическое исследование проведем на примере кривошипно-ползунного механизма (рис 33).

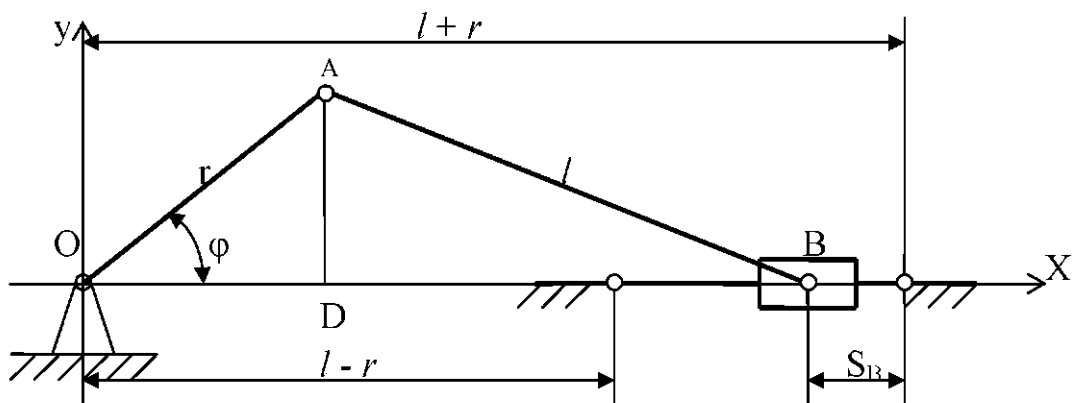


Рис. 33

Пусть заданы размеры центрального кривошипно-ползунного механизма $L_{oa}=r$; $L_{ab}=l$; и угловая скорость $\omega l = \text{const}$.

Независимым параметром является угол поворота $\varphi = \omega l t$

Выведем формулы для определения скорости V_b , и ускорения a_b ползуна.

Перемещение т.В.

За время поворота кривошипа на угол φ перемещение т.В будет:

$$S_B = OB_o - OB = (r + l) - (r \cos \varphi + l \cos \beta)$$

или
$$S_B = r(1 - \cos \varphi) + l(1 - \cos \beta) \quad (3)$$

по теореме синусов можно написать: $AD = r \sin \varphi = l \sin \beta$

откуда $\frac{r}{l} = \frac{\sin \beta}{\sin \varphi}$; $\frac{r}{l} = \lambda$ - коэффициент шатуна

$$\sin \beta = \frac{r}{l} \sin \varphi = \lambda \sin \varphi, \text{ а}$$

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l} \sin \varphi\right)^2} = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi} = (1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}$$

Разложим двучлен в ряд по формуле Бинома Ньютона

$$\cos \beta = (1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \sin^2 \varphi - \frac{1}{8} \lambda^4 \sin^4 \varphi - \dots$$

$$\cos \beta = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{l} \sin \varphi\right)^2$$

тогда

Пренебрегаем всеми членами, начиная с третьего в виду их малости.

Подставляем значение $\cos \beta$ в формулу для перемещения S , получим:

$$S_B = r(1 - \cos \varphi) + \frac{r^2}{2l} \sin^2 \varphi = r \left[1 - \cos \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin^2 \varphi \right]$$

Последовательно дифференцируя получим скорость т.В

$$V_B = \frac{dS}{dt} = \frac{dS}{d\varphi} * \frac{d\varphi}{dt} = \omega_1 r \left[\sin \varphi + \frac{\lambda}{2} 2 \sin \varphi \cos \varphi \right] = \omega_1 r \left[\sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi \right]$$

Ускорение т. В

$$a_B = \frac{dV_B}{dt} = \frac{dV_B}{d\varphi} * \frac{d\varphi}{dt} = r \omega_1^2 [\cos \varphi + \lambda \cos 2\varphi]$$

Формулы для шатуна

$$\omega_2 = \frac{d\beta}{dt}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{d^2\gamma}{dt^2}$$