

ОПД.Ф.02.03 ТЕОРИЯ МАШИН И МЕХАНИЗМОВ

Учебное пособие

Изложены общие методы анализа и синтеза механизмов, способы определения кинематических и динамических характеристик механизмов и машин, теоретические сведения и примеры проведения структурного, кинематического, силового и динамического анализа различных типов механизмов и машин.

Приведены сведения о структурном анализе механизмов, освещены цели, задачи и методы кинематического, силового и динамического анализа механизмов и машин. Рассмотрены основные типы механизмов: рычажные, зубчатые, кулачковые и другие. При изложении учебного материала использованы графический, графоаналитический и аналитический методы анализа.

Учебное пособие предназначено для студентов технических специальностей вузов при изучении дисциплин «Теория механизмов и машин» и «Прикладная механика».

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	5
1. Структура и классификация механизмов	9
1.1. Структура механизмов.....	9
1.2. Классификация механизмов.....	12
1.3. Структурные группы для плоских рычажных механизмов.....	12
2. Кинематический анализ механизмов	17
2.1. Цели и задачи кинематического анализа.....	17
2.2. Графический метод кинематического анализа.....	17
2.3. Графоаналитический метод кинематического анализа.....	21
2.4. Планы скоростей и ускорений шарнирного четырехзвенника.....	21
2.5. Планы скоростей и ускорений кривошипно-ползунного механизма.....	27
2.6. Планы скоростей и ускорений кулисного механизма.....	30
2.7. Аналитический метод кинематического анализа.....	33
2.7.1. Общие сведения о методе.....	33
2.7.2. Функция положения. Аналог скорости. Аналог ускорения.....	34
2.7.3. Аналитическое исследование кривошипно-ползунного механизма.....	36
3. Силовой анализ механизмов	39
3.1. Общие сведения и определения. Силы, действующие в механизмах.....	39
3.2. Статическая определимость кинематической цепи.....	41
3.3. Силовой анализ характерных структурных групп.....	43
3.3.1. Структурная группа 2-го класса, 1-го вида.....	43
3.3.2. Структурная группа 2-го класса, 2-го вида.....	45
3.3.3. Структурная группа 2-го класса, 3-го вида.....	46
3.3.4. Силовой анализ ведущего звена.....	46
3.4. Теорема о «жестком» рычаге Жуковского.....	47
3.5. Силовой анализ механизма с учетом сил трения.....	49
3.5.1. Теоретические основы определения коэффициента трения.....	49
3.5.2. Пример учета сил трения при силовом анализе механизма.....	52
4. Динамика машин	53
4.1. Общие положения.....	53
4.2. Кинетическая энергия, приведенная масса, приведенный момент инерции механизма.....	55
4.3. Уравнение движения машины в форме кинетической энергии.....	57
4.4. Уравнение движения машины в дифференциальной форме.....	59
4.5. Режимы движения машины.....	60
4.6. Механический КПД механизма.....	60
4.7. Неравномерность хода ведущего звена машины.....	63
4.8. Регулирование периодических колебаний угловой скорости с помощью маховика.....	64
5. Зубчатые передачи	66
5.1. Общие положения.....	66

5.2. Передаточное отношение.....	67
5.3. Основные геометрические параметры зубчатого колеса цилиндрической передачи.....	69
5.4. Основная теорема зацепления.....	70
5.5. Эвольвента и ее свойства.....	72
5.6. Построение картины зацепления колес эвольвентной зубчатой передачи.....	74
5.7. Коэффициент перекрытия.....	77
5.8. Способы нарезания зубчатых колес.....	79
5.9. Явление подрезания зубьев. Минимальное число зубьев колеса.....	81
5.10. Геометрические параметры коррегированных зубчатых колес.....	83
6. Сложные зубчатые механизмы.....	86
6.1. Общие сведения о сложных зубчатых механизмах.....	86
6.2. Передачи с неподвижными осями колес.....	87
6.3. Планетарные передачи.....	89
6.3.1. Вычисление передаточного отношения планетарной передачи.....	91
6.3.2. Геометрический синтез планетарных передач.....	93
6.4. Дифференциальные механизмы.....	95
6.5. Пространственные зубчатые передачи.....	96
7. Уравновешивание и балансировка вращающихся масс.	
Виброзащита машин.....	100
7.1. Цели уравновешивания и балансировки.....	100
7.2. Условия уравновешенности ротора.....	100
7.3. Уравновешивание вращающихся масс.....	103
7.3.1. Уравновешивание масс, находящихся в одной плоскости.....	103
7.3.2. Уравновешивание вращающихся масс, расположенных произвольно.....	104
7.4. Балансировка вращающихся масс (роторов).....	106
7.5. Уравновешивание механизмов.....	107
7.6. Виброзащита машин.....	109
8. Кулачковые механизмы.....	112
8.1. Назначение, устройство, классификация кулачковых механизмов.....	112
8.2. Геометрические и кинематические параметры кулачковых механизмов.....	112
8.3. Синтез кулачковых механизмов. Аналитический расчет профиля кулачка.....	116
8.4. Определение основных размеров кулачкового механизма из условия ограничения угла давления.....	117
8.4.1. Влияние угла давления на работу кулачкового механизма.....	117
8.4.2. Зависимость угла давления от основных параметров кулачкового механизма.....	119
Библиографический список.....	120

ВВЕДЕНИЕ

Являясь одной из важнейших научных основ изучения специальных дисциплин механических специальностей, курс «Теория механизмов и машин» позволяет студентам изучить и освоить общие методы исследования (анализа) и проектирования (синтеза) механизмов машин, понять принципы преобразования движения с помощью механизмов, ознакомить студентов с системным подходом к проектированию машин и механизмов, нахождению оптимальных параметров механизмов по известным (заданным) условиям работы.

Теория механизмов и машин – наука, изучающая общие методы их проектирования (синтеза) и исследования (анализа). Эти методы пригодны практически для всех механизмов и машин, используемых в промышленном производстве.

Условно все машины можно разделить на технологические, транспортные, энергетические, информационные. В общем виде *машина* – это устройство, предназначенное для преобразования какого-либо вида энергии в механическое движение. С помощью *технологических машин* (например, металлообрабатывающие станки, землеройные машины и т.д.) происходит изменение форм, размеров, свойств, состояния исходных материалов и заготовок, подвергшихся воздействию рабочего (исполнительного) органа машины. С помощью *транспортных машин* происходит перемещение грузов по заданной траектории с требуемыми скоростью или ускорением. В *энергетических машинах* происходит преобразование энергии (например, электрической в механическую – в станках с электроприводом, тепловой в механическую – в тракторах и автомобилях с двигателями внутреннего сгорания и т.д.). В *информационных машинах* происходит преобразование вводимой информации для контроля, регулирования режима работы машины и управления движением.

Машина в общем виде состоит из основных частей: машина-двигатель, передаточный механизм, исполнительное устройство (механизм) и система управления. Такую машину называют *механическим приводом*. *Машина-двигатель* преобразует какой-либо вид энергии в механическую (электродвигатель, двигатель внутреннего сгорания, гидромотор и т.д.). *Передаточный механизм* преобразует движение (например, кулачковый, зубчатый, рычажный механизмы). *Исполнительный механизм* непосредственно обеспечивает выполнение технологического процесса, для которого предназначен механический привод.

В некоторых машинах передаточный механизм отсутствует (например, вентилятор, состоящий из электродвигателя с насаженной на вал крыльчаткой).

Как наука теория механизмов и машин начала формироваться в конце XVIII – начале XIX вв. под названием «Прикладная механика». Ее развитие неразрывно связано с развитием машинного способа производства. В это время растущая промышленность и машиностроение, особенно в странах Западной Европы – Англии, Франции, Германии, потребовали теоретического решения ряда совершенно новых задач. Сначала разрабатывались методы структурного, кинематического и динамического анализов механизмов. Методы синтеза механизмов стали развиваться значительно позже – с середины XIX века, когда знаменитый русский ученый, математик и механик, академик П.Л. Чебышев (1821 – 1894) опубликовал ряд работ по структуре и синтезу рычажных механизмов. Используя разработанные им методы, он изобрел и спроектировал свыше 40 новых механизмов, осуществляющих заданные траектории движения, останов звеньев при движении других и т.д. Его по праву считают основателем русской школы теории механизмов и машин, а структурная формула плоских рычажных механизмов называется формулой Чебышева.

Один из основоположников теории автоматического регулирования профессор Петербургского технологического института И.А. Вышнеградский (1831 – 1895) создал научную школу конструирования машин.

Немецкий ученый Ф. Грасгоф (1826 – 1893) математически сформулировал условия проворачиваемости звена плоского рычажного механизма, которое необходимо соблюдать при его синтезе. Английские математики Д. Сильвестр (1814 – 1897) и С. Робертс (1827 – 1913) разработали теорию рычажных механизмов для преобразования кривых (пантографов).

Французский геометр Т. Оливье (1793 – 1858) обосновал метод синтеза сопряженных поверхностей в плоских и пространственных зацеплениях с помощью производящей поверхности. Английский ученый Р. Виллис (1800 – 1875) доказал основную теорему плоского зубчатого зацепления и предложил аналитический метод исследования планетарных зубчатых механизмов. Немецкий инженер-машиновед Ф. Рело (1829 – 1905) разработал графический метод синтеза сопряженных профилей, известный в настоящее время как «метод нормалей». Рело также является автором работ по структуре (строению) и кинематике механизмов. Русский ученый Х.И. Гохман (1851 – 1916) одним из первых опубликовал работу по аналитической теории зацепления.

Значительный вклад в развитие динамики машин внес «отец русской авиации» Н.Е. Жуковский (1847 – 1921) – основоположник современной аэродинамики и автор целого ряда работ по прикладной механике и теории регулирования хода машин.

Русский ученый Л.В. Ассур (1878 – 1920) открыл общую закономерность в структуре многозвенных плоских механизмов, и сейчас

применяемую при их анализе и синтезе, разработал метод «особых точек» для кинематического анализа сложных рычажных механизмов. А.П. Малышев (1879 – 1962) предложил теорию структурного анализа и синтеза применительно к сложным плоским и пространственным механизмам.

Существенный вклад в становление механики машин как цельной теории машиностроения внес академик И.И. Артоболевский (1905 – 1977) – организатор советской школы теории механизмов и машин, автор многочисленных трудов по структуре, кинематике и синтезу механизмов, динамике машин и теории машин-автоматов, а также учебников, получивших всеобщее признание.

В 30-е и последующие годы XX в. большой вклад в теорию механизмов и машин внесли исследования Н.Г. Бруевича – одного из создателей теории точности механизмов, Г.Г. Баранова (1899 – 1968) – автора трудов по кинематике пространственных механизмов, С.Н. Кожевникова, разработавшего общие методы динамического анализа механизмов с упругими звеньями и механизмов тяжело нагруженных машин, и многих других.

Значительный вклад в развитие теории механизмов и машин как в научном, так и методическом плане внесли ученые одной из старейших кафедр нашей страны – кафедры теории механизмов и машин МВТУ им. Н.Э. Баумана: Д.С. Зернов (1860 – 1922) расширил теорию передач; Н.И. Мерцалов (1866 – 1948) дополнил кинематическое исследование плоских механизмов теорией пространственных механизмов и разработал простой и надежный метод расчета маховика; Л.П. Смирнов (1877 – 1954) привел в строгую единую систему графические методы исследования механизмов и динамики машин; В.А. Гавриленко (1899 – 1977) разработал теорию эвольвентных зубчатых передач; Л.Н. Решетов развил теорию кулачковых механизмов и положил начало теории самоустанавливающихся механизмов [1].

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов механических специальностей высших учебных заведений. Изложенный курс теории механизмов и машин сформирован на основе опыта преподавания дисциплины на кафедре теории механизмов и машин и деталей машин Тверского государственного технического университета доцентами А.Р. Люндышевым, Н.Н. Посадковым, Б.И. Шутовым, В.И. Цюпой и другими.

**Физические величины и единицы измерений,
используемые в механике**

Физическая величина		Единица измерений	
Наименование	Обозначение	Наименование	Обозначение
Длина	L, l, r	Метр	м
Масса	m	Килограмм	кг
Время	T, t	Секунда	с
Угол плоский	$\alpha, \beta, \gamma, \delta$	Радиян, градус	рад, α^0
Перемещение точки	S	Метр	м
Скорость линейная	v	Метр в секунду	м/с
Скорость угловая	ω	Радиян в секунду	рад/с, 1/с
Ускорение линейное	a	Метр на секунду в квадрате	м/с ²
Ускорение угловое	ε	Радиян на секунду в квадрате	рад/с ² , 1/с ²
Частота вращения	n	Оборот в минуту	об/мин
Плотность материала	ρ	Килограмм на кубический метр	кг/м ³
Момент инерции	J	Килограмм-метр в квадрате	кг·м ²
Сила	F, P, Q, G	Ньютон	Н (кг·м/с ²)
Момент силы	M	Ньютон-метр	Нм
Вращающий момент	T	Ньютон-метр	Нм
Работа	A	Джоуль	Дж = Нм
Кинетическая энергия	E	Джоуль	Дж
Мощность	N	Ватт	Вт (Дж/с)

1. СТРУКТУРА И КЛАССИФИКАЦИЯ МЕХАНИЗМОВ

1.1. Структура механизмов

В состав механизмов входят *твёрдые тела*, которые называются *звеньями*. Звенья могут быть и не твёрдыми (например, ремень). Жидкости и газы в гидро- и пневмомеханизмах звеньями не считаются.

Условное изображение звеньев на кинематических схемах механизмов регламентируется ГОСТом. Примеры изображения некоторых звеньев приведены на рис. 1.1.

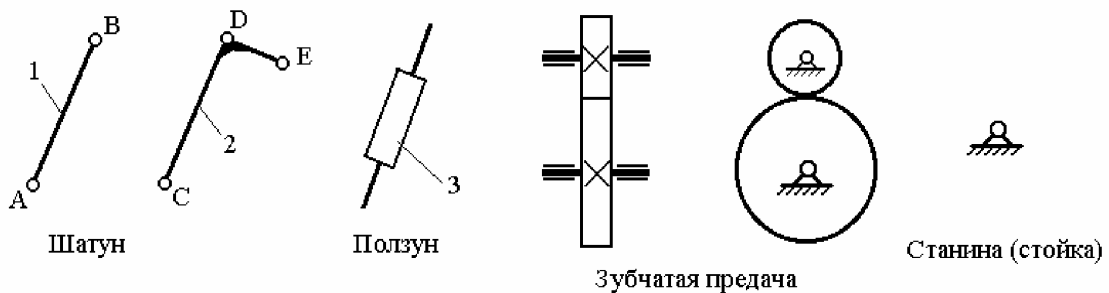


Рис. 1.1. Примеры изображения звеньев на кинематических схемах механизмов

Звенья бывают:

- *входные* (ведущие) – отличительным признаком их является то, что элементарная работа приложенных к ним сил положительна (работа силы считается положительной, если направление действия силы совпадает с направлением движения точки её приложения или под острым углом к ней);
- *выходные* (ведомые) – элементарная работа приложенных к ним сил является отрицательной (работа силы считается отрицательной, если направление действия силы противоположно направлению движения точки её приложения);
- *подвижные*;
- *неподвижные* (станина, стойка).

На кинематических схемах звенья обозначаются арабскими цифрами: 0, 1, 2 и т.д. (см. рис. 1.1).

Подвижное соединение двух соприкасающихся звеньев называется *кинематической парой*. Она допускает возможность движения одного звена относительно другого.

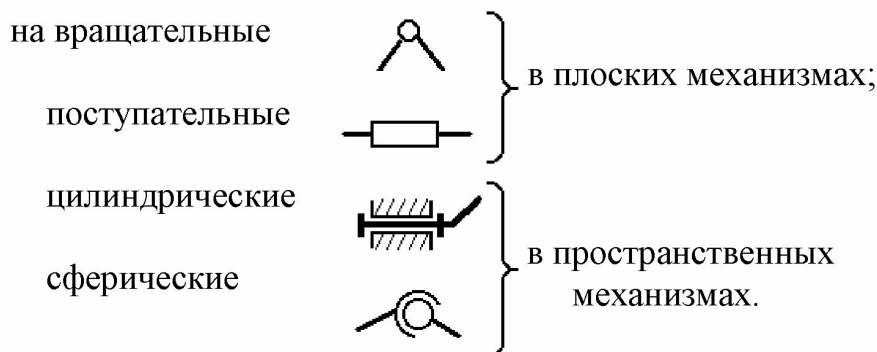
Классификация кинематических пар

1. По элементам соединения звеньев кинематические пары делятся:

- *на высшие* (они имеются, например, в зубчатых и кулачковых механизмах) – соединение звеньев друг с другом происходит по линии или в точке:



– *низшие* – соединение звеньев друг с другом происходит по поверхности. В свою очередь низшие соединения делятся:



2. По количеству наложенных связей. Тело, находясь в пространстве (в декартовой системе координат X, Y, Z) имеет 6 степеней свободы. Оно может перемещаться вдоль каждой из трёх осей X, Y и Z , а также вращаться вокруг каждой оси (рис. 1.2). Если тело (звено) образует с другим телом (звеном) кинематическую пару, то оно теряет одну или несколько из этих 6 степеней свободы.

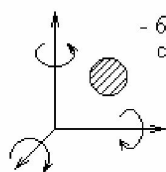


Рис. 1.2. Степени свободы тела в пространстве

По количеству утраченных телом (звеном) степеней свободы кинематические пары делят на 5 классов. Например, если телами (звеньями), образовавшими кинематическую пару, утрачено по 5 степеней свободы каждым, эту пару называют кинематической парой 5-го класса. Если утрачено 4 степени свободы – 4-го класса и т.д. Примеры кинематических пар различных классов приведены на рис. 1.3.



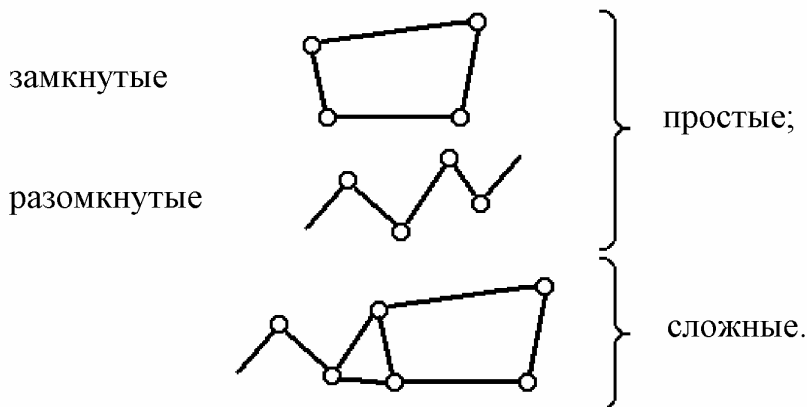
Рис. 1.3. Примеры кинематических пар различных классов

По структурно-конструктивному признаку кинематические пары можно разделить на вращательные, поступательные, сферические, цилиндрические и др.

Кинематическая цепь

Несколько звеньев, соединённых между собой кинематическими парами, образуют кинематическую цепь.

Кинематические цепи бывают:



Чтобы из кинематической цепи получить механизм, необходимо:

- одно звено сделать неподвижным, т.е. образовать станину (стойку);
- одному или нескольким звеньям задать закон движения (сделать ведущими) таким образом, чтобы все остальные звенья совершали требуемые целесообразные движения.

Число степеней свободы механизма – это число степеней свободы всей кинематической цепи относительно неподвижного звена (стойки).

Для пространственной кинематической цепи в общем виде условно обозначим:

- количество подвижных звеньев – n ,
- количество степеней свободы всех этих звеньев – $6n$,
- количество кинематических пар 5-го класса – P_5 ,
- количество связей, наложенных кинематическими парами 5-го класса на звенья, входящие в них, – $5P_5$,
- количество кинематических пар 4-го класса – P_4 ,
- количество связей, наложенных кинематическими парами 4-го класса на звенья, входящие в них, – $4P_4$ и т.д.

Звенья кинематической цепи, образуя кинематические пары с другими звеньями, утрачивают часть степеней свободы. Оставшееся число степеней свободы кинематической цепи относительно стойки можно вычислить по формуле

$$W = 6n - 5P_5 - 4P_4 - 3P_3 - 2P_2 - P_1.$$

Это структурная формула пространственной кинематической цепи, или формула Малышева, получена П.И. Сомовым в 1887 году и развита А.П. Малышевым в 1923 году.

Величину W называют *степенью подвижности механизма* (если из кинематической цепи образован механизм).

Для *плоской* кинематической цепи и соответственно для плоского механизма

$$W = 3n - 2P_5 - P_4.$$

Эту формулу называют формулой П.Л. Чебышева (1869). Она может быть получена из формулы Малышева при условии, что на плоскости тело обладает не шестью, а тремя степенями свободы:

$$W = (6 - 3)n - (5 - 3)P_5 - (4 - 3)P_4.$$

Величина W показывает, сколько должно быть у механизма ведущих звеньев (если $W = 1$ – одно, $W = 2$ – два ведущих звена и т.д.).

1.2. Классификация механизмов

Количество типов и видов механизмов исчисляется тысячами, поэтому классификация их необходима для выбора того или иного механизма из большого ряда существующих, а также для проведения синтеза механизма.

Универсальной классификации нет, но наиболее распространены 3 вида классификации:

1) *функциональная* [2]. По принципу выполнения технологического процесса механизмы делятся на механизмы: приведения в движение режущего инструмента; питания, загрузки, съёма детали; транспортирования и т.д.;

2) *структурно-конструктивная* [3]. Предусматривает разделение механизмов как по конструктивным особенностям, так и по структурным принципам. К этому виду относят механизмы: кривошипно-ползунный; кулисный; рычажно-зубчатый; кулачково-рычажный и т.д.;

3) *структурная*. Проста, рациональна, тесно связана с образованием механизма, его строением, методами кинематического и силового анализа, была предложена Л.В. Ассуром в 1916 году и основана на принципе построения механизма путем наслоения (присоединения) кинематических цепей (в виде структурных групп) к начальному механизму. Согласно этой классификации, любой механизм можно получить из более простого присоединением к последнему кинематических цепей с числом степеней свободы $W = 0$, получивших название структурных групп, или групп Ассура. Недостаток классификации – неудобство для выбора механизма с требуемыми свойствами.

1.3. Структурные группы для плоских рычажных механизмов

Условие существования любой структурной группы описывается формулой

$$W = 3n - 2P_5 = 0.$$

Так как количество звеньев n и количество кинематических пар P_5 – целые числа, то

$$n = 2 \frac{P_5}{3} - \text{кратно } 2, \text{ то есть чётно,}$$

$$P_5 = 3 \frac{n}{2} - \text{кратно } 3.$$

Все структурные группы принято разделять на классы – со 2-го по 4-й. Примеры структурных групп и начального механизма приведены на рис. 1.4.

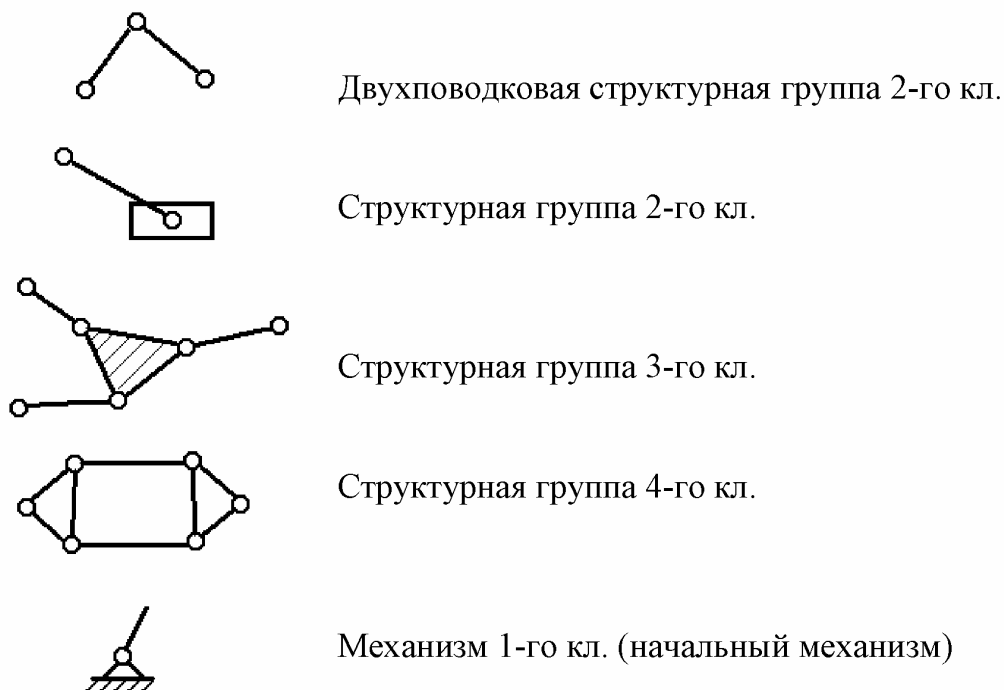


Рис. 1.4. Примеры структурных групп

При добавлении к механизму 1-го класса различных структурных групп можно получить механизм, состоящий из одной или нескольких структурных групп и механизма 1-го класса.

Механизмам присваивается определённый класс, соответствующий наивысшему классу входящих в него структурных групп. Примеры механизмов различных классов приведены на рис. 1.5.

Не путать класс механизма, класс структурной группы и класс кинематической пары!

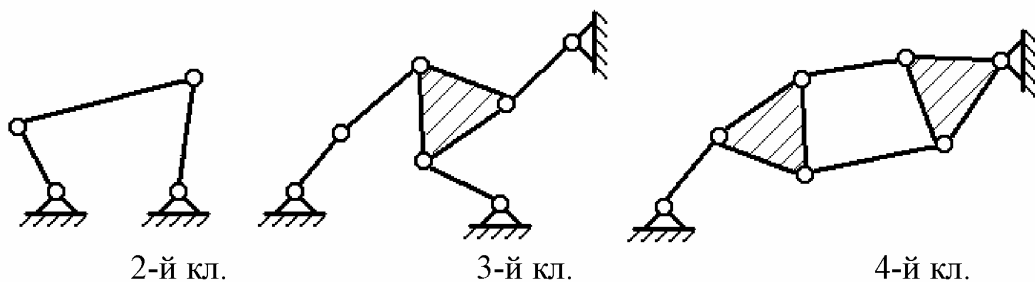
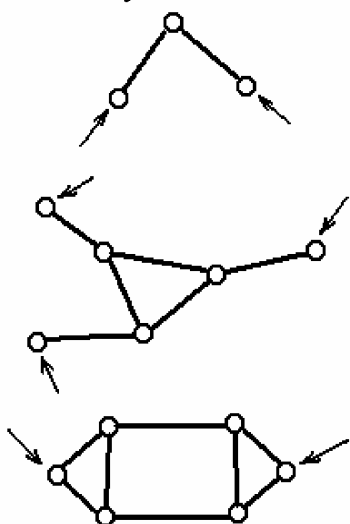


Рис. 1.5. Механизмы различных классов

Порядок структурной группы равен числу свободных кинематических пар, которыми группа присоединяется к более простому механизму. Свободные пары показаны стрелками (рис. 1.6).



Структурная группа 2-го кл., 2-го порядка
(все структурные группы 2-го кл. имеют 2-й порядок)

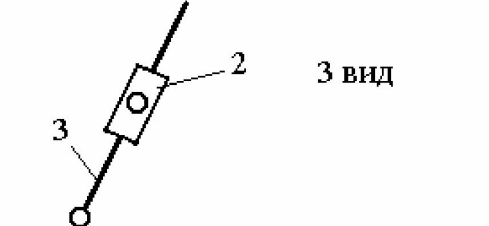
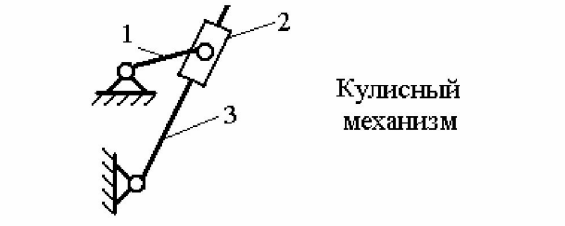
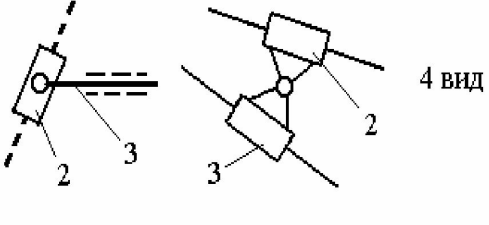
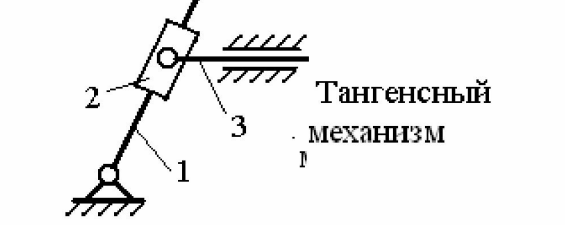
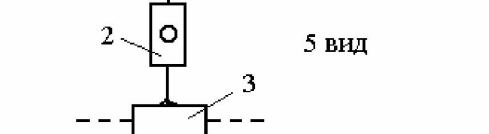
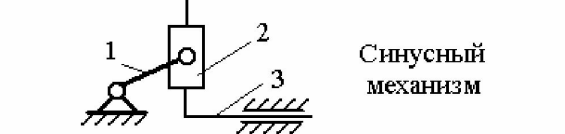
Структурная группа 3-го кл., 3-го порядка

Структурная группа 4-го кл., 2-го порядка

Рис. 1.6. Примеры структурных групп различных классов

Наиболее распространённые структурные группы 2-го класса подразделяются на 5 видов (модификаций) (табл.).

Кинематическая схема структурной группы, вид	Механизм, содержащий такую структурную группу
<p>1 вид</p>	<p>Шарнирный четырёхзвенник</p>
<p>2 вид</p>	<p>Кривошипно-ползунный механизм</p>

Кинематическая схема структурной группы, вид	Механизм, содержащий такую структурную группу
 <p>3 вид</p>	 <p>Кулисный механизм</p>
 <p>4 вид</p>	 <p>Тангенсный механизм</p>
 <p>5 вид</p>	 <p>Синусный механизм</p>

Примечание. 1 – ведущее звено; 2 и 3 – звенья, образующие структурную группу.

Для определения класса механизма его расчлняют на структурные группы, начиная с конца механизма. За начало механизма принимают ведущее звено (начальный механизм).

От конца механизма отделяются поочерёдно простейшие структурные группы до тех пор, пока не останется лишь механизм 1-го класса (начальный механизм, их может быть несколько).

По классу структурных групп определяют класс механизма. Количество начальных механизмов равно величине W .

Пример расчленения плоского рычажного механизма на структурные группы показан на рис. 1.7. Предварительно вычисляют степень подвижности механизма W по формуле

$$W = 3n - 2P_5 - P_4.$$

В данном случае $W = 1$, а это значит, что в механизме должны быть одно ведущее звено и соответственно один начальный механизм.

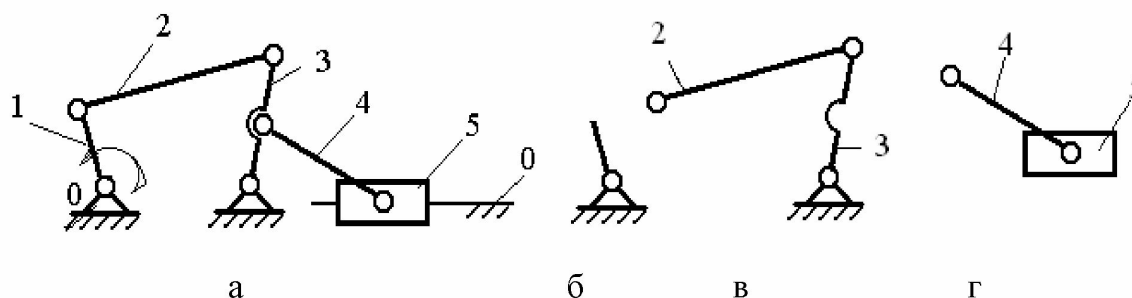


Рис. 1.7. Расчленение механизма на структурные группы:
 а – исходный механизм; б – начальный механизм;
 в – 2-й класс, 1-й вид; г – 2-й класс, 2-й вид

Избыточные связи

В некоторых случаях при проектировании механизмов для повышения жёсткости конструкции, улучшения условий передачи сил вводятся так называемые избыточные (пассивные) связи (дополнительные звенья), (рис. 1.8).



Рис. 1.8. Механизм с избыточной связью

В этом случае степень свободы вычисляется по формуле

$$W = 3n - 2P_5 + q = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 + 1 = 1,$$

где q – число избыточных (пассивных) связей.

Лишние степени свободы

Лишние степени свободы используются для упрощения кинематической схемы механизма, сокращения потерь при передаче мощности, повышения механического коэффициента полезного действия механизма. Например, между кулачком 1 и толкателем 2 кулачкового механизма устанавливается ролик 3 для устранения трения (рис. 1.9).

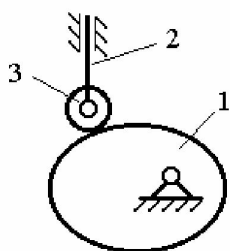


Рис. 1.9. Кулачковый механизм с роликовым толкателем

В этом случае степень подвижности механизма, вычисленная по формуле П.Л. Чебышева, будет равна 2:

$$W = 3n - 2P_5 - P_4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 1 = 2.$$

Здесь явно присутствует лишняя степень свободы, а именно вращение ролика под действием силы трения качения. Её следует учитывать при проведении структурного анализа данного механизма. Ведь очевидно, что данный механизм может функционировать и без ролика 3. Но при этом трение качения будет заменено трением скольжения между кулачком и толкателем (высшей кинематической парой), что увеличивает потери мощности в механизме на преодоление сил трения.

Тогда степень свободы такого механизма вычисляется по формуле

$$W = 3n - 2P_5 - P_4 - q,$$

где q – количество лишних степеней свободы.

2. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

2.1. Цели и задачи кинематического анализа

Синтез механизма – проектирование – имеет значительные трудности теоретического характера, поэтому при выполнении прикладных инженерных задач менее распространен, чем анализ.

Анализ механизма – исследование его основных параметров с целью изучения законов изменения и на основе этого выбор из ряда известных наилучшего механизма. По сравнению с синтезом анализ механизма широко используется в практике.

Цели:

1. Определение кинематических характеристик звеньев: перемещение; скорость; ускорение; траектория движения; функция положения при известных законах движения входных (ведущих) звеньев.

2. Оценка кинематических условий работы рабочего (выходного) звена.

3. Определение необходимых численных данных для проведения силового, динамического, энергетического и других расчётов механизма.

Задачи:

о положениях звеньев механизма. Определение траекторий движения точек;

о скоростях звеньев или отдельных точек механизма;

об ускорениях звеньев или отдельных точек механизма.

Методы:

графический (или метод графиков и диаграмм);

графоаналитический (или метод планов скоростей и ускорений);

аналитический;

экспериментальный.

2.2. Графический метод кинематического анализа

Преимущество этого метода заключается в наглядности и простоте. Он хорош для кинематического анализа звеньев, совершающих возвратно-поступательное движение. Недостаток метода – невысокая точность, которая зависит от точности графических построений.

Задача о положениях решается построением нескольких совмещённых планов механизма в выбранном масштабе длин при различных последовательных положениях ведущего звена.

Задачи о скоростях и ускорениях решаются построением графиков (диаграмм) перемещений, скоростей и ускорений исследуемой точки.

Последовательность кинематического анализа:

1. Сначала строят несколько (чаще всего 12 и более) совмещённых планов механизма в произвольно выбранном масштабе длин.

2. Затем строят график пути (перемещения) исследуемой точки или звена, для чего используют совмещённые планы механизма и последовательные положения на них исследуемой точки или звена.

3. Графическим дифференцированием графика перемещений строят график скорости исследуемой точки.

4. Графическим дифференцированием графика скоростей строят график ускорений.

Графическое дифференцирование можно производить методом хорд и методом касательных. С целью повышения точности удобно использовать оба метода одновременно.

Пример

Даны кривошипно-ползунный механизм, длины звеньев которого – кривошипа и шатуна – L_{OA} и L_{AB} соответственно, и угловая скорость кривошипа $\omega_1 = const$.

Определить скорости и ускорения ползуна при различных положениях кривошипа.

Решение

Выбираем масштабы длин $\mu_L = \frac{L_{OA}}{AO}$, м/мм, где AO – длина отрезка, мм, изображающая кривошип длиной L_{OA} на строящемся плане механизма; эта длина выбирается произвольно с учётом того, что совмещённые планы механизма должны разместиться на отведённом месте чертежа, а сам масштаб длин был бы удобен для дальнейших расчётов.

Вычисляем длину отрезка $AB = \frac{L_{AB}}{\mu_L}$, мм, изображающего шатун на плане механизма. При построении совмещённых планов механизма используют *метод засечек* (рис. 2.1).

Для построения графиков скоростей и ускорений (рис. 2.1) выбирают полюсные расстояния h_v и h_a , где h_v – полюсное расстояние при построении графика скоростей, которое выбирается произвольной длины; рекомендуется его величину выбирать в пределах $h_v \approx 30 \dots 40$ мм; h_a – полюсное расстояние при построении графика ускорений; его рекомендуется принимать в пределах $h_a \approx 30 \dots 40$ мм.

Масштабы времени, скорости и ускорения вычисляют по формулам, вывод которых приводится ниже.

Масштаб времени можно вычислить по формуле

$$\mu_t = \frac{T}{L_X},$$

где T – период одного оборота кривошипа, с; L_X – длина отрезка между точками 1 и 1 на графике (диаграмме) перемещений, мм.

Так как период T можно вычислить по формулам

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1}, \text{ или } T = \frac{60}{n_1}, \text{ с,}$$

где ω_1 – угловая скорость кривошипа, 1/с; n_1 – частота вращения кривошипа, об/мин, то масштаб времени

$$\mu_t = \frac{2\pi}{\omega_1 L_X} = \frac{60}{n_1 L_X}, \text{ с/мм.}$$

Масштаб скорости можно вывести из условия, что скорость исследуемой точки является производной перемещения S по времени:

$$v = \frac{dS}{dt} = \frac{d(y_s \mu_s)}{d(x_t \mu_t)} = \frac{\mu_s}{\mu_t} \frac{dy_s}{dx_t} = \frac{\mu_s}{\mu_t} \operatorname{tg} \alpha_i.$$

Здесь предполагается, что масштаб перемещений μ_s и масштаб времени μ_t являются постоянными величинами.

Так как $\operatorname{tg} \alpha_i = \frac{y_v}{h_v}$, то $v = \frac{\mu_s}{\mu_t} \operatorname{tg} \alpha_i = \frac{\mu_s y_v}{\mu_t h_v} = \mu_v y_v$, откуда

$$\mu_v = \frac{\mu_s}{\mu_t h_v}, \frac{\text{м/с}}{\text{мм}}.$$

Масштаб ускорения, вывод которого аналогичен предыдущему, вычисляется по формуле

$$\mu_a = \frac{\mu_v}{\mu_t h_a}, \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}.$$

Для определения величины скорости или ускорения в каком-либо положении точки B необходимо длину ординаты соответствующего графика умножить на масштаб μ_v или μ_a соответственно.

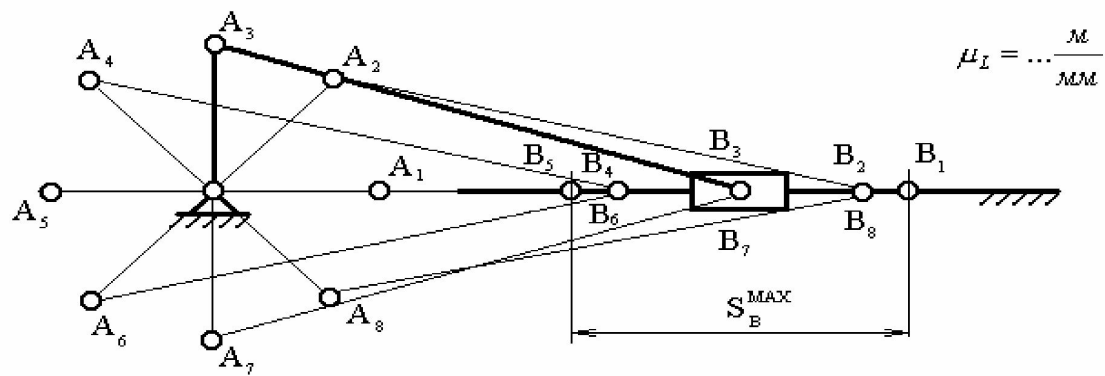


График перемещений точки В

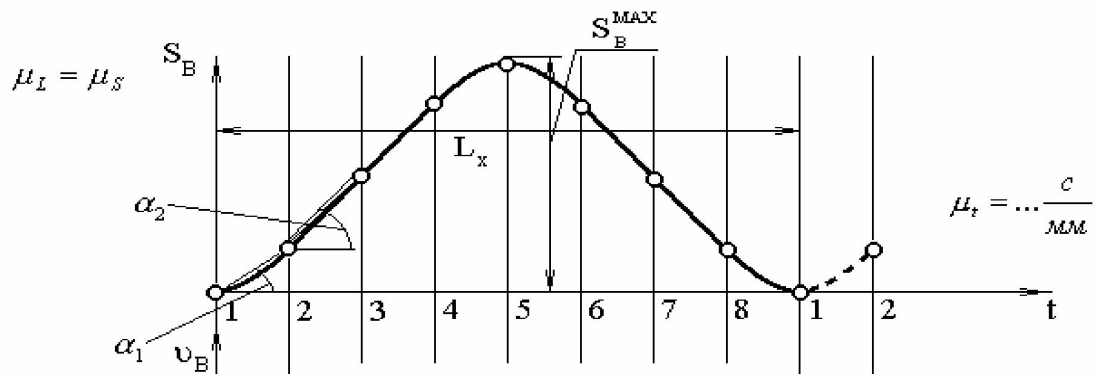


График скоростей точки В

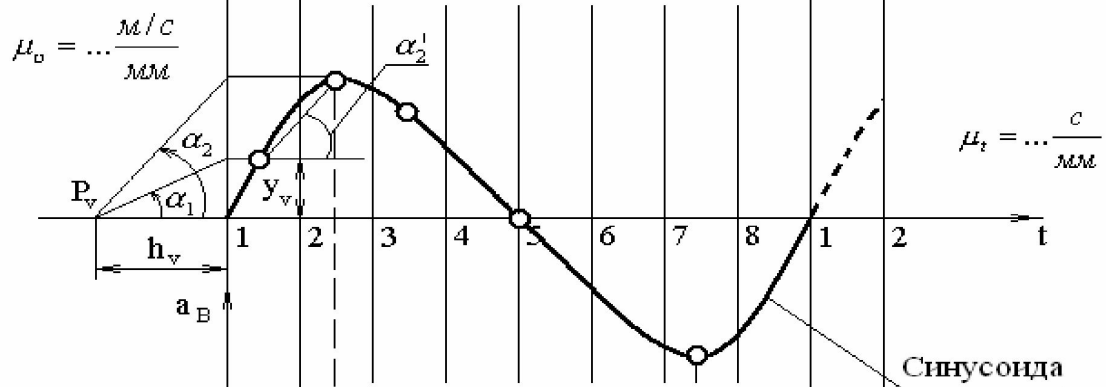


График ускорений точки В



Рис. 2.1. Совмещённые планы механизма, графики перемещений, скоростей и ускорений

2.3. Графоаналитический метод кинематического анализа

Графоаналитический метод называют *методом планов скоростей и ускорений*.

Задача о положениях решается графическим методом, то есть построением нескольких совмещённых планов механизма в выбранном масштабе длин.

Задачи о скоростях и ускорениях решаются построением планов скоростей и ускорений звеньев механизма при определённых (заданных) положениях ведущего звена на основе заранее составленных векторных уравнений скоростей и ускорений звеньев механизма.

Преимущество этого метода по сравнению с графическим в том, что он менее трудоёмок, так как позволяет определять скорости и ускорения (их величину и направление) на одном плане скоростей или плане ускорений для множества точек механизма.

Недостатком метода является то, что требуется построить планы скоростей и ускорений для нескольких положений механизма (если необходимо определять скорость и ускорение при различных положениях механизма и его звеньев).

2.4. Планы скоростей и ускорений шарнирного четырёхзвенника

При решении задач такого типа известны угловая скорость ω_1 ведущего звена 1 – кривошипа, длины звеньев и координаты неподвижных точек.

Последовательность решения задачи:

1. Строится план механизма (рис. 2.2) в выбранном масштабе длин:

$$\mu_L = \frac{L_{OA}}{AO}, \text{ м/мм,}$$

где L_{OA} – длина кривошипа, м; AO – длина отрезка, изображающего кривошип на плане механизма, мм.

Для построения плана механизма остальные длины звеньев и координаты неподвижных точек шарнирного четырёхзвенника (рис. 2.2) переводятся масштабом длин μ_L в отрезки:

$$AB = L_{AB}/\mu_L, \text{ мм,}$$

$$BC = L_{BC}/\mu_L, \text{ мм,}$$

$$OC = L_{OC}/\mu_L, \text{ мм.}$$

2. Составляются векторные уравнения линейных скоростей отдельных точек, принадлежащих звеньям механизма.

Векторное уравнение для звена 2 (шатуна)

$$V_B = V_A + V_{BA}, \quad (2.1)$$

где $V_A = V_{AO}$ – скорость точки A , которая равна скорости точки A относительно оси вращения кривошипа точки O ; V_{BA} – вектор

относительной скорости точки B шатуна относительно A имеет направление, перпендикулярное отрезку AB на плане механизма.

Векторное уравнение для звена 3 (коромысла)

$$\mathbf{V}_B = \mathbf{V}_C + \mathbf{V}_{BC}. \quad (2.2)$$

Так как точка C (ось вращения коромысла 3) неподвижна, то её скорость равна нулю ($V_C = 0$), а вектор относительной скорости точки B относительно C (V_{BC}) имеет направление, перпендикулярное отрезку BC на плане механизма.

3. Строится план скоростей механизма – это не что иное, как графическое изображение на чертеже векторных уравнений (2.1) и (2.2) в каком-либо масштабе.

План скоростей механизма и его свойства

План скоростей желательно строить рядом с планом механизма (рис. 2.2). Предварительно рассчитывается скорость точки A кривошипа:

$$v_A = \omega_1 L_{OA}, \text{ м/с.}$$

Затем выбирается масштаб плана скоростей μ_v по соотношению

$$\mu_v = \frac{v_A}{P_V a}, \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}},$$

где v_A – скорость точки A , м/с; $P_V a$ – длина отрезка, изображающего на будущем плане скоростей скорость V_A , выбирается произвольной длины в мм; при выборе желательно придерживаться условий: во-первых, план скоростей должен размещаться на отведённом месте чертежа, во-вторых, численное значение масштаба μ_v должно быть удобным для расчётов (μ_v должно быть круглым числом).

После этого можно приступить к построению плана скоростей механизма. Его следует проводить в последовательности, соответствующей написанию векторных уравнений (2.1) и (2.2).

Сначала проводится из произвольно выбранной рядом с планом механизма точки P_v (полюса плана скоростей) вектор скорости V_A , который перпендикулярен отрезку OA на плане механизма и имеет длину $P_V a$, выбранную нами при определении масштаба плана скоростей μ_v . Затем через точку a проводится линия, перпендикулярная отрезку AB плана механизма, а через полюс P_V – линия, перпендикулярная отрезку BC . Пересечение этих линий даёт точку b . В соответствии с векторными уравнениями (2.1) и (2.2) на построенном плане наносятся направления (стрелки) векторов V_B и V_{BA} .

Определим скорость точки K , принадлежащей шатуну. Для неё можно записать векторные уравнения скоростей:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_K &= \mathbf{V}_A + \mathbf{V}_{KA}, \\ \mathbf{V}_K &= \mathbf{V}_B + \mathbf{V}_{KB}, \end{aligned}$$

где вектор скорости V_{KA} перпендикулярен отрезку AK на плане механизма, а вектор V_{KB} – отрезку KB .

Построением этих векторных уравнений получаем точку k на плане скоростей. При этом из точки a плана скоростей проводим линию, перпендикулярную отрезку AK , а через точку b плана скоростей – линию, перпендикулярную отрезку BK плана механизма. Величину скорости точки K можно вычислить по формуле

$$V_K = (P_vk)\mu_v,$$

где P_vk – длина соответствующего вектора на плане скоростей.

Можно заметить, что треугольники на плане скоростей и плане механизма подобны:

$$\Delta abk \sim \Delta ABK,$$

так как стороны их взаимно перпендикулярны. Это свойство можно использовать для определения скорости любой другой точки, принадлежащей какому-либо звену механизма. Отсюда следует **теорема подобия: отрезки относительных скоростей на плане скоростей образуют фигуру, подобную фигуре соответствующего звена на плане механизма.** Стороны фигур взаимно перпендикулярны.

Угловые скорости шатуна 2 и коромысла 3 рассчитываются по формулам

$$\omega_2 = \frac{v_{BA}}{L_{AB}} = \frac{(ab)\mu_v}{L_{AB}}, \text{ с}^{-1},$$

$$\omega_3 = \frac{v_{BA}}{L_{BC}} = \frac{(P_v b)\mu_v}{L_{BC}}, \text{ с}^{-1}.$$

Направления угловых скоростей определяются по направлениям векторов V_{BA} и V_{BC} . Для этого вектор V_{BA} условно переносится в точку B плана механизма. Куда он будет вращать шатун 2 относительно точки A , в ту сторону и будет направлена угловая скорость шатуна ω_2 .

Аналогично поступают со скоростью V_{BA} . В каком направлении будет вращаться коромысло относительно точки C , туда и будет направлена угловая скорость ω_3 .

План ускорений механизма и его свойства

Последовательность построения плана ускорений рычажного механизма аналогична построению плана скоростей. Рассмотрим её на примере механизма шарнирного четырехзвенника (рис. 2.2). Примем угловую скорость кривошипа постоянной ($\omega_1 = const$, что является наиболее распространённым и рациональным видом движения в реальных механизмах).

Векторное уравнение ускорений для звена 1 (кривошипа)

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_{AO} = \mathbf{a}_{AO}^n + \mathbf{a}_{AO}^t,$$

где нормальная составляющая ускорения точки A относительно O рассчитывается по формуле $a_{AO}^n = \omega_1^2 L_{OA}$.

Вектор a_{AO}^n параллелен отрезку AO на плане механизма. Тангенциальная составляющая ускорения a_{AO}^t рассчитывается по формуле

$$a_{AO}^t = \varepsilon_1 L_{OA}.$$

В нашем случае угловое ускорение кривошипа $\varepsilon_1 = 0$, тогда $a_{AO}^t = 0$.

Векторное уравнение ускорений для звена 2 (шатуна)

$$a_B = a_A + a_{BA}^n + a_{BA}^t,$$

где нормальная составляющая ускорения точки B относительно точки A рассчитывается по формуле $a_{BA}^n = \omega_2^2 L_{AB}$.

Вектор a_{BA}^n параллелен отрезку AB и направлен от B к A , а тангенциальная составляющая a_{BA}^t перпендикулярна AB .

Векторное уравнение ускорений для звена 3 (коромысла)

$$a_B = a_C + a_{BC}^n + a_{BC}^t,$$

где ускорение точки C $a_C = 0$; нормальная составляющая ускорения точки B относительно точки C рассчитывается по формуле $a_{BC}^n = \omega_3^2 L_{BC}$.

Вектор a_{BC}^n направлен параллельно отрезку BC плана механизма от B к C , а вектор a_{BC}^t – перпендикулярно BC .

Выбираем масштаб плана ускорений: $\mu_a = \frac{a_{AO}^n}{P_a a'}$, $\frac{м/с^2}{мм}$, где $P_a a'$ –

длина отрезка, изображающего ускорение a_{AO}^n на плане ускорений. Его длина выбирается произвольно из расчета, чтобы план ускорений разместился на отведенном месте чертежа и численное значение μ_a было удобным для расчетов (μ_a должно быть круглым числом).

Тогда ускорение a_{BA}^n будет изображаться на плане ускорений вектором, имеющим длину $a'n_2 = \frac{a_{BA}^n}{\mu_a}$, мм, а ускорение a_{BC}^n – вектором

длиной $P_a n_3 = \frac{a_{BC}^n}{\mu_a}$, мм.

Затем строится план ускорений (рис. 2.2) с использованием составленных векторных уравнений ускорений. Из произвольно выбранного полюса P_a параллельно отрезку OA плана механизма проводится вектор ускорения \bar{a}_{AO}^n , длина которого $P_a a'$ была выбрана произвольно при расчете масштаба μ_a . Из конца этого вектора (точки a') проводится вектор ускорения \bar{a}_{BA}^n длиной $a'n_2$, который должен быть параллелен отрезку AB плана механизма и направлен от точки B к точке A .

Перпендикулярно ему через точку n_2 проводят прямую. Затем из полюса P_a проводят вектор ускорения \vec{a}_{BC}^n длиной $P_a n_3$. Перпендикулярно ему через точку n_3 проводят прямую до пересечения с прямой, проведенной через точку n_2 перпендикулярно отрезку AB . Точка пересечения обозначается буквой b' , которая, будучи соединена с полюсом P_a , образует отрезок $P_a b'$, изображающий вектор полного ускорения точки B .

Используя план ускорений, можно вычислить ускорения

$$a_B = (P_a b') \mu_a, \quad a_{\hat{A}\hat{A}} = (a' b') \mu_v.$$

Запишем

$$a_{BA} = (a' b') \mu_a = L_{AB} \sqrt{\omega_2^4 + \varepsilon_2^2},$$

где ω_2 и ε_2 – угловые скорость и ускорение шатуна.

$$\frac{a' b'}{\hat{A}\hat{A}} = \frac{\mu_L}{\mu_a} \sqrt{\omega_2^4 + \varepsilon_2^2},$$

где ω_2 и ε_2 не зависят от выбора (расположения) полюса P_a плана ускорений, а отношение масштабов постоянно ($\mu_L/\mu_a = const$) для данного плана ускорений. Поэтому для любой точки (например, K , принадлежащей шатуну) можно записать пропорции

$$\frac{a' b'}{AB} = \frac{a' k'}{AK} = \frac{b' k'}{BK}.$$

Отсюда формулируется *теорема подобия*: **отрезки полных относительных ускорений на плане ускорений образуют фигуру, подобную соответствующей фигуре звена на плане механизма.**

Величину ускорения точки K можно вычислить по формуле

$$a_k = (P_a k') \mu_a.$$

Угловые ускорения звеньев шатуна $\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^\tau}{L_{BA}} = \frac{(n_2 b') \mu_a}{L_{AB}}, \quad \text{с}^{-1},$

направление ε_2 определяются по a_{BA}^τ ; угловые ускорения звеньев коромысла $\varepsilon_3 = \frac{a_{BC}^\tau}{L_{BC}} = \frac{(n_3 b') \mu_a}{L_{BC}}, \quad \text{с}^{-1},$ направление ε_3 – по a_{BC}^τ .

Так как ω_2 и ε_2 направлены в противоположные стороны, вращение шатуна является замедленным.

Использование плана скоростей и плана ускорений

для определения радиуса кривизны траектории движения точки

Радиус кривизны траектории движения точки (например, точки K) можно вычислить по формуле

$$\rho_K = \frac{v_K^2}{a_K^n} = \frac{(P_V k)^2 \mu_V^2}{(mk') \mu_a^2},$$

где a_K^n – нормальная составляющая ускорения точки K .

Для определения величины (и направления) a_K^n следует вектор полного ускорения a_K на плане ускорений разложить на нормальную и тангенциальную составляющие, причём a_K^n перпендикулярна вектору скорости V_K , a_K^t параллельна последнему. Для этого сначала через полюс плана ускорений P_a проводится прямая, параллельная вектору скорости точки K , а через точку k' – перпендикуляр к этой прямой; на их пересечении получают точку m .

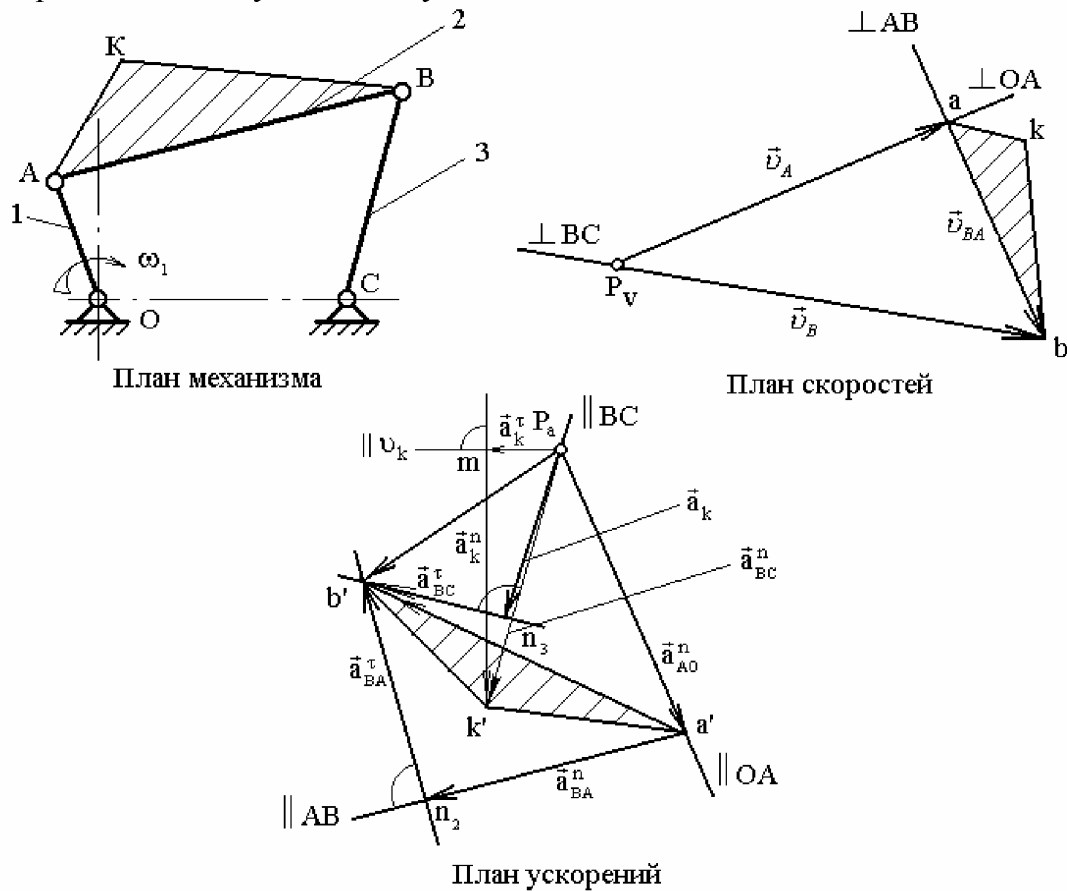


Рис. 2.2. План механизма, скоростей, ускорений

Использование плана скоростей и плана ускорений для определения мгновенного центра скоростей (МЦС) и мгновенного центра ускорений (МЦУ) звена

Для определения МЦС и МЦУ используют теорему подобия, а на плане механизма строят фигуры, подобные фигурам (треугольникам) на планах скоростей и ускорений (рис. 2.3).

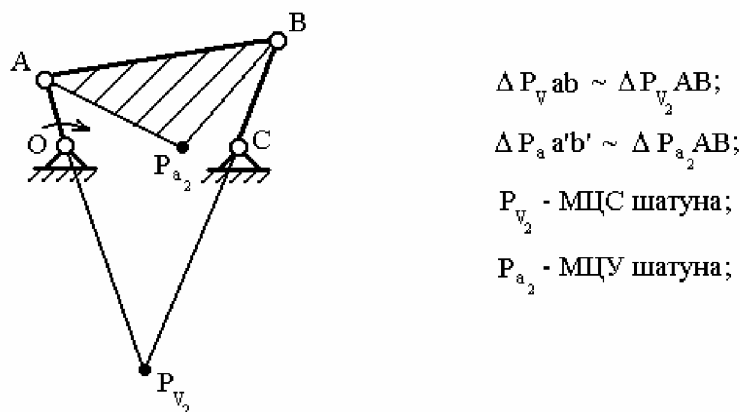


Рис. 2.3. Определение положений мгновенных центров скоростей P_{v_2} и ускорений P_{a_2} шатуна

Из теоретической механики известно, что плоскопараллельное движение звена механизма в каждый момент времени может быть представлено как вращение вокруг некоторой точки, которую называют *мгновенным центром вращения* или *мгновенным центром скоростей* (МЦС). Если данная точка относится к станине (стойке) механизма, т.е. является неподвижной, то соответствующий МЦС называют *мгновенным центром скоростей в абсолютном движении* рассматриваемого звена. Таким образом, если мы представим, что точка P_{v_2} принадлежит шатуну (рис. 2.3), то её скорость будет равна нулю.

Если же рассматривается движение звена относительно любого *подвижного* звена механизма, то соответствующий МЦС называют *мгновенным центром скоростей в относительном движении* рассматриваемых звеньев.

Аналогично может быть найдена условная точка, принадлежащая звену, абсолютное *ускорение* которой в данный момент времени равно нулю. Эта точка называется *мгновенным центром ускорений* (МЦУ) звена. Если звено механизма совершает сложное плоскопараллельное движение, то меняются и положения МЦС и МЦУ.

2.5. Планы скоростей и ускорений кривошипно-ползунного механизма

Последовательность построения планов скоростей и ускорений кривошипно-ползунного механизма (рис. 2.4) аналогична той, которая приведена в предыдущем случае. В дальнейшем некоторые подробности (расчёты масштабов, длин μ_e , масштабов планов скоростей μ_v и ускорений μ_a и т.д.) будут пропущены.

План скоростей кривошипно-ползунного механизма начинают строить после построения плана механизма в заданном положении, в выбранном масштабе длин μ_L , составления векторного уравнения скоростей и выбора масштаба плана скоростей μ_v .

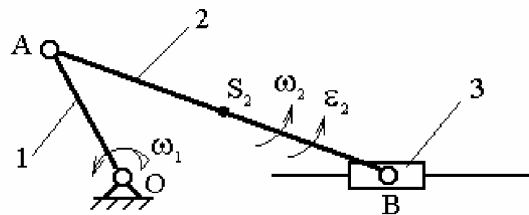
Векторное уравнение скоростей шатуна 2 (рис. 2.4)

$$V_B = V_A + V_{BA},$$

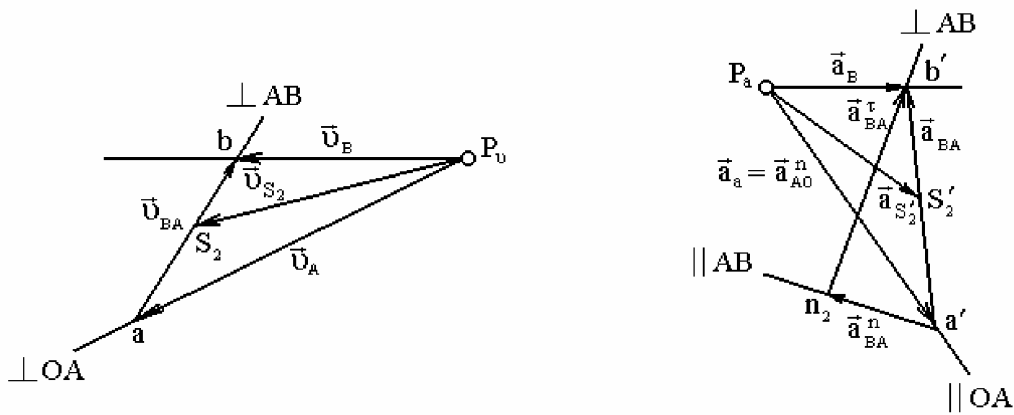
где $V_A = \omega_1 L_{OA}$ – скорость точки A , м/с; вектор этой скорости направлен перпендикулярно прямой OA кривошипа 1 (рис. 2.4) на плане механизма; V_{BA} – вектор скорости точки B относительно A ; имеет направление, перпендикулярное прямой AB на плане механизма; V_B – вектор полной (абсолютной), скорости ползуна 3; должен быть параллельным направлению движения ползуна.

Для построения плана скоростей сначала из полюса плана P_v (рис. 2.4) проводится вектор скорости точки A относительно O – V_A , т.е. векторный отрезок $P_v a$. Затем через точку a проводится перпендикуляр к прямой AB плана механизма и через полюс P_v – прямая, параллельная движению ползуна 3. На пересечении этих двух прямых получается точка b . Направления векторов скоростей V_B и V_{BA} обозначают стрелками.

Например, необходимо определить скорость точки S_2 , принадлежащей шатуну 2 и расположенной на середине отрезка AB . Используя теорему подобия, на отрезке ab плана скоростей находят его середину (точка S_2), которая, будучи соединенной с полюсом P_v , даст вектор V_{S_2} , изображающий абсолютную (полную) скорость точки S_2 .



План механизма (в масштабе длин μ_L)



План скоростей

План ускорений

Рис. 2.4. Построение планов скоростей и ускорений кривошипно-ползунного механизма

Рассчитаем величину линейных скоростей и угловую скорость шатуна:

$$\begin{aligned}v_{BA} &= (ab)\mu_v, \text{ м/с}, \\v_B &= (P_v b)\mu_v, \text{ м/с}, \\v_{S_2} &= (P_v S_2)\mu_v, \text{ м/с}, \\ \omega_2 &= \frac{v_{BA}}{L_{AB}}, \text{ с}^{-1}.\end{aligned}$$

Направление вектора угловой скорости шатуна ω_2 определяется следующим образом. Вектор скорости V_{BA} условно переносится в точку B плана механизма. Куда он будет вращать шатун относительно точки A , в ту сторону и направлена угловая скорость ω_2 шатуна.

План ускорений кривошипно-ползунного механизма строят после того, как будет составлено векторное уравнение ускорений шатуна, учитывая, что он совершает сложное движение:

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}^n + \mathbf{a}_{BA}^{\tau},$$

где \mathbf{a}_A – ускорение точки A ; его величину и направление можно определить, используя векторное уравнение ускорения точки A относительно оси O вращения кривошипа:

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_O + \mathbf{a}_{AO},$$

причём ускорение точки A относительно O можно разложить на две составляющие – нормальное ускорение \mathbf{a}_{AO}^n и тангенциальное \mathbf{a}_{AO}^{τ} , т.е.

$$\mathbf{a}_{AO} = \mathbf{a}_{AO}^n + \mathbf{a}_{AO}^{\tau}.$$

Так как точка O неподвижна и ускорение её равно нулю ($\mathbf{a}_O = 0$ и $\mathbf{a}_{AO}^{\tau} = 0$ при условии, что угловая скорость вращения кривошипа постоянна: $\omega_1 = const$ и его угловое ускорение $\varepsilon_1 = 0$), то векторное уравнение ускорения точки A можно записать в виде

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_{AO}^n.$$

Величина нормальной составляющей ускорения (нормальное ускорение) рассчитывается по формуле

$$a_{AO}^n = \omega_1^2 L_{AO}$$

(его вектор направлен по радиусу вращения кривошипа от точки A к точке O).

Затем вычисляется нормальное ускорение точки B относительно A по формуле

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 L_{AO}$$

(его вектор направлен от B к A).

После выбора масштаба плана ускорений по формуле $\mu_a = \frac{a_{OA}^n}{P_a a'}$

величина нормального ускорения \mathbf{a}_{BA}^n переводится этим масштабом в векторный отрезок длиной

$$a'n_2 = \frac{a_{BA}^n}{\mu_a}, \text{ мм.}$$

Затем строится план ускорений (см. рис. 2.4). Из произвольно выбранного полюса P_a параллельно отрезку OA плана механизма проводится вектор ускорения \mathbf{a}_{AO}^n , длина которого $P_a a'$ была выбрана произвольно при расчёте масштаба μ_a . Из конца этого вектора (точки a') проводится вектор ускорения \mathbf{a}_{BA}^n длиной $a'n_2$, который должен быть параллелен отрезку AB плана механизма и направлен от точки B к A . Перпендикулярно ему через точку n_2 проводят прямую до пересечения с прямой, проведённой через полюс P_a параллельно линии движения ползуна 3. Полученная точка их пересечения b' определяет длины векторов ускорений \mathbf{a}_{BA} и \mathbf{a}_B .

Для нахождения величины ускорения точки S_2 , принадлежащей шатуну, можно применить теорему подобия. При этом необходимо на векторе, изображающем на плане ускорений относительное ускорение \mathbf{a}_{BA} , найти соответствующую точку S_2' , делящую отрезок $a'b'$ в той же пропорции, что и точка S_2 делит отрезок AB на плане механизма.

Угловое ускорение шатуна вычисляется по формуле

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^{\tau}}{L_{AB}} = \frac{(n_2 b')\mu_a}{L_{AB}}, \text{ с}^{-1},$$

где $n_2 b'$ – длина вектора на плане ускорений, изображающего тангенциальное ускорение \mathbf{a}_{BA}^{τ} .

Для определения направления вектора углового ускорения шатуна ε_2 необходимо вектор тангенциального ускорения \mathbf{a}_{BA}^{τ} условно перенести в точку B плана механизма. Куда он будет вращать шатун относительно точки A , в ту сторону и направлено ускорение ε_2 шатуна.

2.6. Планы скоростей и ускорений кулисного механизма

Чтобы построить *план скоростей*, необходимо составить векторное уравнение скоростей. При этом следует иметь в виду, что точка A_1 (рис. 2.5), принадлежащая кривошпицу 1, и точка A_2 , принадлежащая ползуну 2 и совпадающая на плане механизма с точкой A_1 , вращаются вокруг оси O с одинаковыми линейными и угловыми скоростями:

$$V_{A1} = V_{A2} \text{ и } \omega_1 = \omega_2.$$

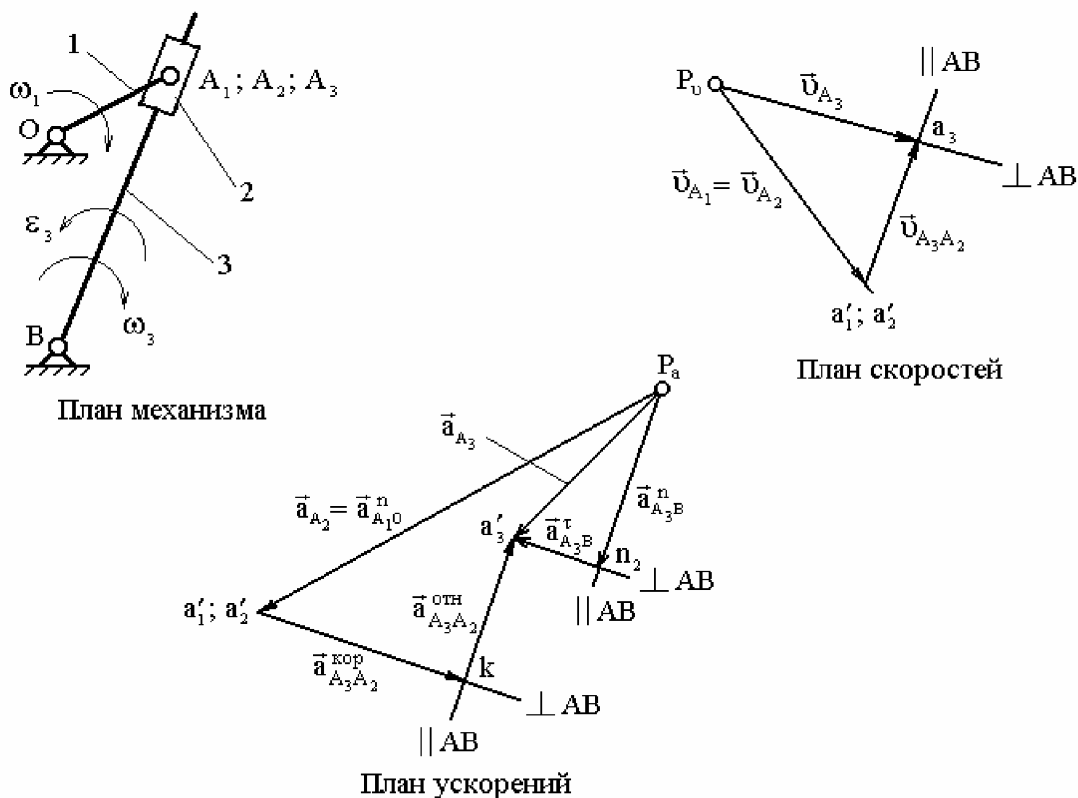


Рис. 2.5. Построение планов скоростей и ускорений кулисного механизма

Если задана величина ω_1 , то величину линейной скорости рассчитывают по формуле

$$V_{A1} = V_{A2} = \omega_1 L_{OA}, \text{ м/с.}$$

Векторы скоростей V_{A1} и V_{A2} направлены перпендикулярно радиусу OA_1 . Скорость точки A_3 , принадлежащей кулисе 3, можно найти по векторному уравнению скоростей

$$V_{A3} = V_{A2} + V_{A3A2},$$

где V_{A3A2} – вектор скорости точки A_3 кулисы относительно точки A_2 ползуна, параллельный прямой A_1B плана механизма.

После выбора масштаба плана скоростей μ_v (см. предыдущие примеры механизмов) строят план скоростей. Из полюса P_v (см. рис. 2.5) перпендикулярно отрезку OA плана механизма проводится вектор скорости V_{A1} , совпадающий с вектором скорости V_{A2} (см. рис. 2.5, вектор $\overrightarrow{P_v a_1}$). Через точку a_1 проводят прямую, параллельную прямой A_1B , а через полюс P_v – прямую, перпендикулярную A_1B . На их пересечении получают точку a_3 и наносят направление векторов (стрелки), руководствуясь векторным уравнением скоростей.

Вычисляют величины скоростей:

$$v_{A3} = (P_v a_3) \mu_v, \text{ м/с,}$$

$$v_{A_3A_2} = (a_1 a_3) \mu_v, \text{ м/с},$$

где $P_v a_3$ и $a_1 a_3$ – длины векторов, измеренные на плане скоростей.

Угловая скорость коромысла 3 вычисляется по формуле

$$\omega_3 = \frac{v_{A_3}}{L_{A_1B}}, \text{ с}^{-1}.$$

Для построения плана ускорений составляются векторные уравнения

$$\mathbf{a}_{A_3} = \mathbf{a}_{A_2} + \mathbf{a}_{A_3A_2}^{\text{кор}} + \mathbf{a}_{A_3A_2}^{\text{отн}},$$

$$\mathbf{a}_{A_3} = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{A_3B}^n + \mathbf{a}_{A_3B}^\tau,$$

где \mathbf{a}_{A_2} – ускорение ползуна; $\mathbf{a}_{A_3A_2}^{\text{кор}}$ – ускорение Кориолиса точки A_3 относительно A_2 (возникает тогда, когда есть относительное движение двух точек с одновременным вращением их вокруг какой-либо оси; в данном случае точка A_3 движется относительно A_2 , вместе они вращаются вокруг неподвижной точки B ; направление вектора $\mathbf{a}_{A_3A_2}^{\text{кор}}$ определяется так: необходимо условно повернуть вектор скорости $V_{A_3A_2}$ по направлению вращения кулисы 3 – это и будет направление ускорения Кориолиса); $\mathbf{a}_{A_3A_2}^{\text{отн}}$ – относительное ускорение точки A_3 относительно A_2 (его вектор параллелен A_3B); \mathbf{a}_B – ускорение точки B ($\mathbf{a}_B = 0$, так как точка B неподвижна); $\mathbf{a}_{A_3B}^n$ – нормальное ускорение точки A_3 относительно B (направление вектора от A_3 к точке B); $\mathbf{a}_{A_3B}^\tau$ – тангенциальное ускорение точки A_3 относительно B (вектор направлен перпендикулярно A_3B).

Вычисление величины ускорения Кориолиса и нормальных ускорений можно произвести по формулам

$$\mathbf{a}_{A_2} = \mathbf{a}_{A_1O}^n = \omega_1^2 L_{OA_2}, \text{ м/с}^2,$$

$$\mathbf{a}_{A_3A_2}^{\text{кор}} = 2\omega_3 V_{A_3A_2}, \text{ м/с}^2,$$

$$\mathbf{a}_{A_3B}^n = \omega_1^2 L_{A_3B}, \text{ м/с}^2.$$

Масштаб плана ускорений выбирают, используя формулу

$$\mu_a = \frac{a_{A_2}}{P_a a'_2}, \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}},$$

где $P_a a'_2$ – длина вектора, изображающего ускорение \mathbf{a}_{A_2} на плане ускорений; она выбирается произвольно с таким расчётом, чтобы будущий план ускорений разместился на отведённом месте чертежа и масштаб был удобен для использования в дальнейших расчётах.

Остальные известные величины ускорений переводятся масштабом в векторные отрезки соответствующих длин:

$$a_2' k = \frac{a_{A_3A_2}^{\text{кор}}}{\mu_a}, \text{ мм}; P_a n_2 = \frac{a_{A_3A_2}^n}{\mu_a}, \text{ мм}.$$

Затем строится *план ускорений*. Из произвольно выбранного полюса – точки P_a – проводится вектор ускорения $\mathbf{a}_{A_1O}^n$ с длиной $P_a a'_2$. Из точки a'_2 перпендикулярно A_2B проводится вектор ускорения $\mathbf{a}_{A_2A_2}^{кор}$ с длиной $a'_2 k$. Через точку k проводится прямая, перпендикулярная этому вектору. Таким образом, будет выполнено графическое изображение первого векторного уравнения ускорений из двух, ранее составленных. Затем приступают к построению второго векторного уравнения. Из полюса P_a параллельно прямой A_3B проводится вектор ускорения $\mathbf{a}_{A_3B}^n$ длиной $P_a n_2$, а через точку n_2 – перпендикулярная ему прямая до пересечения с прямой, проведённой ранее через точку k . На пересечении этих прямых получается точка a'_3 . Вектор, соединяющий точки P_a и a'_3 , – полное ускорение \mathbf{a}_{A_3} точки A_3 .

Угловое ускорение кулисы вычисляется по формуле

$$\varepsilon_3 = \frac{a_{A_3B}^{\tau}}{L_{A_3B}} = \frac{(n_2 a'_3) \mu_a}{\dot{A}_3 \hat{A} \mu_L}, \text{ с}^{-2},$$

где $n_2 a'_3$ – длина вектора, изображающего на плане ускорений тангенциальное ускорение точки A_3 .

Направление углового ускорения определяется, как и в предыдущем примере (для кривошипно-ползунного механизма), по направлению условного вращения кулисы 3 вектором ускорения $\mathbf{a}_{A_3B}^{\tau}$: условно перенести этот вектор в точку A_3 плана механизма и посмотреть, в каком направлении он будет «вращать» кулису.

2.7. Аналитический метод кинематического анализа

2.7.1. Общие сведения о методе

Графический (метод диаграмм) и графоаналитический методы (метод планов скоростей и ускорений) кинематического анализа механизмов имеют недостатки: невысокая точность, определяемая точностью графических построений, и большая трудоёмкость. При использовании графического метода необходимо построить диаграммы перемещений, скоростей и ускорений для *каждой* исследуемой точки механизма, а при использовании графоаналитического метода – *несколько* планов скоростей и ускорений механизма, чтобы определить динамику изменения скорости и ускорения интересующих нас точек (т.е. при различных положениях механизма).

Эти недостатки отсутствуют в аналитическом методе. Но при этом необходимо составлять достаточно сложные аналитические зависимости (формулы) и иметь возможность решать их с использованием компьютерных техники и технологии, что в последнее время возможно и доступно.

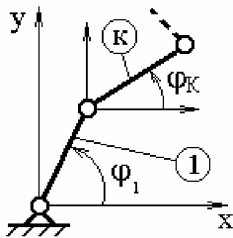
Методы аналитического исследования:

метод замкнутых векторных контуров (метод Зинovieва) [4] удобен для кинематического анализа практически всех используемых в технике несложных рычажных механизмов;

метод преобразования координат (метод Морошкина) [5] удобен для кинематического анализа многозвенных механизмов типа манипуляторов промышленных роботов.

Прежде чем говорить об аналитическом методе, введем некоторые понятия и определения.

2.7.2. Функция положения. Аналог скорости. Аналог ускорения



Положение любого звена механизма может определяться параметрами: углом φ_K относительно какой-либо координатной оси или координатами X_K и Y_K (рис. 2.6).

Рис. 2.6. Схема механизма

Функция положения – это аналитическая зависимость положения или координаты K -го звена (φ_K , X_K или Y_K) от положения ведущего звена φ_1 , т.е. $\varphi_K(\varphi_1)$ или $X_K(\varphi_1)$ и $Y_K(\varphi_1)$, где φ_K , X_K и Y_K – координаты, определяющие положение K -го звена (ведомого), а угол φ_1 – угол, характеризующий положение ведущего звена.

Аналог скорости. Угловая скорость K -го звена определяется зависимостью

$$\omega_K = \frac{d\varphi_K}{dt} = \frac{d\varphi_K}{dt} \frac{d\varphi_1}{d\varphi_1} = \omega_1 \frac{d\varphi_K}{d\varphi_1}, \quad (2.3)$$

где $\frac{d\varphi_K}{d\varphi_1}$ – *аналог скорости* K -го звена (первая передаточная функция) для

вращающегося звена, величина безразмерная; $\frac{dx_K}{d\varphi_1}$ и $\frac{dy_K}{d\varphi_1}$ – *аналоги скорости* K -го звена, движущегося поступательно, величины безразмерные.

Аналог ускорения. Угловая скорость K -го звена определяется зависимостью, получаемой дифференцированием уравнения (2.3) по dt :

$$\varepsilon_K = \frac{d\omega_K}{dt} = \frac{d\omega_1}{dt} \frac{d\varphi_K}{d\varphi_1} + \omega_1 \frac{d^2\varphi_K}{d\varphi_1^2} \frac{d\varphi_1}{dt} = \varepsilon_1 \frac{d\varphi_K}{d\varphi_1} + \omega_1^2 \frac{d^2\varphi_K}{d\varphi_1^2}.$$

При дифференцировании предполагается, что угловая скорость K -го звена ω_K определяется зависимостью

$$\omega_K = \omega_1 \frac{d\varphi_K}{d\varphi_1},$$

а угол φ_K является функцией угла φ_1 :

$$\varphi_K = f(\varphi_1).$$

Величина $\frac{d^2\varphi_K}{d\varphi_1^2}$ – аналог ускорения K -го звена, совершающего

вращательное движение, величины $\frac{d^2x_K}{d\varphi_1^2}$ и $\frac{d^2y_K}{d\varphi_1^2}$ – аналоги ускорения K -го звена, двигающегося поступательно, в проекциях на оси X и Y .

Введение в кинематический анализ понятий аналогов отделяет геометрические свойства механизма от кинематических.

Величину $\frac{d\varphi_K}{d\varphi_1}$ называют ещё *передаточным отношением*, так как

выражение $\frac{d\varphi_K}{d\varphi_1}$ можно преобразовать, умножив и разделив его на величину dt :

$$\frac{d\varphi_K}{d\varphi_1} = \frac{d\varphi_K dt}{d\varphi_1 dt} = \frac{\omega_K}{\omega_1}.$$

Отношение угловых скоростей в механике называют передаточным

отношением $U_{K-1} = \frac{\omega_K}{\omega_1}$.

Аналог скорости звена также называют *первой передаточной функцией*.

Задачи кинематического анализа и пути их аналитического решения приведены в таблице.

Функции положения	Задача о скоростях	Задача об ускорениях
<p>Определить функции положения:</p> $\varphi_K(\varphi_1)$ $x_K(\varphi_1)$ $y_K(\varphi_1)$	<p>Определение аналогов скоростей</p> $\frac{d\varphi_K}{d\varphi_1}, \frac{dx_K}{d\varphi_1}, \frac{dy_K}{d\varphi_1}$ <p>Вычисление скоростей</p> $\omega_K = \omega_1 \frac{d\varphi_K}{d\varphi_1},$ $v_{Kx} = \omega_1 \frac{dx_K}{d\varphi_1},$ $v_{Ky} = \omega_1 \frac{dy_K}{d\varphi_1}$	<p>Определение аналогов ускорений</p> $\frac{d^2\varphi_K}{d\varphi_1^2}, \frac{d^2x_K}{d\varphi_1^2}, \frac{d^2y_K}{d\varphi_1^2}$ <p>Вычисление ускорений</p> $\varepsilon_K = \varepsilon_1 \frac{d\varphi_K}{d\varphi_1} + \omega_1^2 \frac{d^2\varphi_K}{d\varphi_1^2},$ $a_{Kx} = \varepsilon_1 \frac{dx_K}{d\varphi_1} + \omega_1^2 \frac{d^2x_K}{d\varphi_1^2},$ $a_{Ky} = \varepsilon_1 \frac{dy_K}{d\varphi_1} + \omega_1^2 \frac{d^2y_K}{d\varphi_1^2}.$

Как следует из приведенной таблицы, для решения задачи о положениях звеньев исследуемого механизма необходимо найти функции положения (φ_K или X_K и Y_K), предварительно составив векторное уравнение замкнутого векторного контура кинематической цепи и уравнения проекций его на координатные оси X и Y . Из этих уравнений находят функции положения (зависимости положений исследуемого звена от положения ведущего звена). При известном (заданном) законе движения ведущего звена задаются шагом и вычисляют координаты исследуемых звеньев (угловые координаты для вращающегося звена и прямоугольные для звена, совершающего возвратно-поступательное движение).

Для решения задачи о скоростях необходимо найти аналоги скоростей исследуемых звеньев и, умножив их на угловую скорость ведущего звена, получить формулы расчета искомых скоростей.

Для решения задачи об ускорениях находят также аналоги ускорений звеньев и по формулам, приведенным в таблице, находят величины ускорений. Ниже приводится пример кинематического анализа кривошипно-ползунного механизма аналитическим методом.

2.7.3. Аналитическое исследование кривошипно-ползунного механизма

Используем метод замкнутых векторных контуров (рис. 2.7).

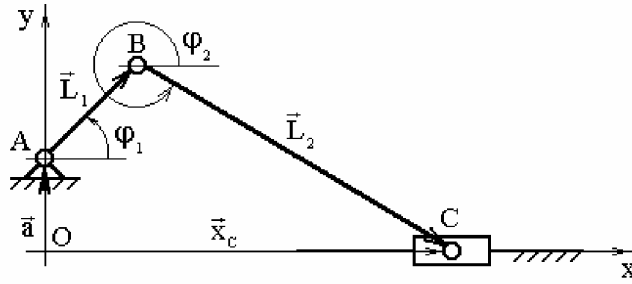


Рис. 2.7. Замкнутый векторный контур кривошипно-ползунного механизма

Рассмотрим замкнутый векторный контур $OABCO$. Соблюдая единообразие отсчёта углов, определяющих положение звеньев, составим векторное уравнение

$$\vec{a} + \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{x}_c. \quad (2.4)$$

Спроектируем (2.4) на координатные оси X и Y :

$$\begin{cases} L_1 \cos \varphi_1 + L_2 \cos \varphi_2 = x_c; \\ a + L_1 \sin \varphi_1 - L_2 \sin \varphi_2 = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

$$(2.6)$$

Решение задачи о положениях

Определим функции положения ползуна $x_c(\varphi_1)$ и шатуна $\varphi_2(\varphi_1)$.

Из (2.6) получаем $\sin \varphi_2 = \frac{a + L_1 \sin \varphi_1}{L_2}$, откуда $\varphi_2 = \arcsin \frac{a + L_1 \sin \varphi_1}{L_2}$, из

(2.5) получаем $x_c = L_1 \cos \varphi_1 + L_2 \cos(\arcsin \frac{a + L_1 \sin \varphi_1}{L_2})$.

Решение задачи о скоростях

Определим аналог скорости ползуна $\frac{dx_c}{d\varphi_1}$ и шатуна $\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}$, для чего продифференцируем уравнение (2.5) и (2.6):

$$\begin{cases} -L_1 \sin \varphi_1 - L_2 \sin \varphi_2 \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = \frac{dx_c}{d\varphi_1}; \\ L_1 \cos \varphi_1 - L_2 \cos \varphi_2 \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

$$(2.8)$$

Из (2.8) получаем аналог скорости шатуна

$$\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = \frac{L_1 \cos \varphi_1}{L_2 \cos(\arcsin \frac{a + L_1 \sin \varphi_1}{L_2})},$$

тогда угловая скорость шатуна $\omega_2 = \omega_1 \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}$.

Из (2.7) получаем аналог скорости ползуна

$$\frac{dx_c}{d\varphi_1} = -L_1 \sin \varphi_1 - L_2 \sin(\arcsin \frac{a + L_1 \sin \varphi_1}{L_2}) \frac{L_1}{L_2} \frac{\cos \varphi_1}{\cos(\arcsin \frac{a + L_1 \sin \varphi_1}{L_2})},$$

тогда скорость ползуна вычисляется по формуле $v_c = \omega_1 \frac{dx_c}{d\varphi_1}$.

Решение задачи об ускорениях

Определим аналоги ускорений шатуна $\frac{d^2 x_c}{d\varphi_1^2}$ и ползуна $\frac{d^2 \varphi_2}{d\varphi_1^2}$, для чего продифференцируем уравнения по $d\varphi_1$ (2.7) и (2.8):

$$-L_1 \cos \varphi_1 - L_2 \cos(\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1})^2 - L_2 \sin \frac{d^2 \varphi_2}{d\varphi_1^2} = \frac{d^2 x_c}{d\varphi_1^2}; \quad (2.9)$$

$$L_1 \sin \varphi_1 + L_2 \sin(\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1})^2 - L_2 \cos \frac{d^2 \varphi_2}{d\varphi_1^2} = 0. \quad (2.10)$$

Из (2.10) получим аналог ускорения шатуна $\frac{d^2 \varphi_2}{d\varphi_1^2}$, тогда угловое ускорение шатуна можно вычислить по формуле

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} + \omega_1^2 \frac{d^2 \varphi_2}{d\varphi_1^2}.$$

Из (2.9) получим аналог ускорения ползуна $\frac{d^2 x_c}{d\varphi_1^2}$, тогда ускорение ползуна можно вычислить по формуле

$$a_c = \varepsilon_1 \frac{dx_c}{d\varphi_1} + \omega_1^2 \frac{d^2 x_c}{d\varphi_1^2}.$$

Аналитическое исследование шарнирного четырёхзвенника, кулисного, тангенсного, синусного и других механизмов можно найти в работах [1, 4].

3. СИЛОВОЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

3.1. Общие сведения и определения. Силы, действующие в механизмах

При проведении силового анализа решаются основные задачи:

1. Определение реакций в кинематических парах механизмов, находящихся под действием заданных внешних сил. Эти реакции затем используются для расчёта звеньев и элементов кинематических пар (например, подшипников) на прочность, жёсткость, долговечность и т.д.

2. Определение уравновешивающей силы $\vec{P}_{ур}$ или уравновешивающего момента $\vec{M}_{ур}$, приложенных к ведущему звену. Они уравновешивают внешние силы, приложенные к механизму. Эти величины нужны, например, для выбора двигателя, приводящего в движение данный механизм.

Силы, действующие в механизмах

Различают две группы сил.

Движущие силы $P_{дв}$ или моменты движущих сил $M_{дв}$, которые:

- совершают положительную работу;
- направлены в сторону скорости точки приложения силы или под острым углом к ней;
- задаются посредством механической характеристики двигателя.

Силы сопротивления P_C и их моменты M_C , которые:

- совершают отрицательную работу;
- направлены противоположно скорости.

В свою очередь силы сопротивления делятся на силы:

- полезного сопротивления $P_{н.с}$ и моменты $M_{н.с}$;
- вредного сопротивления: трение в кинематических парах, сопротивление среды, внутреннее сопротивление (например, силы упругости звеньев).

Кроме этого существуют:

- силы веса $Q = \rho V$, где ρ – плотность материала; V – объём звена детали;

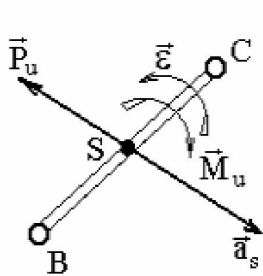
- силы инерции $\vec{P}_u = -m\vec{a}_S$;

- моменты сил инерции $\vec{M}_u = -J_S\vec{\varepsilon}$, где m_u , J_S – масса и массовый момент инерции звена; \vec{a}_S и $\vec{\varepsilon}$ – линейное и угловое ускорения;

- силы реакций в кинематических парах \vec{R} .

Силы инерции звеньев и моменты сил инерции

Из теоретической механики известно, что все силы инерции звена, совершающего плоскопараллельное движение и имеющего плоскость симметрии, параллельную плоскости движения, могут быть сведены к силе



инерции \vec{P}_u , приложенной в центре масс S звена, и паре сил инерции, момент которых обозначим \vec{M}_u (рис. 3.1).

$$\vec{P}_u = -m\vec{a}_s - \text{главный вектор сил инерции,}$$

или сила инерции; $\vec{M}_u = -J_S\vec{\epsilon}$ – главный момент сил инерции, или момент сил инерции; m – масса звена;

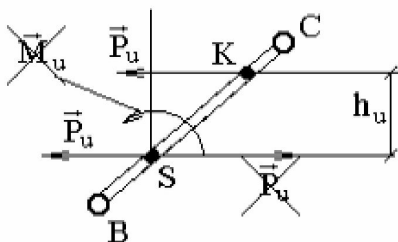
Рис. 3.1. Сила инерции J_S – массовый момент инерции относительно центра масс; \vec{a}_s – ускорение центра масс; $\vec{\epsilon}$ – угловое ускорение звена.

\vec{P}_u и \vec{M}_u направлены в стороны, противоположные ускорениям \vec{a}_s и $\vec{\epsilon}$.

Для дальнейших расчётов удобно заменить \vec{P}_u и \vec{M}_u одной силой, используя для этого 3 метода.

Метод замещающих точек подробно представлен в [3. С. 252].

Перенос силы \vec{P}_u на плечо $h_u = \frac{M_u}{P_u}$: момент сил инерции \vec{M}_u



заменяется парой сил \vec{P}_u с плечом h_u (рис. 3.2), причём одна сила приложена к центру масс звена S и направлена противоположно преобразуемой силе \vec{P}_u , а другая смещена на плечо h_u и приложена к точке K – центру качания звена.

Рис. 3.2. Перенос силы на плечо при замене силы и момента одной силой

Определение центра качания звена через мгновенный центр ускорений (МЦУ).

При этом сила инерции \vec{P}_u переносится параллельно самой себе на расстояние S_2K_2' (рис. 3.3), вычисленное по формуле

$$S_2K_2' = \frac{J_{S_2}}{m_2(P_{a_2}'S_2)\mu_L^2}, \text{ мм,}$$

где P_{a_2}' – мгновенный центр ускорений звена; S_2K_2' откладывается в сторону, являющуюся продолжением отрезка $P_{a_2}'S_2$.

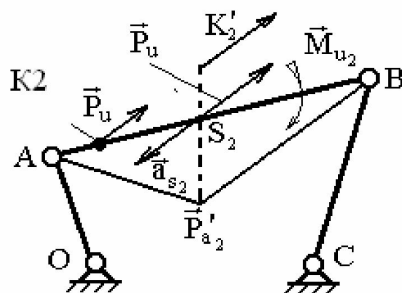


Рис. 3.3. Определение центра качания звена

3.2. Статическая определимость кинематической цепи

При силовом анализе механизмов (определении неизвестных сил, действующих на движущиеся звенья) можно использовать уравнения (законы) статики. Докажем это положение, проанализировав реакции в кинематических парах (табл.).

Кинематические пары	Равновесие каждого звена	Известные параметры	Неизвестные параметры
5-й класс Вращательная	 или $\vec{R}_{3-2} = -\vec{R}_{2-3}$	Точка приложения	Величина, направление
 Поступательная	 или $\vec{R}_{0-5} = -\vec{R}_{5-0}$	Направление	Величина, точка приложения
4-й класс 	 или $\vec{R}_{1-2} = -\vec{R}_{2-1}$	Точка приложения, направление	Величина

Примечание. 2, 3, 5 – номера звеньев.

В кинематических парах 5-го класса известно по одному параметру сил реакций, неизвестны два, в кинематических парах 4-го класса известны два параметра, а неизвестен один.

Таким образом, плоская кинематическая цепь, состоящая из кинематических пар 5-го и 4-го классов, имеет $2P_5 + P_4$ неизвестных величин сил реакций.

В то же время для одного звена можно составить 3 уравнения статики, а для n звеньев – $3n$ уравнений статики.

Кинематическая цепь будет статически определима, если число неизвестных величин сил реакций не превышает числа возможных уравнений статики, т.е.

$$3n = 2P_5 + P_4.$$

Это и есть *условие статической определимости кинематической цепи*.

Полученное равенство можно записать в виде

$$3n - 2P_5 - P_4 = 0.$$

Но запись слева от знака равенства является числом степеней свободы кинематической цепи W , т.е.

$$W = 3n - 2P_5 - P_4 = 0.$$

Как известно (см. раздел 1 «Структура и классификация механизмов»), таким свойством ($W=0$) обладают структурные группы, или группы Асура – *статически определимые кинематические цепи*.

Метод силового анализа, приведенный ниже, называется кинестатическим, так как для определения сил реакций в кинематических парах, возникающих при движении звеньев, используются уравнения статики.

Порядок (последовательность) силового анализа рычажного механизма:

1. Выделяем из механизма последнюю (крайнюю, наиболее удаленную от ведущего звена) структурную группу и проводим её силовой расчёт, используя уравнения статики.
2. Выделяем из механизма следующую структурную группу и проводим её силовой расчёт.
3. Силовой расчёт заканчиваем силовым расчётом ведущего звена.

Пример

Задан шестизвенный рычажный механизм (рис. 3.4), состоящий из начального механизма (звенья 0 и 1) и структурных групп, образованных звеньями 2 и 3 (двухповодковая структурная группа 2-го класса, 1-го вида) и 4, 5 (структурная группа 2-го класса, 2-го вида).

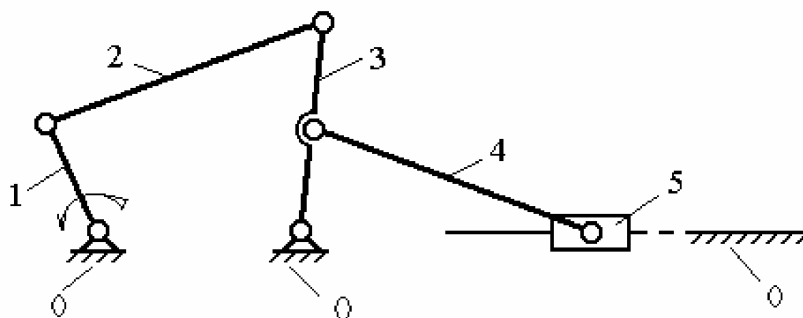
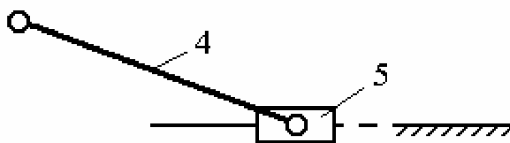


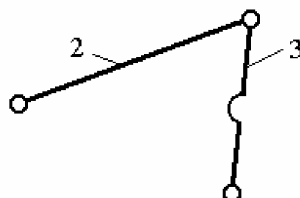
Рис. 3.4. Шестизвенный рычажный механизм

Решение

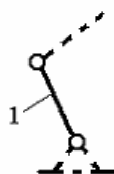
1. Проводим силовой расчёт структурной группы 4-5 (определяем неизвестные реакции, если известны внешние силы, действующие на звенья 4 и 5):



2. Проводим силовой расчёт структурной группы 2-3:



3. Проводим силовой расчёт ведущего звена:



3.3. Силовой анализ характерных структурных групп

3.3.1. Структурная группа 2-го класса, 1-го вида

Известны внешние силы \vec{P}_{u2} и \vec{P}_{u3} , а также точки их приложения K_2 и K_3 .

Найти реакции в кинематических парах A , B и C (рис. 3.5).

Решение

1. Строим структурную группу в масштабе длин μ_L (рис. 3.5).

2. Наносим на неё все внешние силы \vec{P}_{u2} и \vec{P}_{u3} .

3. В кинематических парах A и C действие отброшенных звеньев (например, кривошипа 1 и стойки 0) заменяем силами реакций \vec{R}_{1-2} и \vec{R}_{0-3} , разложив каждую из них на нормальную и тангенциальную составляющие:

$$\vec{R}_{1-2} = \vec{R}_{1-2}^n + \vec{R}_{1-2}^t \text{ и } \vec{R}_{0-3} = \vec{R}_{0-3}^n + \vec{R}_{0-3}^t.$$

4. Составляем уравнение равновесия структурной группы:

$$\sum \vec{P}_i = 0, \text{ или } \vec{R}_{1-2}^n + \vec{R}_{1-2}^t + \vec{P}_{u2} + \vec{P}_{u3} + \vec{R}_{0-3}^n + \vec{R}_{0-3}^t = 0. \quad (3.1)$$

5. Вычисляем величины тангенциальных сил; для этого используем условие, при котором моменты сил относительно точки B , приложенных к звеньям 2 и 3, равны нулю:

$$\Sigma M_B^{362}(\vec{P}_i) = 0, R_{1-2}^\tau AB - P_{u2} h_2 = 0, \text{ откуда } R_{1-2}^\tau = \frac{P_{u2} h_2}{AB};$$

$$\Sigma M_B^{363}(\vec{P}_i) = 0, R_{0-3}^\tau BC - P_{u3} h_3 = 0, \text{ откуда } R_{0-3}^\tau = \frac{P_{u3} h_3}{BC}.$$

Следует учитывать, что если в процессе решения эти тангенциальные силы получились с отрицательным знаком, то на плане структурной группы их предварительно выбранное направление следует поменять на противоположное.

6. Неизвестные \vec{R}_{1-2}^n и \vec{R}_{0-3}^n находим путём графического изображения векторного уравнения (3.1) в масштабе, т.е. *строим план сил структурной группы*, для чего выбираем масштаб плана сил

$$\mu_p = \frac{R_{1-2}^\tau}{Z_{1-2}^\tau}, \text{ Н/м,}$$

где Z_{1-2}^τ – длина вектора, мм, изображающего силу \vec{R}_{1-2}^τ на плане сил, выбирается произвольно.

При выборе учитываются два условия: план сил должен размещаться на отведённом месте чертежа, масштаб должен быть удобен для расчётов (быть круглым числом).

Переводим (пересчитываем) силы уравнения (3.1) в векторные отрезки с длинами: $Z_{u2} = \frac{P_{u2}}{\mu_p}$, мм; $Z_{u3} = \frac{P_{u3}}{\mu_p}$, мм; $Z_{0-3}^\tau = \frac{R_{0-3}^\tau}{\mu_p}$, мм.

Тогда уравнение (3.1) запишется в виде

$$\vec{R}_{1-2}^n + \vec{Z}_{1-2}^\tau + \vec{Z}_{u2} + \vec{Z}_{u3} + \vec{Z}_{0-3}^\tau + \vec{Z}_{0-3}^n = 0. \quad (3.2)$$

Построение плана сил ведём в последовательности написания уравнения (3.2), (рис. 3.6).

7. Вычисляем реакции

$$R_{1-2} = Z_{1-2} \mu_p; R_{0-3} = Z_{0-3} \mu_p,$$

где длины отрезков Z_{1-2} и Z_{0-3} берем в мм из плана сил.

8. Определяем реакцию в кинематической паре В, для чего составляем векторное уравнение равновесия звена 2 или звена 3. Например, условие равновесия звена 2 можно записать в виде

$$\vec{R}_{1-2} + \vec{P}_{u2} + \vec{R}_{3-2} = 0, \quad (3.3)$$

где R_{3-2} – сила реакции в кинематической паре В.

Так как \vec{R}_{1-2} и \vec{P}_{u2} известны, то, построив план сил звена 2 (рис. 3.7) и графически изобразив уравнение (3.3), получим силу \vec{R}_{3-2} :

$$R_{3-2} = z_{3-2} \mu_p.$$

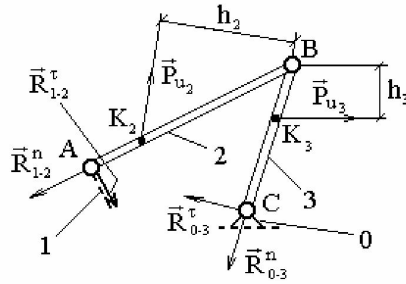


Рис. 3.5. План структурной группы 2-го класса, 1-го вида

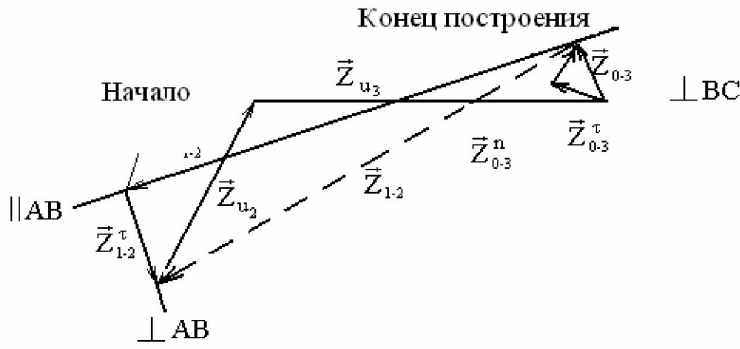


Рис. 3.6. План сил структурной группы

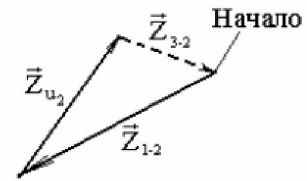


Рис. 3.7. План сил звена 2

3.3.2. Структурная группа 2-го класса, 2-го вида

Условие равновесия структурной группы (рис. 3.8):

$$\vec{R}_{3-4}^n + \vec{R}_{3-4}^\tau + \vec{P}_4 + \vec{P}_5 + \vec{R}_{0-5} = 0 . \quad (3.4)$$

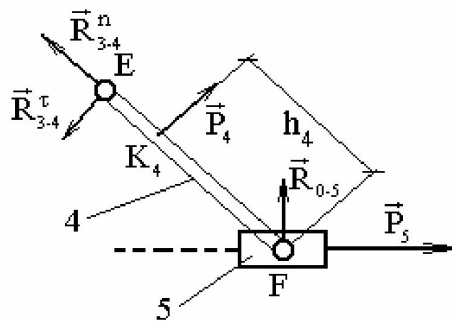


Рис. 3.8. План структурной группы 2-го класса, 2-го вида

Величина тангенциальной составляющей силы реакции в шарнире вычисляется по формуле, полученной из условия равенства нулю моментов всех сил, приложенных к шатуну 4, относительно точки F:

$$\sum M_F(P_i) = 0 ; R_{3-4}^\tau \cdot EF - P_4 \cdot h_4 = 0 ,$$

откуда находим

$$R_{3-4}^\tau = \frac{P_4 h_4}{EF} ,$$

где h_4 – плечо силы P_4 относительно точки F , берется из плана структурной группы (см. рис. 3.6), построенной в масштабе длин μ_l .

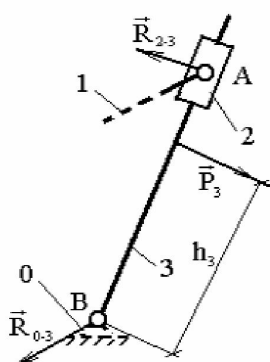
Силы \vec{R}_{3-4}^n и \vec{R}_{0-5}^r берут из плана сил, построенного с использованием уравнения (3.4) в выбранном масштабе μ_p , а силу \vec{R}_{4-5} находят из уравнения равновесия ползуна $\vec{P}_5 + \vec{R}_{0-5} + \vec{R}_{4-5} = 0$, построив план сил ползуна.

3.3.3. Структурная группа 2-го класса, 3-го вида

Рассмотрим условие равновесия звена 3 (рис. 3.9)

$$\vec{R}_{2-3} + \vec{P}_3 + \vec{R}_{0-3} = 0, \quad (3.5)$$

где сила \vec{P}_3 задана.



Из условия равенства нулю всех моментов сил звена 3 относительно точки B находим силу \vec{R}_{2-3} , предполагая, что без учета трения ее вектор перпендикулярен AB :

$$\Sigma M_B = 0; R_{2-3} AB - P_3 h_3 = 0,$$

где h_3 – плечо момента силы P_3 ; $\vec{R}_{2-3} \perp AB$.

$$\text{Отсюда } R_{2-3} = \frac{P_3 h_3}{AB}.$$

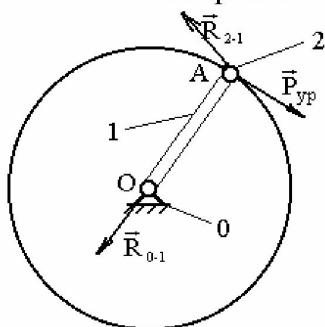
Рис. 3.9. План структурной группы 2-го класса, 3-го вида

Силу реакции между звеньями 1 (кривошипом) и 2 (ползуном) \vec{R}_{1-2} находим из условия $\vec{R}_{1-2} = \vec{R}_{2-3}$. Силу реакции R_{0-3} между коромыслом 3 и станиной можно найти, построив план сил, используя уравнение (3.5) равновесия звена 3.

3.3.4. Силовой анализ ведущего звена

Вариант 1 (ведущее звено – зубчатое колесо или кривошип)

На изображенном плане кривошипа (рис. 3.10) сила реакции в кинематической паре A $\vec{R}_{2-1} = -\vec{R}_{1-2}$, $P_{yp} \perp OA$.



Силу \vec{R}_{1-2} берём из силового анализа, проведённого ранее для присоединённой к кривошипу структурной группы. Сила реакции $\vec{R}_{0-1} \parallel OA$ (исходя из теоремы о трёх силах, в соответствии с которой линии сил, действующих на тело, находящееся в равновесии, пересекаются в одной точке. В данном случае это точка A).

Рис. 3.10. План кривошипа с приложенными силами

Условие равновесия звена 1 (кривошипа)

$$\vec{R}_{2-1} + \vec{P}_{yp} + \vec{R}_{0-1} = 0. \quad (3.6)$$

Строим план сил звена 1 в масштабе $\mu_p = \frac{P_{yp}}{Z_{yp}}$ (рис. 3.11), предварительно записав уравнение равновесия (3.6) в виде векторных отрезков

$$\vec{Z}_{2-1} + \vec{Z}_{yp} + \vec{Z}_{0-1} = 0.$$

Уравновешивающая сила вычисляется по формуле

$$P_{yp} = \mu_p Z_{yp},$$

а реакция в кинематической паре О – по формуле

$$R_{0-1} = \mu_p Z_{0-1},$$

где величины \vec{Z}_{yp} и \vec{Z}_{0-1} берутся измерением на плане сил (рис. 3.11).

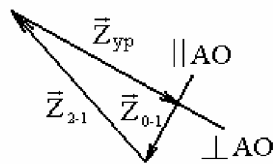


Рис. 3.11. План сил кривошипа

Вариант 2 (ведущее звено – муфта скольжения, совмещённая с кривошипом)

В этом случае вместо уравновешивающей силы к ведущему звену приложен уравновешивающий момент \vec{M}_{yp} (рис. 3.12).

Уравнения равновесия ведущего звена 1:

$$\sum P_i = 0; \quad \vec{R}_{2-1} + \vec{R}_{0-1} = 0,$$

$$\sum M_O = 0; \quad R_{2-1} h_{2-1} - M_{yp} = 0,$$

где h_{2-1} – плечо силы R_{2-1} относительно оси вращения кривошипа O , откуда $\vec{R}_{2-1} = -\vec{R}_{0-1}$, $M_{yp} = R_{2-1} h_{2-1}$.

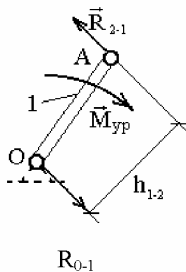


Рис. 3.12. План муфты с кривошипом

Для нахождения величины плеча h_{2-1} можно построить план звена в масштабе, нанести силы и провести необходимые измерения.

3.4. Теорема о «жёстком» рычаге Жуковского

Теорема используется для определения уравновешивающей силы \vec{P}_{yp} или уравновешивающего момента \vec{M}_{yp} без предварительного определения реакций в кинематических парах механизма и является графической интер-

претацией принципа возможных перемещений точек приложения сил. Для реального механизма эти возможные перемещения являются реальными.

Исходя из принципа сохранения энергии сумма работ всех внешних сил, приложенных к звеньям механизма, равна нулю. Это условие можно записать в виде

$$\sum P_i dS_i \cos \alpha_i + P_{yp} dS_{yp} \cos \alpha_{yp} = 0, \quad (3.7)$$

где P_i – все внешние силы, в том числе силы полезного и вредного сопротивления, силы инерции и веса, действующие на звенья механизма (силы реакции здесь не учитываются); dS_i – элементарные перемещения точек приложения этих сил; α_i – угол приложения внешних сил, или угол давления (угол между вектором силы и вектором скорости).

Разделим уравнение (3.7) на бесконечно малый интервал времени dt и получим (при условии, что $dS/dt = v$)

$$\sum P_i v_i \cos \alpha_i + P_{yp} v_{yp} \cos \alpha_{yp} = 0, \quad (3.8)$$

то есть сумму мгновенных мощностей, равную нулю.

Для определения величины мгновенных мощностей можно выполнить решение следующей графической интерпретации. Дано звено BC с известной скоростью \vec{v}_D точки D и приложенной к этой точке силой \vec{P}_i (рис. 3.13). Построим план скоростей, повернутый на 90° , где $v_D = (P_v d) \mu_v$, $(P_v d) \perp v_D$. Вычислим момент силы \vec{P}_i относительно полюса P_v плана скоростей:

$$M_{P_v}(\vec{P}_i) = P_i h_i \mu_v = P_i (P_v d) \cos \alpha_i \mu_v = P_i v_D \cos \alpha_i.$$

С учётом этого уравнение (3.8) можно записать как $(\sum P_i h_i + P_{yp} h_{yp}) \mu_v = 0$.

Так как масштаб $\mu_v \neq 0$, то можно сформулировать теорему Жуковского:

$$(\sum P_i h_i + P_{yp} h_{yp}) = 0, \quad (3.9)$$

или алгебраическая сумма моментов всех внешних сил, перенесенных с механизма в соответствующие точки повернутого на 90° плана скоростей, относительно полюса равна нулю.

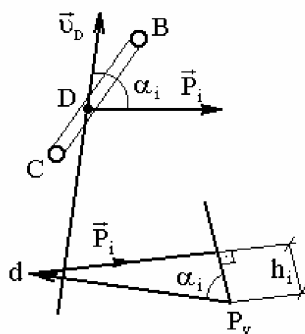


Рис. 3.13. План звена с повернутым на 90° планом скоростей

Последовательность определения P_{yp} в механизме по теореме Жуковского:

1. Построить повернутый на 90° (в любую сторону) план скоростей механизма.
2. В соответствующие точки плана скоростей нанести все ранее определённые внешние силы (включая силы инерции и силы веса), действующие на механизм, в том числе и уравновешивающую силу P_{yp} .

3. Составить уравнение вида (3.9). Плечи моментов сил брать из поворнутого плана скоростей.

4. Из составленного уравнения определить P_{yp} .

Пример

Заданы внешние силы, действующие на звенья механизма P_2 и P_3 . Найдём уравновешивающую силу P_{yp} , для чего построим план механизма в масштабе длин (рис. 3.14) и поворнутый на 90° план скоростей (рис. 3.15).

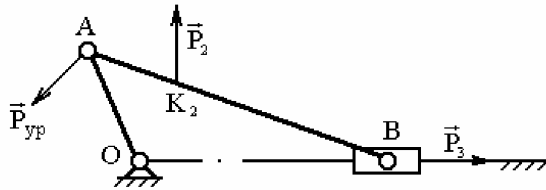


Рис. 3.14. План механизма

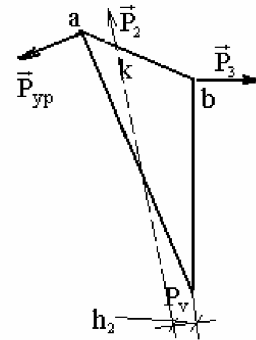


Рис. 3.15. Поворнутый на 90° план скоростей

Приложим силы в соответствующие точки k и b_3 поворнутого плана скоростей, обозначаем плечи сил. Составляем уравнение моментов сил относительно полюса плана скоростей:

$$\Sigma M_{P_v} = P_{yp} (P_v a) - P_2 h_2 - P_3 (P_v b) = 0.$$

Отсюда

$$P_{yp} = \frac{P_2 h_2 + P_3 (P_v b)}{P_v a}.$$

Если сила P_{yp} получается с отрицательным знаком, то её предварительно выбранное направление следует поменять на противоположное.

3.5. Силовой анализ механизма с учетом сил трения

3.5.1. Теоретические основы определения коэффициента трения

Трение в поступательной кинематической паре

При перемещении одного тела (звена механизма) относительно находящегося с ним в контакте другого тела (звена) в месте их контакта возникает сила, сопротивляющаяся перемещению, – сила трения F (рис. 3.16).

Величину коэффициента трения в поступательной кинематической паре можно определить с помощью так называемого закона Кулона, в соответствии с которым величина силы трения F прямо пропорциональна нормальной силе N между соприкасающимися звеньями. Векторная сумма

сил \vec{F} и \vec{N} равна полной силе реакций в кинематической паре: $\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}$ (рис. 3.16).

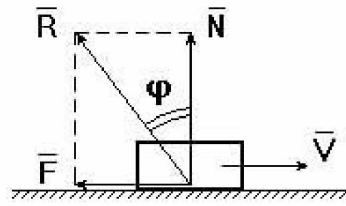


Рис. 3.16. Схема сил в поступательной кинематической паре

Отношение $\frac{F}{N} = \operatorname{tg} \varphi = f$ называют коэффициентом трения скольжения в поступательной кинематической паре, а угол $\varphi = \operatorname{arctg} f$ – углом трения скольжения.

Полная реакция \vec{R} отклоняется на угол трения φ в сторону, противоположную скорости \vec{v} (см. рис. 3.16).

Величину коэффициента трения скольжения f можно определить экспериментально или по справочникам (величина f зависит от шероховатости, материалов, трущихся поверхностей, наличия смазки, ее качества, температуры и т.д.).

Трение во вращательной кинематической паре

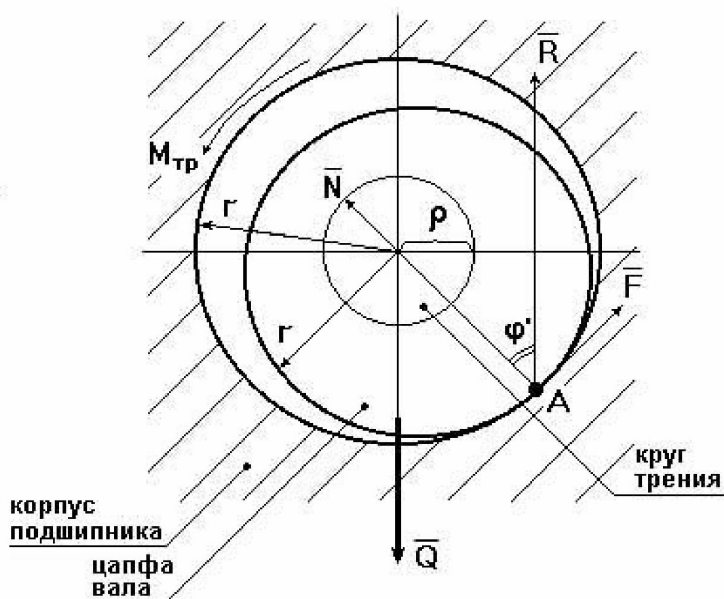


Рис. 3.17. Схема сил во вращательной кинематической паре

Внешние нагрузки, действующие на вал при его вращении, показаны на схеме рис. 3.17. Здесь А – точка приложения нормальной реакции \vec{N} , причем \vec{N} – равнодействующая всех нормальных сил (эпюра этих сил может иметь различный вид), (рис. 3.18); \vec{F} – сила трения (равнодействующая всех сил трения, распределенных по поверхности контакта); \vec{Q} – сила давления цапфы вала на опору (корпус подшипника); \vec{R} – сила реакции во вращательной кинематической паре, $\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}$; $\vec{Q} = -\vec{R}$; φ' – угол трения; r – радиус цапфы (опорной части) вала; $\rho = r \cdot \sin \varphi' \approx r \cdot \operatorname{tg} \varphi' = r \cdot f'$ – радиус круга трения; f' – приведенный коэффициент трения.

Во вращательной кинематической паре (см. рис. 3.15) реакция \bar{R} отстоит от оси вращения на величину радиуса круга трения ρ , причем \bar{R} всегда касательна к кругу трения.

$$M_{mp} = R \cdot \rho = Q \cdot r \cdot f'.$$

Величину f' можно определить:

- экспериментально (например, используя метод выбега, который описан в «Лабораторном практикуме по теории механизмов и машин») [6];
- по эмпирическим формулам с учетом износа подшипника и соответствующего изменения эпюр давления (рис. 3.18): для нового подшипника $f' = \frac{\pi}{2} \cdot f$, для изношенного – $f' = \frac{4}{\pi} \cdot f$, где f – коэффициент трения скольжения в поступательной кинематической паре (берется из справочников).

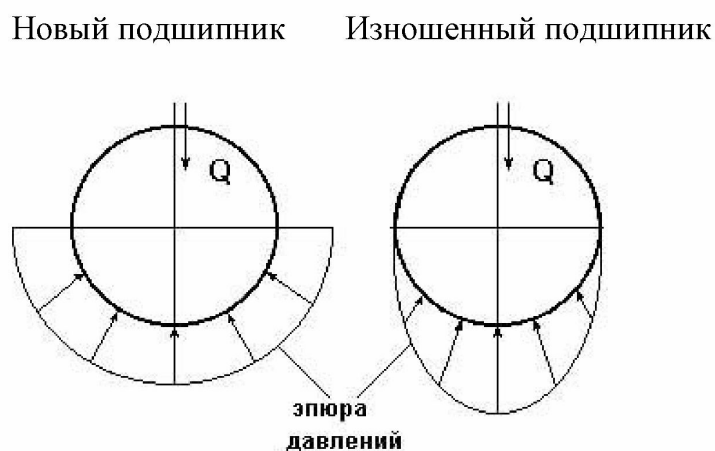


Рис. 3.18. Примерные схемы эпюр давления в новом и изношенном подшипниках скольжения

Трение качения в высшей кинематической паре

Картину внешних сил и эпюр распределения давлений в месте контакта тел качения можно условно отобразить на нижеприведенных схемах (рис. 3.19). В состоянии покоя эпюра напряжений в зоне контакта симметрична относительно общей нормали, проведенной через условную точку касания, а равнодействующая сила N совпадает с нормалью. При качении симметрия эпюры нарушается, а сила N смещается в направлении качения на расстояние k .

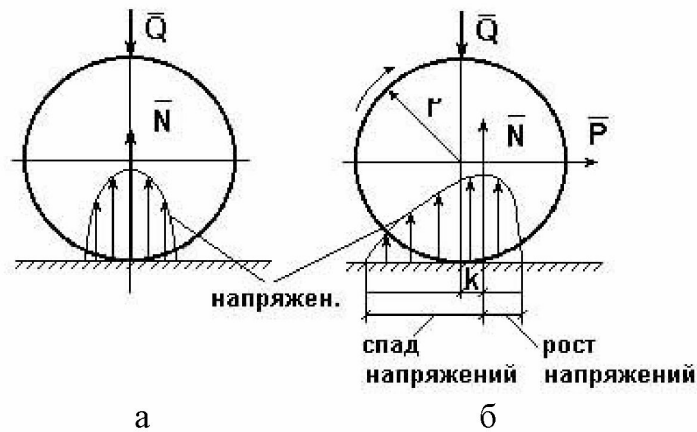


Рис. 3.19. Примерные схемы сил и эпюры давления в зоне контакта цилиндра с плоскостью: а – состояние покоя; б – состояние перекатывания

Здесь \bar{N} – равнодействующая сила давлений в месте смятия соприкасающихся звеньев (тел качения); \bar{Q} – нагружающая сила, $\bar{Q} = -\bar{N}$; $M_{mp} = k \cdot Q$ – момент трения качения; k – плечо силы трения качения или коэффициент трения качения (имеет размерность длины); \vec{P} – сила перекатывания.

Условие равновесия перекатывающегося тела в форме моментов можно записать как $\vec{P} \cdot r = \bar{Q} \cdot k = M_{mp}$, откуда $\vec{P} = k \cdot \frac{Q}{r}$.

3.5.2. Пример учета сил трения при силовом анализе механизма

Пусть задан кривошипно-ползунный механизм с известными внешними силами (рис. 3.20). Необходимо провести силовой анализ механизма, учитывая силы трения в кинематических парах.

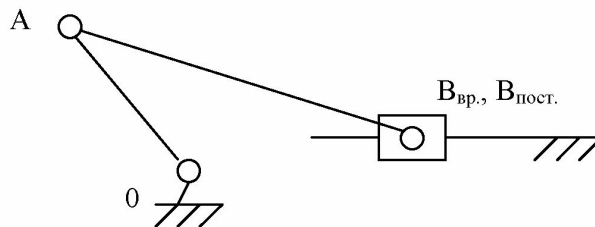


Рис. 3.20. Кинематическая схема кривошипно-ползунного механизма

Сначала проводим силовой анализ механизма без учета сил трения (см. примеры, приведенные выше). При этом определяем силы реакций в кинематических парах. Затем обозначаем силы реакций в кинематических парах, радиусы цапф валов и коэффициенты трения и заносим их в таблицу.

Кинематические пары	О	А	В _{вр}	В _{пост}
Параметры				
Силы реакций	R ₀	R _А	R _В ^{вр}	R _В ^{пост}
Радиусы цапф	r ₀	r _А	r _В	-
Коэффициенты трения	f ₀	f _А	f _В ^{вр}	f _В ^{пост}

Отразим трение в потерях мгновенных мощностей на трение в кинематических парах: вращательной – $N = M_m \cdot \omega$; поступательной – $N = F_{mp} \cdot v$, где $M_{mp} = R \cdot \rho = R \cdot r \cdot f$ – момент трения во вращательной кинематической паре; $F_{mp} = f \cdot R$ – сила трения в поступательной кинематической паре.

Применительно к кривошипно-ползунному механизму (см. рис. 3.20) выразим потери мощностей на трение уравнением

$$N_0 + N_A + N_B^{ep} + N_B^{nocm} = M_{mp} \cdot \omega_1,$$

где $N_0, N_A, N_B^{ep}, N_B^{nocm}$ – соответственно потери мощности на трение в кинематических парах O, A, B^{ep}, B^{nocm} ; ω_1 – угловая скорость кривошипа; M_{mp} – приведенный к кривошипу момент от всех сил трения в кинематических парах.

Тогда уравнение мощностей запишем в виде

$$R_0 \cdot r_0 \cdot f_0 \cdot \omega_1 + R_A \cdot r_A \cdot f_A \cdot (\omega_1 - \omega_2) + R_B^{ep} \cdot r_B^{ep} \cdot f_B^{ep} \cdot \omega_2 + R_B^{nocm} \cdot f_B^{nocm} \cdot V_B = M_{mp} \cdot \omega_1.$$

Из этого уравнения определяем момент трения M_{mp} на ведущем звене, который затем учитывается при расчете уравновешивающего момента M_{yp} или уравновешивающей силы P_{yp} на ведущем звене механизма.

4. ДИНАМИКА МАШИН

4.1. Общие положения

Задачами динамического анализа и синтеза механизма, машины являются изучение режимов движения с учетом действия внешних сил и установление способов, обеспечивающих заданные режимы движения. При этом могут определяться мощности, необходимые для обеспечения заданного режима движения машины, проводится сравнительная оценка механизмов с учетом их механического коэффициента полезного действия, устанавливаются законы движения ведущего звена (например, колебания угловой скорости кривошипа за один оборот) под действием внешних сил, приложенных к звеньям механизма, а также решаются задачи подбора оптимальных соотношений между силами, массами, размерами звеньев механизмов.

В динамике машин объектом изучения (исследования) является машинный агрегат. В общем виде его можно представить как механическую систему, состоящую из трех основных частей (рис. 4.1): машина-двигатель, передаточный механизм и рабочая машина (или исполнительный механизм). В ряде случаев в состав машинного агрегата входит система управления.

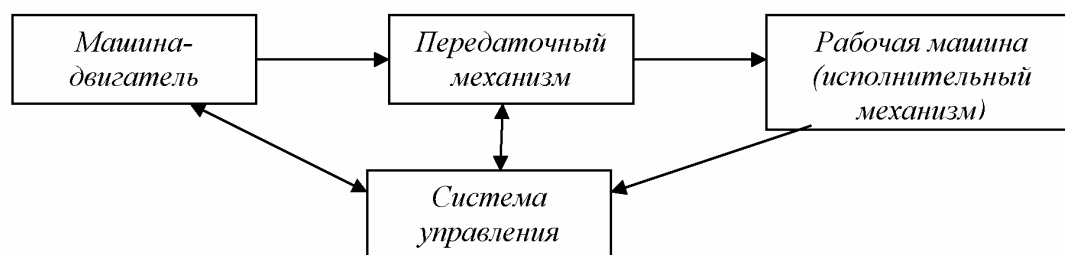


Рис. 4.1. Составные части машинного агрегата

В *машине-двигателе* какой-либо вид энергии преобразуется в механическую энергию, необходимую для приведения в движение рабочей машины. Например, в электродвигателе электрическая энергия преобразуется в механическую, а в двигателе внутреннего сгорания в механическую энергию преобразуется тепловая энергия сгорания топлива.

Передаточный механизм служит для преобразования движения, изменения характера движения, скорости, направления движения и т.д.

Рабочая машина предназначена для выполнения работы, связанной с трудовой деятельностью человека или выполнением технологического процесса.

Работа – физическая величина, характеризующая преобразование энергии из одной формы в другую.

Элементарная работа силы выражается формулой

$$dA = P \cdot dS \cdot \cos \alpha ,$$

где P – сила; dS – элементарная величина перемещения точки приложения силы; α – угол между векторами силы и скорости.

Элементарная работа момента силы выражается формулой

$$dA = M \cdot d\varphi,$$

где M – момент силы; $d\varphi$ – элементарный угол поворота.

Размерность работы измеряется в джоулях: Дж = Н · м.

Полная работа выражается формулами

$$A = \int dA = \int P \cos \alpha \, dS, \text{ или } A = \int M \, d\varphi.$$

Мощность – это энергетическая характеристика, равная отношению работы к интервалу времени ее совершения, выражается формулами

$$N = P \cdot V \cdot \cos \alpha,$$

где V – скорость точки приложения силы P ,

$$\text{или } N = M \cdot \omega,$$

где ω – угловая скорость звена, к которому приложен момент.

Размерность мощности измеряется в ваттах: Вт = Дж/с; 1000 Вт = 1 кВт (киловатт), 1 кВт = 1,36 л.с.

4.2. Кинетическая энергия, приведенная масса, приведенный момент инерции механизма

Анализ движения машинного агрегата, находящегося под действием приложенных к нему внешних сил, удобно проводить с использованием метода приведения масс и сил к какому-либо звену механизма. Он сводится к анализу динамики тела (звена приведения), к которому приведены все внешние силы и моменты. Чаще всего звеном приведения выступает ведущее звено механизма.

Задача динамического анализа – определение истинного закона движения ведущего звена механизма, находящегося под действием заданных внешних сил и моментов, действующих в машинном агрегате.

Кинетическая энергия механизма

Для i -го звена, совершающего сложное движение (например, для шатуна кривошипно-ползунного механизма), кинетическую энергию можно выразить формулой

$$E_i = \frac{m_i \cdot V_{si}^2}{2} + \frac{I_{si} \cdot \omega_i^2}{2},$$

где первое слагаемое правой части – это кинетическая энергия поступательного движения центра масс звена; второе слагаемое – кинетическая энергия вращательного движения; m_i – масса звена; V_{si} –

скорость центра масс; J_{si} – момент инерции звена относительно центра масс; ω_i – угловая скорость звена.

Для всего механизма кинетическая энергия равна сумме кинетических энергий всех звеньев механизма:

$$E_{i\dot{\alpha}\ddot{\alpha}} = \sum_{i=1}^n E_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{m_i \cdot V_{si}^2}{2} + \frac{I_{si} \cdot \omega_i^2}{2} \right), \quad (4.1)$$

где n – количество подвижных звеньев.

Приведенная масса механизма

Условно заменим механизм его динамической моделью. Например, кривошипно-ползунный механизм (рис. 4.2) заменим динамической моделью, состоящей из стойки и кривошипа.

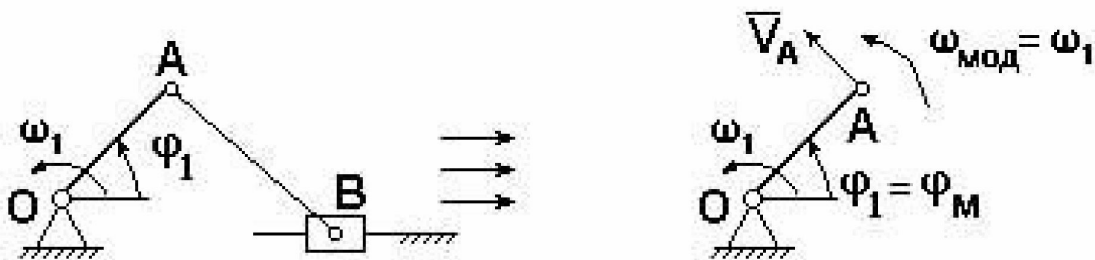


Рис. 4.2. Замена кривошипно-ползунного механизма динамической моделью

Здесь OA – звено приведения механизма, в котором как бы сосредоточена инертность всех звеньев механизма, A – точка приведения.

Уравнение (4.1) умножим и разделим на квадрат скорости точки приведения V_A :

$$\hat{A}_{i\dot{\alpha}\ddot{\alpha}} = \frac{V_A^2}{2} \sum_{i=1}^n \left[m_i \left(\frac{V_{si}}{V_A} \right)^2 + I_{si} \left(\frac{\omega_i}{V_A} \right)^2 \right].$$

Выражение в квадратных скобках имеет размерность массы (кг) и называется приведенной массой m_{np} механизма в точке A .

Тогда

$$E_{i\dot{\alpha}\ddot{\alpha}} = \frac{V_A^2 \cdot m_{np}}{2},$$

где

$$m_{np} = \sum_{i=1}^n \left[m_i \left(\frac{V_{si}}{V_A} \right)^2 + I_{si} \left(\frac{\omega_i}{V_A} \right)^2 \right]. \quad (4.2)$$

Приведенной массой механизма называется такая условная масса, которая как бы сосредоточена в точке приведения механизма,

кинетическая энергия которой равна сумме кинетических энергий всех звеньев механизма.

Приведенный момент инерции

Так как $V_{i\dot{a}} = \omega_1 \cdot l_{OA}$, где l_{OA} – длина звена приведения, $\omega_{i\dot{a}} = \omega_1$ – его угловая скорость, то кинетическую энергию механизма можно выразить уравнением

$$A_{i\dot{a}\dot{a}} = \frac{\dot{\omega}_{np} \cdot V_{i\dot{a}}^2}{2} = \frac{m_{np} \cdot l_{OA}^2 \cdot \omega_1^2}{2} = \frac{I_{np} \cdot \omega_1^2}{2},$$

где приведенный момент инерции механизма

$$I_{np} = m_{np} \cdot l_{i\dot{a}}^2 = l_{i\dot{a}}^2 \cdot \sum \left[m_i \left(\frac{V_{si}}{V_{i\dot{a}}} \right)^2 + I_{si} \left(\frac{\omega_i}{V_{i\dot{a}}} \right)^2 \right]. \quad (4.3)$$

Приведенным моментом инерции механизма называется такой условный момент инерции, которым как бы обладает звено приведения относительно оси вращения, кинетическая энергия которого (при таком моменте инерции) равна сумме кинетических энергий всех звеньев механизма.

Величины m_{np} и J_{np} не являются постоянными для данного механизма, а меняют свое численное значение в зависимости от положений звеньев, так как звенья меняют свои скорости.

Пример

Определить приведенную массу и приведенный момент инерции для заданного положения кривошипно-ползунного механизма (рис. 4.3), если известны положения центров масс звеньев (S_1 и S_2), линейные и угловые скорости звеньев и центров масс звеньев: v_{S_1} , v_{S_2} и v_B – скорости центров масс кривошипа, шатуна и ползуна, ω_1 и ω_2 – угловые скорости кривошипа и шатуна.

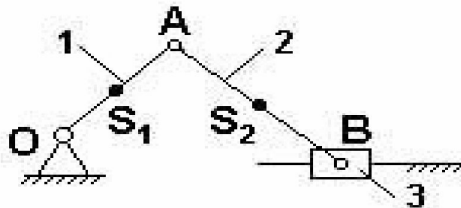


Рис. 4.3. Кривошипно-ползунный механизм

Пусть кривошип 1 – звено приведения, А – точка приведения.

Приведенная масса механизма согласно (4.2) вычисляется по формуле

$$m_{np} = m_1 \left(\frac{V_{s_1}}{V_{i\dot{a}}} \right)^2 + I_{s_1} \left(\frac{\omega_1}{V_{i\dot{a}}} \right)^2 + m_2 \left(\frac{V_{s_2}}{V_{i\dot{a}}} \right)^2 + I_{s_2} \left(\frac{\omega_2}{V_{i\dot{a}}} \right)^2 + m_3 \left(\frac{V_B}{V_{i\dot{a}}} \right)^2,$$

а приведенный момент инерции согласно (4.3) – по формуле

$$I_{np} = m_{np} \cdot l_{OA}^2.$$

4.3. Уравнение движения машины в форме кинетической энергии

Рассмотрим состояние механизма при двух различных положениях ведущего звена, разделяемых каким-либо промежутком времени dt или углом $d\varphi$ поворота ведущего звена – кривошипа (рис. 4.4).

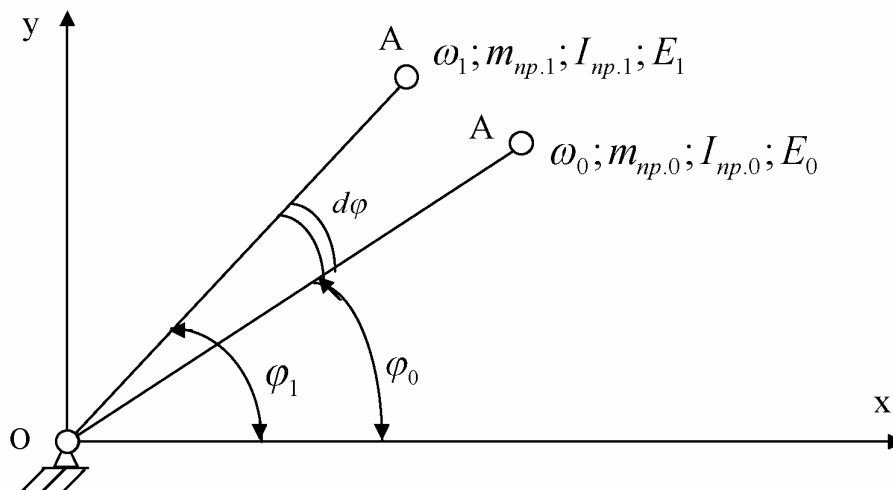


Рис. 4.4. Кинематические и динамические параметры механизма при различных положениях звена привода

При положении кривошипа φ_0 угловая скорость звена привода – ω_0 , $I_{np,0}$ – приведенный момент инерции механизма в рассматриваемом положении.

При положении $\varphi_1 = \varphi_0 + d\varphi$ угловая скорость звена привода – ω_1 , $I_{np,1}$ – приведенный момент инерции механизма.

Изменение кинетической энергии механизма ΔE за этот промежуток времени будет равно разности работ сил движущих $A_{дв}$ и сил сопротивления $A_{сопр}$, выполненных за это время (или избыточной работе $\dot{A}_{эсá} = \dot{A}_{аá} - \dot{A}_{мíð}$):

$$\Delta E = A_{дв} - A_{сопр} = A_{изб.} \quad (4.4)$$

$$\Delta E = E_1 - E_0 = \frac{I_{ид.1} \cdot \omega_1^2}{2} - \frac{I_{ид.0} \cdot \omega_0^2}{2}, \quad (4.5)$$

где E_0 и E_1 – величины кинетических энергий механизма при положениях φ_0 и φ_1 кривошипа.

$$A_{\partial\theta} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \dot{I}_{\dot{\alpha}\dot{\alpha}} \partial\varphi, \quad (4.6)$$

$$A_{\text{comp}} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \dot{I}_{\dot{m}\dot{\alpha}} \partial\varphi, \quad (4.7)$$

где $M_{\partial\theta}$ и M_{comp} – приведенные моменты сил движущих и сил сопротивлений.

Подставив (4.5-4.7) в (4.4), получим

$$\frac{I_{\dot{\alpha}.1} \cdot \omega_1^2}{2} - \frac{I_{\dot{\alpha}.0} \omega_0^2}{2} = \dot{A}_{\dot{\alpha}\dot{\alpha}}. \quad (4.8)$$

Из (4.8) выразим угловую скорость кривошипа при положении φ_1 :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2A_{\dot{\alpha}\dot{\alpha}}}{I_{np.1}} + \frac{I_{np.0}}{I_{np.1}} \cdot \omega_0^2}. \quad (4.9)$$

Уравнение (4.9) называют *уравнением движения машины в форме кинетической энергии*.

4.4. Уравнение движения машины в дифференциальной форме

Уравнение (4.8) можно записать в виде

$$\frac{I_{\dot{\alpha}.1} \cdot \omega_1^2}{2} - \frac{I_{\dot{\alpha}.0} \cdot \omega_0^2}{2} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \dot{I}_{\dot{\alpha}} \partial\varphi, \quad (4.10)$$

где $M_{np} = M_{np}^{\partial\theta} + M_{np}^{\text{comp}}$ – суммарный приведенный момент сил движущих и сил сопротивлений.

Продифференцируем (4.10) по переменной φ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\frac{I_{\dot{\alpha}} \cdot \omega^2}{2} \right) &= \dot{I}_{\dot{\alpha}} (\varphi; \omega; t); \\ I_{\dot{\alpha}} \frac{\omega \partial\omega}{\partial\varphi} + \frac{\partial I_{\dot{\alpha}}}{\partial\varphi} \cdot \frac{\omega^2}{2} &= \dot{I}_{\dot{\alpha}} (\varphi; \omega; t). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Преобразуем $\frac{\omega \partial\omega}{\partial\varphi}$, разделив числитель и знаменатель на dt , и получим

$$\frac{\omega \partial\omega}{\partial\varphi} = \frac{\omega \cdot \frac{\partial\omega}{\partial t}}{\frac{\partial\varphi}{\partial t}} = \frac{\omega \cdot \frac{\partial\omega}{\partial t}}{\omega} = \frac{\partial\omega}{\partial t} = \varepsilon,$$

где ε – угловое ускорение.

Тогда уравнение (4.11) можно записать в виде

$$I_{i\delta} \cdot \varepsilon + \frac{\partial I_{i\delta}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\omega^2}{2} = \dot{I}_{i\delta}(\varphi; \omega; t).$$

Это есть дифференциальное уравнение движения машины для ведущего вращающегося ведущего звена.

Дифференциальное уравнение движения машины для поступательно движущегося ведущего звена выводится аналогично предыдущим выкладкам и имеет вид $m_{i\delta} \cdot \dot{a} + \frac{\partial m_{i\delta}}{\partial S} \cdot \frac{v^2}{2} = P_{i\delta}(S; v; t)$.

Решать дифференциальные уравнения движения можно графическим или численным методом (методом последовательных приближений).

4.5. Режимы движения машины

В общем виде движения машины можно разделить на три основных режима (периода): разгон, установившееся движение и останов (рис. 4.5).

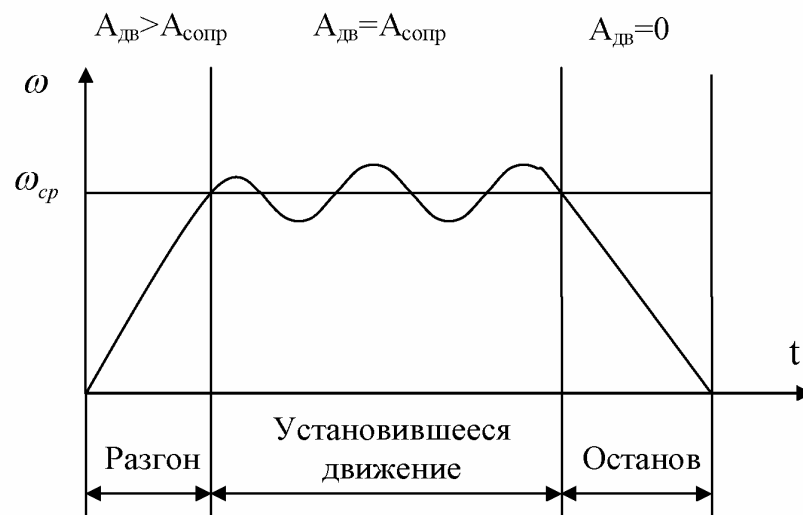


Рис. 4.5. Схема режимов движения машины

В режиме разгона угловая скорость в начале режима $\omega_0 = 0$, в конце — $\omega_1 = \sqrt{\frac{2\dot{A}_{эс\dot{a}}}{I_{i\delta_1}}}$, что следует из уравнения (4.9). При этом всегда $\dot{A}_{\dot{a}\dot{a}} \geq \dot{A}_{\dot{m}\dot{\theta}}$, иначе разгон невозможен.

В режиме установившегося движения $\dot{A}_{\dot{a}\dot{a}} = \dot{A}_{\dot{m}\dot{\theta}}$, изменение кинетической энергии (в среднем за один оборот ведущего вала) $\Delta E = 0$. В пределах одного оборота происходят периодические колебания угловой скорости вала машины.

В режиме останова (когда двигатель отключен) $\dot{A}_{\dot{a}\dot{a}} = 0$. При этом выполняется работа, затрачиваемая на преодоление сил трения:

$$\omega_{i\dot{o}} = \frac{I_{i\dot{o}0} \cdot \omega_{\dot{n}\dot{o}}^2}{2}.$$

4.6. Механический КПД механизма

В период установившегося движения машины соблюдается условие равенства работ сил движущих и сил сопротивлений:

$$A_{\dot{o}\dot{v}} = A_{\text{сопр}}.$$

Работа сил сопротивления складывается из суммы работ сил полезного сопротивления $A_{\text{пол.сопр}}$ и сил вредного сопротивления $A_{\text{вр.сопр}}$. Тогда

$$A_{\dot{o}\dot{v}} = A_{\text{пол.сопр}} + A_{\text{вр.сопр}}.$$

Разделим левую и правую части равенства на величину работы сил движущих:

$$\frac{\dot{A}_{\dot{a}\dot{a}}}{\dot{A}_{\dot{a}\dot{a}}} = \frac{\dot{A}_{\dot{n}\dot{e} \cdot \dot{n}\dot{i}\dot{o}}}{\dot{A}_{\dot{a}\dot{a}}} + \frac{\dot{A}_{\dot{a}\dot{o}\dot{a}\dot{a} \cdot \dot{n}\dot{i}\dot{o}}}{\dot{A}_{\dot{a}\dot{a}}}$$

и получим

$$1 = \eta + \varphi,$$

где $\eta = \frac{\dot{A}_{\dot{n}\dot{e} \cdot \dot{n}\dot{i}\dot{o}}}{\dot{A}_{\dot{a}\dot{a}}}$ – механический (цикловой) коэффициент полезного

действия (КПД); $\varphi = \frac{\dot{A}_{\dot{a}\dot{o}\dot{a}\dot{a} \cdot \dot{n}\dot{i}\dot{o}}}{\dot{A}_{\dot{a}\dot{a}}}$ – коэффициент механических потерь.

Определение КПД машинного агрегата

при последовательном соединении входящих в него механизмов

Рассмотрим машинный агрегат, состоящий из последовательно соединенных механизмов, условно обозначенных на схеме (рис. 4.6) цифрами 1, 2 и 3.

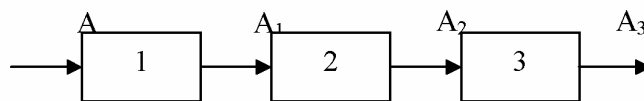


Рис. 4.6. Машинный агрегат с последовательно соединенными механизмами

Пусть к механизму 1 подводится работа величиной A . На выходе получаем работу величиной A_1 , которая подводится к механизму 2 и т.д. Величина работы на выходе всегда меньше, чем подведенная работа на входе ($A_1 < A$, $A_2 < A_1$, $A_3 < A_2$), так как в каждом механизме имеются механические потери подведенной к нему работы.

Тогда общий КПД машинного агрегата

$$\eta_{i\dot{a}i\dot{u}}^{i\dot{i}\dot{n}\dot{e}} = \frac{\dot{A}_3}{\dot{A}},$$

а кпд каждого механизма

$$\eta_1 = \frac{A_1}{A}, \eta_2 = \frac{A_2}{A_1}, \eta_3 = \frac{A_3}{A_2}.$$

Перемножим кпд всех последовательно соединенных механизмов:

$$\eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 = \frac{\dot{A}_1}{\dot{A}} \cdot \frac{\dot{A}_2}{\dot{A}_1} \cdot \frac{\dot{A}_3}{\dot{A}_2} = \frac{\dot{A}_3}{\dot{A}} = \eta_{i\dot{a}i\dot{u}}^{i\dot{i}\dot{n}\dot{e}}.$$

Вывод: *общий механический кпд машинного агрегата, состоящего из последовательно соединенных n механизмов, равен произведению их кпд:*

$$\eta_{i\dot{a}i\dot{u}}^{i\dot{i}\dot{n}\dot{e}} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot \dots \cdot \eta_n$$

Определение кпд машинного агрегата

при параллельном соединении входящих в него механизмов

Рассмотрим машинный агрегат, состоящий из трех параллельно соединенных механизмов, условно обозначенных на схеме (рис. 4.7) цифрами 1, 2, 3. Пусть к механизмам подводится работа величиной A , которая распределяется на каждый механизм в разных долях, определяемых коэффициентами a_1, a_2, a_3 , каждый из которых меньше 1, а их сумма $a_1 + a_2 + a_3 = 1$.

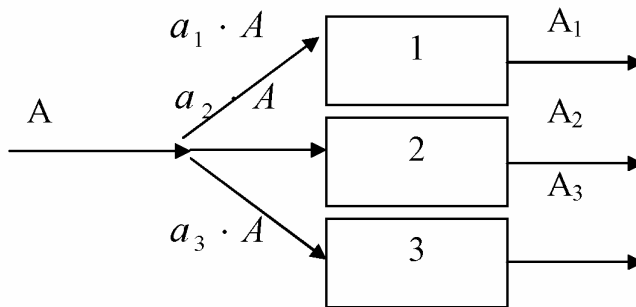


Рис. 4.7. Машинный агрегат с параллельно соединенными механизмами

Общий кпд всего машинного агрегата можно выразить отношением суммы работ на выходе механизмов к общей подведенной работе A :

$$\eta_{i\dot{a}i\dot{u}}^{i\dot{i}\dot{a}\dot{d}\dot{a}\dot{e}} = \frac{\dot{A}_1 + \dot{A}_2 + \dot{A}_3}{\dot{A}}. \quad (4.12)$$

Так как

$$\eta_1 = \frac{A_1}{a_1 \cdot A}, \quad A_1 = \eta_1 \cdot A \cdot a_1;$$

$$\eta_2 = \frac{A_2}{a_2 \cdot A}, \quad A_2 = \eta_2 \cdot A \cdot a_2;$$

$$\eta_3 = \frac{A_3}{a_3 \cdot A}, \quad A_3 = \eta_3 \cdot A \cdot a_3,$$

то, подставив эти выражения в (4.12), получаем

$$\eta_{i\dot{a}\dot{a}\dot{e}}^{i\dot{a}\dot{d}\dot{a}\dot{e}} = \frac{(\eta_1 \cdot \dot{a}_1 + \eta_2 \cdot \dot{a}_2 + \eta_3 \cdot \dot{a}_3) \cdot \dot{A}}{\dot{A}} = \eta_1 \cdot \dot{a}_1 + \eta_2 \cdot \dot{a}_2 + \eta_3 \cdot \dot{a}_3.$$

Отсюда следует, что *общий механический кпд машинного агрегата при параллельном соединении механизмов равен сумме величин кпд каждого механизма, умноженных на коэффициенты долей работ, подводимых к механизмам:*

$$\eta_{i\dot{a}\dot{a}\dot{e}}^{i\dot{a}\dot{d}\dot{a}\dot{e}} = \eta_1 \cdot \dot{a}_1 + \eta_2 \cdot \dot{a}_2 + \dots + \eta_n \cdot \dot{a}_n.$$

Сравним варианты последовательного и параллельного соединения механизмов с точки зрения минимизации механических потерь в машинном агрегате.

Пусть величины кпд каждого механизма равны $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta$. При этом коэффициенты, учитывающие доли распределения общей работы A между всеми механизмами, также равны:

$$a_1 = a_2 = a_3 = \frac{1}{3}.$$

Тогда

$$\eta_{i\dot{a}\dot{a}\dot{e}}^{i\dot{a}\dot{d}\dot{a}\dot{e}} = \eta^3, \quad \eta_{i\dot{a}\dot{a}\dot{e}}^{i\dot{a}\dot{d}\dot{a}\dot{e}} = \eta.$$

Так как $\eta < 1$, то $\eta^3 < \eta$. Отсюда следует, что параллельное соединение механизмов в машинном агрегате предпочтительнее с точки зрения уменьшения механических потерь.

Самоторможение

Если $A_{\text{дв}} < A_{\text{пред.сопрот}}$, то действительного движения механизма произойти не может. Это называется явлением самоторможения. Следовательно, если при теоретических расчетах получим $\eta < 0$, то механизм в заданном направлении двигаться не может.

Для возможности движения механизма необходимо обеспечить условие

$$0 \leq \eta < 1.$$

4.7. Неравномерность хода ведущего звена машины

Уравнение движения главного вала машины в форме кинетической энергии имеет вид (см. формулу 4.9)

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2\dot{A}_{\text{всд}}}{I_{i\dot{d}_1}} + \frac{I_{i\dot{d}_0} \cdot \omega_0^2}{I_{i\dot{d}_1}}}.$$

Так как величина избыточной работы $A_{\text{изб}}$, являясь функцией угла поворота вала φ , угловой скорости ω и времени t , есть величина переменная, т.е. $A_{\text{изб}} = f(\varphi, \omega, t)$, при этом $I_{\text{нр}} = f(\varphi)$, то при установившемся режиме работы машины угловые скорости в начале и конце одного цикла T (например, одного оборота) равны: $\omega_0^{\text{нач}} = \omega_0^{\text{кон}} = \omega_{\text{ср}}$ (рис. 4.8).

За цикл изменение кинетической энергии равно нулю $\Delta E = 0$. Внутри цикла угловая скорость вала может меняться, что вызывает дополнительные динамические (инерционные) нагрузки, а также дополнительное трение в кинематических парах, снижающее надежность механизма и его КПД.

Ухудшаются условия работы механизма, приходится увеличивать материалоемкость машины, повышать прочность звеньев, нести дополнительные энергетические затраты на преодоление трения.

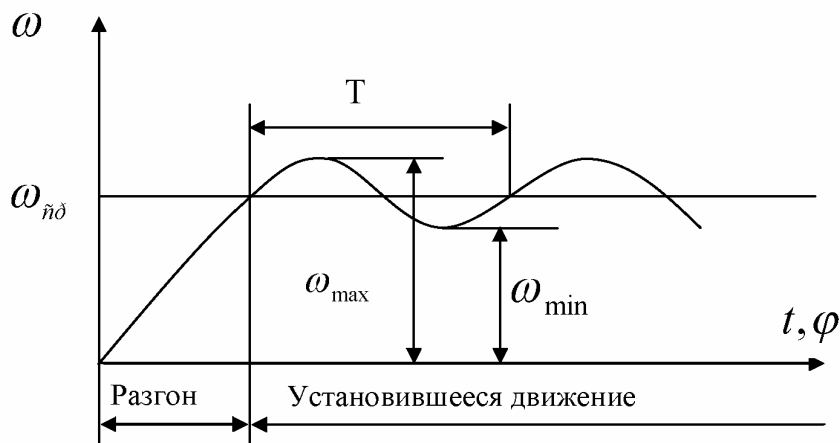


Рис. 4.8. Периодические колебания угловой скорости главного вала машины в период установившегося движения

Коэффициент неравномерности хода ведущего вала машины δ выразим формулой

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{\text{н}\delta}}, \quad (4.13)$$

где

$$\omega_{\text{н}\delta} \approx \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2}. \quad (4.14)$$

Из (4.13) и (4.14) получим

$$\omega_{\max} = \omega_{\text{ср}} \left(1 + \frac{\delta}{2}\right), \quad \omega_{\max}^2 \approx \omega_{\text{ср}}^2 (1 + \delta),$$

$$\omega_{\min} = \omega_{\text{ср}} \left(1 - \frac{\delta}{2}\right), \quad \omega_{\min}^2 \approx \omega_{\text{ср}}^2 (1 - \delta).$$

Величина δ может находиться в следующих пределах: для ударных машин и прессов $\delta \leq \frac{1}{5}$, для металлорежущих станков $\delta = \frac{1}{20} \dots \frac{1}{50}$, для двигателей $\delta \leq \frac{1}{100}$.

4.8. Регулирование периодических колебаний угловой скорости

с помощью маховика

В случае необеспечения требуемой величины δ при работе машины могут возникнуть нежелательные явления и процессы (вибрация, повышенные энергетические затраты, невозможность выполнения технологического процесса и т.д.). При условии периодических колебаний угловой скорости вала для получения заданной величины δ используют маховик – массивное колесо с большим моментом инерции.

Основная задача при расчете маховика – это определение его момента инерции. Маховик с таким моментом инерции $I_{\text{махов}}$ в интервале скоростей от ω_{max} до ω_{min} (см. рис. 4.5) должен произвести работу, равную изменению кинетической энергии механизма за это время:

$$A_{\text{изб}}^{\text{max}} = \Delta E_{\text{мех.}}$$

Расчет величины момента инерции маховика

Приведенный момент инерции механизма можно представить в виде

$$I_{\text{пр}}^{\text{max}} = I_{\text{пост.часть}} + I_{\text{махов}} + \Delta I^{\text{max}} \text{ при } \omega = \omega_{\text{max}},$$

$$I_{\text{пр}}^{\text{min}} = I_{\text{пост.часть}} + I_{\text{махов}} + \Delta I^{\text{min}} \text{ при } \omega = \omega_{\text{min}},$$

где $I_{\text{пост.часть}}$ – постоянная составляющая приведенного момента инерции механизма; $I_{\text{махов}}$ – момент инерции маховика или маховых масс (колес, валов и т.д.), (величина постоянная для данного механизма); ΔI^{max} – составляющая приведенного момента инерции при максимальной скорости в цикле ω_{max} ; ΔI^{min} – составляющая приведенного момента инерции при минимальной скорости в цикле ω_{min} .

Тогда

$$A_{\text{эцá}}^{\text{max}} = \Delta E_{\text{иáð}} = \frac{I_{\text{иá}}^{\text{max}} \cdot \omega_{\text{max}}^2}{2} - \frac{I_{\text{иá}}^{\text{min}} \cdot \omega_{\text{min}}^2}{2}. \quad (4.15)$$

Из (4.15) следует (если $\omega_{\text{max}}^2 \approx \omega_{\text{ñó}}^2(1 + \delta)$, $\omega_{\text{min}}^2 \approx \omega_{\text{ñó}}^2(1 - \delta)$)

$$I_{\text{иá}}^{\text{max}}(1 + \delta) - I_{\text{иá}}^{\text{min}}(1 - \delta) = \frac{2A_{\text{эцá}}^{\text{max}}}{\omega_{\text{ñó}}^2}.$$

С учетом (4.13) и (4.14) получим

$$I_{\text{иáðíá}} = \frac{A_{\text{эцá}}^{\text{max}}}{\delta \cdot \omega_{\text{ñó}}^2} - I_{\text{иá}}^{\text{пóñò.÷áñóó}} - \frac{\Delta I^{\text{max}}(1 + \delta) - \Delta I^{\text{min}}(1 - \delta)}{2\delta}. \quad (4.16)$$

Для определения величины $I_{\text{махов}}$ задаются величинами $\omega_{\text{ср}}$ и δ . Формулу (4.16) можно упростить, если принять $\Delta I_{\text{max}} = \Delta I_{\text{min}}$. Тогда

$$I_{\text{иáðíá}} = \frac{A_{\text{эцá}}^{\text{max}}}{\delta \cdot \omega_{\text{ñó}}^2} - I_{\text{иá}}^{\text{пóñò.÷áñóó}}.$$

При больших маховых массах (когда $I_{\text{махов}} \gg I_{\text{пост.часть}}$) можно приближенно принять

$$I_{\text{экв}} = \frac{A_{\text{эцá}}^{\text{max}}}{\delta \cdot \omega_{\text{нó}}^2}.$$

Для определения величины $A_{\text{эцá}}^{\text{max}}$ можно пользоваться диаграммами моментов сил движущих $M_{\text{дв}}(\varphi)$ и сил сопротивлений $M_{\text{сопр}}(\varphi)$ (рис. 4.9).

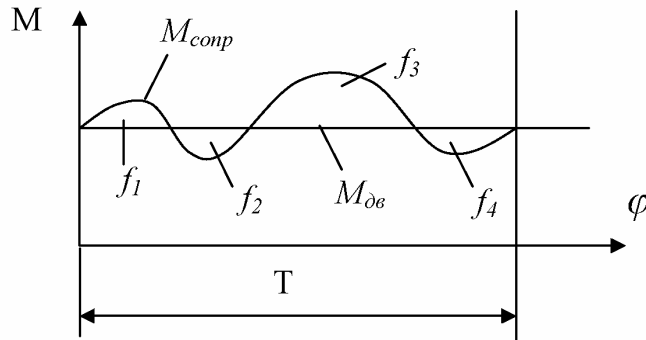


Рис. 4.9. Моменты сил движущих и сил сопротивлений в цикле T

Площади $f_1 \dots f_4$, ограниченные кривой $M_{\text{сопр}}$ и графиком $M_{\text{дв}}$, представляют собой разности работ движущих моментов $M_{\text{дв}}$ и моментов сопротивлений $M_{\text{сопр}}$. Суммы площадей имеют соотношение

$$f_1 + f_3 = f_2 + f_4.$$

Выбирают наибольшую из заштрихованных площадей. Если $f^{\text{max}} = f_3$, то величину максимальной избыточной работы можно определить по формуле

$$A_{\text{эцá}}^{\text{max}} = f_3 \cdot \mu_{\varphi} \cdot \mu_M,$$

где μ_{φ} и μ_M – масштабы графиков по осям φ и M .

Регулирование непериодических колебаний угловой скорости главного вала машины производится с помощью специальных регуляторов. Одним из простейших является центробежный регулятор (регулятор Дж. Уатта).

5. ЗУБЧАТЫЕ ПЕРЕДАЧИ

5.1. Общие положения

Зубчатые передачи предназначены для передачи вращательного движения от одного вала к другому, а также для изменения величины и направления угловой скорости валов. Пару зубчатых колес, находящихся в зацеплении друг с другом, называют *ступенью*, а передачи – *одноступенчатыми*.

По характеру расположения валов все зубчатые одноступенчатые передачи можно разделить на цилиндрические, конические и гиперболоидные.

В *цилиндрических передачах* (рис. 5.1а) оси валов параллельны. По характеру расположения зубьев на зацепляющихся колесах они разделяются на *прямозубые*, *косозубые* и *шевронные*.

В *конических передачах* (рис. 5.1б) оси валов пересекаются. Наиболее распространены конические передачи с прямым углом между осями валов.

В *гиперболоидных передачах* (рис. 5.1в) оси валов перекрещиваются. В свою очередь эти передачи подразделяются на *гипоидные*, *винтовые* и *червячные*. Последние являются частным случаем винтовых передач и состоят из червяка и червячного колеса.

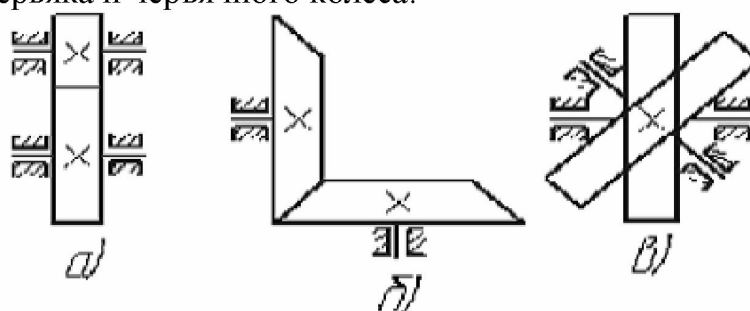


Рис. 5.1. Кинематические схемы зубчатых передач: а – цилиндрическая; б – коническая; в – гиперболоидная

Преимуществами зубчатых передач перед другими (фрикционными, ременными, цепными) являются постоянство передаточного отношения, высокий механический КПД, долговечность и компактность.

Недостатком является то, что наличие высшей кинематической пары в месте контакта зубьев приводит к большим контактным напряжениям, тем самым при их эксплуатации приходится ограничивать величину передаваемых усилий, упрочнять поверхности зубьев в зоне их контакта, применять систему смазки колес.

5.2. Передаточное отношение

Передаточное отношение – это отношение угловых скоростей взаимодействующих (зацепляющихся) зубчатых колес. Если взаимодействие колес внешнее, то их передаточное отношение отрицательно ($U_{1-2} < 0$), (рис. 5.2), если взаимодействие внутреннее, то $U_{1-2} > 0$ (рис. 5.3). Знак «+» указывает на совпадение векторов угловых скоростей (направлений вращения колес).

Численно величина передаточного отношения ступени равна отношению угловых скоростей ω_i , (1/с), частот вращений n_i , (об/мин), или обратному отношению количества зубьев колес z_i :

$$U_{1-2} = \pm \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{n_1}{n_2} = \pm \frac{z_2}{z_1}.$$

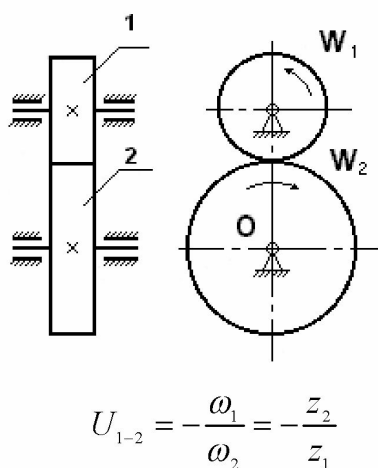


Рис. 5.2. Пара зубчатых колес с внешним зацеплением:
1, 2 – зубчатые колеса

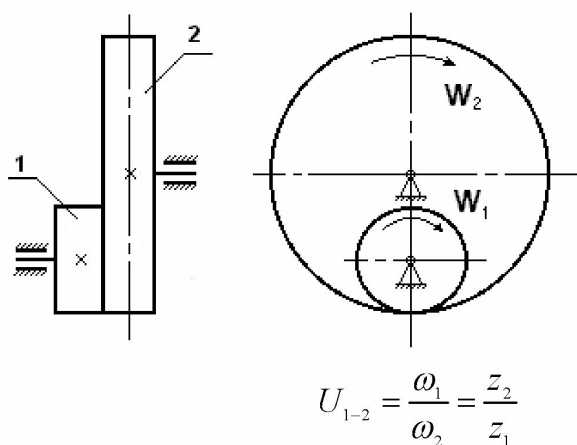


Рис. 5.3. Пара зубчатых колес с внутренним зацеплением:
1, 2 – зубчатые колеса

Передаточное отношение сложных (многоступенчатых) зубчатых передач (рис. 5.4) равно произведению передаточных отношений ступеней:

$$U_{1-n} = U_{1-2} \cdot U_{2-3} \cdot \dots \cdot U_{(n-1)-n} \cdot (-1)^k,$$

где $U_{1-2}, U_{2-3}, \dots, U_{(n-1)-n}$ – передаточные отношения ступеней; k – количество ступеней.

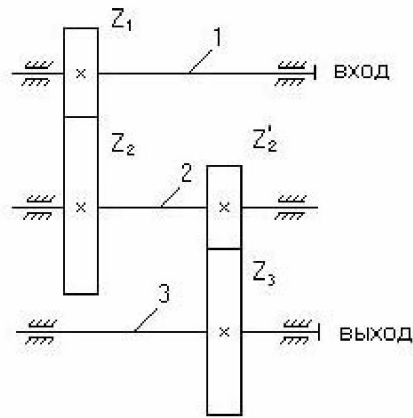


Рис. 5.4. Двухступенчатая зубчатая передача

Например, для двухступенчатой зубчатой передачи, кинематическая схема которой представлена на рис. 5.4, величина передаточного отношения

$$U_{1-3} = U_{1-2} \cdot U_{2-3} \cdot (-1)^k = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_2'} \cdot (-1)^2 = \frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_2'}$$

5.3. Основные геометрические параметры зубчатого колеса цилиндрической передачи

Рассмотрим геометрические параметры зубчатого колеса цилиндрической передачи в плоскости, перпендикулярной оси его вращения (рис. 5.5).

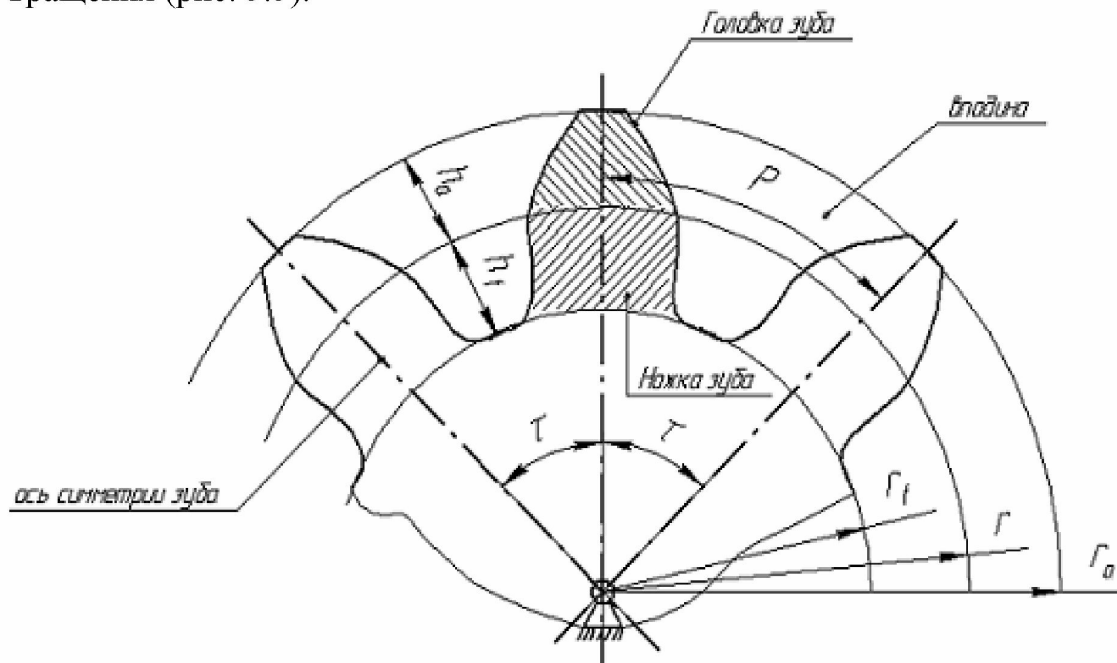


Рис. 5.5. Геометрические параметры зубчатого колеса

Каждый зуб колеса имеет ось симметрии, проходящую через ось вращения колеса O . Угол между осями симметрии называется *угловым шагом* τ . Число зубьев колеса $z=2\pi/\tau$ (если τ измеряется в радианах) или $z=360^\circ/\tau$ (если τ измеряется в угловых градусах). Внешняя граница зуба очерчивается *окружностью выступов* радиусом r_a , а внутренняя часть впадины – *окружностью впадин* радиусом r_f .

Окружность радиусом r делит зуб по высоте на *головку* и *ножку*. Расстояние между одноименными профилями соседних зубьев по дуге этой окружности (или между соседними осями симметрии зубьев) называется *окружным шагом* P .

$$\begin{aligned} \text{Длина окружности диаметром } d=2r \\ L=P \cdot z = \pi \cdot d, \end{aligned}$$

откуда

$$d=(P/\pi) \cdot z.$$

Величину $P/\pi = m$ называют *модулем*. На него введен ГОСТ 9563-60, в соответствии с которым при расчетах геометрических параметров зубчатых колес его выбирают из стандартного ряда в пределах $m = 0,05 \dots 100$ мм.

Окружность, по которой модуль m является стандартной величиной, называется *делительной окружностью* с диаметром $d = m \cdot z$ или радиусом $r = (m \cdot z)/2$.

Все остальные геометрические параметры зубчатого колеса в соответствии с ГОСТом пропорциональны модулю m :

- высота головки зуба $h_a = m$;
- высота ножки зуба $h_f = 1,25 m$;
- высота зуба $h = h_a + h_f = 2,25 m$;
- радиус окружности выступов

$$r_a = r + m = \frac{mz}{2} + m = \frac{m}{2}(z + 2);$$

радиус окружности впадин

$$r_f = r - 1,25m = \frac{mz}{2} - 1,25m = \frac{m}{2}(z - 2,5);$$

окружной шаг $P = \pi \cdot m$;

толщина зуба по делительной окружности

$$S_T = \frac{P}{2} = \frac{\pi \cdot m}{2};$$

ширина впадин по делительной окружности

$$S_{\dot{A}} = \frac{P}{2} = \frac{\pi \cdot m}{2}.$$

Ширину колеса принимают в пределах $b = (10 \dots 30)m$. Межосевое расстояние двух зацепляющихся колес нулевого зацепления

$$a_0 = r_1 + r_2 = \frac{mz_1}{2} + \frac{mz_2}{2} = \frac{m}{2}(z_1 + z_2),$$

где r_1 и r_2 – радиусы делительных окружностей зацепляющих колес; z_1 и z_2 – число их зубьев.

В зацепление друг с другом могут входить только зубчатые колеса, имеющие одинаковый модуль m и окружной шаг P .

5.4. Основная теорема зацепления

Вывод теоремы и ее формулировка определяют условие, которому должны отвечать боковые профили зубьев, находящихся друг с другом в зацеплении.

Рассмотрим картину касания двух боковых профилей зубьев. Пусть эти профили будут очерчены какими-то кривыми (рис. 5.6), касающимися друг друга в точке M .

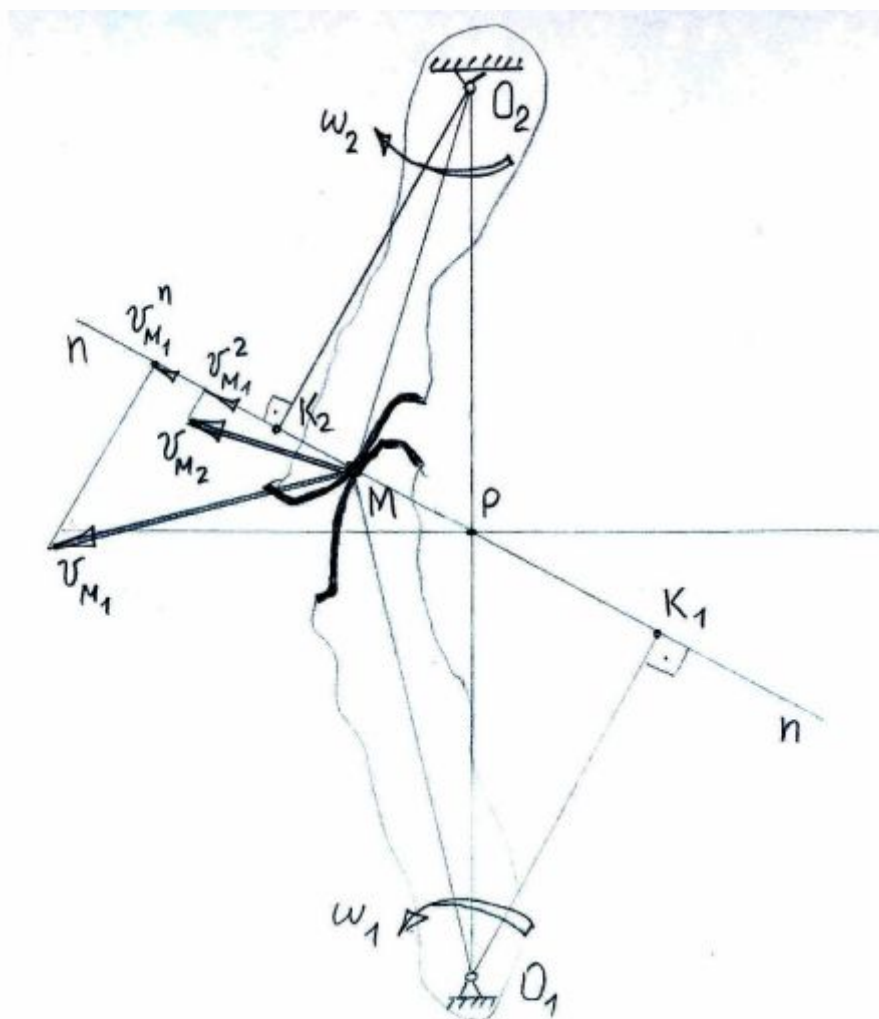


Рис. 5.6. Картина зацепления двух соприкасающихся боковых профилей

Прямая $n-n$ является общей нормалью к этим кривым. Представим вращение профилей зубьев вокруг осей O_1 и O_2 с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 . Тогда векторы окружных скоростей v_{M_1} и v_{M_2} точек M_1 и M_2 , принадлежащих этим профилям, будут направлены перпендикулярно радиусам O_1M и O_2M , а их величины

$$v_{11} = \omega_1 \cdot l_1 \cdot j_1,$$

$$v_{12} = \omega_2 \cdot l_2 \cdot j_2.$$

Спроектируем эти скорости на нормаль $n-n$ и получим векторы $v_{M_1}^n$ и $v_{M_2}^n$.

Для соблюдения нормальной работы зацепления необходимо обеспечить равенство этих векторов:

$$v_{M_1}^n = v_{M_2}^n.$$

В противном случае будет или «убегание» левого профиля (если $v_{M_2}^n > v_{M_1}^n$), или «набегание» правого на левый ($v_{M_1}^n > v_{M_2}^n$), что в принципе невозможно.

Рассмотрим подобие треугольников:

$$\Delta \hat{I}_1 \hat{E}_1 \hat{I}_1 \propto \Delta \hat{I} v_{i_1}^n v_{i_1}.$$

Из свойства соотношения сторон составим уравнение пропорции

$$\frac{v_{i_1}}{O_1 M} = \frac{v_{i_1}^n}{O_1 \hat{E}_1},$$

откуда

$$v_{i_1}^n = v_{i_1} \cdot \frac{\hat{I}_1 \hat{E}_1}{\hat{I}_1 \hat{I}_1} = \omega_1 \cdot \hat{I}_1 \hat{I}_1 \cdot \frac{\hat{I}_1 \hat{E}_1}{\hat{I}_1 \hat{I}_1} = \omega \cdot \hat{I}_1 \hat{E}_1.$$

Из аналогичного подобия $\Delta \hat{I}_2 \hat{E}_2 \hat{I}_2$ и $\Delta \hat{I} v_{i_2}^n v_{i_2}$ получим

$$v_{i_2}^n = \omega \cdot \hat{I}_2 \hat{E}_2.$$

Так как $v_{i_1}^n = v_{i_2}^n$, то

$$\omega_1 \cdot \hat{I}_1 \hat{E}_1 = \omega_2 \cdot \hat{I}_2 \hat{E}_2,$$

или

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\hat{I}_2 \hat{E}_2}{\hat{I}_1 \hat{E}_1}. \quad (5.1)$$

Но $\Delta \hat{I}_1 \hat{E}_1 P \propto \Delta \hat{I}_2 \hat{E}_2 D$, тогда $\frac{\hat{I}_2 \hat{E}_2}{\hat{I}_1 \hat{E}_1} = \frac{\hat{I}_2 D}{\hat{I}_1 D}$, а уравнение (5.1)

запишем в виде

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2 P}{O_1 P}.$$

Это и есть основная теорема зацепления: *нормаль $n-n$ к профилям, образующим высшую кинематическую пару, проведенная к точке их касания, делит межосевые расстояния $O_1 O_2$ на отрезки, обратно пропорциональные угловым скоростям, с которыми эти профили вращаются.*

5.5. Эвольвента и ее свойства

Наибольшее распространение получили зубчатые колеса, у которых боковые профили зубьев очерчены кривой под названием *эвольвента*.

Соответственно профиль такого зуба и само зацепление называются эвольвентными.

Эвольвента – кривая, которую очерчивает точка, принадлежащая прямой, перекатывающейся по окружности без скольжения.

Координаты любой точки эвольвенты определяются углом θ и длиной y (рис. 5.7).

Исходя из свойств эвольвенты $\dot{I}_1 \dot{I}'_1 = \cup \dot{I} \dot{I}'_1$, $\dot{I}_2 \dot{I}'_2 = \cup \dot{I} \dot{I}'_2$ и т.д.

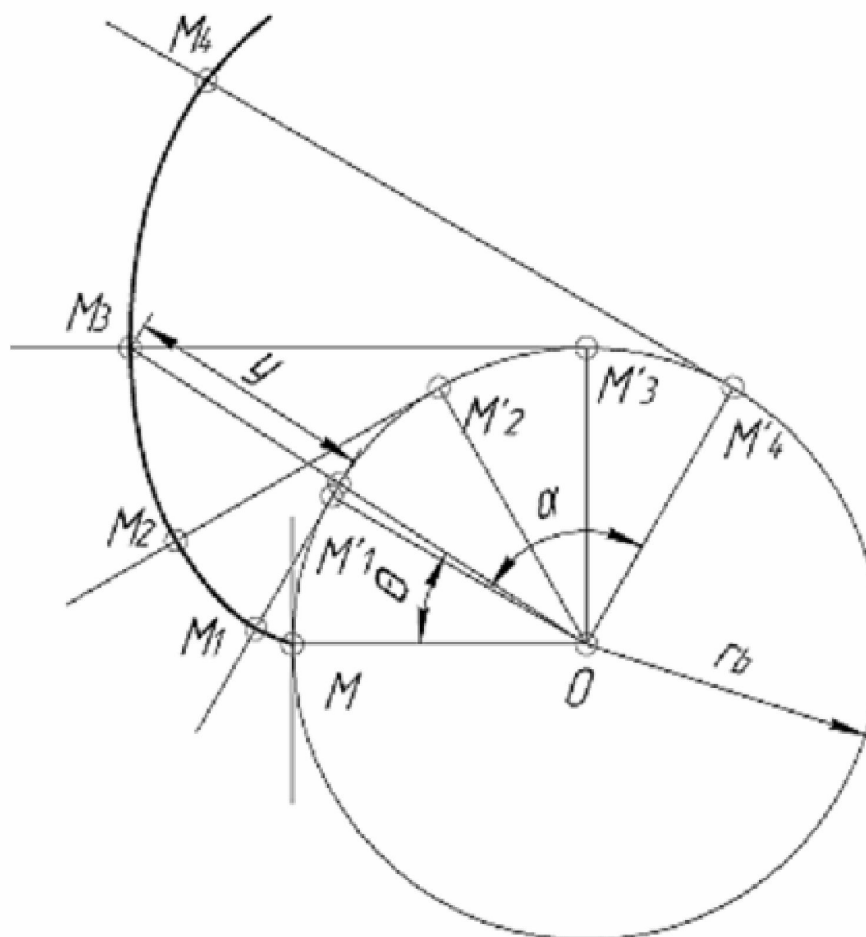


Рис. 5.7. Построение эвольвенты

Из соотношения углов и дуг окружности радиуса r_b следует, что

$$(\theta + \alpha) \cdot r_a = \cup \dot{I} \dot{I}'_3,$$

а из треугольника $OM_3M'_3$ –

$$r_a \cdot \operatorname{tg} \alpha = M_3M'_3.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} (\theta + \alpha) \cdot r_a &= \operatorname{tg} \alpha \cdot r_a, \\ \theta &= \operatorname{tg} \alpha - \alpha. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Функция угла α (5.2) называется *инволютой угла* α : $\operatorname{inv} \alpha = \operatorname{tg} \alpha - \alpha$.

Для определения ее численного значения в учебниках и справочниках по расчету зубчатых передач имеются *таблицы*.

Определим зависимость y от других геометрических параметров:

$$r_a = (y + r_a) \cdot \cos \alpha .$$

Отсюда

$$y = \frac{r_a}{\cos \alpha} (1 - \cos \alpha) .$$

Окружность, по которой перекачивается прямая, называется *основной*, а ее радиус $r_a = r \cdot \cos 20^\circ$, где 20° – угол наклона бокового профиля зуба инструментальной рейки, служащей для нарезания зубьев.

Свойства эвольвенты:

- все точки эвольвенты лежат вне основной окружности радиуса r_b ;
- нормаль к эвольвенте касательна к основной окружности;
- центры кривизны эвольвенты лежат на основной окружности.

5.6. Построение картины зацепления колес эвольвентой цилиндрической передачи

Для построения картины зацепления необходимо знать числа зубьев колес z_1 и z_2 , модуль m и угол зацепления $\alpha = 20^\circ$. Зацепление стандартное.

Вычисляем все необходимые геометрические параметры:
радиусы делительных окружностей

$$r_1 = \frac{mz_1}{2}, r_2 = \frac{mz_2}{2};$$

радиусы основных окружностей

$$r_{b_1} = r_1 \cdot \cos 20^\circ, r_{b_2} = r_2 \cdot \cos 20^\circ;$$

межцентровое расстояние

$$a = \frac{m}{2}(z_1 + z_2);$$

радиусы окружностей выступов

$$r_{a_1} = r_1 + m, r_{a_2} = r_2 + m;$$

радиусы окружностей впадин

$$r_{f_1} = r_1 - 1,25 m, r_{f_2} = r_2 - 1,25 m;$$

шаг по делительной окружности $p = \pi \cdot m$;

толщину зуба и ширину впадины по делительной окружности

$$S_{T_1} = S_{T_2} = S_{b_1} = S_{b_2} = \frac{\pi \cdot m}{2};$$

начальные окружности $r_{w_1} = r_1, r_{w_2} = r_2$.

На прямой линии откладывается межосевое расстояние (рис. 5.8)

$$O_1O_2 = a_w = r_{w1} + r_{w2}.$$

Из центров O_1 и O_2 проводятся дуги всех окружностей колес (делительные, основные, начальные, вершин, впадин). При этом дуги начальных окружностей должны соприкасаться в полюсе зацепления P .

Проводится общая касательная AB к основным окружностям, которая обязательно должна пройти через полюс зацепления P .

Через полюс зацепления P проводится линия, перпендикулярная отрезку O_1O_2 .

На построенном чертеже измеряют величину угла зацепления

$$\alpha_w = \angle PO_1A = \angle PO_2B$$

и убеждаются в ее совпадении с расчетной величиной.

С помощью шаблонов строят профили зубьев колес 1 и 2, соприкасающиеся в полюсе P . Отмечают оси симметрии этих зубьев и, откладывая влево и вправо от них шаги (угловые τ_i или окружные P_i по дугам делительных окружностей), проводят оси симметрии еще двух пар зубьев, после чего по шаблонам строят их профили. При построении этих профилей следует учитывать, что они должны касаться друг друга в точках K_1 и K_2 , которые должны лежать на нормали $n_1 - n_2$.

Определяют *действительную (практическую) линию зацепления* ab . Ее крайние точки лежат на пересечении теоретической линии зацепления AB с окружностями вершин колес.

Затем находят границы рабочих участков поверхностей зубьев. Для этого радиусами O_1a и O_2b проводят дуги до пересечения их с профилями зубьев, соприкасающимися в полюсе P .

Определяют *дугу зацепления* cd , для чего один из профилей зубьев, соприкасающийся в полюсе P с боковым профилем другого зуба, с помощью шаблона строят (пунктирной линией) в таком положении, когда он проходит через крайние точки a и b практической линии зацепления. Расстояние между этими профилями по дуге начальной окружности является дугой зацепления ($\cup cd$).

Коэффициент перекрытия вычисляют по формуле (см. параграф 5.7)

$$\varepsilon_{\alpha}^{zp} = \cup cd/P = (ab)/(cos\alpha_0 \cdot P),$$

где P – окружной шаг; (ab) – длина практической линии зацепления, измеренная на чертеже – картине зацепления.

Рассчитанную таким образом величину коэффициента перекрытия сравнивают с её значением ε_{α} , найденным ниже аналитически (с использованием расчетной формулы). Величина коэффициента перекрытия $\varepsilon_{\alpha}^{zp}$, найденная графическим методом (с использованием данных чертежа – картины зацепления колес), не должна отличаться от её значения, вычисленного по аналитической зависимости, более чем на 5%.

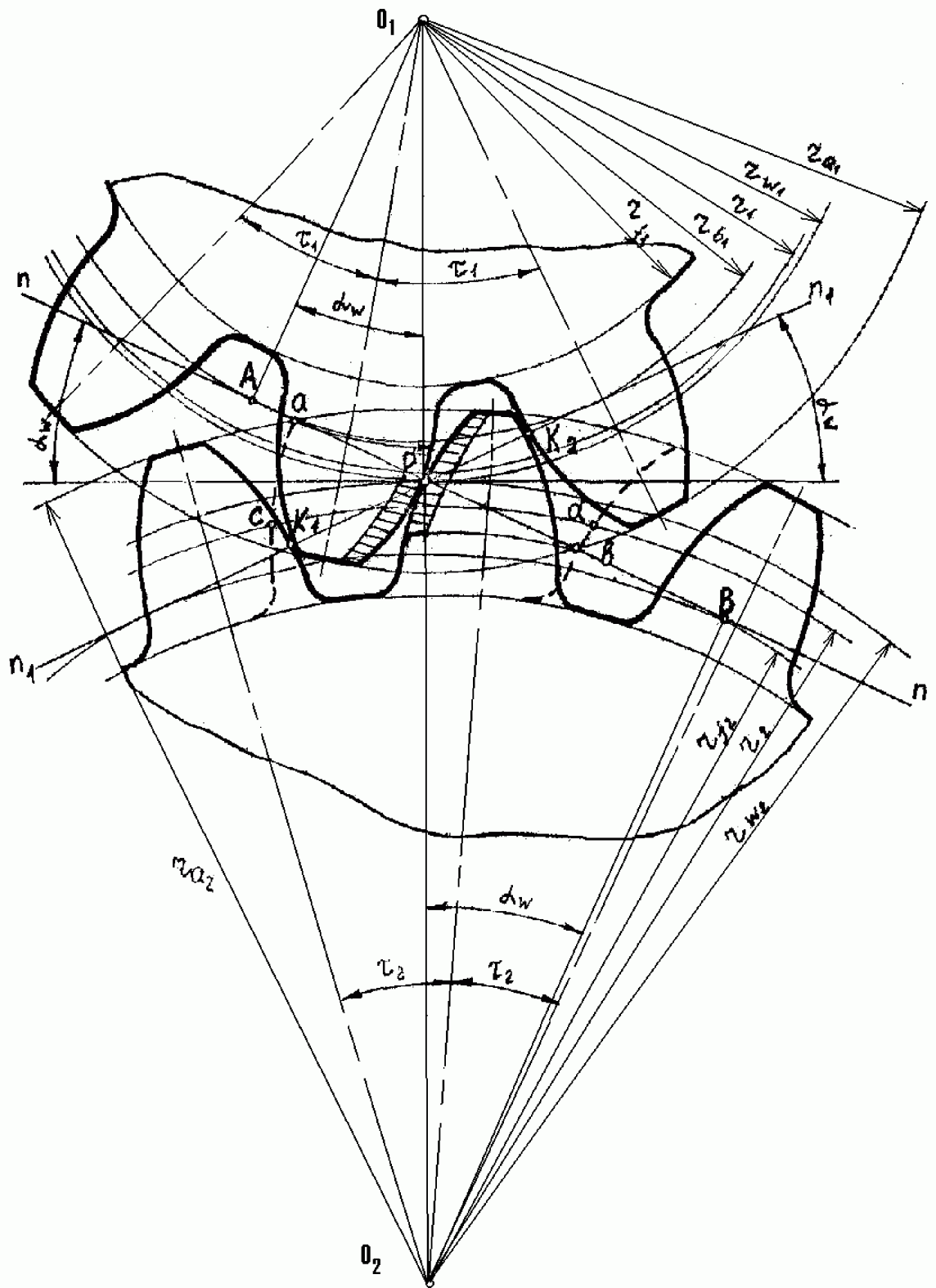


Рис. 5.8. Построение картины зацепления колес

5.7. Коэффициент перекрытия

Изобразим касание боковых профилей зубьев в начале (точка a) и конце зацепления (точка b), (рис. 5.9).

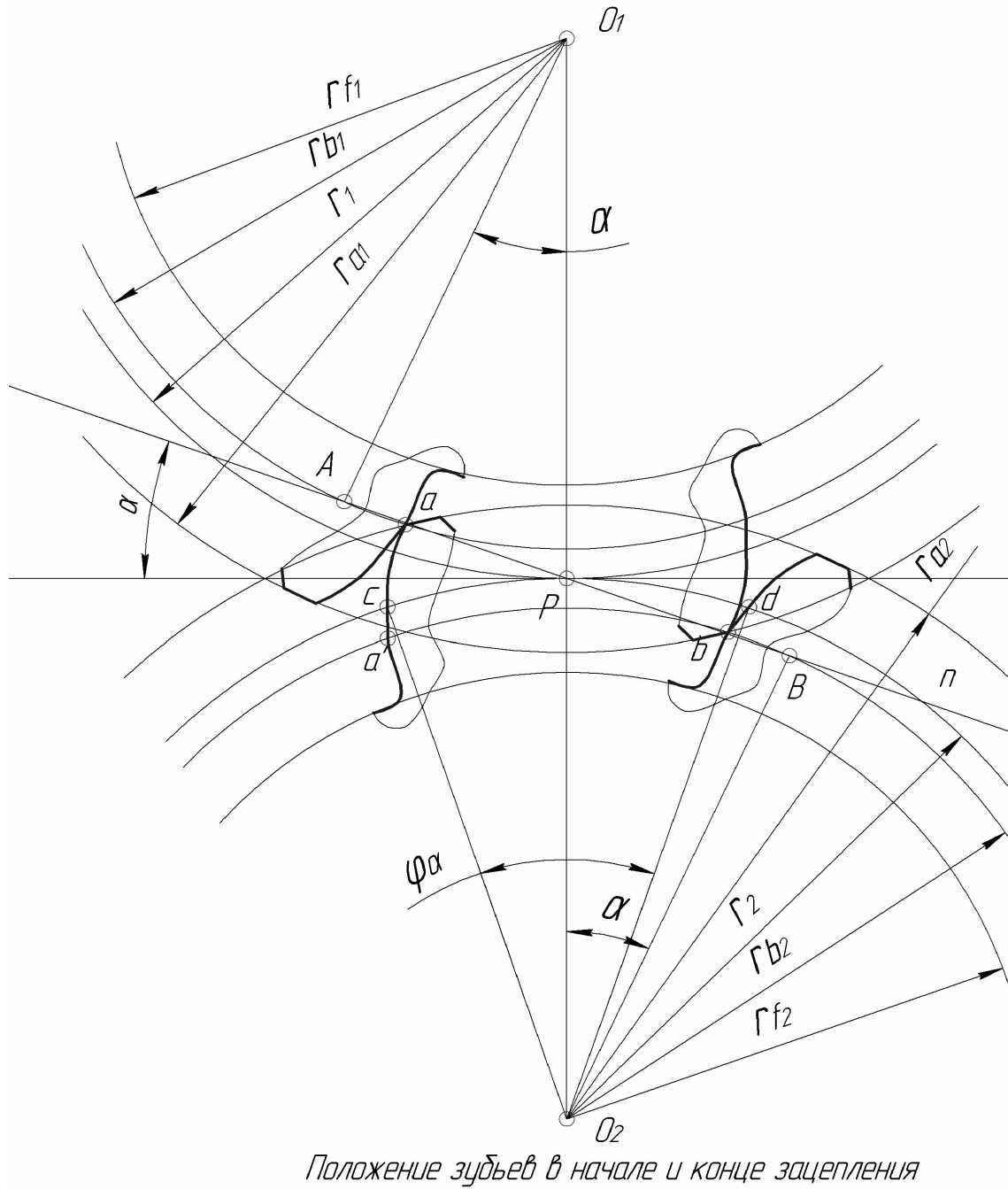


Рис. 5.9. Картина касания зубьев в начале и конце зацепления:
 \cup_{cd} – дуга зацепления; φ_α – угол зацепления; AB – теоретическая линия зацепления; ab – практическая линия зацепления

Условием непрерывности зацепления является $\varphi_d > \tau$, где τ – угловой шаг. Отношение

$$\frac{\varphi_\alpha}{\tau} = \varepsilon_\alpha \quad (5.3)$$

называется *коэффициентом перекрытия*.

Физический смысл ε_α заключается в том, что он указывает, сколько пар зубьев одновременно находится в зацеплении (если $\varepsilon_\alpha=1$, то 1 пара зубьев, если $\varepsilon_\alpha=2$, – 2 пары, а если $\varepsilon_\alpha=1,5$, то 50 % времени в зацеплении находится 1 пара зубьев, 50 % – 2 пары).

Вывод формулы расчета ε_α

Угол зацепления

$$\varphi_\alpha = \frac{\cup cd}{r_b} = \frac{ab}{r \cdot \cos \alpha},$$

где $\cup cd=ab$ по свойству эквиваленты.

Угловой шаг $\tau = \frac{2\pi}{z}$. Тогда (5.3) можно записать в виде

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\varphi_\alpha}{\tau} = \frac{ab}{\frac{2\pi}{z} \cdot r \cos \alpha} = \frac{ab}{\frac{2\pi}{z} \cdot \frac{mz}{2} \cdot \cos \alpha} = \frac{ab}{\pi m \cos \alpha} = \frac{ab}{p \cos \alpha};$$

$$\varepsilon_\alpha = \frac{ab}{p \cos \alpha}.$$

Величину ab можно взять с чертежа или вычислить аналитически. Для вывода формулы расчета ab произведем преобразования (см. рис. 5.9):

$$ab = aP + Pb = (ab - Pb) + (Ab - AP),$$

$$aB = \sqrt{r_{a_1}^2 - r_{b_1}^2}, \quad PB = O_2P \cdot \sin \alpha,$$

$$Ab = \sqrt{r_{a_1}^2 - r_{b_1}^2}, \quad AP = O_1P \cdot \sin \alpha,$$

$$AP + PB = (O_1P + O_2P) \cdot \sin \alpha = a \sin \alpha,$$

$$ab = \sqrt{r_{a_1}^2 - r_{b_1}^2} + \sqrt{r_{a_2}^2 - r_{b_2}^2} - (PB + AP) = \sqrt{r_{a_1}^2 - r_{b_1}^2} + \sqrt{r_{a_2}^2 - r_{b_2}^2} - a \sin \alpha.$$

Тогда

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\sqrt{r_{a_1}^2 - r_{b_1}^2} + \sqrt{r_{a_2}^2 - r_{b_2}^2} - a_w \sin \alpha_w}{P \cdot \cos 20^\circ}.$$

В прямоугольных зацеплениях $1 < \varepsilon_\alpha < 2$. Для увеличения коэффициента зацепления ε_α используют *косозубые колеса*.

На развертке венца косозубого зубчатого колеса (рис. 5.10) указаны размеры: β – угол наклона зубьев; P_t – торцевой шаг; P_n – нормальный шаг; B – ширина колеса.

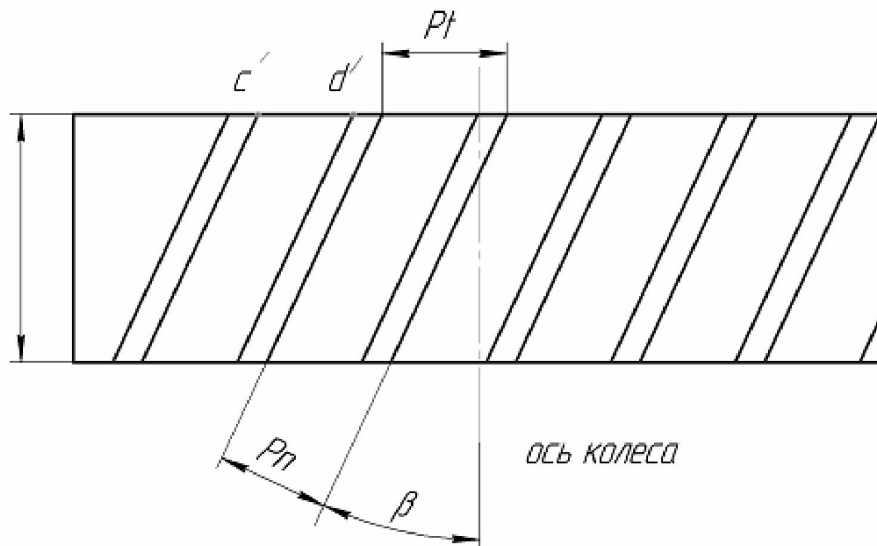


Рис. 5.10. Развертка венца косозубого колеса

Длина дуги зацепления в косозубом зацеплении (по сравнению с прямым) увеличена на длину $c'd' = B \cdot \operatorname{tg} \beta$.

Тогда величина коэффициента перекрытия

$$\varepsilon_\beta = \varepsilon_\alpha + \frac{c'd'}{P_t} = \varepsilon_\alpha + \frac{\beta \cdot \operatorname{tg} \beta}{P_t}.$$

При этом $m_n = m_t \cdot \cos \beta$ – нормальный модуль, m_t – торцевой.

Преимущества косозубых колес: возможность передачи больших крутящих моментов при тех же габаритах, повышенная надежность, бесшумность.

Недостатки: сложность изготовления, появление осевого усилия, что требует усложнения конструкции подшипникового узла.

Для снятия осевого усилия используют *шевронные* колеса, представляющие собой два косозубых колеса с противоположными углами наклона зубьев. Но такие колеса более сложны в изготовлении.

5.8. Способы нарезания зубчатых колес

Зубчатые колеса с эвольвентным профилем зубьев обычно нарезают на специальных зуборезных станках двумя способами: *огибанием* (обкаткой), *копированием*.

Инструментами при *огибании (обкатке)* являются инструментальная рейка, червячная фреза или долбяк. Способ производителен и непрерывен, отличается простотой оснастки режущего инструмента (рейки), широко используется в серийном и массовом производстве.

Метод обкатки заключается в том, что режущему инструменту (рейке или долбяку) и заготовке сообщают относительное движение, которое имели бы два зубчатых колеса, находящиеся в правильном зацеплении. В таком случае режущий инструмент должен представлять собой зубчатое колесо с режущими гранями на зубьях долбяка (рис. 5.11а) или зубчатую рейку (рис. 5.11б). Инструмент – долбяк – может нарезать колеса заданного модуля с числом зубьев $z_k \geq z_u + 15$, где z_u – число зубьев долбяка. Необходимо, чтобы заготовка и долбяк вращались с соответствующими угловыми скоростями, а долбяк совершал поступательное (режущее) движение вдоль оси заготовки. Этот способ позволяет нарезать методом обкатки колеса как с наружным, так и внутренним расположением зубьев.

Вместо долбяка в качестве инструмента можно использовать *инструментальную рейку* (рис. 5.11б). В вертикальном направлении (на рис. 5.11б – перпендикулярно плоскости чертежа) рейка совершает возвратно-поступательное движение, параллельное оси нарезаемого колеса. Заготовка имеет двойное движение в горизонтальной плоскости: вращаясь вокруг своей оси, она одновременно перемещается вдоль рейки.

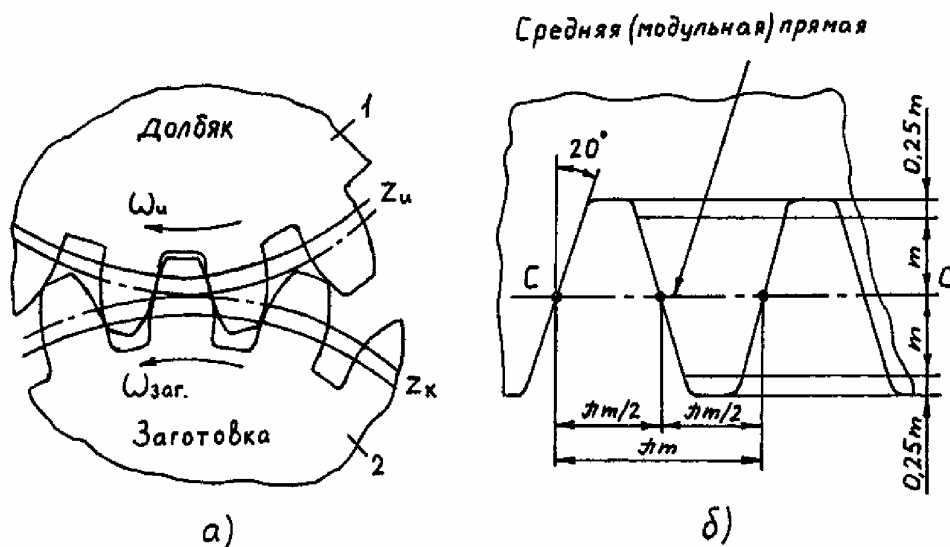


Рис. 5.11. Инструменты: а – долбяк; б – инструментальная рейка

Режущим инструментом при *копировании* является дисковая или пальцевая фреза, режущие кромки которых имеют профиль (форму) впадины нарезаемого зубчатого колеса. За один проход инструмента

нарезается одна впадина. Для вырезания следующей впадины заготовку поворачивают на величину углового шага. Этот способ распространен в мелкосерийном, единичном и ремонтном производстве, при изготовлении крупных колес. Он малопроизводителен и требует большого количества зуборезного инструмента.

5.9. Явление подрезания зубьев.

Минимальное число зубьев колеса

Если произойдет наложение боковых профилей зуба инструментальной рейки и зуба колеса (т.е. интерференция), то часть ножки зуба будет подрезана головкой зуба инструментальной рейки (рис. 5.12). При этом часть рабочего участка зуба не будет являться эвольвентой и основная теорема зацепления не будет соблюдена, а основание зуба – ослаблено.

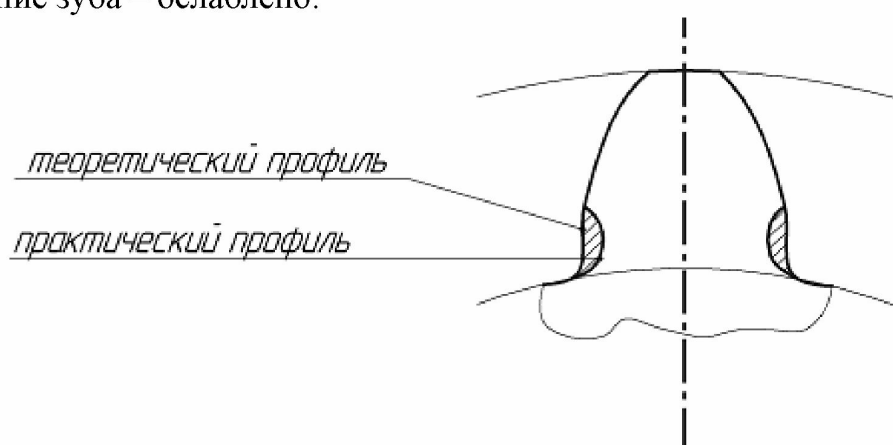


Рис. 5.12. Подрезание ножки зуба

В этом случае практическая линия зацепления ab будет выходить за пределы теоретической линии AB (см. рис. 5.9). Для устранения подрезания необходимо совместить точки a и A на линии зацепления. С этой целью производят так называемую коррекцию, при которой зуборезная рейка отодвигается от заготовки нарезаемого колеса на определенное расстояние, достаточное для того, чтобы не происходило подрезание ножки зуба (рис. 5.13).

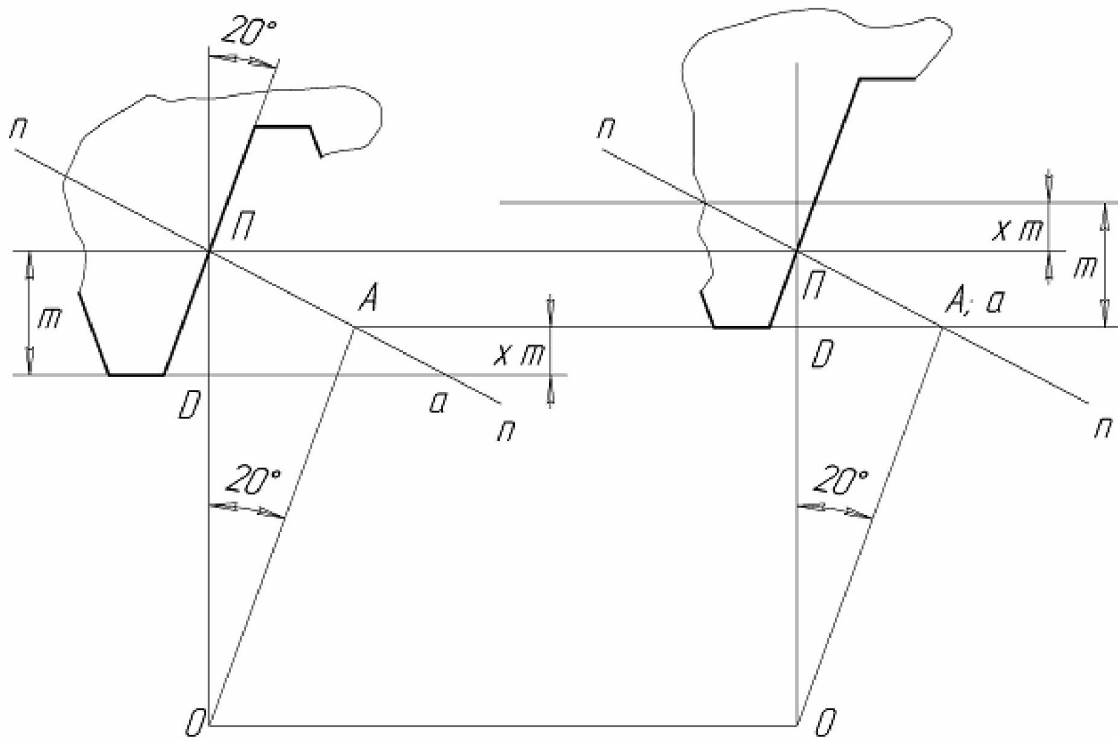


Рис. 5.13. Смещение инструментальной рейки при нарезании положительного колеса

Определим величину смещения рейки, необходимую для устранения подрезания ножки зуба, для чего необходимо совместить точки A и a – точки теоретической и практической линий зацепления. При этом

$$\hat{I}\ddot{I} = OD + m - x \cdot m,$$

где $\hat{I}\ddot{I} = \frac{mz}{2}$; $OD = OA \cdot \cos 20^\circ$; $OA = r_b = \frac{mz}{2} \cos 20^\circ$; xm – абсолютный сдвиг рейки; x – относительное смещение рейки.

Тогда

$$\frac{mz}{2} = \frac{mz}{2} \cdot \cos^2 20^\circ + m - x \cdot m,$$

откуда

$$x = 1 - \frac{z}{2}(1 - \cos^2 20^\circ) = 1 - \frac{z}{2} \sin^2 20^\circ,$$

или в общем виде (если $20^\circ = \alpha_p$)

$$x = 1 - \frac{z}{2} \sin^2 \alpha_p.$$

Для условия $x = 0$ определим минимальное число зубьев нулевого колеса, при котором не будет подрезания: $z_{\min} = \frac{2}{\sin^2 \alpha_p}$.

$$\text{Если } \alpha_p = 20^\circ, \text{ то } z_{\min} \approx \frac{2}{\sin^2 20^\circ} = \frac{2}{\frac{1}{17}} = 17.$$

Используя это условие, можно записать для случая $\alpha_p = 20^\circ$

$$x = 1 - \frac{z}{2} \cdot \frac{2}{17} = \frac{17 - z}{17} -$$

величина относительного смещения.

Если $x = 0$, то будет нарезано нулевое колесо, если $x > 0$, то положительное (рейка отодвинута от колеса), если $x < 0$, то отрицательное (при этом рейка будет придвинута к колесу).

5.10. Геометрические параметры коррегированных зубчатых колес

Толщина зуба по делительной окружности

Пусть рейка придвинута к нарезаемому колесу на величину смещения инструментальной рейки $x \cdot m$. Тогда толщина зуба нарезаемого колеса по делительной окружности уменьшится на $2 \cdot \Delta S$ (рис. 5.14):

$$S' = S \pm 2 \cdot \Delta S,$$

где $\Delta S = x \cdot m \cdot \operatorname{tg} 20^\circ$.

$$\text{Толщина зуба колеса } S' = \frac{\pi m}{2} \pm 2xmtg20^\circ.$$

Знак «+» принимается при положительном сдвиге, когда рейка отодвинута от нарезаемого колеса, знак «-» – при отрицательном, когда рейка придвинута к колесу.

Толщина зуба по окружности выступов

Толщина зуба по окружности выступов (рис. 5.15) представлена равенством

$$\frac{\beta}{2} + \theta = \frac{\beta_a}{2} + \theta_a, \quad (5.4)$$

где $\theta = \operatorname{inv} \alpha$; $\alpha = 20^\circ$.

Рис. 5.14. Профиль зуба рейки

Рис. 5.15 Профиль зуба колеса

Согласно уравнению эвольвенты, $\cos\alpha_a = \frac{r_b}{r_a}$.

Тогда

$$\frac{\beta}{2} = \frac{S}{2r}, \quad \frac{\beta_a}{2} = \frac{S_a}{2r_a}.$$

Подставив эти значения в уравнение (5.4), получим

$$\frac{S}{2r} + \text{inv}20^\circ = \frac{S_a}{2r_a} + \text{inv}\alpha_a.$$

Получаем формулу расчета толщины зуба по окружности выступов

$$S_a = 2r_a \left(\frac{S}{2r} + \text{inv}20^\circ - \text{inv}\alpha_a \right). \quad (5.5)$$

Допускается $S_a \geq 0,1m$. Если это неравенство не выполняется (произошло заострение вершины зуба), то проводят корректировку расчетов, уменьшая сдвиг рейки или увеличивая модуль m .

Определение угла коррегированного зацепления α_w

Пользуясь формулой (5.5), можно записать формулу расчета толщины зуба по начальной окружности:

$$S_w = 2r_w \left(\frac{S}{2r} + \text{inv}20^\circ - \text{inv}\alpha_w \right).$$

Так как $S = \frac{\pi m}{2} \pm 2xmtg20^\circ$, $r_w = \frac{m_w z}{2}$, $r = \frac{mz}{2}$, то

$$S_w = m_w z \left(\frac{\pi}{2} \pm 2x_m \operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{inv} 20^\circ - \operatorname{inv} \alpha_w \right) = m_w \left(\frac{\pi}{2} \pm 2x \operatorname{tg} 20^\circ + z \cdot \operatorname{inv} 20^\circ - z \cdot \operatorname{inv} \alpha_w \right).$$

При беззазорном зацеплении сумма толщин зубьев по начальным окружностям отвечает условию $S_{w_1} + S_{w_2} = \pi m_w$, или

$$m_w \left(\frac{\pi}{2} + 2x_1 \operatorname{tg} 20^\circ + z_1 \operatorname{inv} 20^\circ - z_1 \operatorname{inv} \alpha_w \right) + m_w \left(\frac{\pi}{2} + 2x_2 \operatorname{tg} 20^\circ + z_2 \operatorname{inv} 20^\circ - z_2 \operatorname{inv} \alpha_w \right) = \pi m_w.$$

Отсюда

$$\operatorname{inv} \alpha_w = \operatorname{inv} 20^\circ + 2 \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} \cdot \operatorname{tg} 20^\circ.$$

Радиусы начальных окружностей вычисляются по формуле

$$r_w = \frac{r_b}{\cos \alpha_w}.$$

Межосевое расстояние коррегированного зацепления

$$a_w = a_0 \frac{\cos 20^\circ}{\cos \alpha_w} = \frac{(r_1 + r_2) \cdot \cos 20^\circ}{\cos \alpha_w} = a_0 \frac{\cos 20^\circ}{\cos \alpha_w},$$

где a_0 – стандартное межосевое расстояние.

$$\text{Тогда } a_w = a_0 \frac{\cos 20^\circ}{\cos \alpha_w} = \frac{m}{2} (z_1 + z_2) \frac{\cos 20^\circ}{\cos \alpha_w}.$$

Если $\alpha_w > 20^\circ$, то $a_w > a_0$; если же $\alpha_w < 20^\circ$, то $a_w < a_0$.

Если $x_1 = x_2 = 0$, то получаем *стандартную* передачу, если $x_1 = -x_2$ – *равносмещенную*.

Радиусы окружностей впадин и выступов

Радиус окружности впадин вычисляется по формуле

$$r_f = r - 1,25m \pm xm.$$

Знак «+» принимают при положительном сдвиге, «-» – при отрицательном.

Радиус окружности выступов $r_a = a_w - r_f - 0,25m$.

Коррегированные зацепления применяют в случаях:

– если число зубьев нарезанного колеса $z < 17$ и происходит подрезание зуба;

– если задано межосевое расстояние a_w , отличное от стандартного a_0 ;

– для улучшения качественных показателей зацепления (устранение заострения вершин зуба, уменьшение износа и т.д.).

Для выбора величины коэффициентов смещения x_1 и x_2 удобно использовать блокирующие контуры (рис. 5.16), представляющие собой допустимые области значений x_1 и x_2 , изображенные в координатных осях x_1 и x_2 .

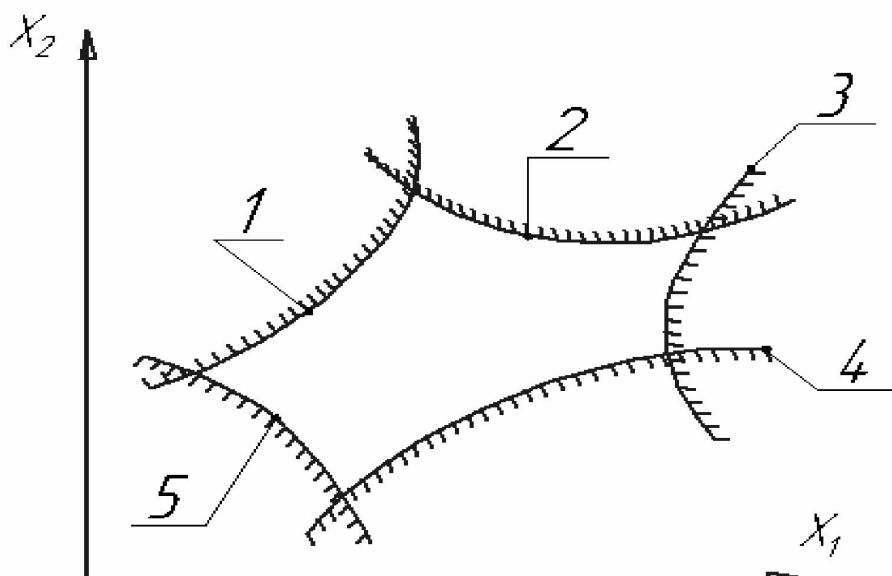


Рис. 5.16. Примерная схема блокирующего контура

Кривые 1 – 5 представляют собой ограничения на заострение головок зубьев, подрезание ножек зубьев, заданные значения коэффициента перекрытия, скоростей относительного скольжения соприкасающихся профилей и т.д.

6. СЛОЖНЫЕ ЗУБЧАТЫЕ МЕХАНИЗМЫ

6.1. Общие сведения о сложных зубчатых механизмах

Различают одноступенчатые и многоступенчатые зубчатые механизмы.

Одноступенчатым называют зубчатый механизм, который не может быть расчленен на более простые.

Передаточное отношение одноступенчатого механизма целесообразно принимать не более 6...8, иначе возрастают габариты колеса и всего механизма, происходит неравномерный износ колеса (шестерня изнашивается быстрее).

Многоступенчатые (сложные) зубчатые механизмы используются для получения больших передаточных отношений и образуются путем соединения нескольких одноступенчатых механизмов. Механизмы, понижающие угловую скорость, называются *редукторами*, повышающие – *мультипликаторами*.

Классификация сложных зубчатых механизмов

Все сложные зубчатые механизмы можно классифицировать по характеру движения и подвижности осей валов, а также по величине передаточного отношения (рис. 6.1).

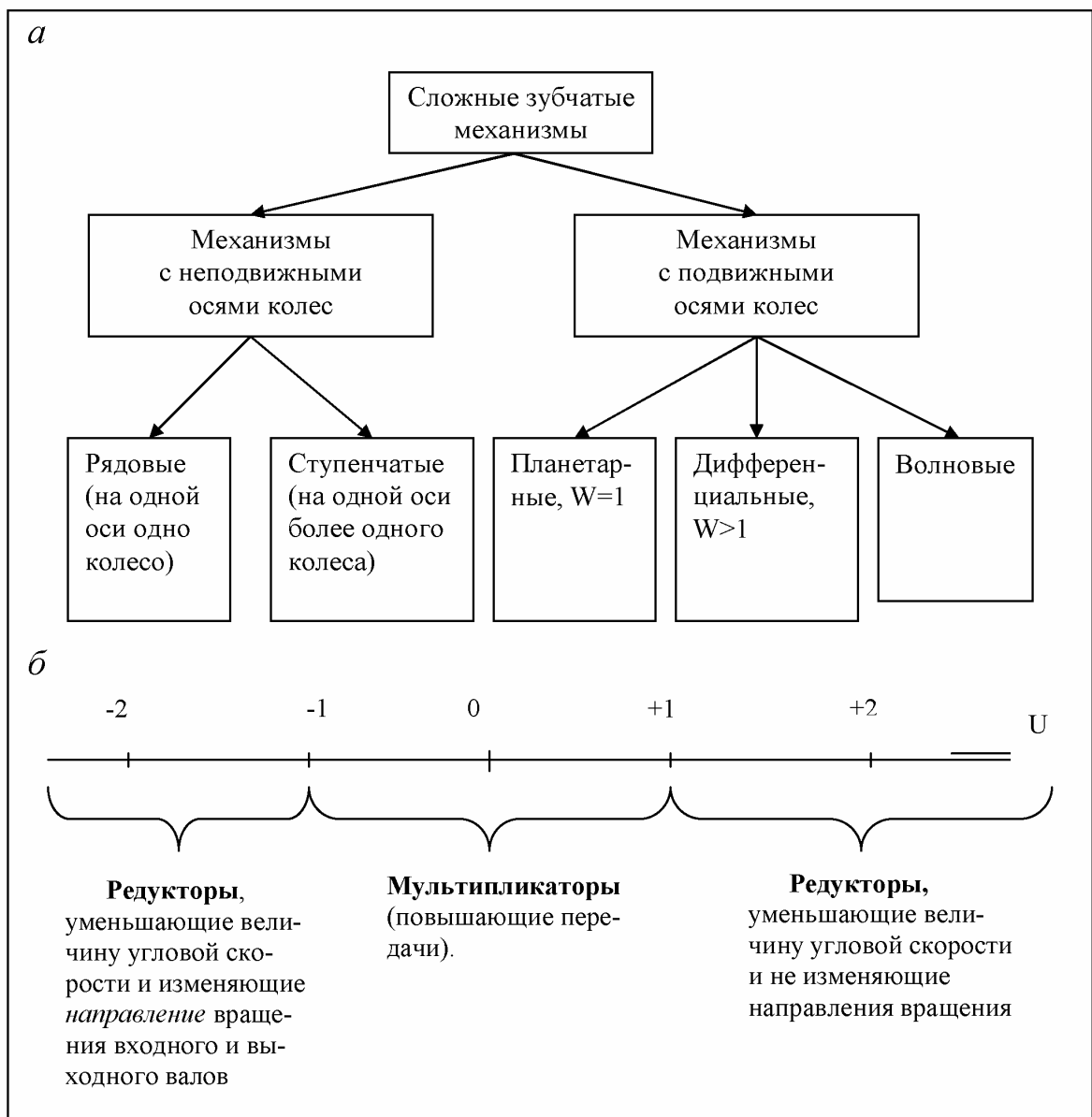


Рис. 6.1. Классификация сложных зубчатых механизмов:
 а – по характеру движения (подвижности) осей валов;
 б – по величине передаточного отношения U

6.2. Передачи с неподвижными осями колес

Рядовой зубчатый механизм – это последовательно соединенные несколько ступеней зубчатых колес (рис. 6.2).

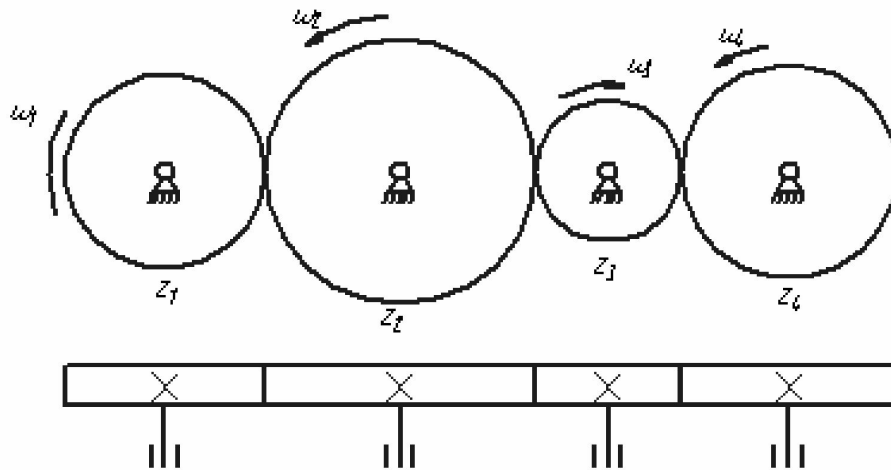


Рис. 6.2. Рядовой зубчатый механизм

Согласно определению, передаточное отношение равно отношению угловых скоростей входного и выходного валов: $U_{1-4} = -\frac{\omega_1}{\omega_4}$, а передаточные отношения ступеней – $U_{1-2} = -\frac{\omega_1}{\omega_2}$, $U_{2-3} = -\frac{\omega_2}{\omega_3}$, $U_{3-4} = -\frac{\omega_3}{\omega_4}$.

Перемножим левые и правые части этих выражений и приравняем их друг к другу:

$$U_{1-2} \cdot U_{2-3} \cdot U_{3-4} = -\frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_4} = -\frac{\omega_1}{\omega_4} = U_{1-4}.$$

Запишем обобщенную формулу вычисления передаточного отношения

$$U_{1-n} = (-1)^k \cdot U_{1-2} \cdot U_{2-3} \cdot \dots \cdot U_{(n-1)-n}, \quad (6.1)$$

где n – количество валов; k – количество ступеней.

Так как $U_{1-2} = \pm \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{z_2}{z_1}$, то формула расчета общего передаточного

отношения рядового механизма выглядит как $U_{1-n} = (-1)^k \cdot \frac{\omega_1}{\omega_n} = (-1)^k \cdot \frac{z_n}{z_1}$.

Отсюда следует, что его величина зависит только от количества зубьев входного и выходного колес. Промежуточные колеса служат лишь для увеличения межосевого расстояния и изменения направления вращения.

Ступенчатый механизм

Передаточное отношение ступенчатого зубчатого механизма рассчитывается по формуле (6.1).

Для механизма (рис. 6.3) формула расчета передаточного отношения выглядит как $U_{1-3} = U_{1-2} \cdot U_{2-3} = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_2'}$.

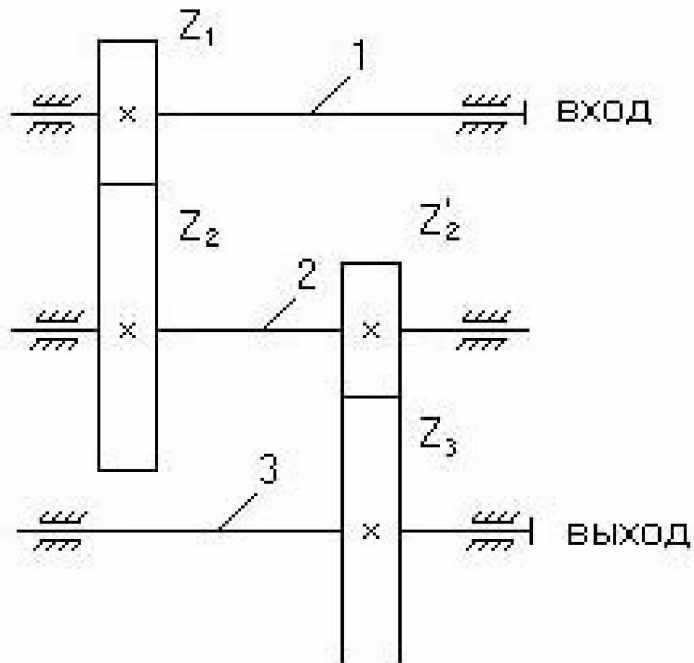


Рис. 6.3. Ступенчатый зубчатый механизм: 1 – ведущий (входной) вал; 2 – промежуточный вал; 3 – ведомый (выходной) вал

Ступенчатые механизмы (как и рядовые) применяются для изменения направления вращения выходного вала по отношению к входному и получения больших передаточных отношений.

Например, с помощью 2-ступенчатого механизма можно получить $U \leq 25$, 3-ступенчатого – $U \leq 100$, 4-ступенчатого – $U \leq 500$.

6.3. Планетарные передачи

Различают 4 основных типа планетарных ступеней (так называемых механизмов Давида) (рис. 6.4, схемы I – IV).

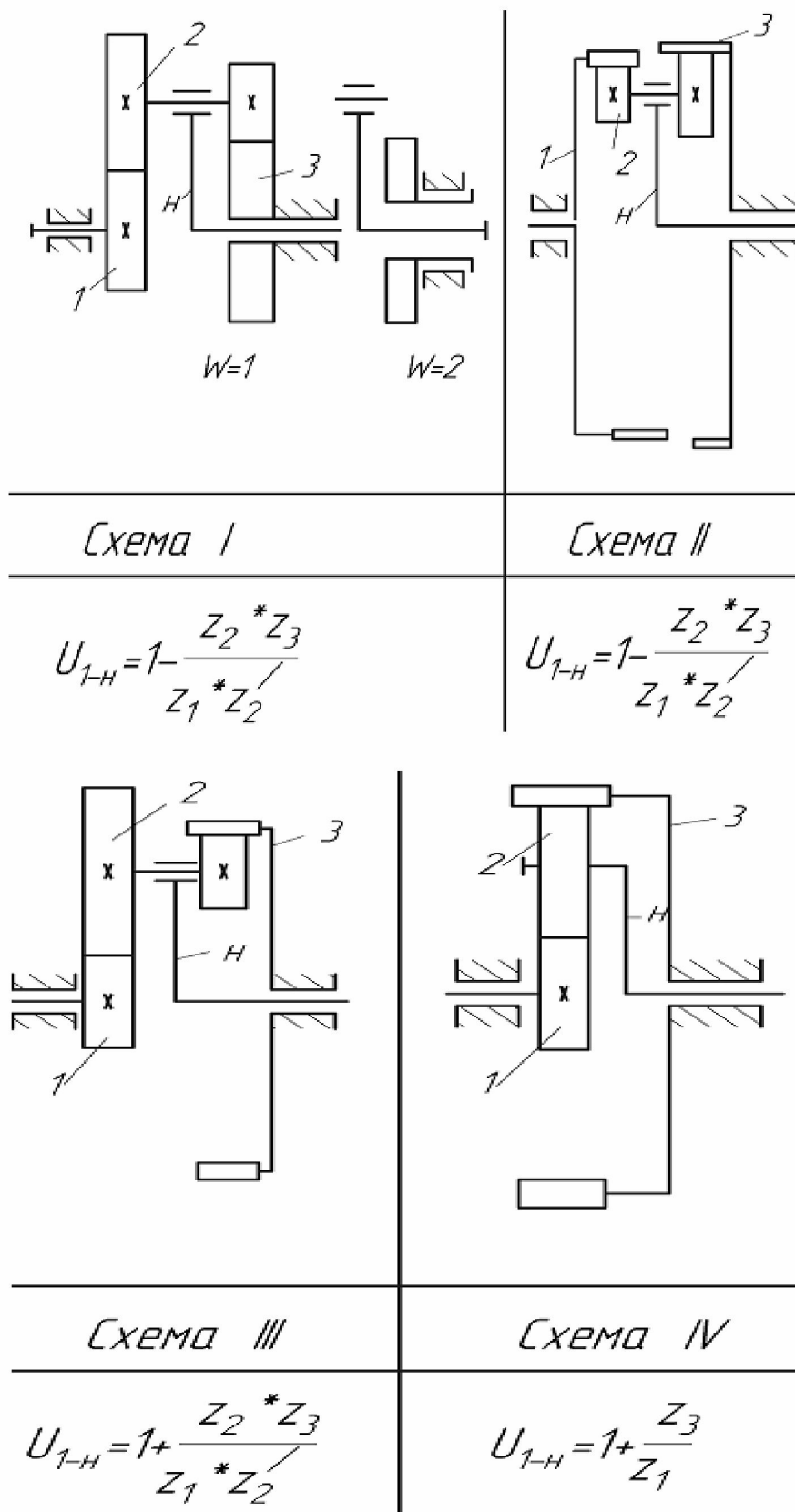


Рис. 6.4. Кинематические схемы планетарных передач:
 1 – центральное колесо; 2 – сателлиты; 3 – опорное (неподвижное) колесо;
 H – водило (от заглавной буквы слова Hedel – рычаг)

Преимущества планетарных передач:

- компактность при больших передаточных отношениях U ;
- возможность передачи больших крутящих моментов (при их передаче используется несколько сателлитов).

Недостатки планетарных передач:

- сложность изготовления;
- высокая точность изготовления и сборки.

6.3.1. Вычисление передаточного отношения планетарной передачи

Аналитический метод. Используем метод обращения движения, когда всему механизму, в том числе неподвижному колесу, условно придается (сообщается) угловая скорость ω_H (т.е. все звенья в таком механизме уменьшают скорость на величину угловой скорости водила ω_H). Тогда в этом так называемом *обращенном механизме* водило H станет неподвижным, и мы получим простой ступенчатый механизм с неподвижными осями. Угловые скорости исходного планетарного и обращенного механизма сведем в таблицу.

№ звеньев	Угловые скорости в механизме	
	планетарном	обращенном
1	ω_1	$\omega_1 - \omega_H$
2	ω_2	$\omega_2 - \omega_H$
3	$\omega_3 = 0$	$\omega_3 - \omega_H = -\omega_H$
H	ω_H	$\omega_H - \omega_H = 0$

Вычисляем передаточные отношения обращенного механизма (на примере схемы I):

через угловые скорости:

$$U_{1-3}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{-\omega_H} = 1 - \frac{\omega_1}{\omega_H} = 1 - U_{1-H}; \quad (6.2)$$

через числа зубьев колес:

$$U_{1-3}^H = \left(\frac{z_2}{z_1} \right) \cdot \left(-\frac{z_3}{z_2'} \right). \quad (6.3)$$

Из уравнений (6.2) и (6.3) получим $U_{1-H} = 1 - U_{1-3}^{(H)} = 1 - \frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_2'}$.

Для других схем планетарных механизмов (см. рис. 6.4) выводы формул расчета передаточных отношений аналогичны предыдущему.

Общая формула имеет вид

$$U_{1-H} = 1 - U_{1-3}^{(H)},$$

где $U_{1-3}^{(H)}$ – передаточное отношение обращенного механизма.

Графический метод расчета передаточного отношения планетарной передачи заключается в том, что сначала строят кинематическую схему механизма в масштабе, затем картины (планы) линейных и угловых скоростей. Используя геометрические размеры построений, вычисляют передаточное отношение.

Рассмотрим последовательность решения на примере механизма, изображенного на рис. 6.5.

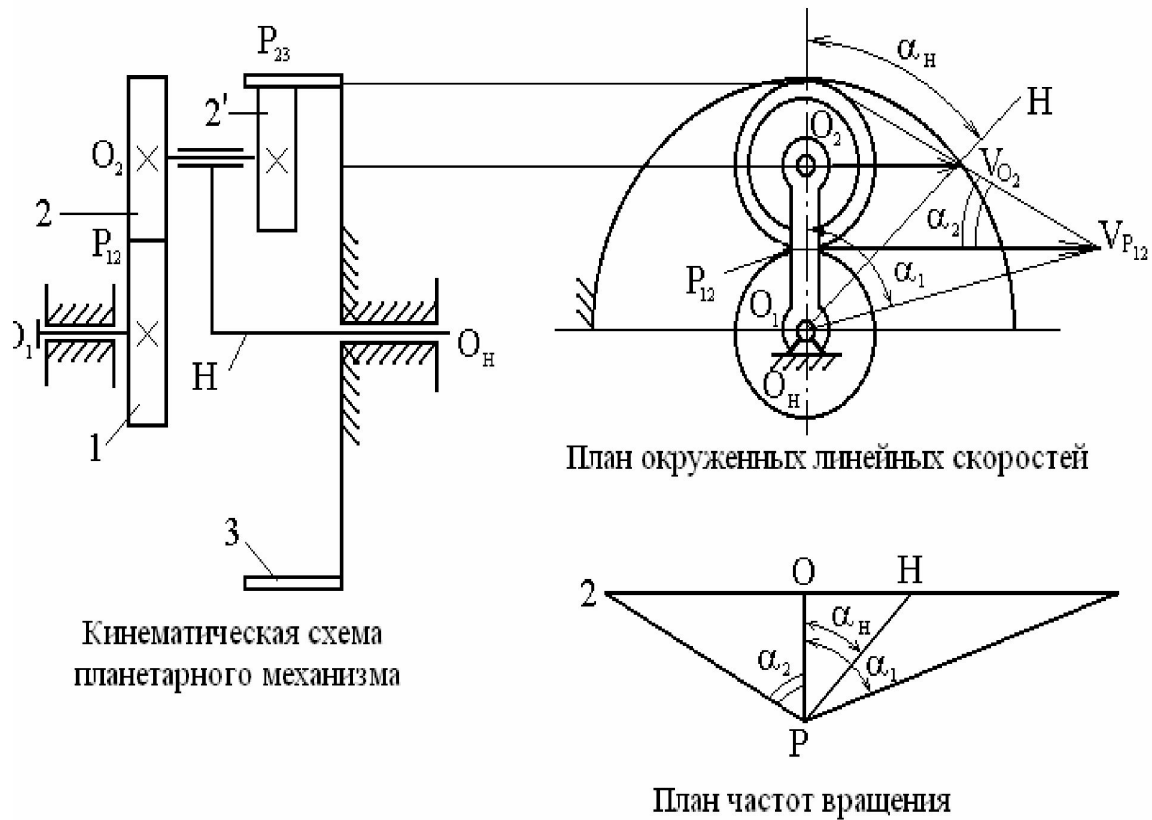


Рис. 6.5. План механизма, картина линейных скоростей, план угловых скоростей

Строится кинематическая схема планетарного механизма в двух проекциях в выбранном масштабе: радиусы зубчатых колес (мм) рекомендуется принимать равными числам зубьев (т.е. условно принимать модуль $m = 2$).

Строится план окружных линейных скоростей механизма: из полюса зацепления 1 и 2 колес (точки P_{12} на правой проекции механизма) проводят вектор $V_{P_{12}}$ произвольной длины, который изображает линейную скорость точки P_{12} . Соединив конец этого вектора с точкой O_1 , получают треугольник скоростей колеса 1. Здесь гипотенуза показывает изменение

линейных скоростей колеса 1 от оси вращения до делительной окружности.

Строится треугольник скоростей звена 2: конец вектора V_{P12} соединяют с неподвижным полюсом P_{23} зацепления колес 2 и 3.

Строится треугольник скоростей водила H : из точки O_2 проводят вектор линейной скорости V_{O2} до гипотенузы (прямой между точками P_{23} и V_{P12}) треугольника скоростей сателлита 2. Соединив конец вектора V_{O2} с точкой O_H гипотенузой, получают треугольник скоростей водила H .

Величина передаточного отношения механизма равна отношению угловых скоростей ($U_{1-H} = \omega_1/\omega_H$). Величины угловых скоростей 1-го колеса ω_1 и водила ω_H пропорциональны тангенсам углов α_1 и α_H на плане окружных линейных скоростей. Но так как углами при расчетах пользоваться неудобно, то *строится план частот вращения*. Для этого проводят вертикальный отрезок OP произвольной длины. Через точку O проводят горизонтальную линию. Из точки P проводят под углами α_1 , α_2 , α_H к отрезку OP линии $P1$, $P2$ и PH , параллельные гипотенузам треугольников окружных скоростей. Отрезки $P1$, $P2$ и PH пропорциональны частотам вращения звеньев 1, 2 и H . Для вычисления передаточных отношений достаточно измерить длины этих отрезков и подставить в нижеприведенные формулы. Если соотносимые отрезки лежат по одну сторону от точки O , то передаточное отношение берется со знаком плюс, если по разные – со знаком минус:

$$U_{1-H}^{pp} = OI/OH, U_{12}^{pp} = -OI/O2.$$

При этих построениях окружная линейная скорость точки A , принадлежащей колесу 1,

$$v_A = AA' \cdot \mu_v = O_1A \cdot \mu_\ell \cdot \omega_1;$$

скорость точки O_2 , принадлежащей сателлиту,

$$v_{O_2} = O_2O_2' \cdot \mu_v = O_1O_2 \cdot \mu_\ell \cdot \omega_H;$$

угловая скорость центрального колеса 1

$$\omega_1 = \frac{\mu_v}{\mu_\ell} \cdot \frac{AA'}{O_1A} = \frac{\mu_v}{\mu_\ell} \cdot \operatorname{tg} \alpha_1;$$

угловая скорость водила H

$$\omega_H = \frac{\mu_v}{\mu_\ell} \cdot \frac{O_2O_2'}{O_1O_2} = \frac{\mu_v}{\mu_\ell} \cdot \operatorname{tg} \alpha_H,$$

а величина передаточного отношения от колеса 1 к водилу H

$$U_{1-H} = \frac{\omega_1}{\omega_H} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_H} = \frac{\hat{I} 1}{\hat{II}}.$$

6.3.2. Геометрический синтез планетарных передач

Для создания работоспособной ступени планетарного механизма необходимо соблюдать три условия: *соосность, соседство, собираемость*.

Условие соосности обеспечивает достаточное и постоянное межцентровое расстояние между колесами.

Для схемы I (см. рис. 6.4) межосевые расстояния между осями валов 1 и 2, а также осями 2 и 3

$$a_{1-2} = a_{3-2}, \text{ или } \frac{m}{2}(z_1 + z_2) = \frac{m}{2}(z_3 + z_2'),$$

откуда

$$z_1 + z_2 = z_3 + z_2'.$$

Для схемы II это условие выглядит как $z_1 - z_2 = z_3 - z_2'$, для схемы III – $z_1 + z_2 = z_3 - z_2'$, для схемы IV – $z_3 - z_2 = z_1 + z_2'$.

Условие соседства обеспечивает размещение на одной окружности нескольких сателлитных колес с некоторым зазором Δ между ними (рис. 6.6).

Пусть K – количество сателлитов, тогда условие соседства можно выразить неравенством

$$r_{a_2} < \frac{1}{2}O_2O_2',$$

где r_{a_2} – радиус окружности выступов сателлита.

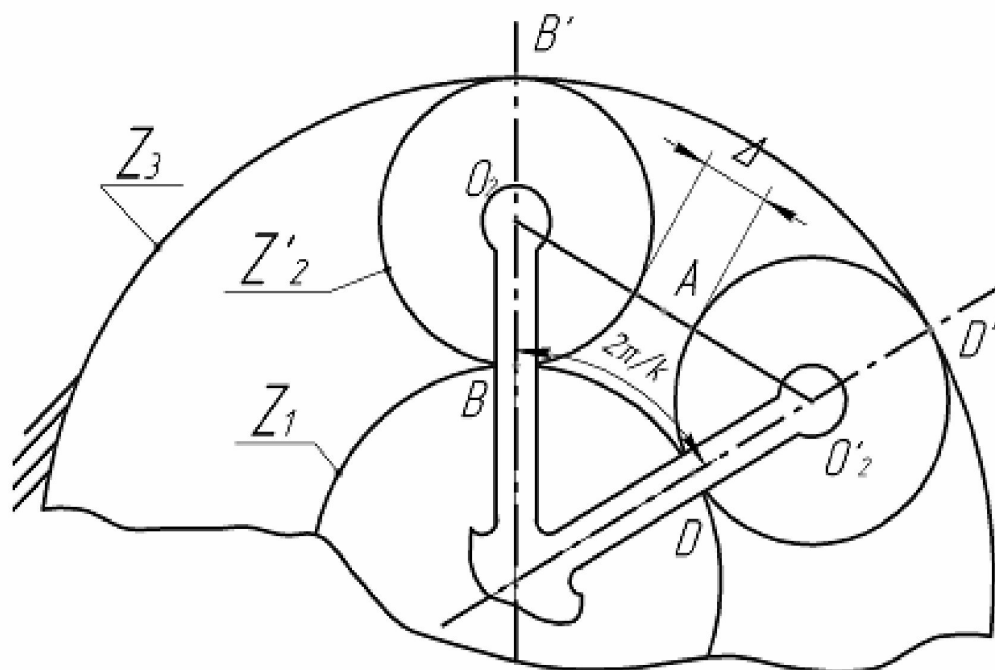


Рис. 6.6. Размещение соседних сателлитов планетарной передачи

Так как

$$r_{a_2} = \frac{mz_2'}{2} + m, \quad \frac{1}{2}O_2O_2' = O_2A = O_1O_2 \cdot \sin \frac{\pi}{k},$$

$$\text{то } \frac{mz_2'}{2} + m < \frac{m}{2}(z_1 + z_2') \cdot \sin \frac{\pi}{k}, \text{ или}$$

$$z_2' + 2 < (z_1 + z_2') \cdot \sin \frac{\pi}{k}. \quad (6.4)$$

Неравенство (6.4) представляет собой *условие соседства*.

Условие собираемости обеспечивает возможность зацепления всех сателлитных колес с центральными колесами при постоянстве угла между сателлитами. При этом следует обеспечить такое условие, чтобы колеса вошли в зацепление строго в точках В и В', D и D' (см. рис. 6.6).

Выведем условие собираемости. Пусть колесо 1 повернется на угловой шаг $\tau_1 = \frac{2\pi}{z_1} = \varphi_1$.

Так как $U_{1-H} = \frac{\varphi_1}{\varphi_H}$, то водило повернется на угол

$$\varphi_H = \frac{\varphi_1}{U_{1-H}} = \frac{2\pi}{z_1 \cdot U_{1-H}}.$$

В пределах угла $\frac{2\pi}{k}$ угол φ_H должен располагаться целое число раз, т.е. $\frac{2\pi}{k} = c \cdot \varphi_H$, где С – целое число. Так как $\frac{2\pi}{k} = c \cdot \varphi_H = c \cdot \frac{2\pi}{z_1 \cdot U_{1-H}}$, то

$$k \cdot C = z_1 \cdot U_{1-H}. \quad (6.5)$$

Равенство (6.5) представляет собой *условие собираемости* планетарной передачи.

6.4. Дифференциальные механизмы

Дифференциальные механизмы служат для разложения или сложения движения. Степень их подвижности $W \geq 2$. Например, если звено 3 (см. рис. 6.4, схема I) планетарного механизма сделать подвижным (дать ему возможность вращаться), то число низших кинематических пар P_5 будет равно 4 (они образованы звеньями 0 и 1, 2 и H, H и 3, 3 и 0), а число высших кинематических пар P_4 будет равно 2 (они образованы звеньями 1 и 2, 2 и 3). Количество подвижных звеньев n равно 4 (это звенья 1, 2, 3 и H). Тогда $w = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 2 = 2$.

Если ведущим является центральное колесо 1, то мощность с него будет передаваться и распределяться на два звена одновременно – на водило H и колесо 3, которые будут выходными. И наоборот, любые два из этих звеньев, будучи ведущими, могут передавать мощность на одно ведомое.

6.5. Пространственные зубчатые передачи

Коническая передача

Коническая передача образована качением двух конусов OP_1P и OP_2P (рис. 6.7). Они называются *начальными конусами*. В точке P окружные скорости обоих конусов равны $v_{\delta_1} = v_{\delta_2}$, или $O_1P \cdot \omega_1 = O_2P \cdot \omega_2$; $OP \cdot \sin \delta_1 \cdot \omega_1 = OP \cdot \sin \delta_2 \cdot \omega_2$. Передаточное отношение конической передачи имеет выражение $U_{1-2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1}$.

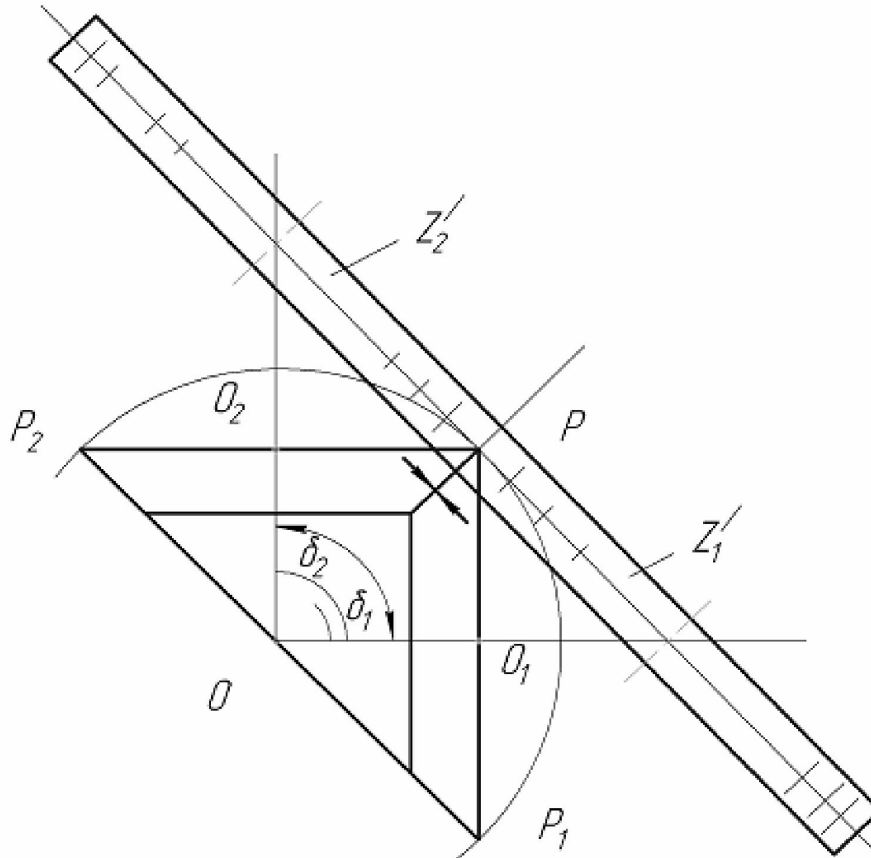


Рис. 6.7. Геометрические параметры конической передачи

Для расчета геометрических параметров конических зубчатых колес используют те же формулы, что и для цилиндрических, вводится понятие *эквивалентных цилиндрических колес*. Для них числа зубьев

$$z_1' = \frac{z_1}{\cos \delta_1}, \quad z_2' = \frac{z_2}{\cos \delta_2}.$$

Различают геометрические параметры конических зубчатых колес (рис. 6.8):

делительная окружность $r = \frac{mz}{2}$;

основная окружность $r_b = r \cdot \cos 20^\circ$;
 окружность выступов $r_a = r + m \cdot \cos \delta$;
 окружность впадин $r_f = r - 1,2m \cdot \cos \delta$;
 высота головки зуба $h_a = m$;
 высота ножки зуба $h_f = 1,2m$;
 конусное расстояние $L = OP$;
 ширина колеса $B = 4 \dots 12m$.

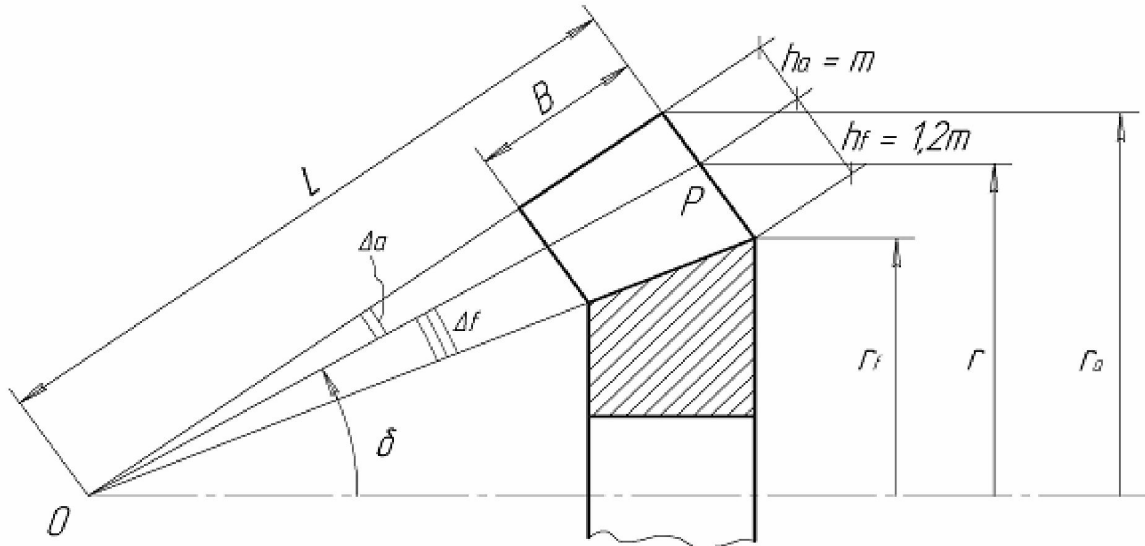


Рис. 6.8. Основные геометрические параметры конического колеса

Достоинства конической передачи:

- возможность передачи вращательного движения между осями под различными углами;
- больший коэффициент перекрытия, чем у цилиндрической (см. размеры эквивалентной цилиндрической передачи, у которой радиусы колес больше, чем у конической, значит, и возрастает величина практической линии зацепления ab).

Недостатки конической передачи:

- сложность изготовления зубчатых колес (по сравнению с цилиндрическими);
- повышенная чувствительность к изменению конусного расстояния;
- пониженная нагрузочная способность по сравнению с цилиндрической из-за консольного расположения одного из колес и несимметричного расположения второго относительно опор.

Гиперболоидные передачи

Гиперболоидные передачи образуются условным качением двух гиперболоидов (рис. 6.9а) Γ_1 и Γ_2 друг по другу при вращении их вокруг перекрещивающихся осей O_1 и O_2 , где γ – угол между осями. Прямая $\tau - \tau$

является общей касательной гиперboloидов. Углы между нею и осями вращения O_1 и O_2 равны соответственно β_1 и β_2 .

Если условно «вырезать» средние части гиперboloидов (горло) и нарезать на них зубья, то получится винтовая передача (рис. 6.9б).

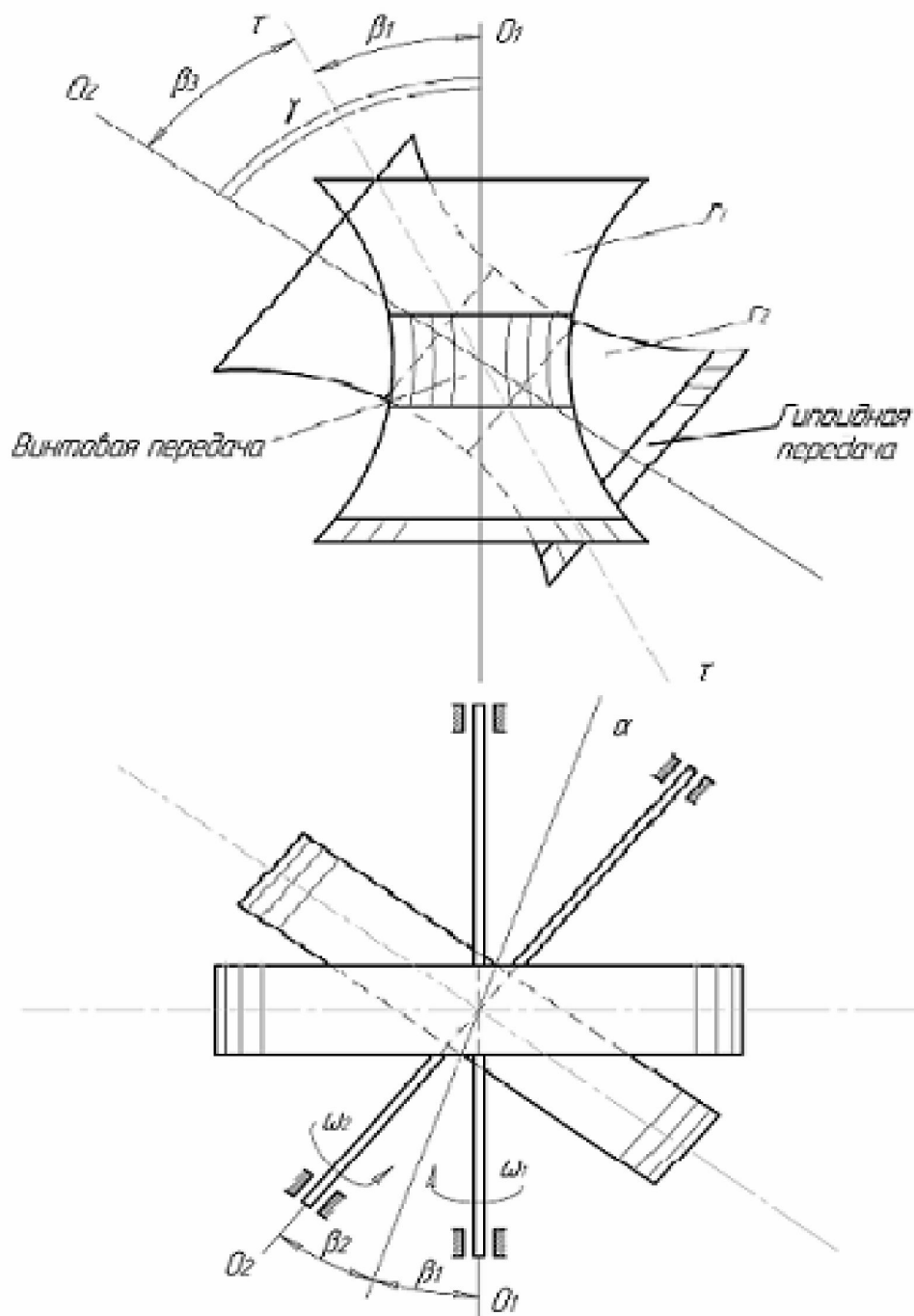


Рис. 6.9. Принципиальные схемы отдельных разновидностей гиперболоидных передач: а – зацепление двух гиперболоидов; б – винтовая передача

Если же «вырезать» другие части, то получится гиперboloидная передача.

Чем дальше от горлового сечения выбраны части гиперboloидов, тем меньше будет отношение скорости скольжения к окружной скорости колеса и соответственно выше механический коэффициент полезного действия.

Передаточное отношение гиперboloидной передачи вычисляется по формуле

$$U_{1-2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2 \cos \beta_2}{r_1 \cos \beta_1},$$

где Z_1 и Z_2 , r_1 и r_2 – числа зубьев и радиусы делительных окружностей зацепляющихся колес.

Из формулы следует, что в отличие от цилиндрических в гиперboloидных передачах можно воспроизводить необходимое передаточное отношение, подбирая не две, а четыре величины (r_1 и r_2 , β_1 и β_2).

Недостатком таких передач является то, что сопряженные профили зубьев соприкасаются в точке, а не по линии. Следовательно, возникают значительные удельные давления, которые в совокупности с большими скоростями скольжения зубьев друг по другу вызывают их быстрый износ.

Червячная передача (рис. 6.10) является одной из разновидностей винтовой передачи. Чаще всего угол между осями $\gamma = 90^\circ$.

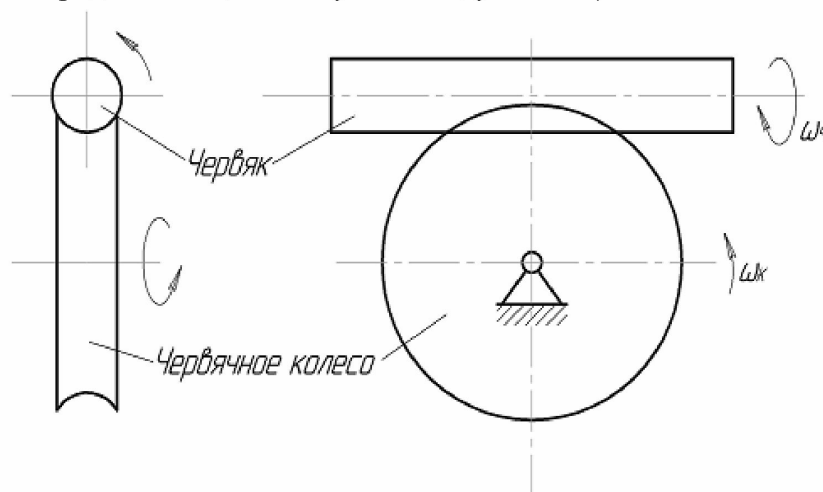


Рис. 6.10. Кинематическая схема червячной передачи

Как правило, ведущим звеном является червяк. При этом передаточное отношение $U_{\times-\dot{E}} = \frac{\omega_{\times}}{\omega_{\dot{E}}} = \frac{z_{\dot{E}}}{z_{\times}}$, где $z_{\dot{E}}$ – число зубьев колеса; z_{\times} – число заходов червяка.

Величина передаточного отношения может составлять $U_{\text{ч.к.}} = 10 \dots 100$, что дает преимущество по сравнению с другими зубчатыми передачами.

Недостатком гиперboloидных передач является невысокий механический КПД. В ряде случаев для его увеличения используют разные материалы, из которых изготовлены зубчатые колеса или их венцы. Это снижает коэффициент трения скольжения в месте контакта зубьев. Например, в червячной передаче червяк изготавливают из стали или чугуна, а венец зубчатого колеса – из бронзы.

7. УРАВНОВЕШИВАНИЕ И БАЛАНСИРОВКА ВРАЩАЮЩИХСЯ МАСС. ВИБРОЗАЩИТА МАШИН

7.1. Цели уравнивания и балансировки

При движении звеньев с переменными скоростями (с ускорением) возникают *силы инерции* и их моменты, которые принято называть *динамическими нагрузками*. Их возникновение приводит к вибрации и шуму, которые устраняются *уравниванием* звеньев при проектировании механизма. Это достигается *соответствующим подбором масс и моментов инерции*.

Для устранения малой неуравновешенности, возникающей после изготовления звеньев и их монтажа из-за несоблюдения размеров в процессе изготовления, неточности сборки, неоднородности материала, звенья *балансируют*.

7.2. Условия уравновешенности ротора

Деталь, вращающаяся в опорах, называется *ротором*. При вращении какой-либо i -й массы m на нее действует сила инерции, которую можно разложить на нормальную P_i^n и тангенциальную P_i^τ составляющие (рис. 7.1).

Величины этих сил можно вычислить по формулам

$$\left. \begin{aligned} P_i^n &= m_i \rho_i \omega^2 r, \\ P_i^\tau &= m_i \rho_i \varepsilon r. \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

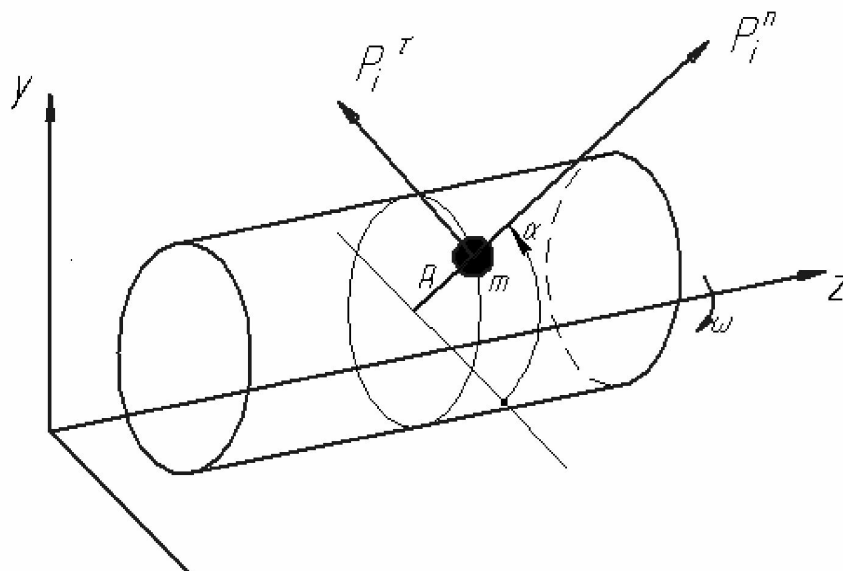


Рис. 7.1. Схема ротора

Спроектируем эти силы на оси x , y , z и определим моменты этих сил относительно осей:

$$\left. \begin{aligned} P_{i_x} &= P_i^n \cdot \cos \alpha - P_i^\tau \cdot \sin \alpha, \\ P_{i_y} &= P_i^n \cdot \sin \alpha + P_i^\tau \cdot \cos \alpha, \\ P_{i_z} &= 0, \\ M_{i_x} &= P_{i_y} \cdot Z_i, \\ M_{i_y} &= P_{i_x} \cdot Z_i, \\ M_{i_z} &= P_i^\tau \cdot \rho_i = m_i \cdot \varepsilon \cdot \rho_i^2. \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

Подставив (7.1) в (7.2) и просуммировав, получим (учитывая, что $\rho_i \cos \alpha = x_i, \rho_i \sin \alpha = y_i$)

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \sum_{i=1}^n P_{i_x} = \omega^2 \sum m_i x_i - \sum \sum m_i y_i, \\ P_y &= \sum_{i=1}^n P_{i_y} = \omega^2 \sum m_i y_i + \sum \sum m_i x_i, \\ M_x &= \sum_{i=1}^n M_{i_x} = \omega^2 \sum m_i y_i z_i + \sum \sum m_i x_i z_i, \\ M_y &= \sum_{i=1}^n M_{i_y} = \omega^2 \sum m_i x_i z_i - \sum \sum m_i y_i z_i, \\ M_z &= \sum M_{i_z} = \sum \sum m_i \rho_i^2. \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \omega^2 m x_s - \varepsilon m y_s, \\ P_y &= \omega^2 m y_s + \varepsilon m x_s, \\ M_x &= \omega^2 \mathfrak{J}_{yz} + \varepsilon \cdot \mathfrak{J}_{xz}, \\ M_y &= \omega^2 \mathfrak{J}_{xz} - \varepsilon \cdot \mathfrak{J}_{yz}, \\ M_z &= \varepsilon \cdot \mathfrak{J}_z. \end{aligned} \right\}$$

Последнее уравнение в (7.3) можно исключить, так как момент M_z не создает дополнительной реакции в опорах ротора.

Силы P_x и P_y , моменты M_x и M_y равны нулю в том случае, если координаты x и y массы m расположены на оси вращения z (т.е. центр масс ротора неподвижен):

$$\left. \begin{aligned} x_s &= 0, \\ y_s &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

Это есть *условие статической уравновешенности ротора*.

Моменты M_x и M_y равны нулю, если центробежные моменты инерции ротора равны нулю:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{J}_{yz} &= 0, \\ \mathfrak{J}_{xz} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

Это есть *условие динамической уравновешенности ротора*.

Выводы: ротор статически уравновешен, если его центр тяжести расположен на оси вращения; ротор динамически уравновешен, если его ось вращения является главной центральной осью инерции.

Уравновешенность ротора можно охарактеризовать и силовыми параметрами. Он статически уравновешен, если главный вектор сил индукции $\overline{P}_\delta = 0$. Ротор динамически уравновешен, если главный вектор моментов сил инерции $\overline{M}_\delta = 0$.

При проектировании роторов используют условия (7.4) и (7.5). При проверке уравновешенности изготовленных роторов используют условия $\overline{P}_\delta = 0$ и $\overline{M}_\delta = 0$. Устранение остаточной неуравновешенности уже изготовленного ротора, возникшей по причинам неточности изготовления, монтажа, из-за неоднородности материала, из которого изготовлен ротор, называется *балансировкой*. Техника статической и динамической балансировки жестких роторов изложена в [6] и входит в содержание лабораторного практикума по дисциплине «Теория механизмов и машин».

7.3. Уравновешивание вращающихся масс

7.3.1. Уравновешивание масс, находящихся в одной плоскости

Положения отдельных неуравновешенных масс m_i , расположенных на роторе, можно охарактеризовать величинами радиус-векторов \overline{r}_i относительно оси его вращения. Система вращающихся масс будет уравновешена, если главный вектор сил инерции, действующих на эти массы при их совместном вращении, равен нулю:

$$\overline{P}_u = \sum \overline{P}_i + \overline{P}_{yp} = 0,$$

где \overline{P}_i – сила инерции, действующая на i -ю массу; \overline{P}_{yp} – сила инерции уравновешивающей массы m_{yp} , расположенной на расстоянии r_{yp} от оси вращения ротора.

Сила инерции, действующая на i -ю массу, вращающуюся с постоянной скоростью ω , равна $P_i = m_i r_i \omega^2$.

Рассмотрим систему, состоящую из трех неуравновешенных вращающихся масс m_1 , m_2 и m_3 (рис. 7.2).

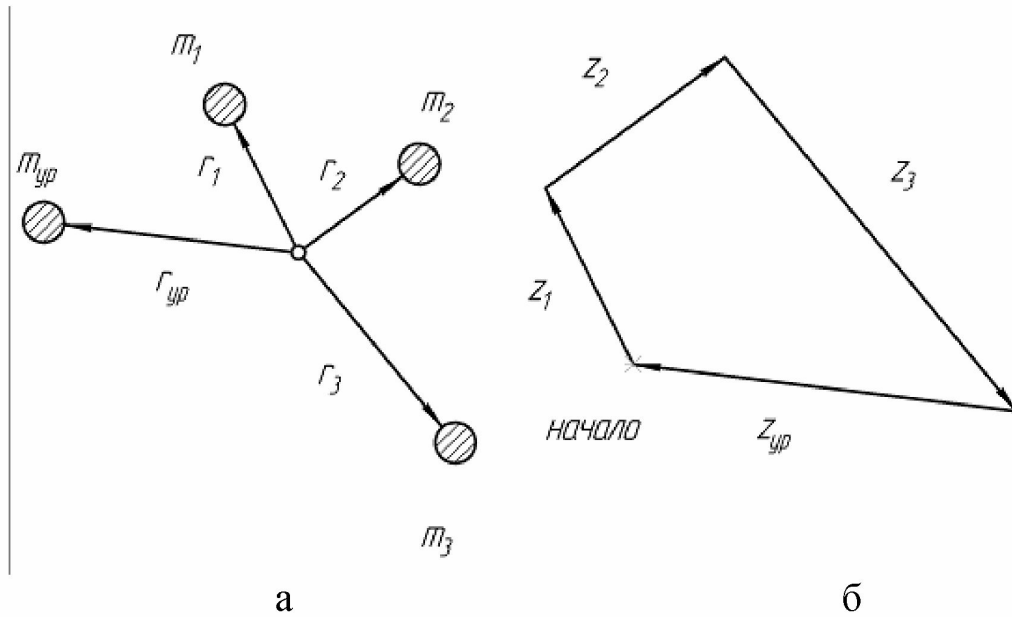


Рис. 7.2. Система неуравновешенных масс (а) и план сил инерции (б)

Условием уравновешенности данной системы масс является уравнение

$$\bar{P}_e = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 + \bar{P}_{\text{од}} = 0.$$

Так как $P_i = m_i r_i \omega^2$, то это уравнение можно записать в виде

$$m_1 r_1 \omega^2 + m_2 r_2 \omega^2 + m_3 r_3 \omega^2 + m_{\text{од}} r_{\text{од}} \omega^2 = 0.$$

Так как $\omega^2 \neq 0$ (мы рассматриваем *вращающуюся* систему масс), то

$$m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3 + m_{\text{од}} r_{\text{од}} = 0. \quad (7.6)$$

Уравнение (7.6) можно решить аналитическим и графическим методами.

При аналитическом методе решения составляются уравнения проекций сил на координатные оси, из которых находят являющееся неизвестным последнее слагаемое.

Найдем $m_{\text{од}}$ и $r_{\text{од}}$ графическим методом, то есть построением векторного многоугольника (см. рис. 7.2б), являющегося графической интерпретацией векторного уравнения (7.6). Предварительно выбираем масштаб сил

$$\mu_{mv} = \frac{m_1 r_1}{z_1},$$

где z_1 – длина вектора, изображающего силу $P_1 = m_1 r_1 \omega^2$, (мм).

Размерность масштаба $\frac{\partial \ddot{a} \cdot i}{\ddot{i}}$ (если масса задана в кг, радиус – в м).

Переведем масштаб μ_{mr} другие известные слагаемые уравнения (7.6) в векторные отрезки:

$$z_2 = \frac{m_2 r_2}{\mu_{mr}}, \quad z_3 = \frac{m_3 r_3}{\mu_{mr}}, \quad \text{и т. д.}$$

Тогда векторное уравнение (7.6) запишется в виде

$$\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_{yp} = 0.$$

Построив векторный силовой многоугольник (см. рис. 7.2б) в масштабе μ_{mr} , из него определим длину вектора $z_{од}$. Выбрав из конструктивных соображений величину r_{yp} , вычисляем уравновешивающую массу

$$m_{yp} = \frac{z_{yp} \cdot \mu_{mr}}{r_{yp}}.$$

Поместив ее на роторе в направлении вектора r_{yp} на расстоянии от оси вращения, равном длине этого вектора, уравновесим ротор.

7.3.2. Уравновешивание вращающихся масс, расположенных произвольно

Последовательность уравновешивания масс, расположенных произвольно, рассмотрим на примере ротора с системой четырех неуравновешенных масс (рис. 7.3). Пусть известны величины неуравновешенных масс m_i и их положения относительно оси вращения ротора, обусловленные радиусами – векторами r_i и расстояниями λ_i относительно одной из произвольно выбранных плоскостей I, перпендикулярной оси вращения рассматриваемого ротора.

При вращении ротора и неуравновешенных масс с постоянной угловой скоростью на каждую из масс действует сила инерции

$$P_i^n = m_i \rho_i \omega^2.$$

Так как угловая скорость в рассматриваемом здесь частном случае является величиной постоянной, то угловое ускорение отсутствует ($\varepsilon = 0$) и тангенциальная составляющая силы инерции равна нулю.

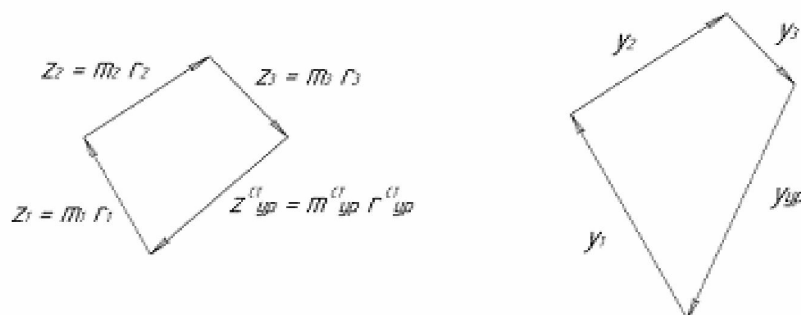
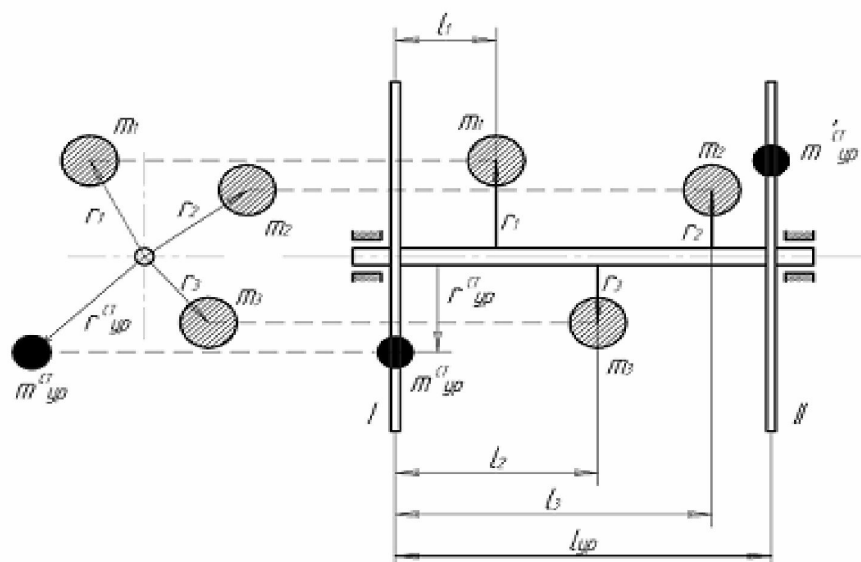


Рис. 7.3. Уравновешивание масс, расположенных произвольно:
 а – вид на ротор с торца; б – вид на ротор с боку;
 в – план сил при статическом уравновешивании;
 г – план моментов сил при динамическом уравновешивании

Выбираем плоскости приведения I и II (см. рис. 7.3), в которых будем располагать уравновешивающие массы.

Задача заключается в том, что необходимо уравновесить массы динамически.

Сначала проводим *статическое* уравновешивание в плоскости I. Его последовательность описана в предыдущей главе.

$$\begin{aligned} \bar{P}_e = 0, \quad m_1 \bar{r}_1 + m_2 \bar{r}_2 + m_3 \bar{r}_3 + m_{\text{од}} \bar{r}_{\text{од}} = 0, \\ \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3 + \bar{z}_{\text{од}} = 0. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Используя (7.7), построим векторный многоугольник и графически найдем $m_{\text{од}} \bar{r}_{\text{од}} = \mu_{mr} \bar{z}_{\text{од}}$.

Уравновесим действие инерционных моментов, т.е. выполним условие $\overline{M}_\varepsilon = 0$. Для этого запишем уравнения

$$\overline{M}_\varepsilon = 0, m_1 \overline{r}_1 l_1 \omega^2 + m_2 \overline{r}_2 l_2 \omega^2 + m_3 \overline{r}_3 l_3 \omega^2 + m_{\dot{\omega}\dot{\omega}} \overline{r}'_{\dot{\omega}\dot{\omega}} l \omega^2 = 0. \quad (7.8)$$

Так как $\omega^2 \neq 0$, то из уравнения (7.8) следует, что

$$m_1 \overline{r}_1 l_1 + m_2 \overline{r}_2 l_2 + m_3 \overline{r}_3 l_3 + m'_{yp} \overline{r}'_{yp} l = 0. \quad (7.9)$$

Решая графически векторное уравнение (7.9), находим $m_{\dot{\omega}\dot{\omega}} \overline{r}'_{\dot{\omega}\dot{\omega}} l$.

Предварительно выбираем масштаб

$$\mu_{mri} = \frac{m_1 r_1 l_1}{y_1}.$$

Тогда уравнение (7.9) запишется в виде

$$\overline{y}_1 + \overline{y}_2 + \overline{y}_3 + \overline{y}_{\dot{\omega}\dot{\omega}} = 0.$$

При этом принимаем, что векторы моментов \overline{M}_ε повернуты на 90° и совпадают с направлением \overline{r} .

$$y_{\dot{\omega}\dot{\omega}} \cdot \mu_{mri} = m_{yp} \overline{r}'_{yp} l. \quad (7.10)$$

Находим из (7.10) величину m_{yp} , задавшись r_{yp} , или наоборот. Здесь $l_{\dot{\omega}\dot{\omega}}$ равна расстоянию между плоскостями приведения I и II.

Проводя от оси вращения ротора линию, параллельную \overline{y}_{yp} , откладываем на ней с противоположных сторон r_{yp} и на концах этих векторов устанавливаем две уравновешивающие массы m_{yp} . Причем одна из них будет расположена в плоскости I, другая – в плоскости II. Массы m_{yp} и m_{yp} в плоскости I можно объединить в одну массу.

7.4. Балансировка вращающихся масс (роторов)

Уравновешивание роторов или систем масс используется при проектировании механизмов.

В уже изготовленных роторах встречаются, как было сказано выше, неоднородности материала, возникают неточности изготовления и сборки, в результате чего возникает *остаточная неуравновешенность*, которую нужно устранять *балансировкой*.

Различают балансировку:

– *статическую*, которую производят для достаточно плоских роторов типа дисков, колес, маховиков, шкивов. Ротор при этом устанавливают в опорах с малым трением (например, на призмах) и путем добавления масс или высверливания добиваются безразличного положения балансируемого ротора на опорах;

– *динамическую*, которую выполняют для роторов, имеющих значительную длину (валы, широкие колеса, шкивы и т.д.), на специальных станках [6].

7.5. Уравновешивание механизмов

Целью уравновешивания механизмов является устранение переменных во времени и пространстве воздействий стойки, станины механизма на опору, фундамент, вызывающих колебания фундамента и здания, а также уменьшение вибрации.

Условия уравновешенности механизма

Условия уравновешенности механизмов в общем виде можно охарактеризовать уравнениями

$$\begin{aligned}\bar{P} + \bar{P}_u &= \bar{P}_\delta = const, \\ \bar{M} + \bar{M}_u &= \bar{M}_\delta = const,\end{aligned}$$

где \bar{P}_δ и M_δ – главный вектор сил и главный момент сил давления станины механизма на фундамент, опору; \bar{P} и \bar{M} – главный вектор сил и главный момент всех других сил, внешних по отношению к механизму; \bar{P}_u и \bar{M}_u – главный вектор сил инерции и главный момент сил инерции звеньев механизма.

С достаточной для практики точностью часто ограничиваются условиями

$$\begin{aligned}\bar{P}_u &= 0, \\ \bar{M}_u &= 0.\end{aligned}\tag{7.11}$$

Этого можно достичь установкой противовесов на подвижных звеньях, рациональным размещением центров масс звеньев механизма при его проектировании.

Статическое уравновешивание плоского механизма с помощью противовесов

Часто ограничиваются лишь статическим уравновешиванием механизма и его звеньев, т.е. выполнением условия (7.11) $\bar{P}_u = 0$. Это условие соответствует постоянству положения центров масс звеньев относительно стойки (т.е. центр их масс должен быть неподвижен). Так как $\bar{P}_u = -m \cdot \bar{a}_s$, $m \neq 0$, то необходимо обеспечить условие $a_s = 0$, т.е. ускорение центра тяжести должно отсутствовать.

Рассмотрим последовательность уравновешивания на примере механизма шарнирного четырехзвенника (рис. 7.4).

Рис. 7.4. Уравновешивание шарнирного четырехзвенника

Сначала уравновесим звено 1, записав условие равенства дебалансов собственной массы m_1 неуравновешенного звена и уравновешивающей массы $m_{np.1}$:

$$m_{np.1} \cdot l_1 = m_1 \cdot l_{0s_1}.$$

Задаваясь длиной l_1 , находим уравновешивающую массу для этого звена:

$$m_{i0.1} = \frac{m_1 \cdot l_{OS_1}}{l_1}.$$

Установив уравновешивающую массу на звено, совместим центр масс звена с осью его вращения O . Затем уравновешиваем звено 2, записав условие

$$m_{i0.2} \cdot l_2 = m_2 \cdot l_{BS_2}.$$

Задаваясь длиной l_2 , находим уравновешивающую массу

$$m_{i0.2} = \frac{m_2 \cdot l_{BS_2}}{l_2}.$$

Проводим уравновешивание звена 3, записав условие

$$m_{i0.3} \cdot l_3 = m_B \cdot l_{BC} + m_3 \cdot l_{CS_3}.$$

Задаваясь длиной l_3 , находим $m_{i0.3} = \frac{m_B \cdot l_{BC} + m_3 \cdot l_{CS_3}}{l_3}$, где

$$m_B = m_2 + m_{i0.2}.$$

Полное уравновешивание механизма в ряде случаев провести очень сложно, поэтому ограничиваются частичным уравновешиванием.

7.6. Виброзащита машин

Колебания (вибрации) в машине бывают нежелательными, так как из-за возникающих при этом дополнительных динамических нагрузок снижается надежность деталей, подшипников и других узлов, возникает шум, вредно влияющий на человека, может нарушиться выполнение технологических процессов в рамках установленных параметров.

Если не удастся уравновесить и сбалансировать отдельные звенья и механизм в целом, то используют виброзащиту механизма от возникающих при его работе переменных динамических нагрузок.

Основными способами снижения вибрации механизма являются применения:

- *демпферов* – устройств, предназначенных для увеличения сил сопротивления колебаниям, зависящих от амплитуд и скорости колебаний; однако этот способ не всегда эффективен и не приводит к желаемым результатам;

- *виброзащитных систем*, гасящих динамические воздействия на машину путем воздействия дополнительными динамическими нагрузками.

В соответствии с этим существуют два основных способа виброзащиты: *виброгашение* и *виброизоляция*.

Виброгашение достигается тем, что к машине присоединяются дополнительные колебательные системы – *динамические виброгасители* (рис. 7.5).

В общем виде динамический виброгаситель состоит из виброзащищаемого объекта 1, обладающего массой m_1 и принудительно колеблющейся массы 2 величиной m_2 , соединенных упругими связями (пружинами): между собой – с жесткостью C_2 , между защищаемой массой и рамой машины или фундаментом – с жесткостью C_1 .

Как правило, $m_2 < m_1$. Соотношения m_1 и m_2 , C_1 и C_2 подбираются такими, чтобы собственная частота колебаний виброгасителя была равна частоте вынуждающей внешней силы $P \cdot \sin pt$, где p – частота. При этом виброгаситель должен быть настроен на частоту вынуждающей внешней силы.

Закон гармонических колебаний имеет вид $x = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$. При этом период колебания $T = \frac{2\pi}{\omega}$, частота колебаний $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$, где φ – начальная фаза; ω – круговая частота.

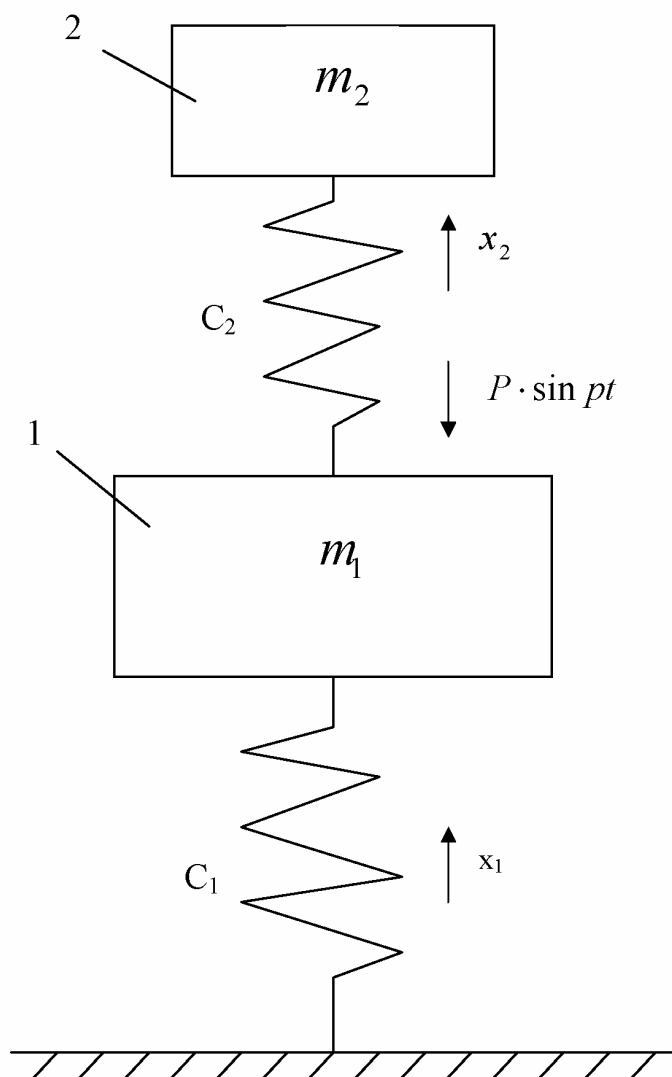


Рис. 7.5. Принципиальная схема динамического виброгасителя

Пусть на тело массой m , колеблющееся по гармоническому закону, действуют две силы:

– восстанавливающая со стороны пружины $P_n = cx = c \cdot A \sin(\omega t + \varphi)$;

– возмущающая (например, сила инерции) $P_B = m \frac{d^2 x}{dt^2} = m \frac{d^2}{dt^2} (A \sin(\omega t + \varphi))$,

или $P_B = -m A \omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$.

Так как система находится в равновесии, то $P_n = P_B$, или

$$-m A \omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = c \cdot A \cdot \sin(\omega t + \varphi), \quad (7.12)$$

где круговая (угловая) частота свободных гармонических колебаний системы

$$\omega = \sqrt{\frac{\tilde{n}}{m}} = \omega_0.$$

При действии на массу внешней возникающей силы, описываемой законом $P \cdot \sin pt$, уравнение (7.12) будет иметь вид

$$-mA\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) + cA \sin(\omega t + \varphi) - P \cdot \sin pt = 0.$$

Уравнение движения двухмассовой системы (при возмущающей силе, действующей на массу m_1 и равной $P \cdot \sin pt$) имеет вид

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = P \cdot \sin pt - c_1 x_1 + c_2 (x_2 - x_1),$$

где x_1 и x_2 – координаты, отсчитываемые от положения статического равновесия; c_1 и c_2 – коэффициенты жесткости пружины.

Для виброгашения массы m_1 используют явление *антирезонанса*, заставляя колебаться m_2 в противофазе к защищаемой массе. Для этого определяют величины c_2 и m_2 из условия $p = \sqrt{\frac{c_2}{m_2}}$.

Недостатком способа является то, что виброгаситель действует только при неизменной частоте колебаний защищаемого объекта. Изменение его частоты резко увеличивает вибрацию и требует новой настройки виброгасителя.

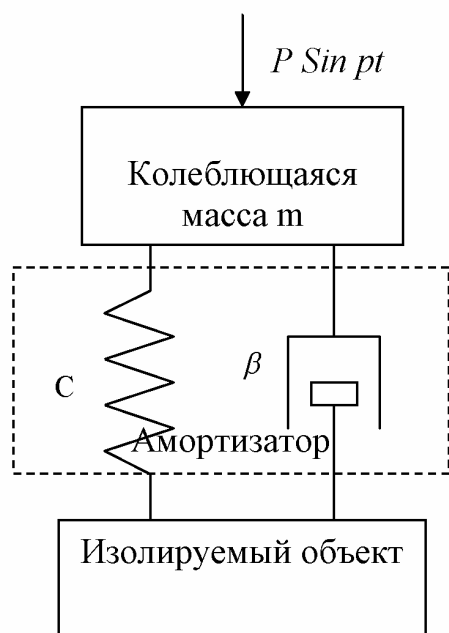


Рис. 6.7. Принципиальная схема виброизолятора

Чувствительность виброгасителя к изменению частоты защищаемого объекта будет не так велика, если виброизоляторы обладают значительным трением путем введения в систему демпферов (амортизаторов).

Виброизолятор состоит из упругого элемента и амортизатора (рис. 7.6).

Виброизолятор имеет коэффициент демпфирования $\beta = \frac{1}{1 - \frac{p^2}{\omega_0^2}}$.

Уравнение движения колеблющейся системы имеет вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = P \sin pt + Q, \quad (7.13)$$

где Q – обобщенная реакция амортизатора.

Решая уравнение (7.13) движения системы, находят величину Q , а по ней подбирают амортизатор с нужной характеристикой.

8. КУЛАЧКОВЫЕ МЕХАНИЗМЫ

8.1. Назначение, устройство, классификация кулачковых механизмов

Кулачковые механизмы предназначены для преобразования вращательного движения кулачка 1 (рис. 8.1) в поступательное движение толкателя 3 (рис. 8.1а) или качательное движение коромысла 3 (рис. 8.1б) по определенному закону. Эти механизмы получили широкое применение в машинах: автоматах, двигателях внутреннего сгорания, и других устройствах.

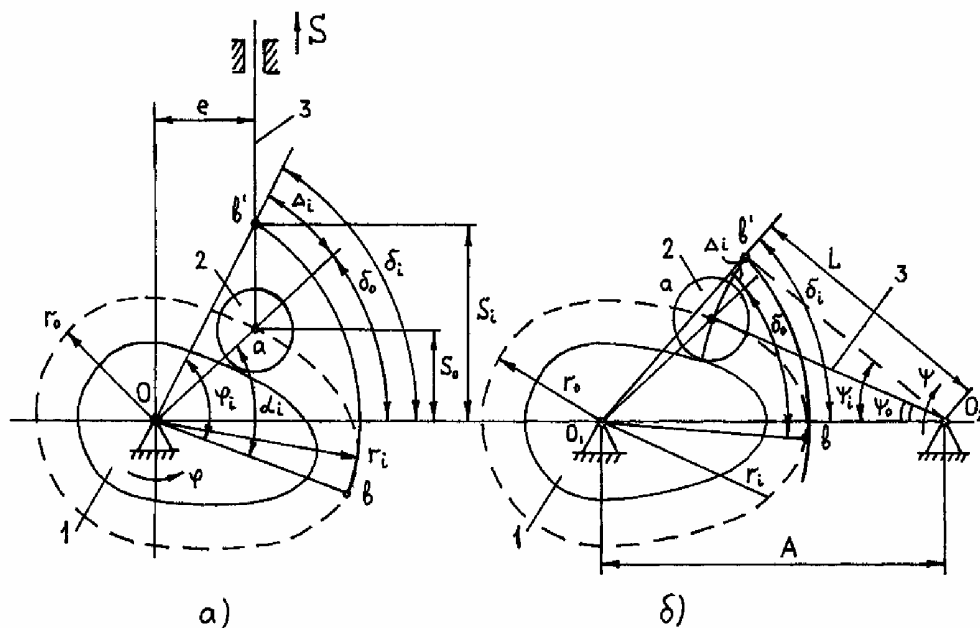


Рис. 8.1. Кинематические схемы кулачкового механизма:

а – с поступательным движением толкателя;

б – с качающимся движением толкателя

Кулачок и толкатель (или коромысло) образуют высшую кинематическую пару (т.е. касание их происходит не поверхностями, а по линии или в точке). Концы толкателя или коромысла, которым они касаются кулачка, могут иметь грибовидную (тарельчатую или плоскую) форму, форму острия и т.д. Для увеличения механического КПД в ряде конструкций кулачковых механизмов трение скольжения между кулачком и толкателем (коромыслом) заменяют трением качения путем установки ролика 2 (см. рис. 8.1).

8.2. Геометрические и кинематические параметры кулачковых механизмов

Полный цикл работы кулачкового механизма соответствует одному обороту кулачка. У механизмов с поступательно движущимся толкателем (см. рис. 8.1а) поворот кулачка 1 на угол φ_i вызывает перемещение

толкателя 3 на величину S_i . Следовательно, S_i является функцией угла φ_i : $S_i = f(\varphi_i)$. Если кулачок вращается с постоянной угловой скоростью ($\omega_k = const$), то перемещение S_i является и функцией времени t : $S_i = f(\varphi_i, t)$. Для механизмов с коромыслом, совершающим качательное (вращательное) движение, соответственно можно записать $\psi_i = f(\varphi_i, t)$, где ψ_i – угловая координата, характеризующая перемещение коромысла.

Цикл движения ведомого звена (толкателя или коромысла) в общем виде состоит из 4-х периодов (фаз) движения (рис. 8.2):

φ_1 – *подъем (или прямой ход)* – удаление толкателя или коромысла от крайнего ближнего до крайнего дальнего положения относительно центра кулачка;

φ_2 – *верхний выстой* – стояние толкателя или коромысла в крайнем дальнем положении;

φ_3 – *опускание (или обратный ход)* – возвращение толкателя или коромысла в крайнее ближнее положение;

φ_4 – *нижний выстой* – стояние в крайнем нижнем положении.

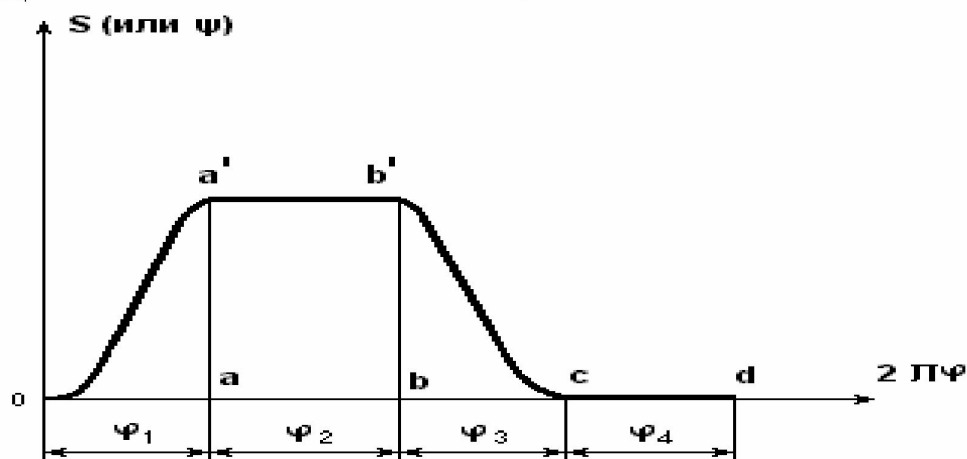


Рис. 8.2. Пример диаграммы перемещения толкателя кулачкового механизма

Толкатель или коромысло должны перемещаться по наперед заданному закону движения. Это обеспечивается подбором или проектированием и изготовлением профиля кулачка соответствующей формы.

Закон движения толкателя или коромысла должен выбираться таким, чтобы его ускорения, следовательно, и инерционные нагрузки (силы и моменты сил инерции) были минимальными. При проектировании кулачков очень часто вначале задаются законом изменения ускорения на фазе подъема и опускания. Диаграмму перемещения толкателя, коромысла получают двукратным интегрированием диаграммы ускорений.

Наоборот, если задан закон перемещения выходного звена, то необходимо оценить его ускорение с точки зрения минимизации величин ускорений и соответственно инерционных нагрузок.

Законы движения ведомого звена отличаются большим разнообразием и зависят от заданных условий его работы. При выборе закона движения следует обеспечить:

- требуемые технологические условия процесса, для выполнения которого предназначен кулачковый механизм;
- высокую производительность;
- технологичность изготовления, надежность и долговечность.

Рассмотрим наиболее характерные законы движения ведомого звена (рис. 8.3).

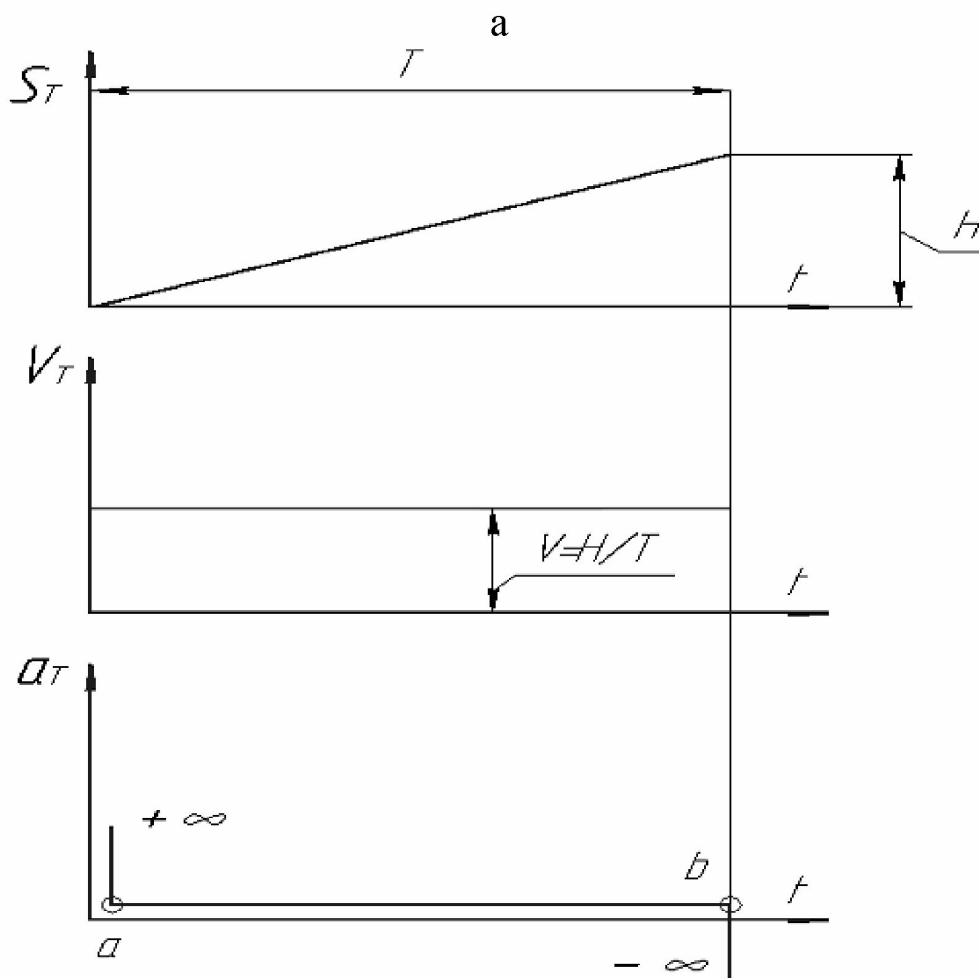


Рис. 8.3. Характерные законы движения толкателя кулачкового механизма:
 а – постоянная скорость толкателя; б – постоянное ускорение толкателя;
 в – синусоидальный (безударный) закон ускорения толкателя

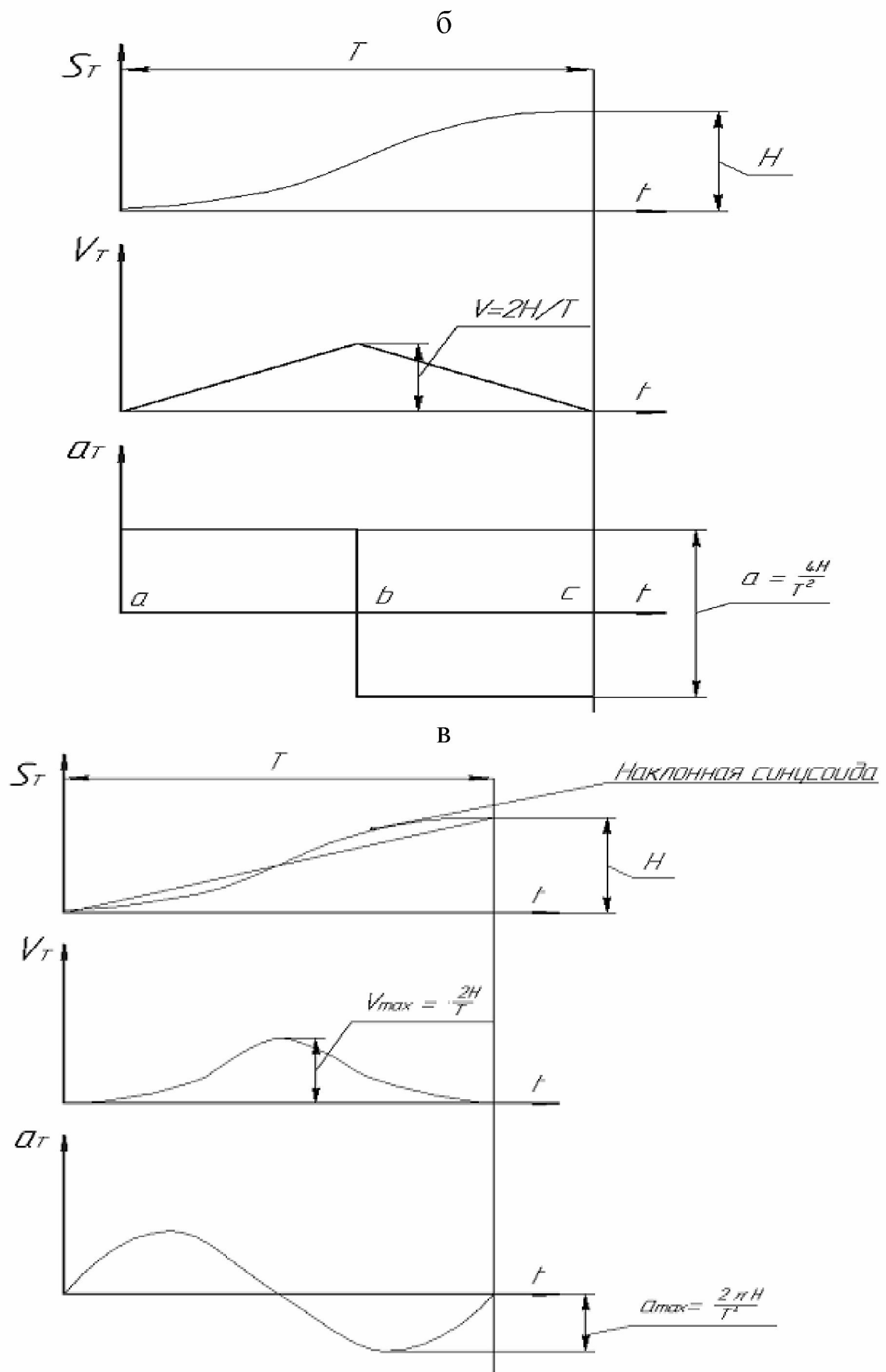


Рис. 8.3. Продолжение

В случае, когда скорость толкателя постоянна (см. рис. 8.3а) и ускорение толкателя $a_o = \pm \infty$, то возникает так называемый «жесткий» удар кулачка о толкатель. Такой закон используется для тихоходных кулачковых механизмов.

При постоянном ускорении толкателя (см. рис. 8.3б) в точках a , b и c возникает «мягкий» удар. При этом величина крутящего момента на кулачке

$$M_{\partial\theta} = \frac{(Q+P_u) \cdot v_T}{\omega_e \cdot \eta} = \frac{(Q+m \cdot a_T) \cdot v_T}{\omega_k \cdot \eta},$$

где Q – полезная нагрузка на толкатель; $P = m \cdot a_T$ – сила инерции, испытываемая толкателем; η – механический КПД кулачкового механизма.

Максимальный $M_{кр.}$ будет в точке b , где ускорение толкателя a_T и его скорость v_T максимальны.

При синусоидальном законе (безударный) (см. рис. 8.3в) нет ударных нагрузок, что является преимуществом по сравнению с вышеназванными законами.

8.3. Синтез кулачковых механизмов.

Аналитический расчет профиля кулачка

Пусть для кулачкового механизма с поступательно движущимся толкателем надо обеспечить закон движения $S_{T_i} = f(t)$, который может быть задан в виде формулы или таблицы. Каков должен быть профиль кулачка? Для этого найдем зависимость величины текущего радиуса – вектора, описывающего профиль кулачка, от угла: $R_i = f(S_{T_i})$.

Считается, что угловая скорость кулачка постоянна: $\omega_e = const$, тогда $S_{T_i} = f(\alpha_i) = f(t)$.

Введем обозначения параметров кулачка (рис. 8.4): R_i – текущий радиус – вектор; γ_i – полярный (профильный) угол кулачка; α_i – угол поворота кулачка; δ_i – угловая поправка; e – эксцентриситет; $S_i = B_iC$ – ход толкателя.

Рассмотрим треугольники ΔB_iOD и ΔCOD , из которых составим уравнения

$$\left. \begin{aligned} B_iD &= CD + S_i \\ B_iD &= \sqrt{R_i^2 - e^2} \\ CD &= \sqrt{R_0^2 - e^2} \end{aligned} \right\}$$

откуда

$$\sqrt{R_i^2 - e^2} = \sqrt{R_0^2 - e^2} + S_i. \quad (8.1)$$

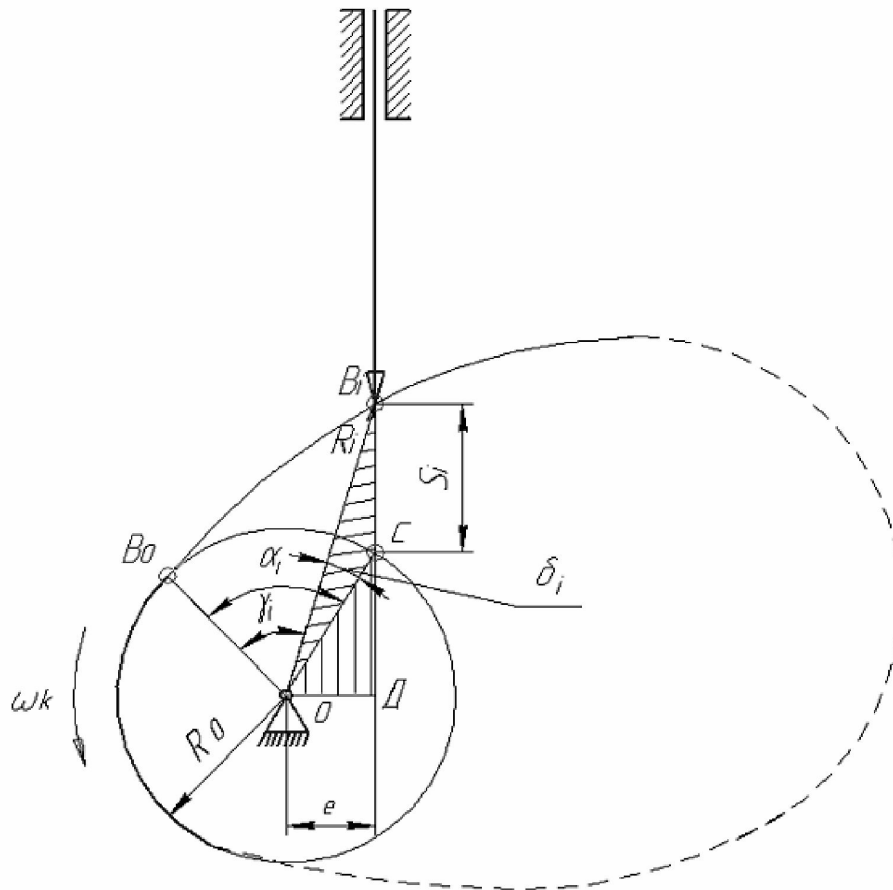


Рис. 8.4. Геометрические параметры кулачкового механизма с толкателем

Из (8.1) получим $R_i^2 - e^2 = R_0^2 - e^2 + 2S_i\sqrt{R_0^2 - e^2} + S_i^2$, откуда

$$R_i = \sqrt{R_0^2 + 2S_i\sqrt{R_0^2 - e^2} + S_i^2}.$$

$$\gamma_i = \alpha_i - \delta_i,$$

где $\delta_i = \angle B_i O \hat{A} - \angle C O \hat{A}$; $\cos \angle B_i \hat{A} = \frac{e}{R_i}$; $\cos \angle \tilde{N} \hat{A} = \frac{e}{R_0}$, откуда

$$\delta_i = \arccos \frac{e}{R_i} - \arccos \frac{e}{R_0}.$$

Аналогичным способом можно получить зависимости, описывающие профиль кулачка в КМ с коромыслом.

8.4. Определение основных размеров кулачкового механизма из условия ограничения угла давления

8.4.1. Влияние угла давления на работу кулачкового механизма

Влияние угла давления на работу кулачкового механизма рассмотрим на примере кулачкового механизма с поступательно движущимся толкателем.

Угол давления α – это острый угол между вектором силы P со стороны кулачка на толкатель и вектором скорости толкателя $v_{\dot{o}}$. Вектор силы \bar{D} направлен по нормали $n - n$ к профилю кулачка.

Физически угол давления α характеризует условие передачи крутящего момента со стороны кулачка на толкатель: чем он меньше, тем качественнее кулачковый механизм.

Для оценки влияния угла давления рассмотрим равновесие толкателя (рис. 8.5).

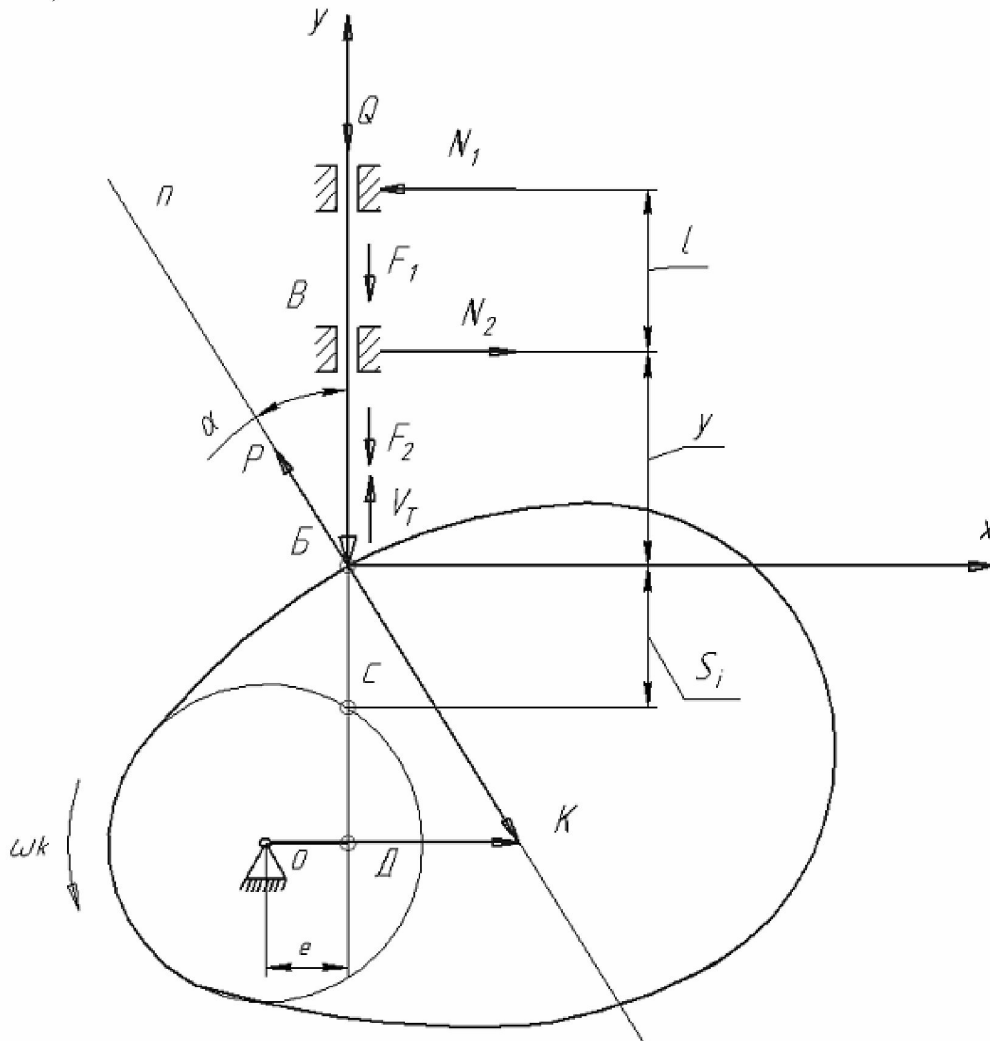


Рис. 8.5. Силы, действующие на толкатель

На толкатель действуют силы:

Q – сила технологического сопротивления;

N_1 и N_2 – силы реакций в верхней и нижней опорах толкателя;

$F_1 = f \cdot N_1$
 $F_2 = f \cdot N_2$ } – силы трения в верхней и нижней опорах толкателя.

Спроектируем эти силы на координатные оси X и Y :

$$\left. \begin{aligned} \sum X = 0, \quad -D \cdot \sin \alpha - N_1 + N_2 = 0, \\ \sum Y = 0, \quad P \cdot \cos \alpha - f \cdot N_1 - f \cdot N_2 - Q = 0, \\ \sum M_B = 0, \quad -D \cdot y \cdot \sin \alpha + N_1 \cdot l = 0, \end{aligned} \right\}$$

откуда получим

$$P = \frac{Q}{\cos \alpha + f \cdot \sin \alpha \cdot \left(1 + \frac{2y}{l}\right)}. \quad (8.2)$$

Если знаменатель уравнения (8.2) равен нулю, то $P \rightarrow \infty$. Произойдет *заклинивание* механизма. Угол α , при котором это случится, называется *критическим*. Если

$$\cos \alpha + f \cdot \sin \alpha \cdot \left(1 + \frac{2y}{l}\right) = 0,$$

то

$$\operatorname{tg} \alpha_{\text{крит}} = \frac{1}{f \cdot \left(1 + \frac{2y}{l}\right)}.$$

Для исключения заклинивания величину $\alpha_{\text{крит}}$ ограничивают некоторым допустимым значением: $\alpha_{\text{доп}} < \alpha_{\text{крит}}$, причем для кулачковых механизмов с поступательным толкателем $\alpha_{\text{доп}} = 30^\circ \dots 35^\circ$, для кулачковых механизмов с коромысловым толкателем $\alpha_{\text{доп}} = 45^\circ \dots 55^\circ$.

В общем случае величина угла давления α изменяется за один оборот кулачка от минимального до максимального значения.

8.4.2. Зависимость угла давления

от основных параметров кулачкового механизма

Рассмотрим подобие треугольников ($\Delta A v_E v_O \sim \Delta \hat{A} \hat{I} \hat{E}$) на схеме кулачкового механизма (рис. 8.5).

Исходя из свойств их сторон составим уравнение пропорции

$$\frac{v_O}{\hat{A} \hat{I}} = \frac{v_O}{\hat{I} \hat{E}},$$

откуда

$$\hat{I} \hat{E} = \frac{v_O \cdot \hat{A} \hat{I}}{v_E} = \frac{v_O \cdot \hat{A} \hat{I}}{\omega_E \cdot \hat{A} \hat{I}} = \frac{v_O}{\omega_E}.$$

Так как $\ddot{A}\hat{E} = \hat{I}\hat{E} \pm \hat{a} = \frac{v_{\dot{o}}}{\omega_{\dot{E}}} \pm \hat{a}$, $tg\alpha = \frac{\ddot{A}\hat{E}}{\dot{A}\hat{A}}$, где $\ddot{A}\hat{E} = \frac{v_{\dot{o}}}{\omega_{\dot{E}}} \pm \hat{a}$;
 $\dot{A}\hat{A} = \sqrt{R_0^2 - e^2} + S_i$, то

$$tg\alpha = \frac{\frac{v_{\dot{o}}}{\omega_{\dot{E}}} \pm e}{\sqrt{R_0^2 - e^2} + S_i}. \quad (8.3)$$

Формула (8.3) устанавливает зависимость величины угла давления α от основных параметров кулачкового механизма.

Если задаться величиной α_{\max} из условия ограничения угла давления, то можно, используя эту зависимость, спроектировать кулачковый механизм минимальных габаритов (т.е. выбрать минимальное значение R_0).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Фролов, К.В. Теория механизмов и машин [Текст] / К.В. Фролов, С.А. Попов, А.К. Мусатов и др.: учебник для вузов; под ред. К.В. Фролова. М.: Высшая школа, 1987.
2. Кожевников, С.Н. Теория механизмов и машин [Текст] / С.Н. Кожевников. М.: Наука, 1973.
3. Артоболевский, И.И. Механизмы [Текст] / И.И. Артоболевский: справочник. Т.1 – 7. М.: Изд. АН СССР, 1949.
4. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин [Текст] / И.И. Артоболевский: учебник для вузов. 4-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1988.
5. Левитская, О.Н. Курс теории механизмов и машин [Текст] / О.Н. Левитская, Н.И. Левитский. М.: Высшая школа, 1985.
6. Пузырев, Н.М. Лабораторный практикум по теории механизмов и машин [Текст] / Н.М. Пузырев, Н.Н. Посадков. Тверь: ТГТУ, 2003.
7. Пузырев, Н.М. Курсовое проектирование по теории механизмов и машин [Текст] / Н.М. Пузырев: учебное пособие. Тверь: ТГТУ, 2003.