

ОПД.Ф.02.03 ТЕОРИЯ МАШИН И МЕХАНИЗМОВ
Конспект лекций

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Тема 1. Введение в теорию механизмов и машин	5
1.1. Цель и задачи изучения курса Теория механизмов и машин	5
1.2. Понятия «машина», «механизм», «робототехническое устройство»	5
1.3. Краткие сведения из истории развития механики	8
Тема 2. Структура и классификация механизмов	9
2.1. Основные понятия и определения	9
2.2. Классификация кинематических пар	10
2.3. Структурные формулы кинематической цепи	15
2.4. Структурный анализ механизмов	16
2.5. Структурный синтез механизмов	20
2.6. Виды механизмов	24
Тема 3. Кинематический анализ плоских рычажных механизмов	27
3.1. Цель и методы кинематического исследования механизмов	27
3.2. Кинематический анализ графоаналитическим методом	28
3.2.1. Определение положения звеньев и траекторий движения точек	28
3.2.2. Определение скоростей движения точек и звеньев механизма	28
3.2.3. Определение ускорений движения точек и звеньев механизма	31
3.3. Аналитический метод кинематического анализа рычажных механизмов	33
3.3.1. Кинематический анализ кривошипно-ползунного механизма	33
3.3.2. Кинематический анализ кривошипно-коромыслового механизма	34
Тема 4. Кинематический синтез механизмов	36
4.1. Синтез кривошипно-ползунного механизма по ходу ползуна и коэффициенту возрастания средней скорости обратного хода ползуна	37
4.2. Синтез центрального кривошипно-ползунного механизма по ходу ползуна и коэффициенту пика скорости ползуна	37
4.3. Синтез кривошипно-ползунного механизма по ходу ползуна, коэффициенту пика скорости ползуна и углу поворота кривошипа за рабочий ход ползуна	38
4.4. Синтез кривошипно-коромыслового механизма по заданным положениям кривошипа и соответствующим им положениям коромысла	39
4.5. Синтез кривошипно-коромыслового механизма по углу качания коромысла, его положениям в крайних точках и коэффициенту возрастания скорости обратного хода	41
Тема 5. Кинетостатика плоских рычажных механизмов	43
5.1. Силы, действующие на звенья механизма	43
5.2. Задача, метод и последовательность выполнения кинетостатического анализа	44
5.3. Кинетостатический анализ методом планов сил	45
5.4. Аналитический метод кинетостатического анализа	48
5.4.1. Кинетостатический анализ кривошипно-ползунного механизма	48
5.4.2. Кинетостатический анализ кривошипно-коромыслового механизма	50
Тема 6. Зубчатые механизмы	54
6.1. Общие сведения и классификация зубчатых механизмов	54
6.2. Основной закон зубчатого зацепления	57

6.3. Основные параметры зубчатого зацепления	61
6.4. Эвольвентное зубчатое зацепление	65
6.5. Зубчатые зацепления не эвольвентного профиля	72
6.6. Особенности геометрии косозубых и шевронных колес	75
6.7. Пространственные зубчатые передачи	76
6.8. Планетарные зубчатые передачи	80
6.8.1. Сложные зубчатые механизмы	80
6.8.2. Формула Виллиса	81
6.8.3. Определение передаточного отношения планетарных механизмов	82
6.8.4. Синтез (проектирование) планетарных механизмов	86
Тема 7. Кулачковые механизмы	92
7.1. Общая характеристика кулачковых механизмов	92
7.2. Основные геометрические и кинематические параметры механизмов с плоскими дисковыми кулачками	93
7.3. Задачи и критерии синтеза кулачковых механизмов	95
7.4. Графический метод проектирования кулачковых механизмов с дисковым кулачком	99
7.4.1. Синтез кулачкового механизма с роликовым толкателем	99
7.4.2. Синтез кулачкового механизма с роликовым коромыслом	102
7.4.3. Синтез кулачкового механизма с плоским толкателем	104
Тема 8. Исследование движения машинного агрегата с жесткими звеньями под действием заданных сил	107
8.1. Постановка задачи	107
8.2. Уравнение движения механизма (машины) в форме уравнения кинетической энергии	108
8.2.1. Характерные периоды движения машины	108
8.2.2. Закон передачи работ в машине	110
8.2.3. Механический коэффициент полезного действия машинного агрегата	110
8.3. Приведенная сила, масса и момент инерции	112
8.4. Определение приведенной силы методом проф. Жуковского	114
Н.Е.	
8.5. Общее уравнение движения	116
8.6. Регулирование движения машины	117
8.6.1. Условия работы машины	117
8.6.2. Установившееся неравновесное движение и расчет маховика	117
8.6.3. Регулирование скорости машины при различных нагрузках	121
Тема 9. Источники колебаний и вибрации в машинах	124
9.1. Уравновешивание вращающихся звеньев	124
9.1.1. Виды неуравновешенности ротора	124
9.1.2. Балансировка роторов	126
9.2. Колебания, вызванные периодически изменяющимися силами	131
9.3. Колебания, вызванные периодическими изменениями перемещениями тел механической системы	134
9.4. Колебания, вызванные периодическими изменениями инерционных характеристик механической системы	136
9.5. Анализ действия вибраций и основные виды виброзащиты	139
9.6. Демпфирование колебаний. Способы гашения колебаний	143
Заключение	147
Библиографический список	148

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая книга представляет собой учебное пособие, содержащее основы курса Теория механизмов и машин. Содержание пособия соответствует требованиям Государственных образовательных стандартов высшего профессионального образования.

Необходимость издания данного пособия вызвана чрезвычайно малым и постоянно сокращающимся количеством часов аудиторных занятий, отводимых стандартами и учебными планами на изучение курса. В связи с этим возрастает роль самостоятельной работы студентов, для чего и предназначено данное учебное пособие.

В конце каждой темы приведены вопросы для самоконтроля усвоения материала.

ТЕМА 1. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

1.1. Цель и задачи изучения курса теория механизмов и машин

Дисциплина "Теория механизмов и машин" является базовой в общепрофессиональной подготовке инженера – механика, научной основой специальных дисциплин.

В процессе изучения этой дисциплины студент должен:

- изучить общие методы исследования (анализа) и проектирования (синтеза) механизмов и машин;
- научиться понимать общие принципы взаимодействия механизмов в машине;
- научиться системному подходу к проектированию механизмов и машин, нахождению оптимальных параметров механизмов по заданным условиям работы;
- получить навыки анализа и синтеза механизмов с использованием ЭВМ.

Изучение дисциплины базируется на предшествующей механико-математической подготовке студента, обеспечиваемой соответствующими разделами дисциплин "Математика", "Физика", "Теоретическая механика", "Информатика".

Изучение дисциплины включает в себя:

- проработку теоретического материала (лекции, учебник, данное учебное пособие);
- выполнение лабораторных работ;
- выполнение расчетно-графических работ;
- выполнение курсовой работы (курсового проекта).

Завершается изучение дисциплины защитой курсовой работы (проекта) и сдачей экзамена.

1.2. Понятия "машина", "механизм", "робототехническое устройство"

Машиной называется устройство, выполняющее механические движения для преобразования энергии, материалов и информации с целью замены или облегчения физического и умственного труда.

Классификация машин показана в таблице 1.1.

Технологические машины используют механическую энергию для преобразования формы, свойств, размеров и состояния объекта.



Транспортные машины используют механическую энергию для изменения положения объекта (его координат).

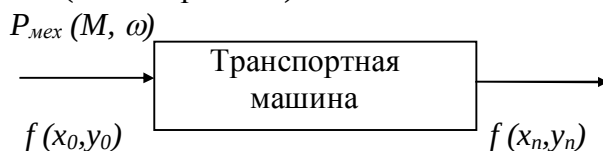
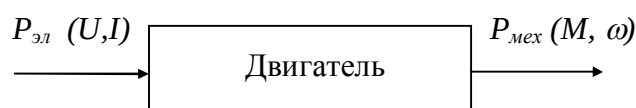


Таблица 1.1

МАШИНЫ	ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ	Металлорежущие и деревообрабатывающие станки
		Кузнечно-прессовое оборудование
		Прокатные станы
		Литейное оборудование
		Сельскохозяйственные машины
		Машины для легкой и пищевой промышленности
		Полиграфические машины
	ТРАНСПОРТНЫЕ	Подвижной состав железнодорожного, водного, воздушного и автомобильного транспорта
		Конвейеры, транспортеры, лифты, подъемники
		Подъемные краны, строительные и дорожные машины
	ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ	Дизели, двигатели внутреннего сгорания
		Турбины
		Электродвигатели, генераторы
		Гидро- и пневмодвигатели
	ИНФОРМАЦИОННЫЕ	Математические машины
		Контрольно-управляющие машины

Энергетические машины преобразуют один вид энергии (электрической, тепловой, сжатого воздуха, пара, воды и т.п.) в другой. Эти машины бывают двух разновидностей:

Двигатели преобразуют любой вид энергии в механическую (например, электродвигатели преобразуют электрическую энергию, двигатели внутреннего сгорания преобразуют энергию расширения газов при сгорании в цилиндре, тяговые электрические машины в локомотиве преобразуют электрическую энергию в механическую.)

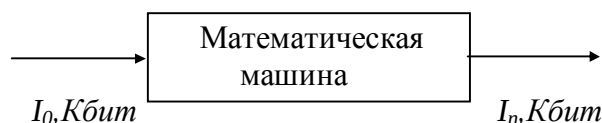


Генераторы преобразуют механическую энергию в энергию другого вида (например, электрогенератор преобразует механическую энергию паровой или гидравлической турбины или двигателя внутреннего сгорания в электрическую)

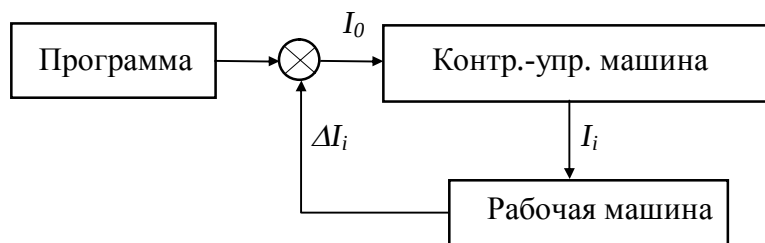


Информационные машины облегчают или заменяют логическую деятельность человека по выполнению расчетных операций и операций контроля и управления.

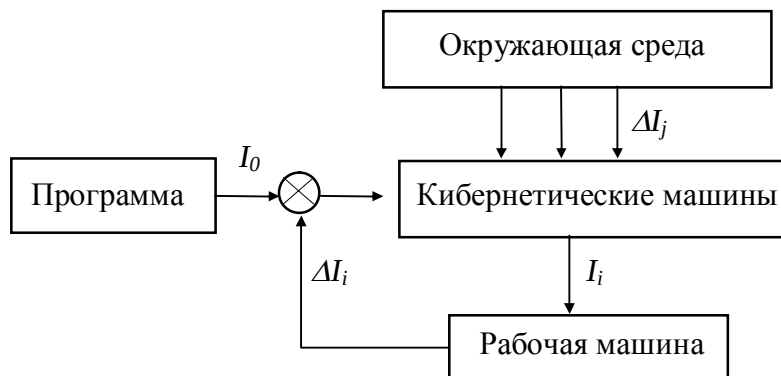
Математические машины преобразуют входную информацию в математическую модель исследуемого объекта.



Контрольно-управляющие машины преобразуют входную информацию (программу) в сигналы управления рабочей или энергетической машиной.



Кибернетические машины - машины управляющие рабочими или энергетическими машинами, которые способны изменять программу своих действий в зависимости от состояния окружающей среды (т.е. машины обладающие элементами искусственного интеллекта).



Машинным агрегатом называется техническая система, состоящая из одной или нескольких соединенных последовательно или параллельно машин и предназначенная для выполнения каких-либо требуемых функций. Обычно в состав машинного агрегата входят: двигатель, передаточный механизм и рабочая или энергетическая машина. В настоящее время в состав машинного агрегата часто включается контрольно-управляющая или кибернетическая машина. Передаточный механизм в машинном агрегате необходим для согласования механических характеристик двигателя с механическими характеристиками рабочей или энергетической машины.

Схема машинного агрегата



В последние десятилетия наряду с терминами «машина», «автомат», «автоматическая линия» в нашу жизнь все более входят понятия "робототехническое устройство" или просто «Робот». Что это такое? Робот в переводе с чешского языка означает барщина, подневольный труд. Чешский писатель К. Чапек ввел это слово в свои произведения с новым значением «Искусный в работе человек».

В современном понятии **РОБОТ** - машина с антропоморфным (человекоподобным) поведением, которая частично или полностью выполняет функции человека при взаимодействии его с окружающим миром.

Промышленный робот представляет собой автоматическую машину (стационарную или передвижную), состоящую из исполнительного устройства в виде манипулятора

и перепрограммированного устройства программного управления для выполнения в производственном процессе двигательных и управляющих функций.

Многочисленные разновидности машин отличаются своим назначением, габаритами и т.д. Однако в каждой машине есть механизм, предназначенный для преобразования вида движения, изменения величины и направления скорости исполнительного органа машины.

Механизмом называется система тел, предназначенная для преобразования движения одного или нескольких твердых тел в требуемое движение других тел.

Вопросы для самоконтроля

1. *Какое устройство называется машиной?*
2. *Назовите 4 основных типа машин.*
3. *Какие функции выполняют технологические машины? Приведите примеры технологических машин.*
4. *Каково назначение транспортных машин? Приведите примеры транспортных машин.*
5. *Какие функции выполняют энергетические машины? Приведите примеры энергетических машин.*
6. *Для чего предназначены информационные машины?*
7. *Что называется механизмом?*
8. *Что такое робот?*

1.3. Краткие сведения из истории развития механики

Механика является одной из старейших отраслей наук, возникновение и развитие которой обусловлено потребностями практики. Известно, например, что при постройке египетских пирамид применились простейшие механизмы и механические устройства: рычаги, блоки, наклонная плоскость.

Постепенно шел процесс их исследования, совершенствования и внедрения в практику с целью облегчить труд человека, повысить производительность труда.

Выдающийся деятель эпохи Возрождения Леонардо да Винчи (1452-1519) разработал проекты конструкции механизмов ткацких, печатных и деревообрабатывающих станков. Итальянский врач и математик Д. Кардан (1501-1576) изучал движение механизмов часов и мельниц. Французский ученый Г.Амонтон (1663-1705) и Ш. Кулон (1736-1806) первыми предложили формулы для определения силы трения покоя и скольжения.

Однако дальнейшее развитие теории механизмов и машин следует отнести к значительно более поздним временам, когда в результате накопления опыта стали возможными некоторые обобщения и частично выкристаллизировались методы этой науки. В этом смысле датой рождения науки о машинах и механизмах можно считать конец XVIII в. Задачи теории механизмов и машин рассматривались ранее в курсах прикладной механики, выделившейся из состава теоретической механики более 180 лет тому назад. Теория механизмов и машин оформилась как самостоятельная ветвь науки в XX в..

В 1724 г. по инициативе Петра 1 была основана Российская Академия наук, деятельность которой с первых же дней существования была посвящена решению практических задач по постройке сооружений и машин, развитию отечественного кораблестроения, артиллерии и другой техники.

Достойный вклад в развитие практической механики в России в XVIII в. внес гениальный ученый - академик М.В. Ломоносов, разработавший конструкции машин для производства стекла и испытаний материалов. Его научные открытия послужили источником творчества русских умельцев, изобретателей и конструкторов: И.И. Ползунова — творца паровой машины; И. П. Кулибина - создателя механизма протеза, часов-автоматов, «водохода», «самокатки» и др.; К. А Фролова — строителя механизированного комплекса рудо- и водоподъемных устройств; отца и сына Е. А. и М. Е. Черепановых, построивших

первый в России паровоз, и многих других. Интересно отметить, что конструкция «самокатки», созданной И. И. Кулибиным в 1791 г., носила черты будущих автомобилей: она имела устройства для переключения зубчатых передач и свободного хода, тормоз, управляемые колеса.

В это же время протекала плодотворная деятельность величайшего математика и механика акад. Л. Эйлера, разработавшего теорию плоских зацеплений и предложившего эвольвентный профиль зубьев колес. Эти исследования послужили основой для создания французом Т. Оливье общей теории пространственных зацеплений, которая была переработана и дополнена одесским профессором Х.И. Гохманом - автором фундаментального труда «Кинематика машин» (1890г.).

К середине XIX в. в России выросла плеяда талантливых ученых, заложивших основы современной теории механизмов и машин. Основателем русской школы этой науки был великий математик академик П. Л. Чебышев (1821—1894 гг.), которому принадлежит ряд оригинальных исследований, посвященных синтезу механизмов, теории регуляторов и зубчатых зацеплений, структуре плоских механизмов. Он создал схемы свыше 40 различных механизмов и большое количество их модификаций. Академик И.А.Вышнеградский явился основателем теории автоматического регулирования; его работы в этой области нашли достойного продолжателя в лице выдающегося русского ученого проф. Н. Е. Жуковского, а также словацкого инженера А.Стодолы и английского физика Д. Максвелла. Н.Е. Жуковскому - отцу русской авиации - принадлежит также ряд работ, посвященных решению задачи динамики машин (в частности, теорема о жестком рычаге).

Глубокие исследования в области теории смазочного слоя выполнены почетным академиком Н.П.Петровым. Ученик И. А. Вышнеградского - профессор В. Л. Кирпичев известен как автор графических методов исследований статики и кинематики механизмов. В его популярной до сих пор книге «Беседы о механике» решены задачи равновесия сил, действующих в стержневых механизмах, динамики машин и др.

Выдающийся российский ученый профессор Н.И. Мерцалов дал новые оригинальные решения задач кинематики и динамики механизмов. В 1914 г. он написал труд «Динамика механизмов», который является первым систематическим курсом в этой области. Он же первым начал исследовать пространственные механизмы. Академик В. П. Горячкин провел фундаментальные исследования в области теории сельскохозяйственных машин.

Профессор Л. А. Ассур разработал строгую в научном отношении классификацию плоских шарнирно-рычажных механизмов, которая послужила базой для многочисленных исследований в этой области в дальнейшем.

В XX веке наука о машинах развивается особенно бурно, что объясняется потребностями научно-технической революции. Наряду с отраслевыми научно-исследовательскими институтами, занимающимися разработкой и исследованием конкретных машин, создан Институт машиноведения Академии наук, который занимается разработкой общих проблем механики машин.

Важное место в теории механизмов и машин сегодня занимают такие направления как снижение энергозатрат на трение, повышение долговечности и надежности машин, повышение коэффициента полезного действия, снижение материалоемкости, веса и габаритов машин, повышение точности и т.д.

ТЕМА 2. СТРУКТУРА И КЛАССИФИКАЦИЯ МЕХАНИЗМОВ

2.1. Основные понятия и определения

Основными задачами структурного анализа механизмов являются:

- исследование структурно-кинематических схем механизмов;
- определение количества свобод движения механизмов в зависимости от геометрических форм сопряжения звеньев и их количества;

- определение возможности движения механизма в заданном интервале обобщенных координат;
- обеспечение полнооборотного вращения входных и выходных звеньев (в случае необходимости);
- обеспечение заданных форм проекций движения точек звеньев механизма.

Для анализа используют **структурно-кинематическую схему** механизма - изображение механизма с помощью условных обозначений, содержащую общую информацию о размерах и количестве звеньев, количестве кинематических пар, способе соединения звеньев и видах возможных движений в пространстве.

Звеном механизма называется одно или несколько твердых тел, соединенных неподвижно. Здесь имеются в виду как абсолютно твердые так и деформируемые и гибкие тела.

Звенья механизма могут быть **подвижными** и **неподвижными** относительно выбранной системы координат. Неподвижное звено называется **стойкой**. В каждом механизме всегда есть **одно** (и только одно) **неподвижное** звено.

Звено, совершающее движение, для выполнения которого предназначен механизм, называется **выходным**. Выходное звено обычно соединено с исполнительным органом машины либо с входным звеном другого механизма.

Звено, которому сообщается движение от двигателя или выходного звена другого механизма, называется **входным** звеном.

Соединение двух соприкасающихся звеньев, допускающее их относительное движение, называется **кинематической парой**.

Система звеньев, образующих между собой кинематические пары, называется **кинематической цепью**.

Кинематическая цепь **замкнута**, если каждое ее звено входит **не менее чем в две** кинематические пары.

Цепь **разомкнута**, если в ней есть звено, входящее **только в одну** кинематическую пару.

Используя понятие "Кинематическая цепь", можно дать еще одно определение механизму:

Механизмом называется замкнутая кинематическая цепь, предназначенная для **преобразования заданного движения одного или нескольких входных звеньев в требуемое движение остальных звеньев**.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется структурно-кинематической схемой механизма?
2. Что называется звеном механизма?
3. Сколько неподвижных звеньев может быть в механизме?
4. Чем отличаются входные и выходные звенья?
5. Что называется кинематической парой?
6. Что такое кинематическая цепь?
7. Чем отличаются замкнутая и разомкнутая кинематические цепи?

2.2. Классификация кинематических пар

Характер относительного движения звеньев, допускаемого кинематической парой, зависит от формы звеньев в местах их контакта.

Совокупность возможных мест контакта образует на каждом из двух звеньев **элемент** кинематической пары. Элементом кинематической пары может быть **точка**, **линия**, **поверхность**.

Кинематические пары, элемент которых **точка** или **линия**, называются **высшими**; кинематические пары, элемент которых **поверхность**, называются **низшими**.

В зависимости от геометрии одного (или обоих) из соприкасающихся звеньев различают кинематические пары сферические, конические, цилиндрические, плоскостные, винтовые.

По характеру допускаемого кинематической парой относительного движения звеньев различают вращательные (В), поступательные (П), вращательно-поступательные (В + П) и с винтовым движением ВП. Различие пар типа В + П и ВП заключается в том, что в первых относительные движения (вращательное и поступательное) независимы, а во вторых одно движение не может быть осуществлено без другого.

Наряду с парами звеньев, соприкасающихся по одной поверхности, линии или точке, в практике применяют пары с многократным соприкосновением. Это или повторение элементов взаимодействия (шлицевые, многозаходные винтовые, зубчатые пары), или использование одновременного соприкосновения по поверхности и линии (сферическая пара со штифтом), по цилиндрической и плоской поверхностям (пара со скользящей шпонкой). Повторение соприкосновений звеньев характеризует эквивалентность пар различных видов. Пара с трехточечным контактом может быть эквивалентна плоскостной или сферической низшей паре по характеру движения звеньев.

Для твердого тела, свободно движущегося в пространстве, число степеней свободы (число независимых между собой возможных перемещений механической системы) равно шести: три поступательных вдоль осей X , Y , Z и три вращательных вокруг этих осей (рис.2.1).

Для звеньев, входящих в кинематическую пару, число степеней свободы всегда меньше шести, так как условия соприкосновения (связей) уменьшают число возможных перемещений одного звена относительно другого: одно звено не может внедряться в другое и не может от него удаляться.

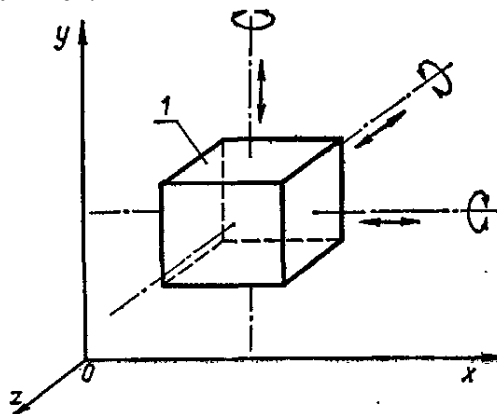


Рисунок 2.1 Степени свободы твердого тела, свободно движущегося в пространстве

В общем случае каждая кинематическая пара накладывает на относительное движение звеньев S связей, допуская $H = 6 - S$ относительных движений звеньев. В зависимости от числа наложенных связей S (оставшихся степеней свободы H) различают 5 классов кинематических пар. Такая классификация кинематических пар предложена И.И.Артоболевским (таблица 2.1)

В таблицах 2.2-2.4 приведены примеры конструктивного выполнения кинематических пар. Приведенные в табл.2.2 и 2.4 пары классифицированы исходя из предположения, что трение и деформация звеньев отсутствуют. Трение позволяет использовать отдельные пары во фрикционных передачах. С учетом деформации пары с точечным контактом могут превращаться в пары с поверхностным соприкосновением.

Таблица 2.1

Виды кинематических пар

Класс	Число связей S	Число степеней свободы H	Виды кинематических пар		
			Первый	Второй	Третий
I	1	5	 $3B + 2\Pi$		
II	2	4	 $2B + 2\Pi$	 $3B + 1\Pi$	
III	3	3	 $1B + 2\Pi$	 $2B + 1\Pi$	 $3B$
IV	4	$1B$ 1Π ; $2B$; $1B$ 1Π			
V	5	$1B$; 1Π ; 1Π			

Таблица 2.2

Примеры конструктивного выполнения кинематических пар

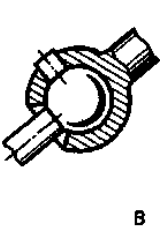
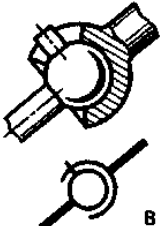
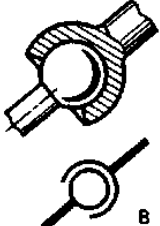
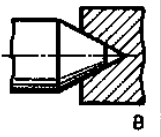
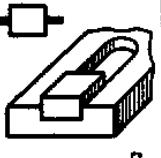
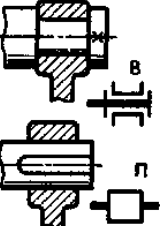
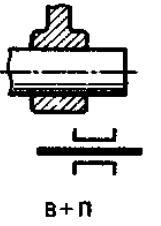
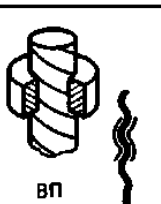
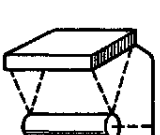
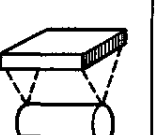
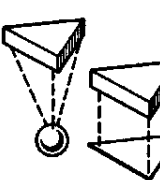
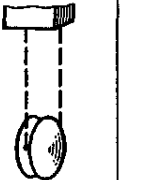
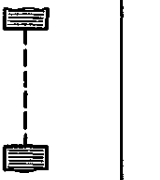
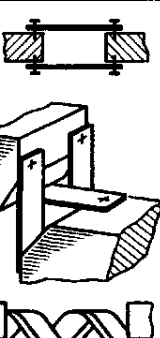
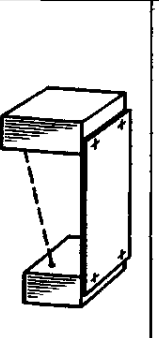
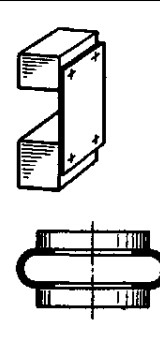
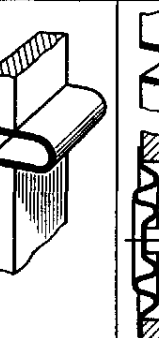
Вид	Число степеней свободы			Вид	Число степеней свободы		
	1	2	3		1	2	3
Сферическая				Коническая		—	—
	В	В	В	Плоскостная			
Цилиндрическая			—	Винтовая		—	—
	В+П	В+П	—	ВП	—	—	—

Таблица 2.3

Примеры конструктивного выполнения кинематических пар

Форма связи	Число степеней свободы				
	1	2	3	4	5
Нить, лента, стержень					
Пластина, оболочка					

Кинематические пары высшие

Поверх- ности элемен- тов	Соприкосновение по линии			Соприкосновение в точке		
	Число степеней свободы					
	2	3	4	3	4	5
Второго порядка	 В	 В	 В+П	 В	 В+П	 В+П
Конические	 В	 В+П	 В+П	 В	 В+П	 В+П
Цилиндрические	 В	 В+П	 В+П	—	—	 В+П
Плоские	—	 В+П	 В+П	 В	 В+П	 В+П
Винтовые	 ВП	 ВП	—	 ВП	—	—

Свойства кинематических пар:

1. При прочих равных условиях низшие пары передают большие усилия, чем высшие. Однако, в низших парах имеет место трение скольжения, а в высших качения, при котором сопротивление движению меньше.

2. В механизмах с высшими парами легче обеспечить требуемый (сложный) закон движения звеньев (например, в кулачковых механизмах).

3. Низшие пары обладают свойством обратимости, т.е. вид траекторий относительного движения точек их звеньев одинаковый. Высшие пары этим свойством не обладают.

4. Для низших пар обычно применяется геометрическое замыкание, а для высших – силовое.

5. Точность высших кинематических пар определяется погрешностью формы и расположения их элементов; на точность низких пар в большей степени влияют зазоры в кинематических парах.

Вопросы для самоконтроля

1. Назовите признаки классификации кинематических пар.
2. В чем различие между высшими и низшими кинематическими парами?
3. Как классифицируются кинематические пары по виду допускаемого относительного движения?
4. Чем определяется класс кинематической пары?

5. Почему возможно только 5 классов кинематических пар?
6. Приведите примеры кинематических пар каждого класса.
7. Кинематические пары каких классов могут быть реализованы в плоских механизмах?
8. В чем заключаются свойства кинематических пар?
9. Почему низшие пары, при прочих равных условиях, передают большие усилия, чем высшие?

2.3. Структурные формулы кинематической цепи

Представим себе, что пространственная кинематическая цепь состоит из K звеньев. Общее число степеней свободы, которыми обладали эти звенья до их соединения кинематическими парами равно $6K$. Ранее уже установлено, что каждая кинематическая пара налагает на относительное движение звеньев столько связей (лишает их столько степеней свободы) каков ее класс. Кроме этого, одно звено в механизме всегда неподвижно, т.е. число степеней свободы его равно 0.

Таким образом, число степеней свободы (степень подвижности) пространственной кинематической цепи относительно стойки

$$W = 6(k - 1) - p_1 - 2p_2 - 3p_3 - 4p_4 - 5p_5,$$

где k – число звеньев кинематической цепи включая стойку;

$p_{(1-5)}$ – число кинематических пар соответствующего класса.

$$W = 6(k - 1) - \sum_{i=1}^5 i \cdot p_i$$

Это структурная формула пространственной кинематической цепи или **формула Сомова – Малышева**.

Кинематическая цепь (механизм), на которую не наложены общие для всех звеньев связи, называется кинематической цепью (механизмом) **нулевого семейства**.

Если на механизм нулевого семейства наложить три общие связи, т.е., лишить все звенья механизма 3-х степеней свободы (например: перемещения по направлению оси Z , вращения вокруг осей X и Y), то получим плоский механизм или **механизм 3-го семейства**.

Плоским называется механизм, точки звеньев которого описывают траектории, лежащие в параллельных плоскостях.

Для плоских механизмов степень подвижности определяется по **формуле Чебышева**

$$W = 3n - 2p_5 - p_4,$$

где: n – число подвижных звеньев;

p_4 – число кинематических пар 4 класса;

p_5 – число кинематических пар 5 класса.

Число степеней подвижности механизма показывает сколько входных звеньев в данном механизме.

Вопросы для самоконтроля

1. Что рассчитывается по структурной формуле кинематической цепи?
2. Запишите формулу Сомова-Малышева. Структурной формулой какой цепи она является?
3. Почему пространственный механизм называют механизмом нулевого семейства?
4. Как получить механизм третьего семейства?
5. Запишите структурную формулу механизма третьего семейства..
6. Что показывает рассчитанное по структурной формуле механизма число степеней подвижности?

2.4. Структурный анализ механизмов

Согласно идеям Л.В.Ассура любой механизм образуется последовательным присоединением к механической системе с определенным движением (входным звеньям и стойке) кинематических цепей (структурных групп) с нулевой подвижностью.

Структурная группа - кинематическая цепь, число степеней свободы которой относительно элементов ее внешних кинематических пар равно нулю, причем из нее нельзя выделить более простые кинематические цепи, удовлетворяющие этому условию. Такие цепи, если звенья в них образуют только кинематические пары 5 класса, называются **группами Ассура**.

Степень подвижности группы Асура согласно формуле Чебышева:

Структурная формула группы

$$W_{\Gamma} = 3 \cdot n_{\Gamma} - 2 \cdot p_{5\Gamma} = 0$$

Отсюда

$$p_{5\Gamma} = \frac{3}{2} n_{\Gamma}$$

т.е. в группе Ассура число подвижных звеньев n всегда четное, а число кинематических пар 5 класса p_5 - кратное трем.

Если в механизме есть пары 4 класса, то каждая из них должна быть заменена одним **звеном** и двумя кинематическими парами 5 класса.

В группах Ассура различают кинематические пары **внутренние** и **внешние**. Число внешних кинематических пар (вернее их элементов), которыми группа присоединяется к другим звеньям механизма, называют порядком (числом поводков) группы. Наиболее простые структурные группы с $n = 2$ и $p_5 = 3$ (таблица 2.5).

Их называют двухповодковыми группами Ассура или структурными группами II класса второго порядка. Различают 5 видов групп Ассура второго класса, отличающихся между собой только соотношением между числом вращательных и поступательных кинематических пар и порядком их расположения. Так в группу 1 вида (Π_1) входят 3 вращательные кинематические пары; в группу 2 вида (Π_2) – две вращательные и одна поступательная пары, при этом поступательная пара – внешняя; в группе 3 вида (Π_3) так же две вращательные и одна поступательная кинематические пары, при этом поступательная пара – внутренняя; в группах 4 и 5 видов по две поступательные и по одной вращательной кинематических пар, но в группе 4 вида (Π_4) вращательная пара внутренняя, а в группе 5 вида (Π_5) – внешняя.

Структурные группы с $n = 4$ и $p_5 = 6$ могут образовывать трехповодковые группы III класса или двухповодковые группы IV класса (замкнутый контур имеет четыре внутренние кинематические пары).

У четырехповодковой структурной группы III класса $n = 6$ и $p_5 = 9$. Пространственная структурная группа III класса представляет собой «треногу», замкнутый контур которой соединен с тремя поводками, каждый из которых имеет на концах трехподвижную и пятиподвижную пары.

Порядок определения групп Ассура при выполнении структурного анализа:

1. Выбирается входное звено, которое обязательно должно входить в кинематическую пару 5 кл. со стойкой;
2. Производится отделение группы Ассура возможно более низкого класса так, чтобы после ее отделения остался механизм с той же степенью подвижности, что и заданный.
3. Если отделить группу Ассура II кл. не удастся, то следует попытаться отделить группу Ассура более высокого класса. Разложение механизма на группы Ассура ведется до тех пор, пока не останется входное звено и стойка (основной двухзвенный механизм I класса).

Классификация групп Асура

Класс	Порядок второй				
	Вид				
	первый	Второй	третий	четвертый	пятый
II $n = 2$ $p_5 = 3$					
III $n = 4$ $p_5 = 6$	Порядок третий 				
IV $n = 4$ $p_5 = 6$	Порядок второй 				

Формула строения механизма. Классификация механизмов.

Формула строения механизма описывает последовательность присоединения структурных групп с нулевой подвижностью (групп Асура) к основному двухзвенному механизму 1 класса, состоящему из входного звена и стойки.

Согласно классификации Асура – Артоболевского **класс механизма определяется наивысшим классом группы Асура, входящей в этот механизм.**

Рассмотрим пример структурного анализа механизма (рис.2.2).

1. Обозначим звенья цифрами, а кинематические пары прописными буквами латинского алфавита.

2. Подсчитаем число звеньев.

Всего звеньев $K = 6$, число подвижных звеньев $n = 5$.

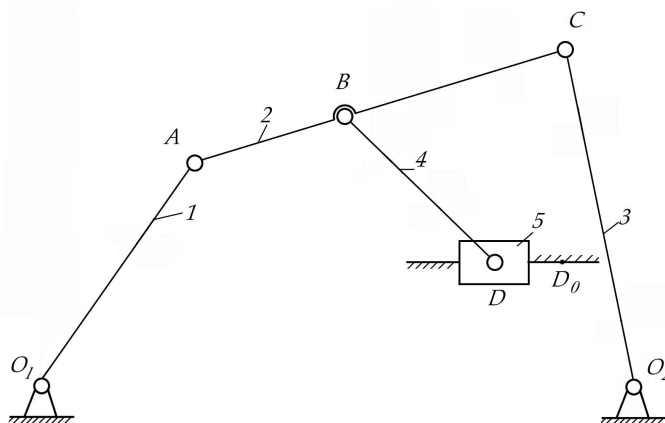


Рисунок 2.2 Схема к примеру структурного анализа механизма

3. Классификация кинематических пар.

Признаки классификации	Обозначение кинематической пары						
	O_1	A	B	C	O_2	D	D
	соединяемые звенья						
	6,1	1,2	2,4	2,3	3,6	4,5	5,6
По виду относит. движения	Вр.	Вр.	Вр.	Вр.	Вр.	Вр.	Пост.
По элементу кинемат. пары	Низшие						
Класс	Пятый						

Убедимся, что заданная кинематическая цепь замкнута, так как каждое ее звено входит не менее чем в две кинематические пары.

4. Определяем степень подвижности механизма:

$$W = 3n - p_4 - 2p_5 = 3 \cdot 5 - 0 - 2 \cdot 7 = 1$$

5. Производим разложение механизма на структурные группы.

В качестве входного в этом механизме могут быть приняты звенья 1, 3 или 5, образующие со стойкой кинематические пары 5 класса.

Рассмотрим два варианта:

Вариант 1: в качестве входного принимаем звено 1. Отделяем от механизма наиболее удаленную от входного звена структурную группу, состоящую из звеньев 4 и 5 и кинематических пар B, D, D . Определяем степень подвижности оставшегося механизма:

$$W_1 = 3 \cdot 3 - 0 - 2 \cdot 4 = 1$$

Поскольку степень подвижности оставшегося механизма такая же, что и у исходного, то структурная группа отделена правильно. Это группа Ассур второго класса, второго вида (Π_2). Отделяем группу звеньев 2 и 3 и кинематические пары A, C, O_2 . Определяем степень подвижности оставшейся части механизма:

$$W_2 = 3 \cdot 1 - 0 - 2 \cdot 1 = 1$$

Следовательно, отделение группы звеньев 4,5 не изменяет степени подвижности механизма. Это группа Ассур второго класса первого вида (Π_1).

Оставшийся механизм представляет собой основной двухзвенный механизм первого класса, состоящий из входного звена 1 и стойки 6.

Запишем формулу строения механизма.

$$I(1,6) - II_1(3,4) - II_2(4,5)$$

В соответствии с классификацией Ассура-Артоболевского данный механизм **второго класса**.

Вариант 2: в качестве входного, принимаем звено 5. Отделить двухзвенные группы без разрушения механизма не представляется возможным. Следовательно, необходимо отделить группу, состоящую из 4 звеньев (1,2,3,4) и 6 кинематических пар (O_1, A, B, D, C, O_2). Проверим степень подвижности оставшегося механизма:

$$W_2 = 3 \cdot 1 - 0 - 2 \cdot 1 = 1$$

Отделение указанной структурной группы не влияет на степень подвижности механизма. Отделена группа Ассура III класса. Оставшийся механизм представляет собой основной двухзвенный механизм первого класса, состоящий из входного звена 5 и стойки 6.

Запишем формулу строения механизма.

$$1(5,6) - III(1,2,3,4)$$

В соответствии с классификацией Ассура-Артоболевского данный механизм **третьего класса**.

Как видно из рассмотренного примера класс механизма может измениться в зависимости от выбора входного звена.

Рассмотрим примеры определения подвижности механизмов манипуляторов.

В данном механизме (рис.2.3) 7 звеньев (включая стойку), т.е. шесть подвижных звеньев и шесть одноподвижных вращательных кинематических пар пятого класса.

Степень подвижности механизма

$$W = 6n - p_1 - 2p_2 - 3p_3 - 4p_4 - 5p_5 = 6 \cdot 6 - 5 \cdot 6 = 6$$

В реальном манипуляторе входное звено образует со стойкой кинематическую пару четвертого класса, которая заменяется дополнительным звеном и двумя кинематическими парами пятого класса. Выходное звено образует с промежуточным звеном кинематическую пару третьего класса, которая заменена двумя дополнительными звеньями и тремя кинематическими парами пятого класса. Между собой входное и промежуточные звенья образуют кинематическую пару пятого класса.

$$W = 6n - p_1 - 2p_2 - 3p_3 - 4p_4 - 5p_5 = 6 \cdot 3 - 3 \cdot 1 - 4 \cdot 1 - 5 \cdot 1 = 6.$$

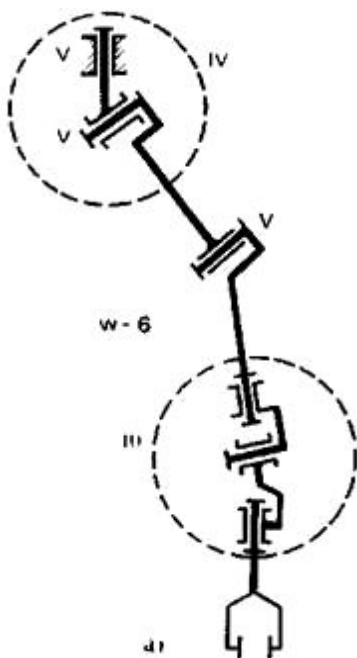


Рисунок 2.3

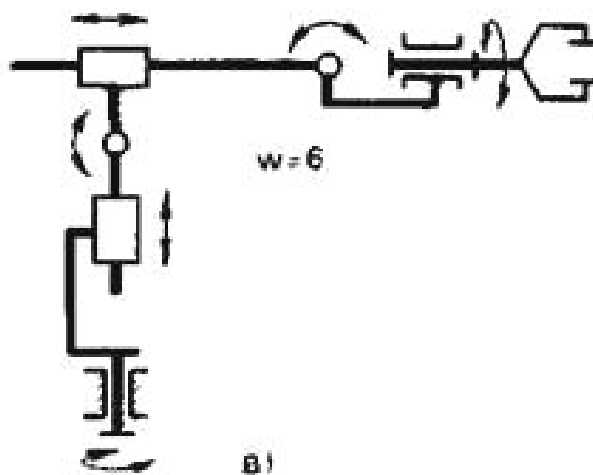


Рисунок 2.4

Механизм (рис.2.4) имеет 7 звеньев (включая стойку), 4 одноподвижные вращательные и две одноподвижные поступательные кинематические пары. Степень подвижности механизма

$$W = 6n - 5p_5 = 6 \cdot 6 - 5 \cdot 6 = 6.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Как по Ассуру образуется любой механизм?
2. Что называется группой Ассура?
3. Каково соотношение между числом подвижных звеньев и числом кинематических пар 5 класса в группе Ассура?
4. Какие группы Ассура относятся к группам II класса?
5. В чем различия между видами групп II класса?
6. Какие структурные группы называются группами Ассура III и IV классов?
7. Как по классификации Ассура-Артоболевского определяется класс механизма?

2.5. Структурный синтез механизмов

Целью структурного синтеза механизма является его структурно-кинематическая схема с минимальным количеством звеньев для преобразования движения заданного количества входных звеньев в требуемое движение выходных звеньев. Задачи структурного синтеза многовариантны. Одно и то же преобразование движения можно получить различными по структуре механизмами. При выборе оптимальной структурно-кинематической схемы учитывается технология изготовления звеньев и кинематических пар, требования по точности изготовления и монтажа механизма, условия его эксплуатации.

Синтез структурно-кинематических схем механизмов может осуществляться:

- методом наложения структурных групп;
- методом инверсии;
- методом конструктивного преобразования.

Метод наложения структурных групп заключается в том, что к основному двухзвенному механизму, состоящему из входного звена и стойки, присоединяются структурные группы с нулевой подвижностью.

В зависимости от того, какими кинематическими парами они присоединяются, какова форма звеньев могут получиться разные варианты механизмов.

Рассмотрим пример.

Присоединением к основному механизму, состоящему из входного звена 2 и стойки 1, группы Ассура II класса 1-го вида (звенья 3,4 и кинематические пары B,C,D) получим **кривошипно-коромысловый** механизм (рис.2.5).

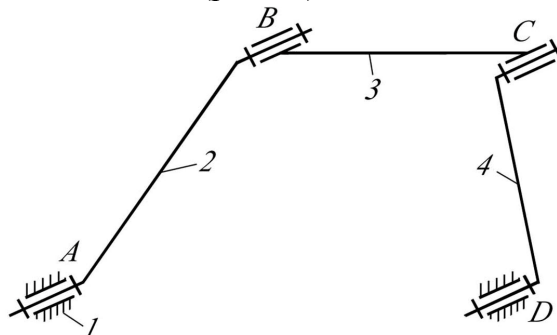


Рисунок 2.5 Кривошипно-коромысловый механизм

Если к этому же основному механизму присоединить группу Ассура II класса 2-го вида, то получим **кривошипно-ползунный** механизм (рис.2.6.)

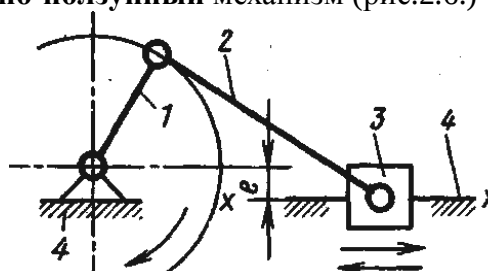


Рисунок 2.6 Кривошипно-ползунный механизм

Присоединяя к полученному механизму еще одну такую же структурную группу, получим схему V-образного двигателя внутреннего сгорания (рис.2.7).

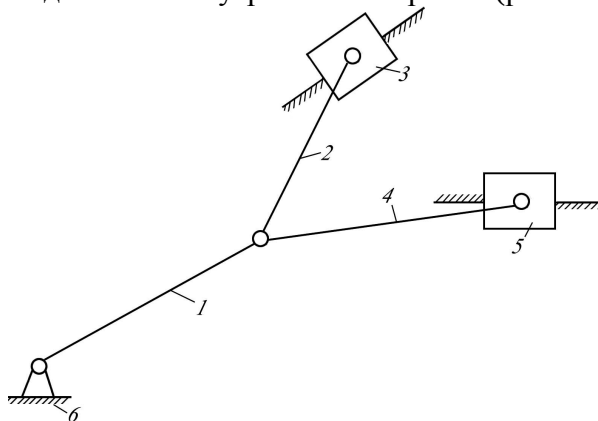


Рисунок 2.7 Схема V-образного двигателя внутреннего сгорания

Метод инверсии заключается в получении различных вариантов механизма путем замены функций одного звена функциями другого звена. Например: инверсией **кривошипно-ползунного механизма** (рис.2.8, а) можно получить кривошипно-кулисный механизм (рис.2.8, б), если **стойкой** сделать звено 1, а **выходным** – звено 2.

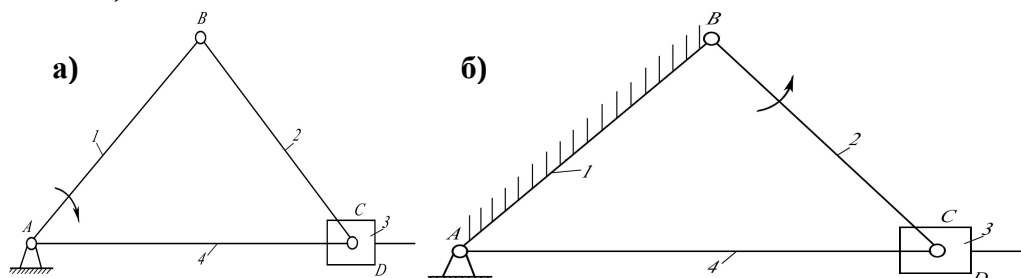


Рисунок 2.8 Кривошипно-ползунный механизм (а) и кривошипно-кулисный механизм (б)

Всё выше сказанное относится к плоским статически определимым (т.е. идеальным) механизмам. В идеальном механизме отсутствуют избыточные связи. Однако, вследствие неточности изготовления, идеальный плоский механизм становится, в некоторой степени, пространственным, поэтому при структурном анализе механизма целесообразно использовать формулу Сомова-Малышева, подставляя в нее подвижность идеального механизма и выявляя количество избыточных связей.

Рассмотрим пример.

При проектировании кривошипно-ползунного механизма взята структурная схема, состоящая из исходного механизма (1,4) и 2-х поводковой группы (2,3) с кинематическими парами 5 класса (рис.2.9, а). Подвижность этого механизма по формуле Чебышева

$$W = 3n - p_4 - 2p_5 = 3 \cdot 3 - 0 - 2 \cdot 4 = 1.$$

Если теперь принять, что, из-за неточностей изготовления этот механизм пространственный, то по формуле Сомова-Малышева найдем число избыточных связей:

$$g = W - 6(k - 1) + I \cdot p_i = 1 - 6 \cdot (4 - 1) + 5 \cdot 4 = 3.$$

Избыточные связи не меняют степени подвижности механизма, но при его работе могут вызвать деформация звеньев. Как устранять избыточные связи? Это можно сделать, повышая подвижность кинематических пар.

Заменим одноподвижную вращательную кинематическую пару В на 2-х подвижную цилиндрическую, а одноподвижную кинематическую пару С на 3-х подвижную сферическую (рис.2.9, б).

В преобразованном механизме число избыточных связей равно нулю:

$$g = 1 - 6 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 0.$$

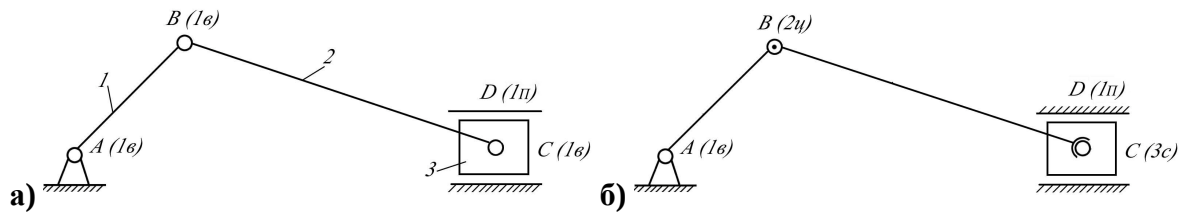


Рисунок 2.9 Повышение подвижности кинематических пар с целью устранения избыточных связей

Рассмотрим еще один пример.

Плоский 4-х звенный механизм с одноподвижными вращательными кинематическими парами (рис.2.10, а) с учетом неточностей изготовления (например, вследствие не параллельности осей A и D) оказывается пространственным. Сборка кинематических цепей 4, 3, 2 и отдельно 1, 4 не вызывает трудностей. Однако, соединить звенья 1 и 2 в кинематической паре B (одноподвижная вращательная) можно будет только путем угловых деформаций звеньев.

Определим число избыточных связей по формуле Сомова-Малышева:

$$g = 1 - 6 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 3$$

т.е. в данной схеме имеется 3 избыточные связи. Устраним эти связи заменяя одноподвижную вращательную кинематическую пару C на двухподвижную цилиндрическую, а одноподвижную вращательную пару B на 3-х подвижную сферическую. Это делает возможным без деформаций соединить звенья 2 и 1, т.к. звено 2 получило возможность перемещаться вдоль оси цилиндрического шарнира (рис. 2.10, б).

Структурный синтез может быть произведен так же путем **конструктивного преобразования** механизма (изменения соотношений размеров, формы, расположения звеньев). Это приводит к качественно иным техническим решениям при сохранении структурной схемы или вида механизма.

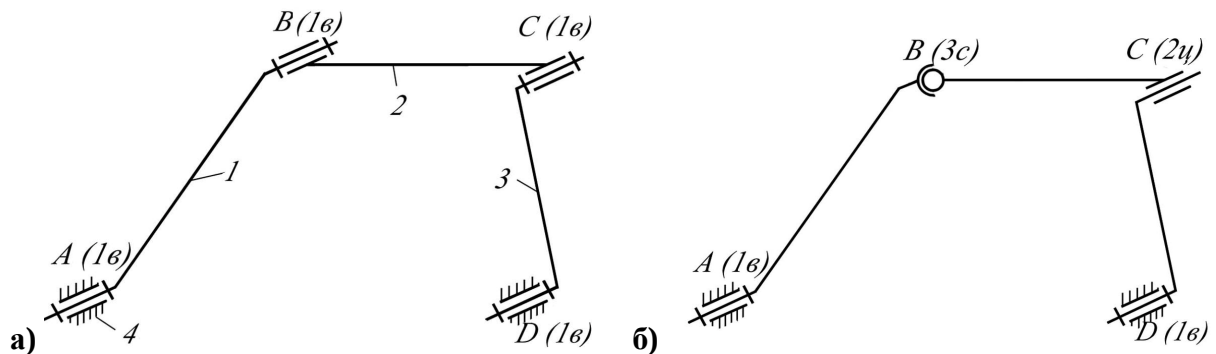


Рисунок 2.10 Повышение подвижности кинематических пар с целью устранения избыточных связей

На рис.2.11 на сх. а - е представлено конструктивное преобразование кривошипно-ползунного механизма, на сх. ж - н - кривошипно-кулисного механизма, на сх. о, п — синусного механизма, на сх. р, с — тангенсного механизма, на сх. т, у — механизма пантографа.

В основу конструктивного преобразования положено совмещение функций звеньев, выполнение элементов шарниров и других кинематических пар большими по размерам, чем размеры звеньев, замена охватывающих элементов охватываемыми, размещение одних звеньев и элементов кинематических пар внутри других элементов кинематических пар, замена одних звеньев и кинематических пар другими звеньями и парами с теми же функциональными признаками.

На сх. а — структурная схема кривошипно-ползунного механизма: 1 — кривошип; 2 — шатун; 3 — ползун. На сх. б вместо кривошипа выполнен круговой паз. 4, в котором размещен ползун 5. На сх. в кривошип и шатун заменены кулачком б, который взаимодействует с элементом шарнира 3. Таким образом, кривошипно-ползунный механизм преобразован в кулачковый механизм.

На сх. *г* элементы шарнира, соединяющие звенья 2 и 3, выполнены больше шатуна 2, а кривошип 1 и шатун 2 размещены внутри ползуна.

На сх. *д* кривошип 1 выполнен в виде эксцентрика и помещен внутрь охватывающей детали шарнира 1—2.

На сх. *е* кривошип 1 и шатун 2 выполнены в виде эксцентриков. Элементы шарниров и звенья размещены внутри ползуна. Такая конструктивная разновидность имеет большую жесткость в направлении движения ползуна, но более низкий КПД из-за больших углов давления и скоростей скольжения, обусловленных соотношением размеров, по сравнению со схемами, рассмотренными выше.

В сх. *ж* и *з* кулиса 8 выполнена соответственно в виде охватывающей и в виде охватываемой деталей, а ползун 7 — наоборот: в виде охватываемой и охватывающей деталей.

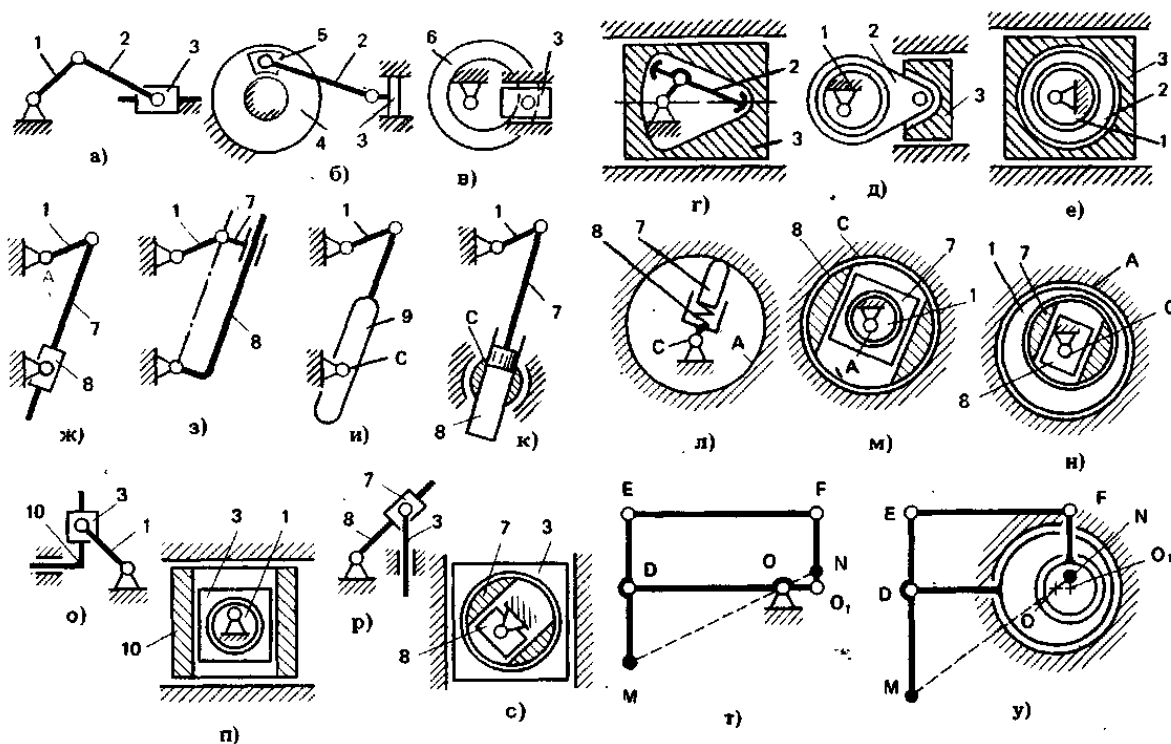


Рисунок 2.11 Примеры конструктивного преобразования механизмов

В сх. *и* функции кулисы и ползуна совмещены в звене 9, взаимодействующем с элементом шарнира *С*.

В сх. *к* ползун и кулиса выполнены в виде поршня 7 и цилиндра 8, размещенного внутри шарнира *С*.

В сх. *л* функции кривошипа и шарнира *А* совмещены в элементе шарнира *А*, охватывающем все остальные детали. Центр кривизны поверхности *А* смещен по отношению к центру шарнира *С*. Ползун 7 с поверхностью *А* образует высшую кинематическую пару. Кривошипно-кулисный механизм такого типа широко используется в гидромашинах.

В сх. *м* кривошип 1 выполнен в виде эксцентрика и помещен внутрь ползуна 7, который размещен внутри кулисы 8. Все звенья вместе помещены внутри шарнира *С*.

В сх. *н* выполнено преобразование в обратном порядке по отношению к сх. *м*. Кулиса 8 размещена в ползуне 7, который находится внутри кривошипа 1, выполненного в виде эксцентрика. Все звенья размещены внутри шарнира *А*.

Принципы, приведенные выше, использованы при преобразовании сх. *о* в сх. *и* и сх. *р* в сх. *с*.

В сх. *п* кривошип 1 в виде эксцентрика помещен внутрь ползуна 3, который расположен внутри ползуна 10.

В сх. *с* кулиса 8 помещена внутрь ползуна 7, который находится внутри шарнира 7—3, установленного внутри ползуна 3.

В сх. у шарнир O_1 размещен внутри шарнира O . Остальные шарниры O, E, P оставлены без изменений по сравнению со сх. m . Воспроизводящая точка M , лежащая на линии MO , размещена на звене OP также внутри шарнира O . В такой схеме добиваются само-торможения звеньев при внешнем воздействии на звено OP приложенном в т. N .

Приведенные приемы могут быть использованы по отношению к другим механизмам. Они позволяют получать механизмы с различными габаритными размерами, силовыми и энергетическими характеристиками.

Вопросы для самоконтроля

1. Назовите методы структурного синтеза механизмов.
2. В чем состоит метод наложения структурных групп?
3. В чем состоит метод инверсии?
4. Как методом наложения структурных групп получить кривошипно-ползунный или кривошипно-коромысловый механизм?
5. Как инверсией кривошипно-ползунного механизма получить кривошипно-кулисный механизм?
6. Как определить количество избыточных связей в механизме?
7. За счет чего устраняются избыточные связи?
8. В чем заключается метод конструктивного преобразования механизма?

2.6. Виды механизмов

Механизмы могут быть **плоскими и пространственными**. Они могут быть разделены также на механизмы с низшими и с высшими кинематическими парами.

Механизмы, звенья которых образуют только низшие (вращательные, поступательные, цилиндрические, сферические) кинематические пары, называются **шарнирно-рычажными**. Эти механизмы нашли широкое применение в машиностроении в следствие того, что при взаимодействии звеньев усилия в кинематических парах распределяются по поверхности. Благодаря этому удельные давления в этих парах и износ их элементов ниже. Основой для многих плоских механизмов служит шарнирный четырехзвенник.

Оси кинематических пар в этом механизме выполнены перпендикулярно к плоскостям, в которых находятся траектории точек звеньев.

Механизм предназначен для преобразования одного вида вращательного движения в другое. В зависимости от размеров звеньев шарнирный четырехзвенник (рис.2.12) может быть:

- **двухкоромысловым;**
- **кривошипно-коромысловым;**
- **двухкривошипным.**

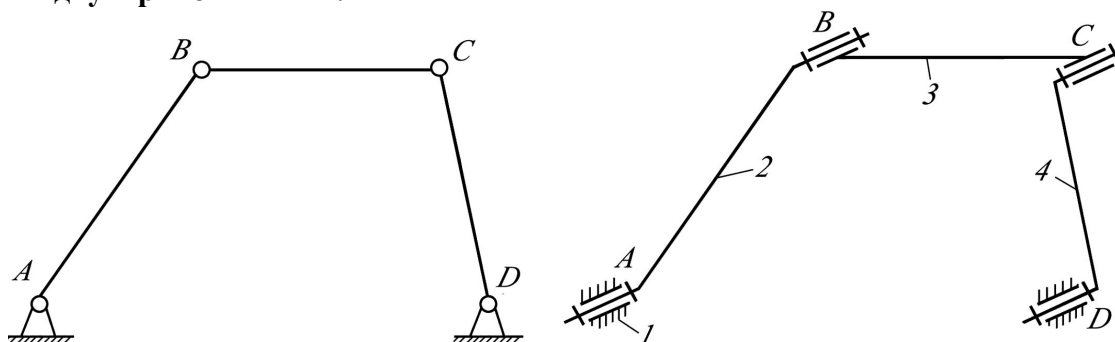


Рисунок 2.12 Механизм шарнирного четырехзвенника

Для четырехшарнирного механизма условие существования указанных механизмов сформулировано в правиле (теореме) Грасгофа:

*Если сумма длин наибольшего и наименьшего звеньев меньше суммы длин двух остальных звеньев и стойкой является наименьшее звено, то механизм – **двухкривошипный**. Если неравенство выполняется, но стойкой является звено, соединенное с наи-*

меньшим, то механизм – **кривошипно-коромысловый**. Во всех остальных случаях механизм – **двухкоромысловый**.

На базе шарнирного четырехзвенника построен **кривошипно-ползунный** механизм, служащий для преобразования вращательного движения в возвратно-поступательное или, наоборот, возвратно-поступательного во вращательное. Этот механизм основной во всех поршневых машинах (двигатели внутреннего сгорания, компрессоры, насосы и т.д.).

Для кривошипно-ползунного механизма условие существования кривошипа: длина кривошипа (l_1) должна быть меньше разности длины шатуна (l_2) и величины дезаксиала (e). Если это условие не выполняется, то механизм – **коромыслово-ползунный**.

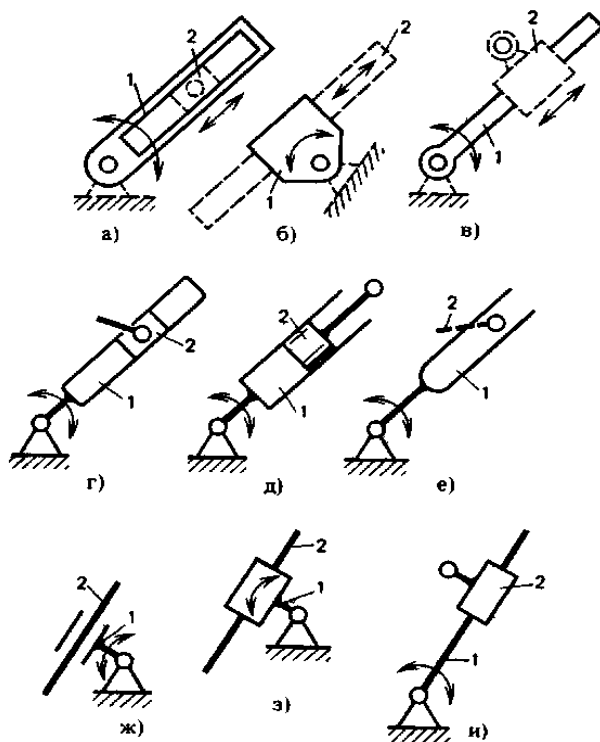


Рисунок 2.13 Примеры кривошипно-кулисного механизма

Одной из разновидностей шарнирного четырехзвенника является **кривошипно-кулисный** (или просто кулисный) механизм. Он служит для преобразования вращательного движения во вращательное или в возвратно-поступательное.

Кулиса — звено рычажного механизма, вращающееся вокруг неподвижной оси и образующее с другим подвижным звеном (кулисным камнем) поступательную пару (рис.2.13).

Кулису конструктивно выполняют в виде направляющей детали 1, охватывающей другую деталь и имеющей большую (сх. а) или малую (сх. б) длину по сравнению с длиной охватываемой детали. Кулиса может также охватываться сопряженной с ней деталью 2 (сх. в).

Соответственно конструктивным решениям используют различные обозначения кулисного механизма. (сх. г—и)

Сх. г, д, е эквивалентны сх. а, сх. ж, з эквивалентны сх. б, сх. и эквивалентна сх. в. Обозначения в схемах: 1 — кулиса; 2 — движущееся относительно нее звено.

В сх. д кулиса выполнена в виде цилиндра, а звено 2 — в виде штока с поршнем.

В сх. е звено 2 соединено с кулисой 1 двухподвижной парой.

Кулисно-ползунный механизм (рис.2.14) - рычажный четырехзвенный механизм, содержащий кулису и ползун с неподвижной направляющей.

Кулисно-ползунный механизм служит для преобразования качательного движения кулисы 1 в поступательное движение ползуна 3 или, наоборот, поступательного движения ползуна в качательное движение кулисы.

Кулиса 1 и ползун 3 взаимодействуют посредством шатуна 2, связанного с кулисой поступательной парой, а с ползуном 3 — вращательной парой.

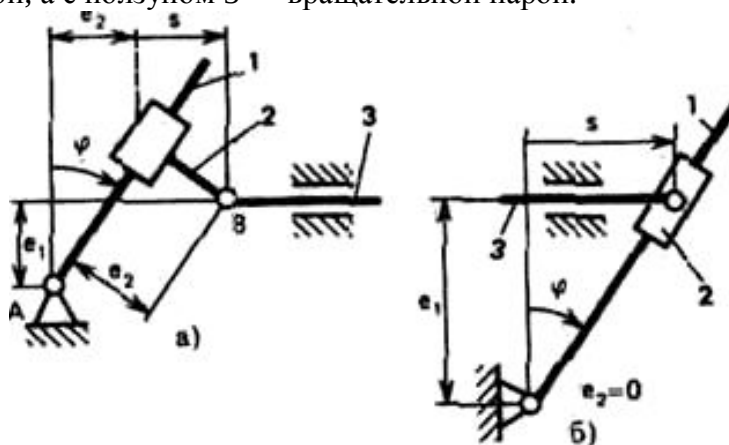


Рисунок 2.14 Примеры кулисно-ползунного механизма

Одним из примеров пространственного механизма является карданная передача или шарнир Гука (механизм универсального шарнира) (рис.2.15).

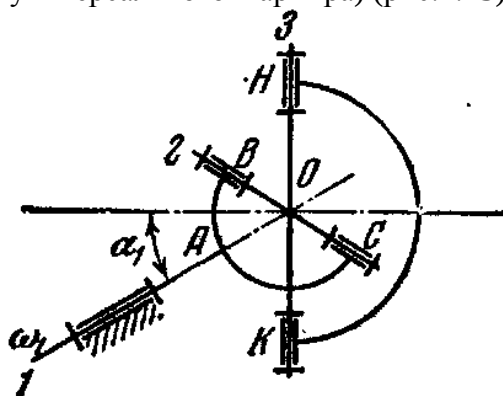


Рисунок 2.15 Карданная передача (шарнир Гука)

Широко распространенным пространственным механизмом с низшими кинематическими парами является винтовой механизм, служащий для преобразования вращательного движения в поступательное (рис.2.16).

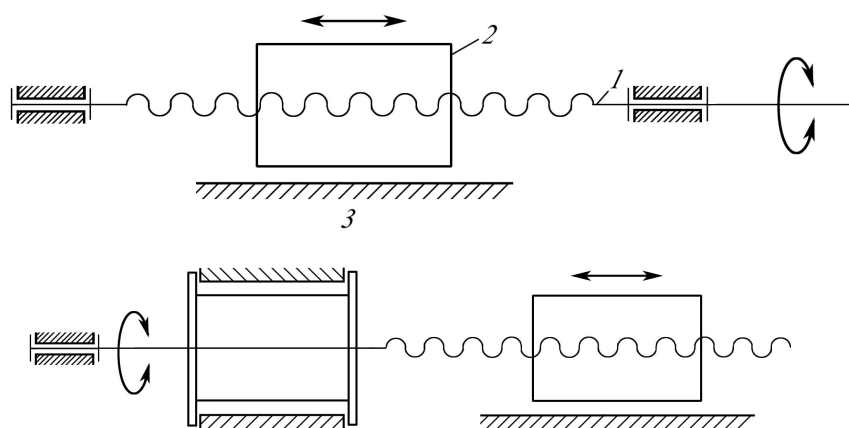


Рисунок 2.16 Винтовой механизм

К механизмам с высшими кинематическими парами относятся **зубчатые, фрикционные, кулачковые** механизмы. В этих механизмах подвижные звенья образуют со стойкой низшие кинематические пары 5 класса, а между собой – высшие кинематические пары 4 класса.

Плоскими зубчатыми механизмами являются механизмы с цилиндрическими зубчатыми колесами (например, зубчатая передача механизма опережения впрыска топлива).

К пространственным зубчатым механизмам относятся механизмы с коническими зубчатыми колесами (механизмы с винтовыми зубчатыми колесами, червячные механизмы).

Вопросы для самоконтроля

1. Какой механизм называется плоским?
2. Какой механизм называется пространственным?
3. Какой механизм называется шарнирно-рычажным?
4. В чем заключается правило Грасгофа?
5. Для чего предназначен четырехшарнирный механизм?
6. Для чего служит кривошипно-ползунный механизм?
7. Назовите условие существования кривошипа для кривошипно-ползунного механизма.
8. Какой механизм называется кривошипно-кулисным? Для чего он предназначен?
9. Какое звено механизма называется кулисой?
10. Какие механизмы относятся к механизмам с высшими кинематическими парами?

ТЕМА 3. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

3.1. Цель и методы кинематического исследования механизмов

Как известно из курса Теоретической механики, кинематика изучает законы движения тел вне зависимости от действующих на них сил.

Целью кинематического исследования плоских механизмов является:

- определение траекторий движения точек звеньев механизмов;
- определение скоростей и ускорений точек и звеньев механизмов.

Под термином "**скорость**" будем понимать:

- линейную скорость точек, а также прямолинейно перемещающихся звеньев механизма;
- угловую скорость звеньев механизма.

Под термином "**ускорение**" понимается:

- линейные (абсолютные, относительные, полные) ускорения точек звеньев механизма;
- угловые ускорения звеньев механизма.

Порядок кинематического исследования механизма определяется формулой его строения. При этом **входными следует считать те звенья, соответствующие кинематические параметры движения которых заданы** (мгновенное положение, скорость, ускорение).

Обычно в качестве входного выбирается звено, совершающее полный оборот вокруг неподвижной оси (**кривошип**) или перемещающееся поступательно (**ползун**). В большинстве кривошипных механизмов входное звено имеет постоянную угловую скорость, т.е. $\omega_1 = \text{const}$

Звено, совершающее качательное движение относительно неподвижной оси, называется **коромыслом**, а звено (не образующее кинематических пар со стойкой), совершающее плоское движение – **шатуном**.

Кинематическое исследование плоских механизмов может выполняться аналитически, графоаналитически и графически.

Аналитический метод является наиболее точным. Для его реализации необходимо составить систему дифференциальных уравнений движения звеньев механизма и решить ее. Такое решение проводится обычно на ЭВМ.

Графоаналитический и графический методы более просты, наглядны, но менее точны.

В зависимости от требований к точности результатов анализа выбирается соответствующий метод.

Вопросы для самоконтроля

1. Что является целью кинематического анализа механизма?
2. Должен ли предшествовать кинематическому анализу структурный анализ механизма?
3. Какие звенья механизма могут быть приняты входными?
4. Дайте определение звеньям механизма: кривошип, шатун, коромысло, ползун.
5. Какими методами может выполняться кинематический анализ механизма?

3.2. Кинематический анализ графоаналитическим методом

3.2.1. Определение положения звеньев и траекторий движения точек

Для задания и определения различных величин при графических построениях используют масштаб, т.е. отношение численного значения величины к длине отрезка, изображающего ее на чертеже.

Выполненная в масштабе схема взаимного расположения звеньев механизма, соответствующего заданному положению входного звена (заданной обобщенной координате механизма), называется планом механизма.

Вычертим план механизма (рис.3.1).

Пусть длина входного звена l_{O_1A} [м].

На чертеже мы изображаем входное звено отрезком O_1A .

Масштаб плана механизма $K_l = l_{O_1A} / O_1A$ [м/мм].

Длины отрезков, изображающих остальные звенья, и координаты кинематических пар, соединяющих звенья со стойкой, определяются с учетом вычисленного масштаба.

Для определения положения звеньев и траекторий движения их точек необходимо траекторию движения входного звена разделить на несколько равных частей. На одном чертеже построить планы механизма, соответствующие различным положениям входного звена, используя для этого метод засечек. Кривая, соединяющая последовательные положения одной и той же точки звена, будет траекторией движения этой точки.

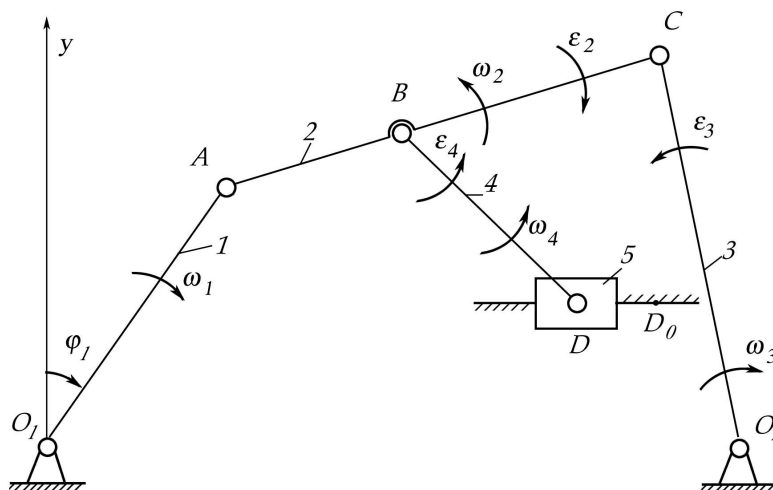


Рисунок 3.1 План механизма

3.2.2. Определение скоростей движения точек и звеньев механизмов

Поскольку заданы длина звена O_1A и его угловая скорость, можно определить скорость т. A , принадлежащей одновременно звеньям 1 и 2.

$$v_A = \omega_1 \cdot l_{O_1A},$$

$\bar{v}_A \perp O_1A$ в направлении угловой скорости.

Для определения скорости т.С, также принадлежащей звену 2, рассмотрим ее движение вместе со звеном 2.

Звено 2 совершает плоское (плоско-параллельное) движение. В теоретической механике это движение рассматривалось как состоящее из переносного поступательного движения вместе с произвольной точкой, принятой за полюс, и относительного вращательного движения вокруг полюса.

За полюс принимается точка, параметры движения которой известны.

Таким образом, движение звена 2 можно рассматривать как поступательное вместе с т.А и вращательное вокруг т.А.

Абсолютная скорость точки С:

$$\bar{v}_C = \bar{v}_A + \bar{v}_{CA} \\ \perp AC$$

В этом уравнении $\bar{v}_A$ известен по величине и направлению, $\bar{v}_{CA}$ - только по направлению ($\perp AC$). Следовательно, в этом векторном уравнении 3 неизвестных и его решить нельзя.

Рассмотрим дополнительно движение т. С со звеном 3. Вместе со звеном 3 т. С совершает движение вокруг т.О₂. По аналогии можно записать

$$\bar{v}_C = \bar{v}_{O_2} + \bar{v}_{CO_2} \\ = 0 \perp O_2C$$

В полученной системе уравнений четыре неизвестных. Решаем эту система графически путем построения плана скоростей (рис.3.2, а).

Выбираем произвольную точку p за полюс плана скоростей.

Через p проводим линию $\perp O_1A$ и на ней откладываем произвольный отрезок pa , изображающий $\bar{v}_A$. Определяем масштаб плана скоростей

$$k_v = \frac{v_A}{pa} \left[\frac{м}{с \cdot мм} \right]$$

Через т. a проводим линию $\perp AC$ (линия направления $\bar{v}_{CA}$), а через полюс p - линию $\perp O_2C$ (линия направления v_{CO_2}). На пересечении этих линий получим т.с, определяющую концы векторов скоростей $\bar{v}_C$ и $\bar{v}_{CA}$.

Эти скорости равны

$$\overrightarrow{pc} \cdot k_v = \overrightarrow{v}_C, \quad \overrightarrow{ac} \cdot k_v = \overrightarrow{v}_{CA}$$

Поскольку вектор pc является суммой векторов pa и ac , то обе стрелки направлены к т. с.

Прежде чем перейти к следующей группе Ассура, отметим **свойства планов скоростей**:

1. Векторы, проходящие через полюс p , изображают величины векторов абсолютных скоростей точек, обозначения которых указаны у стрелок векторов. Эти векторы всегда направлены от полюса.

2. Векторы относительных скоростей точек одного звена всегда соединяют концы векторов абсолютных скоростей этих точек.

3. Прямые линии, соединяющие концы векторов абсолютных скоростей точек одного звена, образуют на плане скоростей фигуру, подобную фигуре звена на плане механизма, но повернутую на угол $\pi/2$ в направлении угловой скорости звена. Это свойство называется свойством подобия.

Воспользуемся 3-й свойством для определения скорости т. В, принадлежащей 2-му и 4-му звеньям.

Согласно свойству подобия

$$(ac/AC = ab/AB); \quad ab = \frac{ac \cdot AB}{AC}$$

Откладываем отрезок ab на ac , т. b соединяем с полюсом:

$$\overrightarrow{pb} \cdot k_v = \overrightarrow{v_B}$$

Для нахождения скорости т. D рассматриваем ее движение вместе со звеньями 4 и 5.

Звено 4 совершает плоское движение, которое можно рассматривать как поступательное вместе с т. B и вращательное вокруг т. B , т.е.

$$\overrightarrow{v_D} = \overrightarrow{v_B} + \overrightarrow{v_{DB}}$$

Вместе со звеном 5 т. D совершает поступательное движение вдоль направляющей,

$$\text{т.е. } \overrightarrow{v_D} = \overrightarrow{v_{D0}} + \overrightarrow{v_{DD0}}$$

(т. D_0 принадлежит направляющей и $v_{D0} = 0$)

Уравнения решаем графически, продолжая строить план скоростей.

$$\overrightarrow{pd} \cdot k_v = \overrightarrow{v_{D0}} = \overrightarrow{v_{DD0}}; \quad \overrightarrow{bd} \cdot k_v = \overrightarrow{v_{DB}}$$

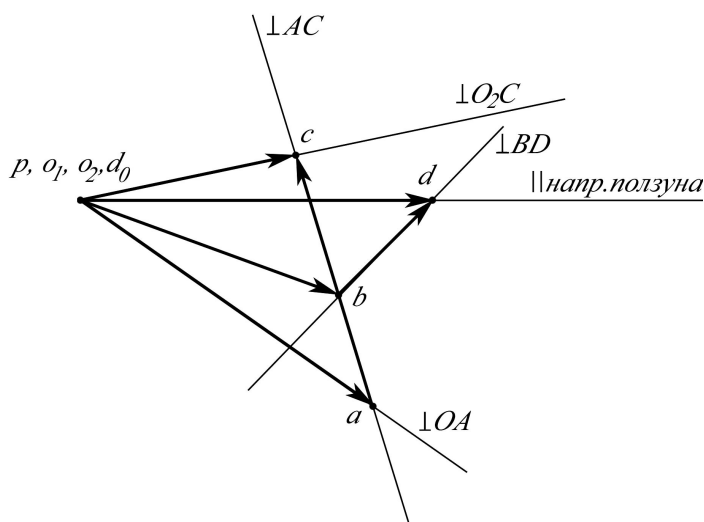
Определяем угловые скорости звеньев.

$$\omega_2 = \frac{v_{CA}}{l_{CA}}; \quad \omega_3 = \frac{v_C}{l_{CO2}}; \quad \omega_4 = \frac{v_{DB}}{l_{BD}}; \quad \omega_5 = 0$$

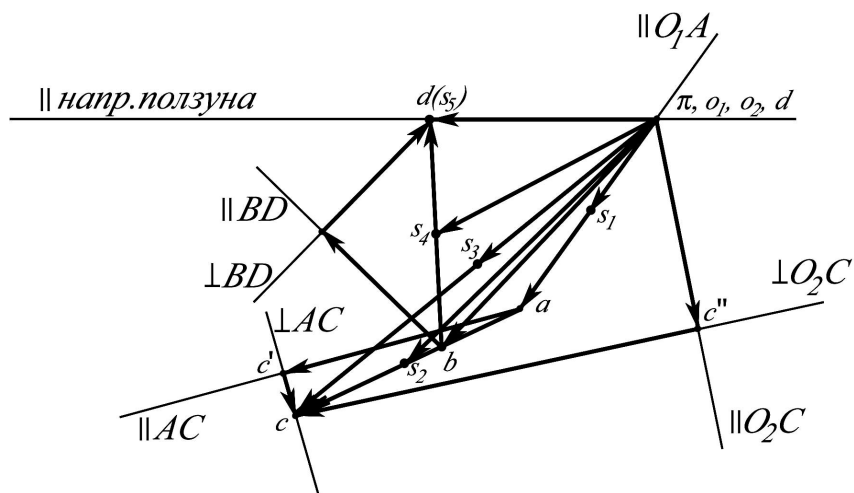
Для определения направления угловой скорости необходимо вектор относительной скорости точек одного звена мысленно перенести с плана скоростей в соответствующую точку плана механизма. Угловая скорость будет направлена по направлению вектора относительной скорости.

ω_2, ω_4 - направлены против часовой стрелки,

ω_3 , - по часовой стрелке.



а)



б)

Рисунок 3.2 План скоростей механизма (а) и план ускорений механизма (б)

3.2.3. Определение ускорений движения точек и звеньев механизмов

Полное ускорение точки A входного звена 1, которая движется по окружности радиуса l_{O1A} вокруг неподвижной т. O_1 , определяется векторным уравнением:

$$\vec{a} = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau$$

Нормальное (центростремительное) ускорение

$$a_A^n = \omega_1^2 \cdot l_{O1A} = \frac{v_A^2}{l_{O1A}}$$

и направлено от т. A к центру вращения.

Тангенциальное (касательное) ускорение $a_A^\tau = \varepsilon_1 \cdot l_{O1A}$ направлено $\perp O_1A$ в сторону углового ускорения ε_1 .

Т.к. $\omega_1 = \text{const}$, то $\varepsilon_1 = 0$, следовательно и $a_A^\tau = 0$. Тогда $a_A = a_A^n$.

Для определения ускорения т. C рассматриваем ее движение относительно точек A и O_2 . Составляем два векторных уравнения:

$$\begin{cases} \vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}_{CA}^n + \vec{a}_{CA}^\tau \\ \vec{a}_C = \vec{a}_{O2} + \vec{a}_{CO2}^n + \vec{a}_{CO2}^\tau \end{cases}$$

$$a_{O2} = 0, \quad a_{CA}^n = \omega_2^2 \cdot l_{AC}, \quad a_{CO2}^n = \omega_3^2 \cdot l_{CO2}$$

Вектор a_{CA}^n направлен вдоль звена AC к точке A , вектор a_{CO2}^τ направлен вдоль звена CO_2 к точке O_2 .

Полученную систему векторных уравнений решаем графически путем построения плана ускорений (рис.3.2, б).

Построение плана ускорений:

Из произвольной точки π (полюс плана ускорений) откладываем a_A^n в виде отрезка $\pi a \parallel O_1A$ и определяем масштаб плана ускорений

$$k_a = \frac{a_A^n}{\pi a} \quad \left[\frac{м}{с^2 мм} \right]$$

От т. a откладываем вектор $a_{CA} \parallel AC$ в направлении от т. C к т. A .

$$ac' = a_{CA}^n / k_a$$

Через полученную точку c' проводим линию по направлению $a_{CA}^\tau (\perp AC)$. Из π откладываем вектор $a_{CO2}^n (\perp CO_2)$, направленный от C к O_2 .

$$ac'' = a_{CO2}^n / k_a$$

Через точку c'' проводим линию направления $a_{CO2}^\tau (\perp O_2C)$. Пересечение линий $\perp AC$ и $\perp O_2C$ дает точку c . Соединив ее с полюсом π , получим

$$\vec{\pi c} \cdot k_a = \vec{a}_C$$

Соединив т. a с т. c , получаем

$$\vec{ac} \cdot k_a = a_{CA}; \quad \vec{cc'} \cdot k_a = a_{CA}^\tau; \quad \vec{cc''} \cdot k_a = a_{CO2}^\tau.$$

Угловые ускорения звеньев определяются по формулам:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{CA}^\tau}{l_{CA}}; \quad \varepsilon_3 = \frac{a_{CO2}^\tau}{l_{CO2}}.$$

Направление угловых ускорений определяется путем переноса тангенциальных ускорений с плана ускорений на схему механизма.

В данном случае угловое ускорение звена 3 направлено против часовой стрелки, а звена 2 - по часовой стрелке.

Основные свойства плана ускорений:

1. Векторы абсолютных ускорений точек механизма всегда направлены от полюса.

2. Векторы полных относительных ускорений точек одного звена соединяют концы векторов абсолютных ускорений этих точек.

3. Прямые линии, соединяющие концы векторов абсолютных ускорений точек одного звена, образуют на плане ускорений фигуру, подобную фигуре звена на схеме механизма, но повернутую на угол $(180^\circ - \beta)$ в направлении углового ускорения звена. (свойство подобия).

Угол β измеряется между вектором полного ускорения точки звена и нормальной составляющей этого ускорения

$$\beta = \arctg\left(\frac{\varepsilon}{\omega^2}\right).$$

Используя свойство подобия плана ускорений, определяем ускорение т.В.

Составим пропорцию $ac/AC=ab/AB$, откуда $ab=(ac \cdot AB)/AC$. Отложим отрезок ab на ac . Соединим т. b с полюсом π . Получим: $\pi b \cdot k_a = a_B$.

Для нахождения ускорения т. D рассмотрим ее движение вместе со звеном 4 (шатун) и звеном 5 (ползун). Составим векторные уравнения:

$$\begin{cases} \vec{a}_D = \vec{a}_B + \vec{a}_{DB}^n + \vec{a}_{DB}^\tau \\ \vec{a}_D = \vec{a}_{D0} + \vec{a}_{DD0} \end{cases}$$

Вектор a_B известен по величине и направлению.

$a_{DB}^n = \omega_4^2 \cdot l_{BD}$, этот вектор направлен вдоль звена BD к т. B .

Вектор a_{DB}^τ направлен перпендикулярно звену BD .

Так как т. D_0 принадлежит направляющей, то $a_{D0} = 0$.

Вектор a_{DD0} направлен параллельно направляющей ползуна.

Систему векторных уравнений решаем графически продолжая построение плана ускорений.

Через т. b плана ускорений проводим линию, параллельную BD , и на ней откладываем отрезок $bd^1 = a_{DB}^n / k_a$, изображающий на плане ускорений a_{DB}^n . Через т. d^1 проводим линию, перпендикулярную BD (линия направления a_{DB}^τ). Через полюс плана ускорений π проводим линию, параллельную направляющей ползуна (по ней направлен вектор a_{DD0}^τ). Пересечение этих линий определяет положение т. d . Соединяем т. d с полюсом π .

$$\pi d \cdot k_a = a_D; \quad d^1 d \cdot k_a = a_{DB}^\tau.$$

Соединив точки d и b , найдем полное относительное ускорение т. D относительно B .

$$a_{DB} = db \cdot k_a$$

Угловое ускорение звена 4 $\varepsilon_4 = a_{DB}^\tau / l_{BD}$ направлено против часовой стрелки.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется планом механизма?
2. Как определяется масштаб графических построений при графоаналитическом методе кинематического анализа?
3. Как построить графически траектории движения точки кривошипа, коромысла, шатуна, ползуна?
4. Что понимается под термином «скорость»?
5. Что понимается под термином «ускорение»?
6. Как определить скорости точек звеньев механизма графоаналитическим методом?
7. Как найти величину и направление угловых скоростей звеньев механизма?
8. Как направлены нормальные и тангенциальные ускорения точек звеньев механизма?
9. Как определить полные относительные и абсолютные ускорения точек звеньев механизма?
10. Как определить величину и направление угловых ускорений звеньев механизма?
11. Назовите свойства планов скоростей.

12. Какое свойство планов скоростей называется «свойством подобия»? Для чего оно используется?

13. Назовите свойства планов ускорений.

14. Как найти величину и направление ускорений центров масс звеньев?

3.3. Аналитический метод кинематического анализа рычажных механизмов

Аналитический метод кинематического анализа рассмотрим на примерах анализа кривошипно-ползунного и кривошипно-коромыслового механизмов.

3.3.1. Кинематический анализ кривошипно-ползунного механизма

Мгновенное положение звена 2 определяется углом γ . Для его определения спроектируем звенья 1 и 2 на ось y (рис. 3.3).

$$r \sin \varphi + e = l \sin(90^\circ - \gamma); \quad \varphi = \omega_1 t;$$

$$\text{откуда } \gamma = \arccos[(r \sin \omega_1 t + e)/l].$$

Угловая скорость шатуна в его относительном вращательном движении

$$\omega_2 = d\gamma/dt.$$

Угловое ускорение шатуна

$$\varepsilon_2 = d\omega_2/dt = d^2\gamma/dt^2.$$

Скорость ползуна

$$\bar{V}_C = \bar{V}_B + \bar{V}_{CB},$$

где $V_B = r \cdot \omega_1$ - скорость точки B ;

$V_{CB} = l \cdot \omega_2$ - скорость движения точки C относительно точки B .

Найдем проекции этих скоростей на координатные оси:

$$V_{CX} = V_{BX} + V_{CBX} = -V_B \sin \varphi + V_{CB} \cos \gamma;$$

$$V_{CY} = V_{BY} + V_{CBY} = V_B \cos \varphi + V_{CB} \sin \gamma.$$

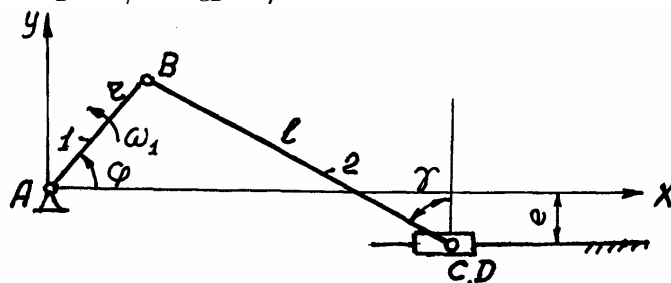


Рисунок 3.3 Мгновенное положение кривошипно-ползунного механизма

Т.к. ползун перемещается вдоль направляющей, параллельной оси X , то $V_C = V_{CX}$, а $V_{CY} = 0$.

Ускорение точки C

$$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB}^n + \bar{a}_{CB}^\tau,$$

где $a_B = \omega_1^2 r$ - ускорение точки B ;

$a_{CB}^n = \omega_2^2 l$ - нормальная составляющая ускорения т. C в движении относительно точки B ;

$a_{CB}^\tau = \varepsilon_2 l$ - тангенциальная составляющая ускорения т. C в движении относительно точки B .

$$a_{Bx} = -a_B \cos \varphi; \quad a_{CBx}^n = -a_{CB}^n \sin \gamma;$$

$$a_{By} = -a_B \sin \varphi; \quad a_{CBx}^\tau = a_{CB}^\tau \cos \gamma;$$

$$a_c = a_{cx} = -a_B \cos \varphi - a_{CB}^n \sin \gamma + a_{CB}^\tau \cos \gamma.$$

Ускорения центров масс звеньев и их проекции на координатные оси:

$$a_{S_1} = \omega_1^2 r / 2;$$

$$a_{S_{1x}} = -a_{S_1} \cos \varphi;$$

$$a_{S_{1y}} = -a_{S_1} \sin \varphi;$$

$$\overline{a_{S_2}} = \overline{a_B} + \overline{a_{S_2B}^n} + \overline{a_{S_2B}^\tau};$$

$$a_{S_2B}^n = \omega_2^2 \ell / 2;$$

$$a_{S_2B}^\tau = \varepsilon_2 \ell / 2;$$

$$a_{S_2B_x}^n = -a_{S_2B}^n \sin \gamma;$$

$$a_{S_2B_y}^n = a_{S_2B}^n \cos \gamma;$$

$$a_{S_2B_x}^\tau = a_{S_2B}^\tau \cos \gamma;$$

$$a_{S_2B_y}^\tau = a_{S_2B}^\tau \sin \gamma;$$

$$a_{S_{2x}} = a_{Bx} - a_{S_2B_x}^n + a_{S_2B_x}^\tau;$$

$$a_{S_{2y}} = a_{By} + a_{S_2B_y}^n + a_{S_2B_y}^\tau;$$

$$a_{S_3} = a_c.$$

3.3.2. Кинематический анализ кривошипно-коромыслового механизма

Для аналитического определения угловых скоростей звеньев необходимо найти аналитическую связь углов β и δ с углом поворота входного звена φ . Для этого соединим точки B и D и обозначим $\angle BDA = \gamma$, $\angle BDC = \nu$, $\angle BCD = \alpha$ (рис.3.4).

Из $\triangle ABD$ по теореме косинусов:

$$BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos \varphi;$$

$$BD = \sqrt{L^2 + r^2 - 2 \cdot L \cdot r \cdot \cos \varphi}.$$

Из этого же треугольника по теореме синусов:

$$\frac{r}{\sin \gamma} = \frac{BD}{\sin \varphi}, \quad \sin \gamma = \frac{r \sin \varphi}{BD},$$

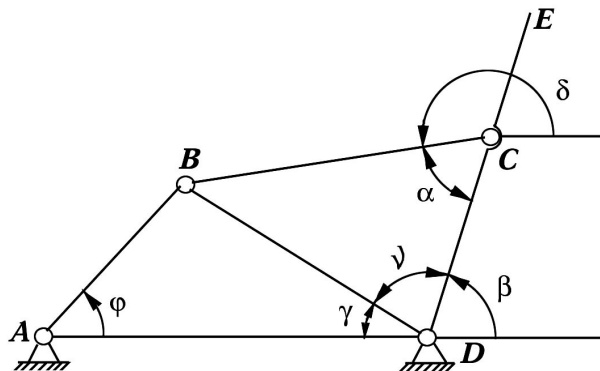


Рисунок 3.4 Мгновенное положение кривошипно-коромыслового механизма

$$\gamma = \arcsin \frac{r \sin \varphi}{\sqrt{L^2 + r^2 - 2Lr \cos \varphi}}. \quad (3.1)$$

Из $\triangle BCD$ по теореме косинусов:

$$BC^2 = BD^2 + CD^2 + 2BD \cdot CD \cos \nu$$

$$\cos \nu = \frac{R^2 + L^2 + r^2 - 2Lr \cos \varphi - l^2}{2R\sqrt{L^2 + r^2 - 2Lr \cos \varphi}},$$

$$\nu = \arccos \frac{R^2 + L^2 + r^2 - 2Lr \cos \varphi - l^2}{2R\sqrt{L^2 + r^2 - 2Lr \cos \varphi}}. \quad (3.2)$$

$$\text{Из рис.3.4 видно, что } \beta = 180^\circ - (\gamma + \nu). \quad (3.3)$$

Подставив формулы (3.1) и (3.2) в выражение (3.3), получим:

$$\beta = 180^\circ - \arcsin \frac{r \sin \varphi}{L^2 + r^2 - 2Lr \cos \varphi} - \arccos \frac{R^2 + L^2 + r^2 - l^2 - 2Lr \cos \varphi}{2R\sqrt{L^2 + r^2 - 2Lr \cos \varphi}}. \quad (3.4)$$

Из рис. 3.4 имеем:

$$\delta = 180^\circ + \beta - \alpha. \quad (3.5)$$

Из $\triangle BCD$ по теореме синусов:

$$\begin{aligned} \frac{l}{\sin \nu} &= \frac{BD}{\sin \alpha}, \\ \sin \alpha &= \frac{BD \sin \nu}{l} = \frac{L^2 + r^2 - 2Lr \cos \varphi}{l} \sin \nu, \\ \alpha &= \arcsin \left[\frac{L^2 + r^2 - 2Lr \cos \varphi}{l} \sin \left(\arccos \frac{R^2 + L^2 + r^2 - l^2 - 2Lr \cos \varphi}{\sqrt{L^2 + r^2 - 2Lr \cos \varphi}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Подставляя формулы (3.4) и (3.6) в выражение (3.5), получим:

$$\begin{aligned} \delta &= 360^\circ - \arcsin \frac{r \sin \varphi}{\sqrt{L^2 + r^2 - 2Lr \cos \varphi}} - \arccos \frac{R^2 + L^2 + r^2 - l^2 - 2Lr \cos \varphi}{\sqrt{L^2 + r^2 - 2Lr \cos \varphi}} - \\ &- \arcsin \left[\frac{\sqrt{L^2 + r^2 - 2Lr \cos \varphi}}{l} \sin \left(\arccos \frac{R^2 + L^2 + r^2 - l^2 - 2Lr \cos \varphi}{\sqrt{L^2 + r^2 - 2Lr \cos \varphi}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Определяем угловые скорости и угловые ускорения звеньев 2 и 3, учитывая, что $\varphi = \omega_1 t$, где $t = \frac{2\pi}{\omega_1}$ время одного оборота кривошипа.

Тогда

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \frac{d\delta}{dt}; & \varepsilon_2 &= \frac{d^2\delta}{dt^2}; \\ \omega_3 &= \frac{d\beta}{dt}; & \varepsilon_3 &= \frac{d^2\beta}{dt^2}. \end{aligned}$$

Учитывая сложность функций $\delta(\varphi)$ и $\beta(\varphi)$, для нахождения ω и ε необходимо применять методы численного дифференцирования, приняв шаг дифференцирования

$$\Delta t = \frac{t}{n}.$$

Линейные скорости точек и их проекции на оси координат:

$$v_B = \omega_1 r; \quad v_C = \omega_3 R; \quad v_E = \omega_3 (R + a);$$

$$v_{C_x} = -v_C \sin \beta; \quad v_{C_y} = v_C \cos \beta;$$

$$v_{B_x} = -v_B \sin \varphi; \quad v_{B_y} = v_B \cos \varphi;$$

$$v_{E_x} = -v_E \sin \beta; \quad v_{E_y} = v_E \cos \beta.$$

Скорости центров масс звеньев:

$$v_{S_1} = \omega_1 \frac{r}{2}; \quad v_{S_1x} = -v_{S_1} \sin \varphi; \quad v_{S_1y} = v_{S_1} \cos \varphi;$$

$$v_{S_2x} = v_{B_x} + \omega_2 \frac{l}{2} \sin(\delta - 180^\circ);$$

$$v_{S_2y} = v_{B_y} + \omega_2 \frac{l}{2} \cos(\delta - 180^\circ);$$

$$v_{S_3x} = -\omega_3 \frac{(R+a)}{2} \sin \beta;$$

$$v_{S_3y} = \omega_3 \frac{(R+a)}{2} \cos \beta.$$

Линейные ускорения точек и их проекции на оси координат:

$$a_B = \omega_1^2 r; \quad \bar{a}_C = \bar{a}_{CD}^n + \bar{a}_{CD}^\tau; \quad a_{CD}^n = \omega_3^2 R; \quad a_{CD}^\tau = \varepsilon_3 R;$$

$$a_{B_x} = -a_B \cos \varphi; \quad a_{B_y} = -a_B \sin \varphi;$$

$$a_{CD_x}^n = -a_{CD}^n \cos \beta; \quad a_{CD_y}^n = -a_{CD}^n \sin \beta;$$

$$a_{CD_x}^\tau = -a_{CD}^\tau \sin \beta; \quad a_{CD_y}^\tau = a_{CD}^\tau \cos \beta;$$

$$a_{C_x} = a_{CD_x}^n + a_{CD_x}^\tau; \quad a_{C_y} = a_{CD_y}^n + a_{CD_y}^\tau.$$

Ускорения центров масс звеньев и их проекции на координатные оси:

$$a_{S_1} = \omega_1^2 \frac{r}{2}; \quad a_{S_{1x}} = -a_{S_1} \cos \varphi; \quad a_{S_{1y}} = -a_{S_1} \sin \varphi;$$

$$\bar{a}_{S_2} = \bar{a}_{S_2B}^n + \bar{a}_{S_2B}^\tau + \bar{a}_B;$$

$$a_{S_2B}^n = \omega_2^2 \frac{l}{2}; \quad a_{S_2B_x}^n = -a_{S_2B}^n \cos(\delta - 180^\circ); \quad a_{S_2B_y}^n = -a_{S_2B}^n \sin(\delta - 180^\circ);$$

$$a_{S_2B}^\tau = \varepsilon_2 \frac{l}{2}; \quad a_{S_2B_x}^\tau = a_{S_2B}^\tau \sin(\delta - 180^\circ); \quad a_{S_2B_y}^\tau = a_{S_2B}^\tau \cos(\delta - 180^\circ);$$

$$a_{S_{2x}} = a_{S_2B_x}^n + a_{S_2B_x}^\tau + a_{B_x}; \quad a_{S_{2y}} = a_{S_2B_y}^n + a_{S_2B_y}^\tau + a_{B_y};$$

$$\bar{a}_{S_3} = \bar{a}_{S_3D}^n + \bar{a}_{S_3D}^\tau;$$

$$a_{S_3D}^n = \omega_3^2 \frac{(R+a)}{2}; \quad a_{S_3D}^\tau = \varepsilon_3 \frac{(R+a)}{2};$$

$$a_{S_3B_x}^n = -a_{S_3B}^n \cos \beta; \quad a_{S_3B_y}^n = -a_{S_3B}^n \sin \beta;$$

$$a_{S_3B_x}^\tau = a_{S_3B}^\tau \sin \beta; \quad a_{S_3B_y}^\tau = a_{S_3B}^\tau \cos \beta;$$

$$a_{S_3B_x} = a_{S_3B_x}^n + a_{S_3B_x}^\tau; \quad a_{S_3B_y} = a_{S_3B_y}^n + a_{S_3B_y}^\tau.$$

Для реализации изложенных выше алгоритмов кинематического анализа кривошипно-ползунного и кривошипно-коромыслового механизмов разработаны программы расчетов на ЭВМ. Программы позволяют произвести расчет кинематических параметров движения звеньев для n положений входного звена.

Вопросы для самоконтроля

1. В чем заключается аналитический метод кинематического анализа?
2. Как определить угловые скорости звеньев аналитическим методом?
3. Как определить угловые ускорения звеньев аналитическим методом?
4. Как определяются скорости движения точек звеньев механизма?
5. Как определяются ускорения движения точек звеньев механизма?

ТЕМА 4. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ

Для определения размеров звеньев проектируемого механизма обычно задают: в качестве **параметра технологического процесса**:

- перемещение выходного звена (ход ползуна S_n или угол размаха коромысла);
- положения кривошипа ($\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$) и соответствующие им положения выходного звена ($\beta_1, \beta_2, \beta_3$);

в качестве эксплуатационных параметров:

- коэффициент возрастания средней скорости обратного (холостого) хода выходного звена σ ;

- коэффициент пика скорости выходного звена ν ;

- угол поворота кривошипа за рабочий ход выходного звена φ_p .

Задаются также безразмерные коэффициенты: отношение длины шатуна l к длине кривошипа r ($\lambda = l/r$) или величины дезаксиала e к длине кривошипа $\chi = e/r$.

Рассмотрим методику синтеза механизмов по этим параметрам.

4.1. Синтез кривошипно-ползунного механизма по ходу ползуна и коэффициенту возрастания средней скорости обратного хода ползуна

Из рис.4.1 видно, что $\varphi_x + \varphi_p = 360^\circ$, $\varphi_p - \varphi_x = \theta$,

где φ_x - угол поворота кривошипа при обратном (холостом) ходе ползуна;

φ_p - угол поворота кривошипа при прямом (рабочем) ходе ползуна;

θ - угол перекрытия.

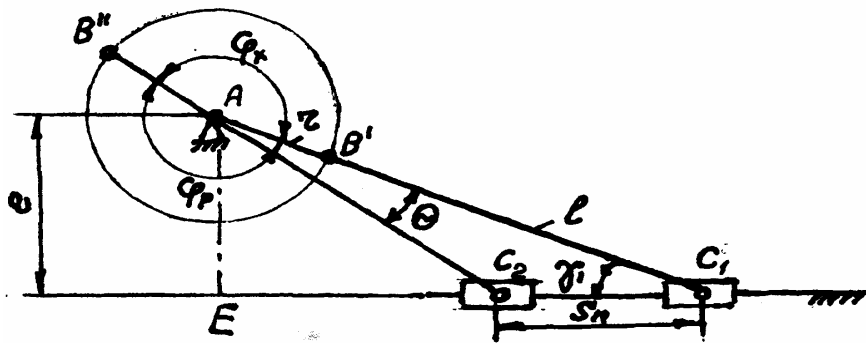


Рисунок 4.1 Синтез кривошипно-ползунного механизма по ходу ползуна

Коэффициентом возрастания средней скорости обратного хода σ называют отношение средней скорости обратного хода ползуна V_x^* к средней скорости V_p^* прямого хода $\sigma = V_x^* / V_p^*$.

Так как кривошип вращается с постоянной угловой скоростью, то

$$\sigma = V_x^* / V_p^* = \varphi_p / \varphi_x.$$

Принимая во внимание, что $\varphi_p = 180^\circ + \theta$; $\varphi_x = 180^\circ - \theta$,

получим $\sigma = (180^\circ + \theta) / (180^\circ - \theta)$,

откуда $\theta = 180^\circ (\sigma - 1) / (\sigma + 1)$.

Из $\triangle AC_1C_2$ по теореме косинусов $S_n^2 = (\ell + r)^2 + (\ell - r)^2 - 2(\ell + r)(\ell - r) \cos \theta$.

Обозначим $\lambda = \ell / r$,

Тогда $S_n^2 = 2\ell^2 [1 + \lambda^2 - (1 - \lambda^2) \cos \theta]$

Длина шатуна $\ell = S_n / \sqrt{2[1 + \lambda^2 - (1 - \lambda^2) \cos \theta]}$.

Длина кривошипа $r = \ell / \lambda$.

Из $\triangle AEC_1$ дезаксиал $e = (r + \ell) \sin \gamma_1$.

Из $\triangle AC_1C_2$ $\sin \gamma_1 = [(\ell - r) \sin \theta] / S_n$.

Тогда дезаксиал $e = (r + \ell) [(\ell - r) \sin \theta] / S_n$.

Условие существования кривошипа $r \leq (l - e)$.

4.2. Синтез центрального кривошипно-ползунного механизма по ходу ползуна и коэффициенту пика скорости ползуна

Безразмерным коэффициентом пика скорости ν называют отношение максимальной скорости ползуна $V_{c \max}$ к его средней скорости V_c^* :

$$\nu = V_{c \max} / V_c^*.$$

Максимальное значение скорости ползуна C будет в положении механизма, когда кривошип и шатун составляют угол 90° (рис.4.2, а)

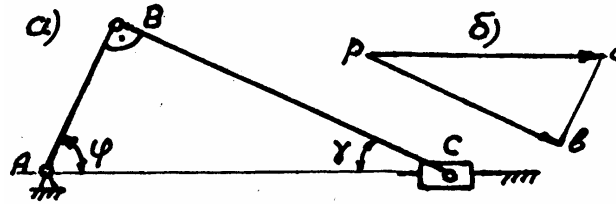


Рисунок 4.2 Мгновенное положение кривошипно-ползунного механизма (а) и план скоростей (б)

На рис 4.2, б показан план скоростей, соответствующий данному положению кривошипа. На основании свойства подобия плана скоростей можно записать отношение

$$\frac{V_{C \max}}{V_B} = \frac{pc}{pb} = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{BC^2 + AB^2}}{BC} = \frac{\sqrt{\ell^2 + r^2}}{\ell};$$

т.к. $\lambda = \ell / r$, получим

$$\frac{V_{C \max}}{V_B} = \sqrt{1 + \lambda^{-2}}.$$

Для центрального кривошипно-ползунного механизма ход ползуна равен двум длинам кривошипа

$$S_n = 2r, \text{ т.е. } r = S_n / 2.$$

Скорость точки B

$$V_B = r \omega_1 = S_n \omega_1 / 2.$$

Средняя скорость ползуна

$$V_c^* = 2S_n / T = S_n \omega_1 / \pi, \quad (4.1)$$

где $T = 2\pi / \omega_1$ - время одного оборота кривошипа (одного двойного хода ползуна).

Выразим максимальную скорость ползуна через среднюю скорость и коэффициент пика скорости

$$V_{C \max} = v V_c^* = v S_n \omega_1 / \pi. \quad (4.2)$$

Сопоставляя (4.1.) и (4.2), получим:

$$(S_n \omega_1 \sqrt{1 - \lambda^{-2}}) / 2 = v S_n \omega_1 / \pi.$$

После преобразований получим:

$$\lambda = l / r = \pi / \sqrt{4v^2 - \pi^2};$$

$$l = \pi r \sqrt{4v^2 - \pi^2} \quad (\text{при условии, что } v \geq \pi / 2).$$

4.3. Синтез кривошипно-ползунного механизма по ходу ползуна, коэффициенту пика скорости и углу поворота кривошипа за рабочий ход ползуна

Т.к. $\sin \varphi = pb / pc = V_B / V_{C \max}$, то

$$(V_{C \max} / V_B)^2 \lambda^2 - (V_{C \max} / V_B)^2 [V_B / V_{C \max}]^2 + x^2 = \lambda^2.$$

Находим квадратное уравнение

$$(V_{C \max} / V_B)^2 (\lambda^2 - x^2) - 2x(V_{C \max} / V_B) - (1 + \lambda^2) = 0. \quad (4.3)$$

Решением уравнения (4.3) будет

$$V_{C \max} / V_B = [x \pm \sqrt{x^2 + (\lambda^2 - x^2)(1 + \lambda^2)}] / (\lambda^2 - x^2).$$

После преобразования получим:

$$V_{C \max} / V_B = (x \pm \lambda \sqrt{\lambda^2 + 1 - x^2}) / (\lambda^2 - x^2);$$

$$V_{C \max} = V_B (x \pm \lambda \sqrt{\lambda^2 + 1 - x^2}) / (\lambda^2 - x^2). \quad (4.4)$$

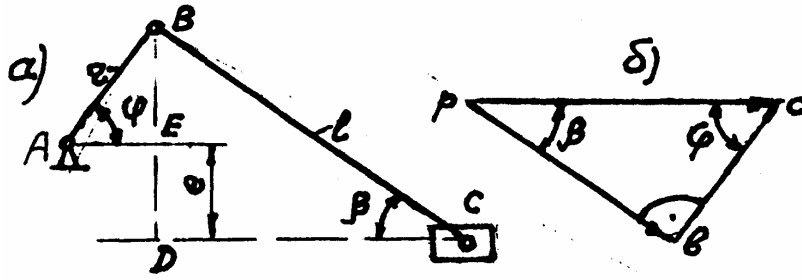


Рисунок 4.3 Мгновенное положение кривошипно-ползунного механизма (а) и план скоростей (б)

Скорость точки B

$$V_B = \omega_1 r. \quad (4.5)$$

Средняя скорость рабочего хода ползуна

$$V_c^* = S_n / t_p = S_n \omega_1 / \varphi_p,$$

где φ_p - угол поворота кривошипа за рабочий ход ползуна.

Как указывалось выше, максимальное значение скорости ползуна C будет в положении, когда кривошип и шатун образуют угол 90° (рис. 4.3, а). На рис 4.3, б показан соответствующий этому положению план скоростей. На основании свойства подобия плана скоростей

$$pc / pv = BC / DC = BC / \sqrt{BC^2 - BD^2};$$

т.к. $BD = BE + ED = r \sin \varphi + e$, то

$$pc / pv = V_{c \max} / V_B = l / \sqrt{l^2 - (r \sin \varphi + e)^2}.$$

Обозначая $l/r = \lambda$, $e/r = x$ и произведя преобразования, получим:

$$V_{c \max} / V_B = \lambda / \sqrt{\lambda^2 - (\sin \varphi + x)^2}. \quad (4.6)$$

Возведя обе части (4.6) в квадрат и произведя преобразования, получим

$$(V_{c \max} / V_B)^2 = \lambda^2 / [\lambda^2 - (\sin \varphi + x)^2].$$

Безразмерный коэффициент пика скорости

$$v = V_{c \max} / V_c^*.$$

Тогда

$$V_{c \max} = v V_c^* = v S_n \omega_1 / \varphi_p. \quad (4.7)$$

Сопоставляя (4.4) и (4.7) с учетом (4.5), получим

$$r \omega_1 (x \pm \lambda \sqrt{\lambda^2 + 1 - x^2}) / (\lambda^2 - x^2) = v S_n \omega_1 / \varphi_p.$$

Откуда:

длина кривошипа

$$r = v S_n (\lambda^2 - x^2) / \varphi_p (x \pm \lambda \sqrt{\lambda^2 + 1 - x^2});$$

длина шатуна $l = r \cdot \lambda$;

дезаксиал $e = r \cdot x$.

Условие существования кривошипа $r \leq (l - e)$.

4.4. Синтез кривошипно-коромыслового механизма по заданным положениям кривошипа и соответствующим им положениям коромысла

Запишем уравнения проекций контура механизма $ABCD$ на горизонтальную и вертикальную оси для произвольного положения входного звена механизма (рис.4.4):

$$\begin{aligned} r \cos \varphi + l \cos \delta - R \cos \beta &= L; \\ r \sin \varphi + l \sin \delta &= R \sin \beta. \end{aligned} \quad (4.8)$$

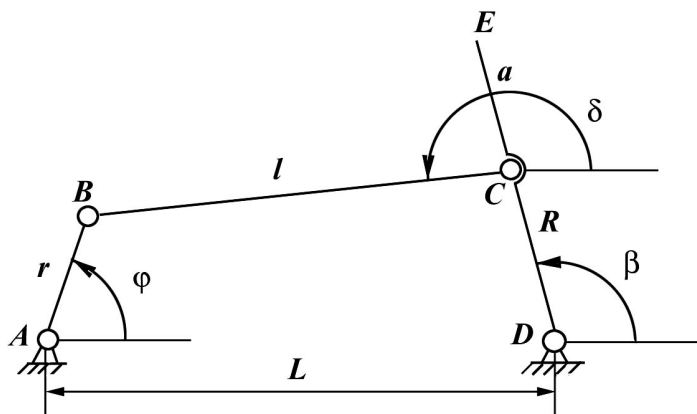


Рисунок 4.4 Мгновенное положение кривошипно-коромыслового механизма

Разделив обе части каждого уравнения на r и произведя перестановки членов каждого уравнения, получим:

$$\begin{aligned}\frac{l}{r} \cos \delta &= \frac{R}{r} \cos \beta + \frac{L}{r} - \cos \varphi; \\ \frac{l}{r} \sin \delta &= \frac{R}{r} \sin \beta - \sin \varphi.\end{aligned}\quad (4.9)$$

Введем безразмерные коэффициенты отношения длин:

шатuna и кривошипа $\lambda = \frac{l}{r}$;

коромысла и кривошипа $\nu = \frac{R}{r}$;

стойки и кривошипа $\chi = \frac{L}{r}$.

Тогда:

$$\begin{aligned}\lambda \cos \delta &= \nu \cos \beta + \chi - \cos \varphi; \\ \lambda \sin \delta &= \nu \sin \beta - \sin \varphi.\end{aligned}\quad (4.10)$$

Возведя левые и правые части уравнений в квадрат и складывая их, после преобразования получим:

$$\nu \cos \beta - \frac{\nu}{\chi} \cos(\beta - \varphi) + \frac{\chi^2 + \nu^2 + 1 - \lambda^2}{2\chi} = \cos \varphi.$$

Обозначив $c_1 = \nu$; $c_2 = -\frac{\nu}{\chi}$; $c_3 = \frac{\chi^2 + \nu^2 + 1 - \lambda^2}{2\chi}$,

$$\text{получим: } c_1 \cos \beta + c_2 \cos(\beta - \varphi) + c_3 = \cos \varphi. \quad (4.12)$$

Для трех заданных положений механизма получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} c_1 \cos \beta_1 + c_2 \cos(\beta_1 - \varphi_1) + c_3 = \cos \varphi_1; \\ c_1 \cos \beta_2 + c_2 \cos(\beta_2 - \varphi_2) + c_3 = \cos \varphi_2; \\ c_1 \cos \beta_3 + c_2 \cos(\beta_3 - \varphi_3) + c_3 = \cos \varphi_3. \end{cases} \quad (4.13)$$

Так как в данной системе число неизвестных равно числу уравнений, то решением системы будет:

$$c_1 = \frac{D_1}{D}, \quad c_2 = \frac{D_2}{D}, \quad c_3 = \frac{D_3}{D},$$

где

$$D = \begin{vmatrix} \cos \beta_1 & \cos(\beta_1 - \varphi_1) & 1 \\ \cos \beta_2 & \cos(\beta_2 - \varphi_2) & 1 \\ \cos \beta_3 & \cos(\beta_3 - \varphi_3) & 1 \end{vmatrix} - \text{определитель системы}; \quad (4.14)$$

D_1, D_2, D_3 – определители, получаемые из (4.14) заменой столбца, составленного из

коэффициентов при соответствующем неизвестном, столбцом, составленным из свободных членов:

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{vmatrix} \cos \varphi_1 & \cos(\beta_1 - \varphi_1) & 1 \\ \cos \varphi_2 & \cos(\beta_2 - \varphi_2) & 1 \\ \cos \varphi_3 & \cos(\beta_3 - \varphi_3) & 1 \end{vmatrix}; \\ D_2 &= \begin{vmatrix} \cos \beta_1 & \cos \varphi_1 & 1 \\ \cos \beta_2 & \cos \varphi_2 & 1 \\ \cos \beta_3 & \cos \varphi_3 & 1 \end{vmatrix}; \\ D_3 &= \begin{vmatrix} \cos \beta_1 & \cos(\beta_1 - \varphi_1) & \cos \varphi_1 \\ \cos \beta_2 & \cos(\beta_2 - \varphi_2) & \cos \varphi_2 \\ \cos \beta_3 & \cos(\beta_3 - \varphi_3) & \cos \varphi_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Задавшись длиной одного звена (например, кривошипа), можно определить длины остальных звеньев механизма. Полученные размеры звеньев проверяются по условию существования кривошипно-коромыслового механизма (правило Грасгофа).

4.5. Синтез кривошипно-коромыслового механизма по полному углу качания выходного звена, его положениям в крайних точках и коэффициенту возрастания скорости обратного хода

Коэффициентом возрастания скорости обратного хода коромысла называется отношение средней угловой скорости обратного хода коромысла $\omega_{\text{хх}}$ к средней угловой скорости его рабочего хода $\omega_{\text{рх}}$:

$$\sigma = \frac{\omega_{xx}}{\omega_{px}} = \frac{\varphi_{px}}{\varphi_{xx}}, \quad (4.15)$$

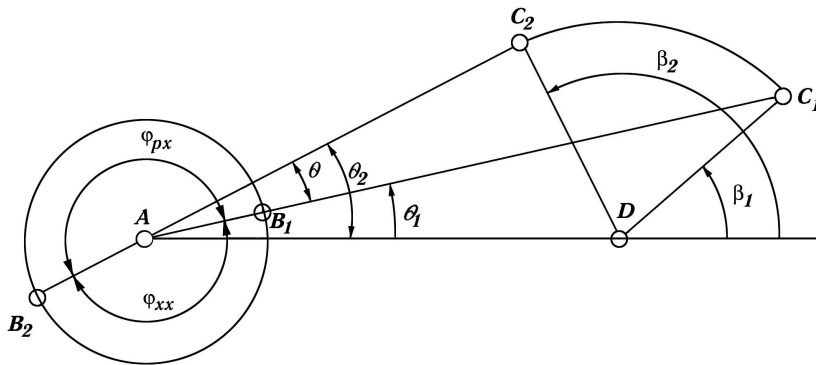


Рисунок 4.5 Мгновенное положение кривошипно-коромыслового механизма

где φ_{px} – угол поворота кривошипа за рабочий ход коромысла;

φ_{xx} - угол поворота кривошипа за холостой ход коромысла,

$$\varphi_{pX} + \varphi_{XX} = 360^\circ, \quad \varphi_{pX} - \varphi_{XX} = 2\theta,$$

здесь: θ – угол перекрытия (рис.4.5),

$$\varphi_{pX} = 180^\circ + \theta, \quad \varphi_{XX} = 180^\circ - \theta,$$

тогда:

$$\sigma = \frac{\omega_{xx}}{\omega_{px}} = \frac{180^\circ + \theta}{180^\circ - \theta}, \quad \text{откуда:} \quad \theta = 180^\circ \frac{(\sigma - 1)}{(\sigma + 1)}. \quad (4.16)$$

Спроектируем контур механизма в его крайних положениях на координатные оси.

Положение AB_1C_1D :

$$\begin{cases} (r+l)\cos\theta_1 = L + R\cos\beta_1; \\ (r+l)\sin\theta_1 = R\sin\beta_1. \end{cases} \quad (4.17)$$

Положение AB_2C_2D :

$$\begin{cases} (l-r)\cos\theta_2 = L - R\cos(180^\circ - \beta_2); \\ (l-r)\sin\theta_2 = R\sin(180^\circ - \beta_2). \end{cases} \quad (4.18)$$

В каждой системе уравнений разделим второе уравнение на первое.

Получим:

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{R\sin\beta_1}{L + R\cos\beta_1}; \quad \operatorname{tg}\theta_2 = \frac{R\sin\beta_2}{L + R\cos\beta_2}. \quad (4.19)$$

Из рис.4.5:

$$\theta_2 = \theta + \theta_1, \quad \operatorname{tg}\theta_2 = \operatorname{tg}(\theta + \theta_1) = \frac{(\operatorname{tg}\theta + \operatorname{tg}\theta_1)}{(1 - \operatorname{tg}\theta \cdot \operatorname{tg}\theta_1)}. \quad (4.20)$$

С учетом выражений (4.18) и (4.19) имеем:

$$\frac{R\sin\beta_2}{L + R\cos\beta_2} = \frac{\operatorname{tg}\theta + \frac{R\sin\beta_1}{L + R\cos\beta_1}}{1 - \operatorname{tg}\theta \frac{R\sin\beta_1}{L + R\cos\beta_1}}. \quad (4.21)$$

Произведя соответствующие преобразования и обозначив

$\operatorname{tg}\theta = A$,

$$R[\operatorname{tg}\theta(\cos\beta_1 + \cos\beta_2) + \sin\beta_1 - \sin\beta_2] = B,$$

$$-R^2[\sin(\beta_2 - \beta_1) - \operatorname{tg}\theta \cdot \cos(\beta_2 - \beta_1)] = C,$$

получим:

$$AL^2 + BL + C = 0. \quad (4.22)$$

Решение полученного квадратного уравнения (4.22)

$$L_{1,2} = \frac{(-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC})}{2A}. \quad (4.23)$$

Подставив $L_{1,2}$ в формулы (4.19) найдем величины углов θ_1 и θ_2 :

θ_{11}, θ_{12} – для первого варианта размеров звеньев механизма;

θ_{21}, θ_{22} – для второго варианта размеров звеньев механизма.

Длины кривошипа r и шатуна l находятся при решении систем уравнений (4.17), (4.18):

$$r = \frac{R}{2} \left(\frac{\sin\beta_1}{\sin\theta_1} - \frac{\sin\beta_2}{\sin\theta_2} \right); \quad (4.24)$$

$$l = \frac{R}{2} \left(\frac{\sin\beta_1}{\sin\theta_1} + \frac{\sin\beta_2}{\sin\theta_2} \right). \quad (4.25)$$

Получим два варианта размеров звеньев механизма. Полученные размеры звеньев проверяются по условию существования кривошипно-коромыслового механизма (правило Грасгофа).

Для реализации изложенных выше алгоритмов кинематического синтеза кривошипно-ползунного и кривошипно-коромыслового механизмов разработаны программы расчетов на ЭВМ.

Вопросы для самоконтроля

1. Назовите задачи кинематического синтеза механизма.
2. Какие параметры технологического процесса могут быть заданы для синтеза кривошипно-ползунного механизма?

3. Какие параметры технологического процесса могут быть заданы для синтеза кривошипно-коромыслового механизма?

4. Какие эксплуатационные параметры могут быть заданы для синтеза шарнирно-рычажных механизмов?

5. Что называется коэффициентом возрастания скорости обратного (холостого) хода выходного звена?

6. Что называется коэффициентом пика скорости выходного звена?

7. Как определить угол поворота кривошипа за рабочий (прямой) и холостой (обратный) ход ползуна?

8. Как определить угол поворота кривошипа за рабочий (прямой) и холостой (обратный) ход коромысла?

9. За счет чего при постоянной угловой скорости кривошипа возрастает средняя скорость обратного хода выходного звена?

ТЕМА 5. КИНЕТОСТАТИКА ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

5.1. Силы, действующие на звенья механизма

Сила (момент силы), развиваемая двигателем, приложенная к входному звену и направленная в сторону движения, называется движущей силой (движущим моментом).

В результате выполнения ведомыми звеньями технологических операций в процессе движения, возникают силы, приложенные к ведомым звеньям и стремящиеся замедлить их движение. Эти силы называются силами полезных сопротивлений.

Эти два типа сил являются основными, они определяют характер движения звеньев механизма.

Движущие силы и силы полезных сопротивлений приложены к механизму извне. Закон их изменения задается режимом работы двигателя и исполнительного органа машины.

На звенья механизма действуют также силы, величина которых зависит от параметров движения самих звеньев. Такими силами являются силы инерции. Существование сил инерции обусловлено двумя обстоятельствами:

- наличием определенной массы звеньев;
- наличием ускорения каждой материальной точки звена при его движении.

Силы инерции возникают во всех случаях движения звеньев кроме прямолинейного равномерного движения (ускорение равно 0).

Рассмотрим звено механизма как совокупность множества материальных точек. Звено вращается вокруг неподвижной оси (рис.5.1).

В общем случае каждая материальная точка звена при движении имеет нормальное и тангенциальное ускорение. Следовательно, на каждую материальную точку действуют по две элементарные силы инерции N_i и K_i . Таким образом, мы получаем произвольную пространственную систему элементарных сил инерции. Как известно из теоретической механики, произвольная пространственная система сил приводится к главному вектору и главному моменту.

Примем за центр приведения центр масс звена. Тогда система элементарных сил инерции может быть приведена к:

- главному вектору сил инерции

$$P_u = -\vec{a}_S \cdot m$$

где m - масса звена;

a_S - ускорение центра масс.

- главному моменту сил инерции

$$M_u = -\vec{\varepsilon} \cdot I_S$$

где ε - угловое ускорение звена;

I_S - момент инерции звена относительно центра масс.

Знак " – " показывает, что главный вектор и главный момент сил инерции направлены противоположно соответствующим ускорениям.

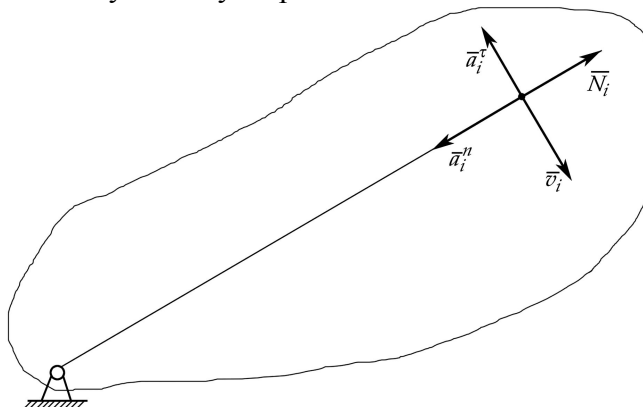


Рисунок 5.1 Вращение звена механизма вокруг неподвижной оси

К звеньям механизма приложены также **силы тяжести звеньев**. Они приложены в центрах масс звеньев. Величина и направление этих сил постоянны и не зависят от положения звеньев.

В результате действия на звенья механизма движущих сил, сил полезных сопротивлений, сил и моментов сил инерции, сил тяжести в кинематических парах возникают **реакции**. Они сами непосредственно не влияют на характер движения звеньев механизма. Однако они представляют для нас интерес потому, что от величины реакции зависит **сила трения** в кинематической паре. Как известно, работа сил трения переходит в тепло, что приводит к нагреву кинематических пар.

Сила (момент силы), приложенная к входному звену со стороны всех звеньев механизма, называется **уравновешивающей силой (уравновешивающим моментом)**. Максимальная величина уравновешивающего момента является исходной для определения требуемой мощности двигателя.

Вопросы для самоконтроля

1. Какая сила называется движущей?
2. Какая сила называется силой полезного сопротивления?
3. Чем обусловлено существование сил инерции масс звеньев?
4. К чему приводится произвольная пространственная система элементарных сил инерции материальных точек звена при ее приведению к центру масс?
5. Почему необходимо знать величину реакций в кинематических парах?
6. Зависит ли сила тяжести звена от его положения?
7. Что называется уравновешивающей силой (уравновешивающим моментом)?

5.2. Задача, метод и последовательность выполнения кинетостатического анализа

Целью кинетостатического анализа является определение величины уравновешивающей силы (уравновешивающего момента) при заданных силах полезного сопротивления, а также реакций во всех кинематических парах. В отдельных случаях, когда задана движущая сила (момент), в результате анализа определяется сила полезного сопротивления.

Кинетостатическому анализу должен предшествовать структурный и кинематический анализ механизма. При кинетостатическом анализе не учитываются динамические нагрузки, возникающие в процессе работы механизма. (Для некоторого упрощения мы не будем также учитывать силы трения в кинематических парах).

Анализ основан на использовании принципа Д'Аламбера, согласно которому, *если к действующим на точки материальной системы заданным активным силам и силам реакции связей присоединить силы инерции, то полученная система сил будет находиться*

в равновесии. Принцип Д'Аламбера позволяет решать динамические задачи методами статики.

Анализ производится для каждой структурной группы в последовательности обратной формуле строения механизма, т.е. начиная со структурной группы наиболее удаленной от входного звена.

Кинетостатический анализ может проводиться графоаналитически (метод планов сил) или аналитически.

Вопросы для самоконтроля

1. Что является целью кинетостатического анализа?
2. Какой принцип теоретической механики лежит в основе кинетостатического анализа?
3. В какой последовательности проводится кинетостатический анализ механизма?
4. Почему кинетостатическому анализу должны предшествовать структурный и кинематический анализ механизма?

5.3. Кинетостатический анализ механизма методом планов сил

План механизма (структурной группы), на котором показаны все приложенные к звеньям механизма (группы) в соответствующих точках силы, называется планом нагрузок (рис.5.2).

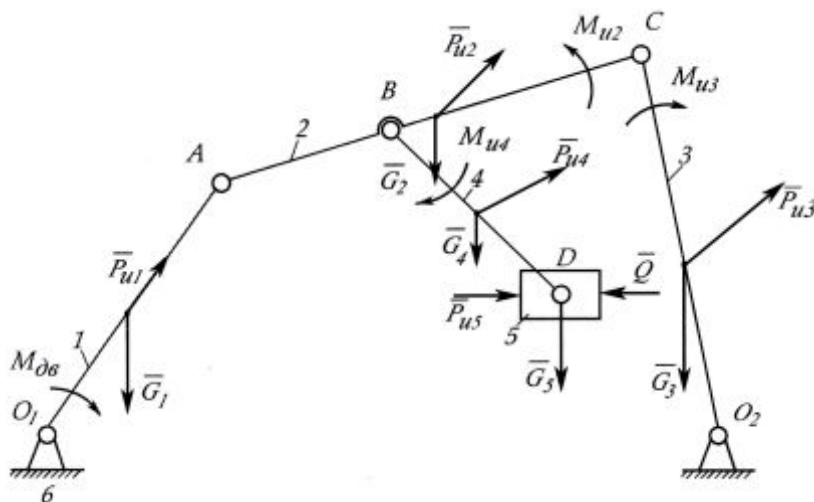


Рисунок 5.2 План нагрузок механизма (группы)

Формула строения механизма:

$$I(1, 6) \rightarrow II_1(2, 3) \rightarrow II_2(4, 5)$$

Длины звеньев l_{OA} , l_{AC} , l_{AB} , l_{CO1} , l_{BD} и массы звеньев заданы. Кинематические параметры получены при проведении кинематического анализа. Задана сила полезного сопротивления Q , приложенная к звену 5.

Строим план нагрузок группы $II_2(4,5)$ как наиболее удаленной от входного звена (рис.5.3, а). Действие отброшенных связей заменяем опорными реакциями. При этом реакцию во вращательной кинематической паре B заменяем двумя составляющими: R_{24}^n – направленную вдоль звена 4 и R_{24}^t – направленную перпендикулярно звену. (Цифровые индексы соответствуют номерам соединяющихся в этой кинематической паре звеньев.) Реакцию в поступательной кинематической паре D (R_{65}) направляем перпендикулярно направляющей.

Под действием данной системы сил группа находится в равновесии. Группу Ассура рассматриваем как сочленение двух тел (звеньев 4 и 5 во вращательной кинематической паре D).

Условия равновесия:

$$\sum P_i = 0, \quad \vec{R}_{24}^n + \vec{R}_{24}^r + \vec{G}_4 + \vec{G}_5 + \vec{P}_{u4} + \vec{P}_{u5} + \vec{Q} + \vec{R}_{65}; \quad (5.1)$$

$$\sum M_D(P_i) = 0 \quad R_{24}^r \cdot l_{BD} + G_4 \cdot h_{G4} \cdot k_e - P_{u4} \cdot h_{Pu4} \cdot k_e - M_{II4} \quad (5.2)$$

из (5.2)

$$R_{24}^r = \frac{P_{u4} \cdot h_{Pu4} \cdot k_e + M_{u4} - G_4 \cdot h_{G4} \cdot k_e}{l_{BD}}$$

В векторном уравнении (5.1) остается 2 неизвестных. Его решаем графически, путем построения плана сил (рис.5.3, б).

Задаемся длиной отрезка, которым будем изображать вектор какой-то известной силы (например, R_{24}^r), и определим масштаб плана сил

$$k_p = R_{24}^r / l_{R_{24}^r} \text{ [Н/мм]}.$$

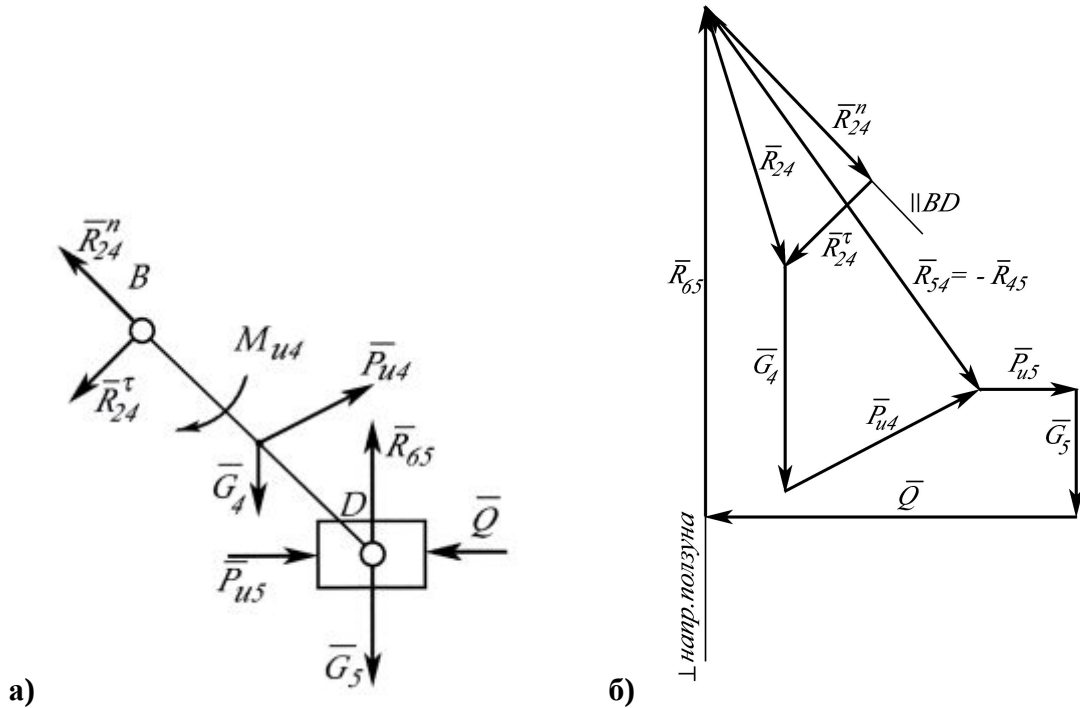


Рисунок 5.3 План нагрузок группы II₂(4,5) (а) и план сил (б)

В любой последовательности (желательно начать с вектора R^r) откладываются в выбранном масштабе векторы всех известных сил, действующих на звено 4, затем векторы всех известных сил, действующих на звено 5. Через начало первого и конец последнего векторов известных сил проводим линии действия неизвестных сил до их пересечения. Поскольку (5.1) представляет векторную сумму, то конец одного вектора является началом следующего вектора. Этим определяется направление стрелок векторов неизвестных сил. Измерив на плане сил длины неизвестных векторов, находим искомые силы

$$R_{24}^n = k_p \cdot l_{R_{24}^n}; \quad R_{65} = k_p \cdot l_{R_{65}}$$

Полную реакцию в кинематической паре $B R_{24}$ найдем соединив начало вектора R_{24}^n и конец вектора R_{24}^r

$$R_{24} = k_p \cdot l_{R_{24}}$$

Для нахождения реакции во вращательной кинематической паре D (шатун 4 – ползун 5) расчленим группу, заменив действие звена 4 на звено 5 реакцией R_{45} (соответственно, действие звена 5 на звено 4 реакцией R_{54}). Запишем условия равновесия звена 5:

$$G_5 + \vec{P}_{u5} + \vec{R}_{45} + \vec{Q} + \vec{R}_{65} = 0$$

Вектор R_{45} может быть найден из плана сил как вектор, замыкающий многоугольник сил, действующих на звено 5 (вектор R_{54} – как вектор, замыкающий многоугольник сил, действующих на звено 4).

$$R_{45} = -R_{54} = k_p \cdot l_{R_{45}}.$$

Переходим к группе II₁(2,3). Строим план нагружения группы (рис.5.4, а).

В точке B звена 2 прикладываем силу действия четвертого звена на второе

$$\vec{R}_{42} = -\vec{R}_{24}$$

Условия равновесия:

$$\Sigma P_i = 0 \quad \vec{R}_{12}^n + \vec{R}_{12}^\tau + \vec{R}_{42} + \vec{P}_{u2} + \vec{G}_2 + \vec{P}_{u3} + \vec{G}_3 + \vec{R}_{63}^\tau + \vec{R}_{63}^n = 0 \quad (5.3)$$

$$\Sigma M_{C2}(P_i) = 0 \quad R_{12}^\tau \cdot l_{AC} - R_{42} \cdot h_{R42} \cdot k_l - P_{u2} \cdot h_{Pu2} \cdot k_l + G_2 \cdot h_{G2} \cdot k_l + M_{u2} = 0 \quad (5.4)$$

$$\Sigma M_{C3}(P_i) = 0 \quad R_{63}^\tau \cdot l_{CO1} - P_{u3} \cdot h_{Pu3} \cdot k_l + G_3 \cdot h_{G3} \cdot k_l + M_{u3} = 0 \quad (5.5)$$

из (5.4)

$$R_{12}^t = \frac{P_{u2} \cdot h_{Pu2} \cdot k_l - G_2 \cdot h_{G2} \cdot k_l + R_{42} \cdot h_{R42} \cdot k_l - M_{u2}}{l_{AC}}$$

из (5.5)

$$R_{63}^t = \frac{P_{u3} \cdot h_{Pu3} \cdot k_l - G_3 \cdot h_{G3} \cdot k_l - M_{u3}}{l_{CO2}}$$

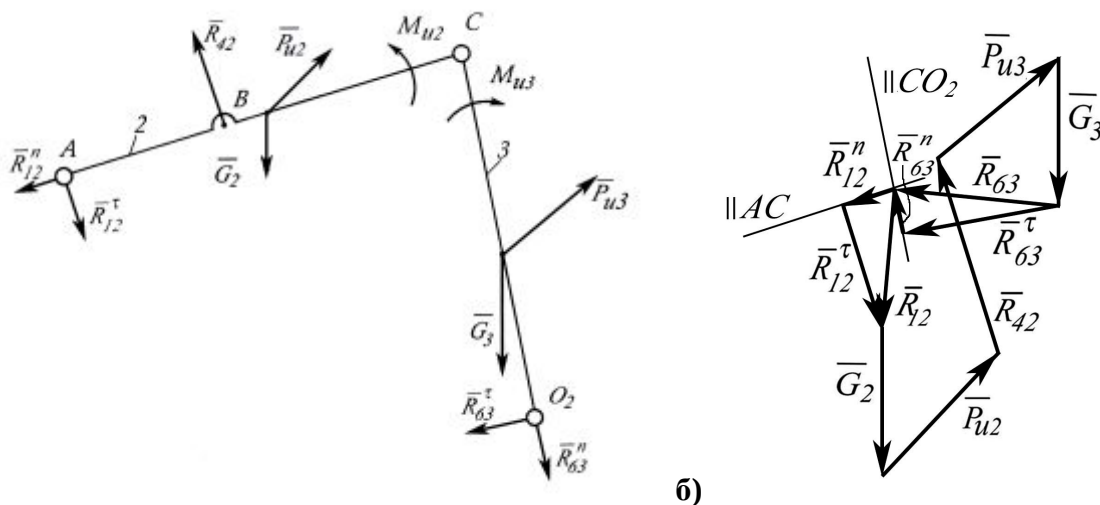


Рисунок 5.4 План нагрузок группы $\Pi_1(2,3)$ (а) и план сил (б)

Для нахождения R_{12}^n и R_{63}^n строим план сил (рис.5.4, б). Методика построения плана сил аналогична описанной выше.

С учетом масштаба плана сил определяем R_{12}^n , R_{12} , R_{63}^n , R_{63} . Для нахождения реакции во вращательной кинематической паре C (R_{32}) поступаем аналогично описанному для нахождения R_{45} .

$$R_{32} = -\vec{R}_{23} = kp \cdot l \cdot R_{32}$$

Масштаб для построения каждого плана сил может отличаться от предыдущего.

Кинестатика входного звена.

В кинематической паре A прикладываем силу взаимодействия второго звена с первым

$$R_{21} = -\vec{R}_{12}$$

В кинематической паре O прикладываем силу взаимодействия шестого звена с первым R_{61} . Этот вектор может быть направлен на плане нагружения (рис.5.5, а) произвольно, так как его направление определится при построении плана сил.

Условия равновесия:

$$\Sigma \vec{P}_i = 0; \quad \vec{P}_{yp} + \vec{R}_{61} + \vec{G}_1 + \vec{P}_{u1} + \vec{R}_{21} = 0 \quad (5.6)$$

$$\Sigma M_0(P_i) = 0; \quad M_{yp} + G_1 \cdot h_{G1} \cdot k_l + R_{21} \cdot h_{R21} \cdot k_l = 0 \quad (5.7)$$

из (5.7)

$$M_{yp} = -G_1 \cdot h_{G1} \cdot k_l - R_{21} \cdot h_{R21} \cdot k_l.$$

Считая, что уравнивающая сила (если иное не оговорено) P_{yp} приложена в точке A, находим эту силу

$$P_{yp} = M_{yp} / l_{OA}$$

R_{61} находим из плана сил (рис.5.5, б).

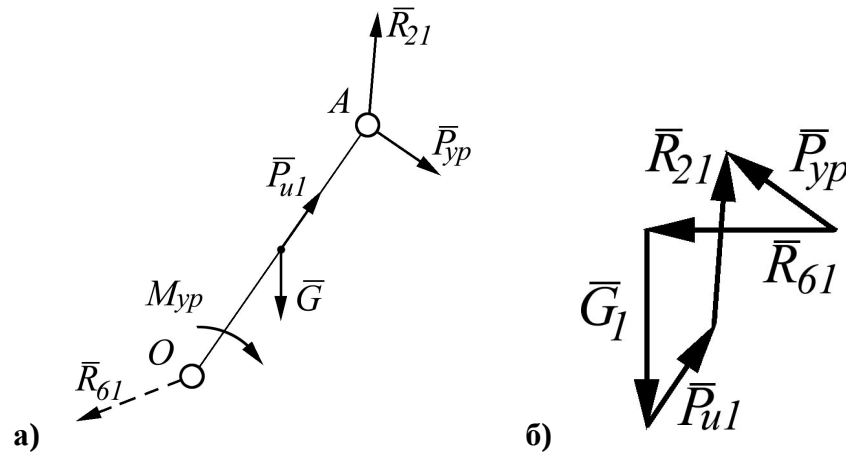


Рисунок 5.5 План нагрузок входного звена (а) и план сил (б)

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется планом нагрузок механизма (структурной группы)?
2. Чем заменяется действие отброшенных связей при построении плана нагрузок структурной группы?
3. Какие необходимо записать уравнения равновесия для группы Ассура 11 класса 1 вида?
4. Какие необходимо записать уравнения равновесия для группы Ассура 11 класса 2 вида?
5. В какой последовательности строятся векторы при построении плана сил?
6. Как определить величину и направление вектора неизвестной силы?
7. Как определить реакцию в кинематической паре шатун – коромысло (шатун – ползун)?
8. Как определяется величина уравнивающего момента?
9. Как определяется величина уравнивающей силы?

5.4. Аналитический метод кинетостатического анализа

Аналитический метод кинетостатики рассмотрим на примере кривошипно-ползунного и кривошипно-коромыслового механизмов.

5.4.1. Кинетостатический анализ кривошипно-ползунного механизма

Определяем силы, действующие на звенья механизма.

Силы тяжести звеньев:

$$G_1 = qr \cdot g; \quad G_2 = ql \cdot g; \quad G_3 = m_3 \cdot g.$$

Силы инерции масс звеньев и их проекции на координатные оси:

$$\overline{P_{u_1}} = -\overline{a_{s_1}} qr; \quad P_{u_1^x} = -a_{s_{1x}} qr; \quad P_{u_1^y} = -a_{s_{1y}} qr;$$

$$\overline{P_{u_2}} = -\overline{a_{s_2}} ql; \quad P_{u_2^x} = -a_{s_{2x}} ql; \quad P_{u_2^y} = -a_{s_{2y}} ql;$$

$$P_{u_3} = -a_{s_3} m_3.$$

Момент сил инерции масс шатуна, возникающий при его движении:

$$M_{u_2} = -\varepsilon_2 0,1m \ell^3.$$

Для определения реакций в кинематических парах и уравнивающего момента рассмотрим условия равновесия структурных групп.

Группа звеньев 2-3 (шатун-ползун)

План нагружения группы 2-3 показан на рис. 5.6.

$$\sum F(y) = 0; \quad R_{12y} + P_{u_2y} - G_2 - G_3 + R_{43} = 0; \quad (5.8)$$

$$\sum F(x) = 0; \quad R_{12x} + P_{u_2x} + P_{u_3} - Q = 0; \quad (5.9)$$

$$\sum M(c) = 0; \quad R_{12y} \ell \sin \gamma + R_{12x} \ell \cos \gamma + 0,5(P_{u_2x} \ell \sin \gamma - G_2 \ell \sin \gamma + P_{u_2y} \ell \cos \gamma) + M_{u_2} = 0 \quad (5.10)$$

Из (5.10) находим R_{12y} :

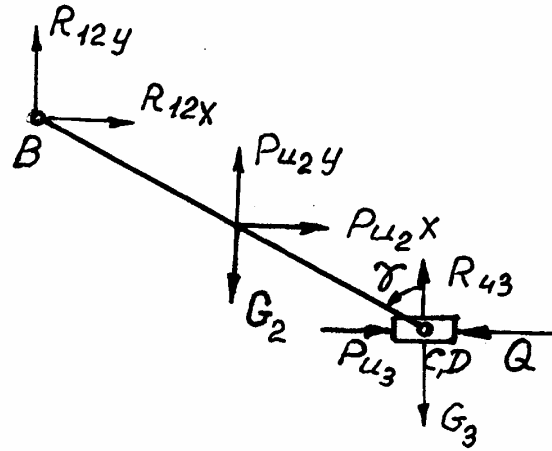


Рисунок 5.6 План нагрузок группы 2-3

$$R_{12y} = \frac{-M_{u_2} + 0,5(G_2 \ell \sin \gamma - P_{u_2x} \ell \sin \gamma - P_{u_2y} \ell \cos \gamma) - R_{12x} \ell \cos \gamma}{\ell \sin \gamma};$$

$$R_{12x} = Q - P_{u_3} - P_{u_2x};$$

$$R_{43} = G_2 + G_3 - R_{12y} - P_{u_2y}.$$

Введем ограничение: в соответствии с определением силы полезного сопротивления сила полезного сопротивления Q действует только во время рабочего хода ползуна, т.е. при $V_c > 0$.

$$R_{12} = \sqrt{R_{12x}^2 + R_{12y}^2} - \text{реакция в кинематической паре } B \text{ (шатун-кривошип)}.$$

Реакция в кинематической паре шатун-ползун

$$R_{32x} = Q - P_{u_3}; \quad R_{32y} = R_{43} - G_3; \quad R_{32} = \sqrt{R_{32x}^2 + R_{32y}^2}.$$

Входное звено (кривошип)

$$R_{21x} = -R_{12x}; \quad R_{21y} = -R_{12y}.$$

План нагружений кривошипа приведен на рис.5.7.

Условия равновесия кривошипа:

$$\sum F(x) = 0; \quad R_{41x} + P_{u_1x} - R_{21x} - P_{ypx} = 0;$$

$$\sum F(y) = 0; \quad R_{41y} - G_1 + P_{u_1y} - R_{21y} + P_{ypy} = 0;$$

$$\sum M_A = 0; \quad M_{yp} + R_{21x} r \sin \varphi - R_{21y} r \cos \varphi - G_1 r / 2 \cos \varphi = 0;$$

$$R_{41x} = R_{21x} - P_{u_1x} + P_{ypx}; \quad R_{41y} = G_1 + R_{21y} - P_{u_1y} - P_{ypy};$$

$$R_{41} = \sqrt{R_{41x}^2 + R_{41y}^2}.$$

R_{41} - реакция в кинематической паре A (стойка-кривошип)

$$M_{yp} = R_{21y} r \cos \varphi + 0,5 G_1 r \cos \varphi + R_{21x} r \sin \varphi.$$

$$P_{yp} = \frac{M_{yp}}{r}; \quad P_{ypx} = -P_{yp} \sin \varphi; \quad P_{ypy} = P_{yp} \cos \varphi.$$

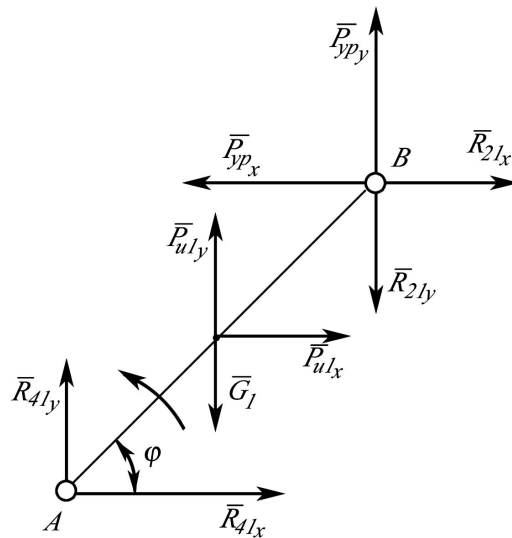


Рисунок 5.7 План нагрузок кривошипа в кинематической паре B

Определим уравнивающий момент методом проф. Н.Е. Жуковского (M_{yp}^*):

$$\sum F_i V_i \cos \beta_i + \sum M_i \omega_i + M_{yp}^* \omega_1 = 0,$$

где ω_1 - угловая скорость кривошипа;

F_i, M_i - силы и моменты сил, действующие на i звено;

V_i - скорость точки приложения i -ой силы;

ω_i - угловая скорость i -го звена;

β_i - угол между вектором i -й силы и скоростью точки ее приложения;

M_{yp}^* - уравнивающий момент, приложенный к кривошипу.

Первое слагаемое удобно представить как сумму произведений проекций сил и скоростей точек их приложения на координатные оси. Тогда

$$M_{yp}^* = (-G_1 V_{s1x} - P_{u1x} V_{s1y} + P_{u1y} V_{s1x} - G_2 V_{s2x} - P_{u2x} V_{s2y} + P_{u2y} V_{s2x} + Q V_C - P_{u3} V_C - M_{u2} \omega_2) / \omega_1.$$

Рассчитывается погрешность определения уравнивающего момента из условий равновесия методом профессора Н.Е. Жуковского

$$\Delta M = \frac{M_{yp} - M_{yp}^*}{M_{yp}} 100\%.$$

5.4.2. Кинетостатический анализ кривошипно-коромыслового механизма

Определим силы, действующие на звенья механизма

Масса звеньев:

$$m_1 = qr; \quad m_2 = ql; \quad m_3 = q(R + a);$$

где q - погонная масса звена в виде стержня.

Силы тяжести звеньев:

$$G_1 = m_1 g; \quad G_2 = m_2 g; \quad G_3 = m_3 g;$$

Силы инерции масс звеньев и их проекции на координатные оси:

$$P_{u1} = -m_1 a_{s1}; \quad P_{u1x} = -m_1 a_{s1x}; \quad P_{u1y} = -m_1 a_{s1y};$$

$$P_{u2} = -m_2 a_{s2}; \quad P_{u2x} = -m_2 a_{s2x}; \quad P_{u2y} = -m_2 a_{s2y};$$

$$P_{u2} = \sqrt{P_{u2x}^2 + P_{u2y}^2};$$

$$P_{u3} = -m_3 a_{s3}; \quad P_{u3x} = -m_3 a_{s3x}; \quad P_{u3y} = -m_3 a_{s3y};$$

$$P_{u_3} = \sqrt{P_{u_{3x}}^2 + P_{u_{3y}}^2}.$$

Направляющие косинусы (косинусы углов между положительным направлением оси x и направлением векторов $\bar{P}_{u_2}$ и $\bar{P}_{u_3}$):

$$\cos \nu_{P_{u_2}} = \frac{P_{u_{2x}}}{P_{u_2}}; \quad \cos \nu_{P_{u_3}} = \frac{P_{u_{3x}}}{P_{u_3}}.$$

Моменты сил инерции масс шатуна и коромысла:

$$M_{u_2} = -J_{S_2} \varepsilon_2; \quad M_{u_2} = -0,1m_2 l^2 \varepsilon_2;$$

$$M_{u_3} = -0,1m_3 (R + a)^2 \varepsilon_3.$$

Для определения реакции в кинематических парах B, C, D рассмотрим план нагружения и условия равновесия структурной группы 2-3 (шатун - коромысло) (рис.5.8).

Уравнения равновесия группы 2-3:

$$\sum P_i(x) = 0; \quad R_{12x} + P_{u_{2x}} + Q_x + P_{u_{3x}} + R_{43x} = 0;$$

$$\sum P_i(y) = 0; \quad R_{12y} + P_{u_{2y}} + Q_y + P_{u_{3y}} - G_2 - G_3 + R_{43y} = 0;$$

$$\sum M_C(P_{i2}) = 0; \quad R_{12x} \cdot l \sin(\delta - 180^\circ) - R_{12y} \cdot l \cos(\delta - 180^\circ) - P_{u_{2y}} \frac{l}{2} \cos(\delta - 180^\circ) +$$

$$+ G_2 \frac{l}{2} \cos(\delta - 180^\circ) + P_{u_{2y}} \frac{l}{2} \sin(\delta - 180^\circ) + M_{u_2} = 0;$$

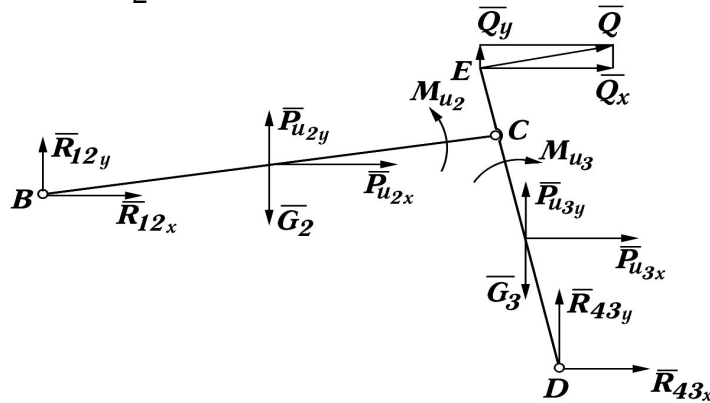


Рисунок 5.8 План нагрузок группы 2-3

$$\sum M_C(P_{i3}) = 0; \quad Q \cdot a - P_{u_{3x}} \frac{R-a}{2} \sin(180^\circ - \beta) + (G_3 - P_{u_{3y}}) \cdot \frac{R-a}{2} \cos(180^\circ - \beta) - R_{43x} R \sin(180^\circ - \beta) - R_{43y} R \cos(180^\circ - \beta) + M_{u_3} = 0;$$

$$Q_x = Q \cos(\beta - 90^\circ); \quad Q_y = Q \sin(\beta - 90^\circ).$$

Записанные уравнения представляют систему четырех линейных уравнений с четырьмя неизвестными и могут быть представлены в виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = A_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = A_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = A_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = A_4, \end{cases} \quad (5.11)$$

где:

$$x_1 = R_{12x}; \quad x_2 = R_{12y}; \quad x_3 = R_{43x}; \quad x_4 = R_{43y};$$

$$A_1 = -P_{u_{2x}} - Q_x - P_{u_{3x}};$$

$$A_2 = G_2 + G_3 - P_{u_{2y}} - Q_y - P_{u_{3y}};$$

$$\begin{aligned}
A_3 &= P_{u_{2x}} \frac{l}{2} \cos(\delta - 180^\circ) - G_2 \frac{l}{2} \cos(\delta - 180^\circ) - P_{u_{2x}} \frac{l}{2} \sin(\delta - 180^\circ) - M_{u_2}; \\
A_4 &= Q \cdot a - P_{u_{3x}} \frac{R-a}{2} \sin(180^\circ - \beta) + (G_3 - P_{u_{3y}}) \frac{R-a}{2} \cos(180^\circ - \beta) + M_{u_3}; \\
a_{11} &= 1; \quad a_{12} = 0; \quad a_{13} = 1; \quad a_{14} = 0; \\
a_{21} &= 0; \quad a_{22} = 1; \quad a_{23} = 0; \quad a_{24} = 1; \\
a_{31} &= l \sin(\delta - 180^\circ); \quad a_{32} = -l \cos(\delta - 180^\circ); \quad a_{33} = 0; \quad a_{34} = 0; \\
a_{41} &= 0; \quad a_{42} = 0; \quad a_{43} = R \sin(180^\circ - \beta); \quad a_{44} = R \cos(180^\circ - \beta).
\end{aligned}$$

Решение системы (5.11) может быть получено в виде:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}, \quad x_4 = \frac{D_4}{D},$$

$$\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}; & D_1 &= \begin{vmatrix} A_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ A_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ A_3 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ A_4 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}; \\
D_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & A_1 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & A_2 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & A_3 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & A_4 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}; & D_3 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & A_1 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & A_2 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & A_3 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & A_4 & a_{44} \end{vmatrix}; \\
D_4 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & A_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & A_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & A_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & A_4 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

При этом следует учитывать, что сила полезного сопротивления действует только во время рабочего хода, то есть при $\beta_{i+1} > \beta_i$.

Реакция в кинематической паре B (кривошип – шатун):

$$R_{12} = \sqrt{R_{12_x}^2 + R_{12_y}^2}; \quad \cos \alpha_{R_{12}} = \frac{R_{12_x}}{R_{12}}.$$

Реакция в кинематической паре D (коромысло – стойка):

$$R_{43} = \sqrt{R_{43_x}^2 + R_{43_y}^2}; \quad \cos \alpha_{R_{43}} = \frac{R_{43_x}}{R_{43}}.$$

Определим реакцию в кинематической паре C (шатун – коромысло):

$$R_{23_x} = Q_x + P_{u_{3x}} + R_{43_x}; \quad R_{23_y} = Q_y + P_{u_{3y}} + R_{43_y} - G_3;$$

$$R_{23} = \sqrt{R_{23_x}^2 + R_{23_y}^2}; \quad \cos \alpha_{R_{23}} = \frac{R_{23_x}}{R_{23}}.$$

Для определения реакции в кинематической паре A , а также уравновешивающей силы $\bar{P}_{yp}$ (уравновешивающего момента M_{yp}) рассмотрим план нагружения и условия равновесия входного звена (кривошип) (рис. 5.9).

Уравнения равновесия входного звена:

$$\begin{aligned}
\sum P_i(x) &= 0; & R_{41_x} + P_{u_{1x}} - R_{21_x} - P_{yp_x} &= 0; & R_{21_x} &= -R_{12_x}; \\
\sum P_i(y) &= 0; & R_{41_y} - G_1 + P_{u_{1y}} - R_{21_y} + P_{yp_y} &= 0; & R_{21_y} &= -R_{12_y};
\end{aligned}$$

$$\sum M_A(P_i) = 0; G_1 \frac{r}{2} \cos \varphi - P_{u_{1y}} \frac{r}{2} \cos \varphi + P_{u_{1x}} \frac{r}{2} \sin \varphi - R_{21x} r \sin \varphi + R_{21y} r \cos \varphi - M_{yp} = 0.$$

Уравновешивающий момент, определенный из условий равновесия:

$$M_{yp} = \left(G_1 - P_{u_{1y}} \right) \frac{r}{2} \cos \varphi + r \sin \varphi \left(\frac{P_{u_{1x}}}{2} - R_{21x} \right) + R_{21y} r \cos \varphi;$$

$$P_{yp} = \frac{M_{yp}}{l_{AB}};$$

$$P_{yp_x} = P_{yp} \sin \varphi;$$

$$P_{yp_y} = P_{yp} \cos \varphi.$$

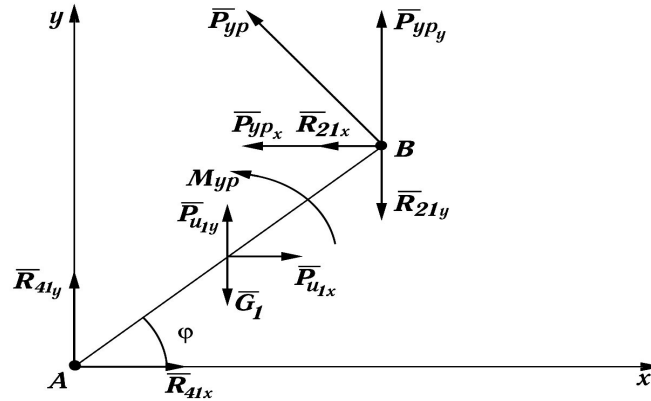


Рисунок 5.9 План нагрузок входного звена (кривошипа)

Реакция в кинематической паре A (стойка – кривошип):

$$R_{41x} = R_{21x} - P_{u_{1x}} + P_{yp_x};$$

$$R_{41y} = G_1 - P_{u_{1y}} + R_{21y} - P_{yp_y};$$

$$R_{41} = \sqrt{R_{41x}^2 + R_{41y}^2}; \quad \cos \alpha_{R_{41}} = \frac{R_{41x}}{R_{41}}.$$

Определение уравновешивающего момента методом профессора Жуковского Н.Е:

$$M_{yp}^* \omega_1 = \sum M_{ij} \omega_i + \sum P_{ij} v_{ij} \cos \beta_{ij},$$

откуда

$$M_{yp}^* = \frac{\sum M_{ij} \omega_i + \sum P_{ij} v_{ij} \cos \beta_{ij}}{\omega_1}; \quad (5.12)$$

где: ω_1 – угловая скорость кривошипа;

M_{ij} , P_{ij} – моменты сил и силы приложения к i -му звену;

v_{ij} – скорость точки приложения ij силы;

ω_i – угловая скорость i -того звена;

β_{ij} – угол между векторами ij -ой силы и скорости точки ее приложения.

Второе слагаемое удобно представить в виде суммы произведений проекций сил и скоростей точек их приложения на координатные оси.

Тогда:

$$M_{yp}^* = \frac{M_{u_2} \omega_2 + M_{u_3} \omega_3 + P_{u_{1x}} v_{S_{1x}} + P_{u_{1y}} v_{S_{1y}} + G_1 v_{S_{1y}} + G_2 v_{S_{2y}} + P_{u_{2y}} v_{S_{2y}} +}{\omega_1} + \frac{P_{u_{2x}} v_{S_{2x}} + Q_x v_{E_x} + Q_y v_{E_y} + P_{u_{3x}} v_{S_{3x}} + G_3 v_{S_{3y}} + P_{u_{3y}} v_{S_{3y}}}{\omega_1}.$$

Погрешность определения уравновешивающего момента из условий равновесия и методом профессора Жуковского Н.Е.:

$$\Delta M = \frac{M_{yp} - M_{yp}^*}{M_{yp}} 100\%.$$

Для реализации изложенных выше алгоритмов кинетостатического анализа кривошипно-ползунного и кривошипно-коромыслового механизма разработаны программы

расчета на ЭВМ. Программы позволяют производить расчет силовых параметров механизма для n положений механизма.

Вопросы для самоконтроля

1. Как направляются реакции связей при аналитическом методе кинетостатического анализа?
2. В чем отличие записи условий равновесия при графоаналитическом и аналитическом методах анализа?

ТЕМА 6. ЗУБЧАТЫЕ МЕХАНИЗМЫ

6.1. Общие сведения и классификация зубчатых механизмов

Механизмы с низшими парами (рычажные механизмы), синтез которых был рассмотрен в предыдущих главах, обеспечивают передачу значительных сил, так как звенья пары соприкасаются по поверхности. Но условие постоянного соприкасания по поверхности ограничивает число возможных видов низших пар. В механизмах применяется всего шесть видов низших пар: вращательная, поступательная, винтовая, цилиндрическая, сферическая и плоскостная. Поэтому многие практически важные законы преобразования движения звеньев не могут быть получены посредством механизмов, имеющих только низшие пары. Значительно большие возможности для воспроизведения почти любого закона движения имеют механизмы, содержащие высшие пары, так как условия касания взаимодействующих поверхностей звеньев высшей пары по линиям и точкам могут быть выполнены для бесчисленного множества различных поверхностей (рис.6.1).

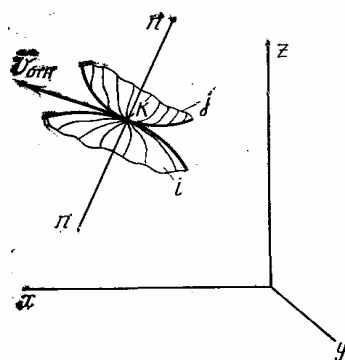


Рисунок 6.1

Взаимодействующие поверхности звеньев высшей пары, обеспечивающие заданный закон их относительного движения, называются сопряженными поверхностями. При воспроизведении возвратного движения можно иметь одну пару сопряженных поверхностей (например, в кулачковых механизмах). Если же требуется воспроизвести непрерывное движение в одном направлении, то надо иметь несколько последовательно взаимодействующих пар сопряженных поверхностей, которые располагаются на выступах, называемых зубьями.

Высшая кинематическая пара, образуемая последовательно взаимодействующими поверхностями зубьев, называется зубчатым зацеплением. Термин «зацепление» (без прибавления слова «зубчатое») можно отнести и к одной паре сопряженных поверхностей. Тогда он является синонимом термина «высшая пара».

Зубчатые передачи - наиболее распространенные передачи в приводах машин и приборов. Их используют для передачи движения в широком диапазоне мощностей (до 300 МВт) и скоростей (до 200 м/с). Они обладают рядом существенных достоинств: имеют относительно малые габариты, в любой момент передаточное отношение поддерживается постоянным (круглые колеса) или изменяется по заданному закону (некруглые колеса), КПД зубчатых передач достаточно высок (до 0,97 - 0,99 для одной пары сопряженных колес - одной ступени передачи). Они обладают высокой надежностью.

Недостатки зубчатых передач обусловлены сравнительно сложной технологией изготовления зубчатых колес, появлением шума при работе передачи на высоких скоростях.

Классификация зубчатых передач производится по геометрическим и функциональным признакам.

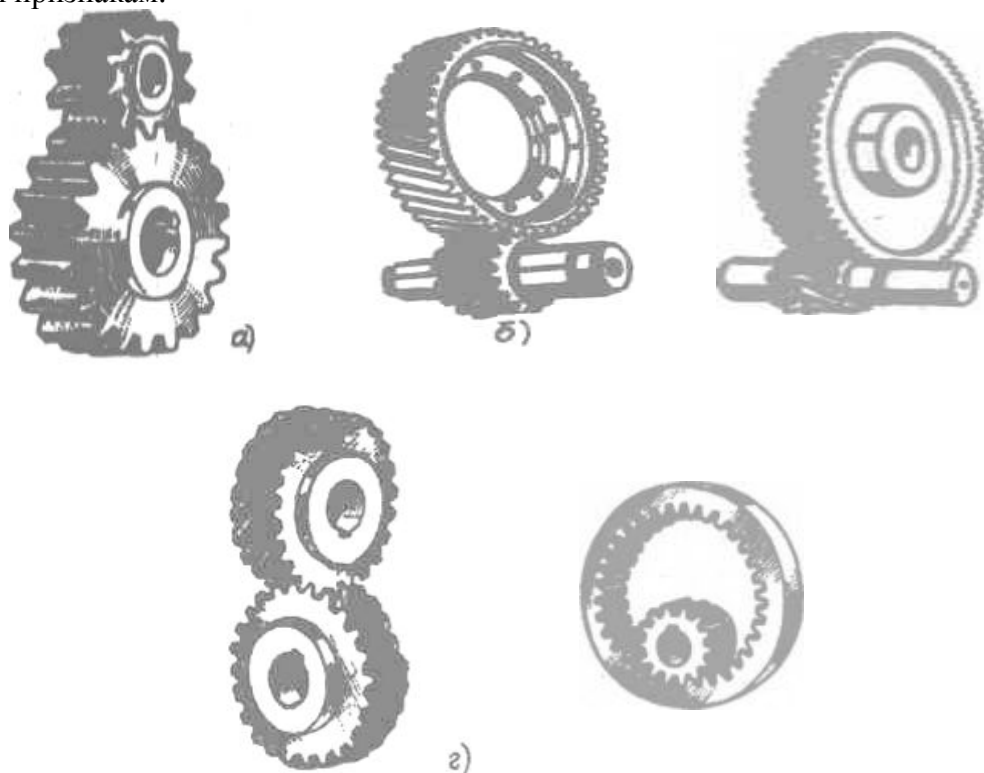


Рисунок 6.2 Зубчатые передачи с параллельными осями (а, б, в, д), винтовые передачи (г)

По взаимному расположению геометрических осей зубчатые передачи разделяются на передачи с:

- параллельными осями (цилиндрические рис.6.2, а, б, в, д);
- пересекающимися осями (конические, рис. 6.3);

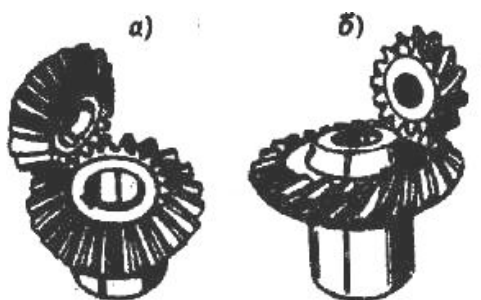


Рисунок 6.3 Зубчатые передачи с пересекающимися осями (а, б)

- со скрещивающимися в пространстве осями (гиперболоидные: червячные (рис.6.5), винтовые (рис.6.2, г), гипоидные (рис.6.4)).

В зависимости от расположения зубьев относительно образующей тела заготовки зубчатые передачи подразделяются на:

- прямозубые (цилиндрические (рис.6.2, а, д) и конические (рис.6.3, а));
- косозубые (рис.6.2, б);
- шевронные (только цилиндрические рис.6.2, в);
- с криволинейным зубом (рис.6.2, г, 6.3, б, 6.4, 6.5).

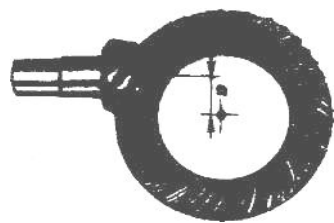


Рисунок 6.4 Гипоидная передача



Рисунок 6.5 Червячная передача

Зацепление зубчатых колес может быть **внешним** (рис.6.6), **внутренним** (рис. 6.7) и **реечным** (рис.6.8).

Внешнее зацепление - зубчатое зацепление, при котором аксоидные поверхности зубчатых колес 1 и 2 расположены одна вне другой. На рис.6.6 торцовое сечение цилиндрической передачи с внешним зацеплением колес. Аксоидные поверхности радиусами r_{w1} и r_{w2} соприкасаются в т.Р. Колеса вращаются в противоположных направлениях с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 , обратно пропорциональными радиусам r_{w1} и r_{w2} или числам зубьев z_1 и z_2 . Внешнее зацепление является наиболее распространенным в зубчатых передачах благодаря простоте устройства и технологичности изготовления таких передач. Зубчатые колеса, образующие внешнее зацепление, называют колесами с внешними зубьями.

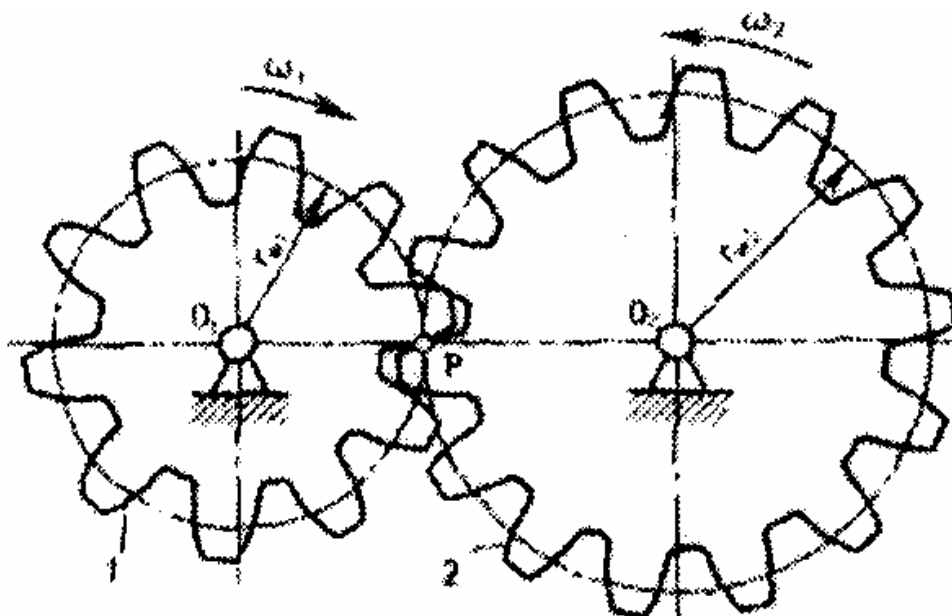


Рисунок 6.6 Внешнее зацепление зубчатых колес

Внутреннее зацепление - зубчатое зацепление, при котором аксоидные поверхности зубчатых колес расположены одна внутри другой. На рис.6.7 торцовое сечение цилиндрической передачи с внутренним зацеплением.

Аксоидные поверхности характеризуются радиусами r_{w1} и r_{w2} и соприкасаются в т. Р. Колеса вращаются в одинаковых направлениях с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 , обратно пропорциональными радиусам r_{w1} и r_{w2} или числам зубьев z_1 и z_2 . Внутреннее зацепление по сравнению с внешним зацеплением из-за сложности изготовления передачи менее распространено. Оно применяется обычно в планетарных передачах, механизмах вращения платформы машины и др. случаях. Передачи с внутренним зацеплением по сравнению с передачами с внешним зацеплением имеют меньшие размеры и массу, характеризуются более плавной работой благодаря большему коэффициенту перекрытия и контакту выпуклых и вогнутых поверхностей зубьев с большим приведенным радиусом кривизны и меньшими скоростями скольжения. Зубчатое колесо 2 с внешней аксоидной

поверхностью и большим числом зубьев называют колесом с внутренними зубьями, а сопряженное с ним колесо 1 – колесом с внешними зубьями.

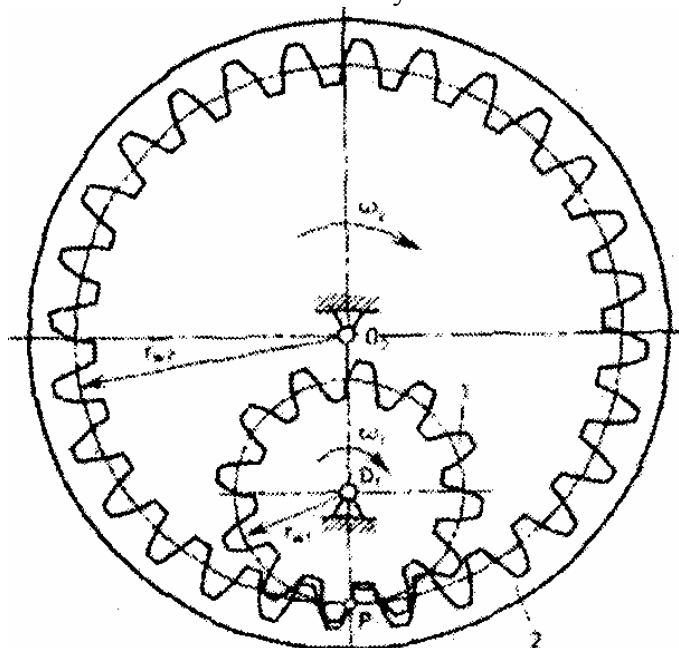


Рисунок 6.7 Внутреннее зацепление зубчатых колес

В **реечном зацеплении** радиус кривизны начальной окружности колеса равен бесконечности (рис.6.8). Такое зацепление применяется для преобразования вращательного движения в поступательное.

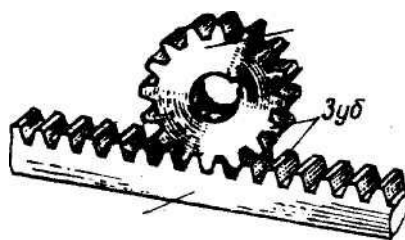


Рисунок 6.8 Реечное зацепление зубчатых колес

В зависимости от характера относительного движения колес различают передачи:

- с неподвижными геометрическими осями колес (обычные или рядовые передачи);
- планетарные и дифференциальные передачи, у которых ось хотя бы одного колеса подвижна в пространстве.

Вопросы для самоконтроля

1. Назовите основные достоинства и недостатки зубчатых передач ?
2. Каково взаимное расположение геометрических осей колес в цилиндрических, конических и гиперболоидных передачах ?
3. Как различаются зубчатые передачи по расположению зубьев относительно образующей тела заготовки колеса ?
4. Чем отличаются внешнее, внутреннее и реечное зацепления ?
5. Назовите различие рядовой и планетарной передач.

6.2. Основной закон зубчатого зацепления

В первых зубчатых передачах зацепление между колесами осуществлялось с помощью стержней, которые врезались в обод колеса радиально или параллельно оси вращения. Однако такая простейшая форма зубьев не обеспечивала непрерывный контакт сопряженных колес при их вращении. Это проявлялось в неравномерности вращения ведомого колеса, его остановках в некоторых положениях при работе передачи. Зубья в виде

стержней, при передаче движения от одного колеса к другому, испытывали ударные нагрузки, что приводило к быстрому выходу их из строя вследствие поломок. Эти недостатки стали серьезным препятствием применения зубчатых передач в часовых механизмах и других машинах.

Во второй половине XIX века Робертом Виллисом была сформулирована и доказана основная теорема (основной закон) зубчатого зацепления, устанавливающая связь между скоростями вращения колес и их геометрическими параметрами.

Простейшая зубчатая передача представляет собой трехзвенный механизм (рис.6.9), состоящий из двух подвижных звеньев (зубчатых колес), образующих с неподвижным звеном две низшие кинематические пары 5-го класса O_1 и O_2 и одну высшую кинематическую пару 4-го класса K между собой. Высшая кинематическая пара K собственно и представляет собой зацепление выступов (зубьев) подвижных звеньев I и 2.

Движение передаётся давлением боковой поверхности зуба ведущего звена I на боковую поверхность зуба ведомого звена 2. Звенья вращаются вокруг осей O_1 и O_2 . Пусть соприкасающиеся между собой точки K_1 звена I и K_2 звена 2 не лежат на линии центров O_1O_2 . Вектор скорости V_1 точки K_1 перпендикулярен прямой O_1K , соединяющей K_1 с центром вращения, а вектор скорости V_2 точки K_2 , перпендикулярен прямой O_2K .

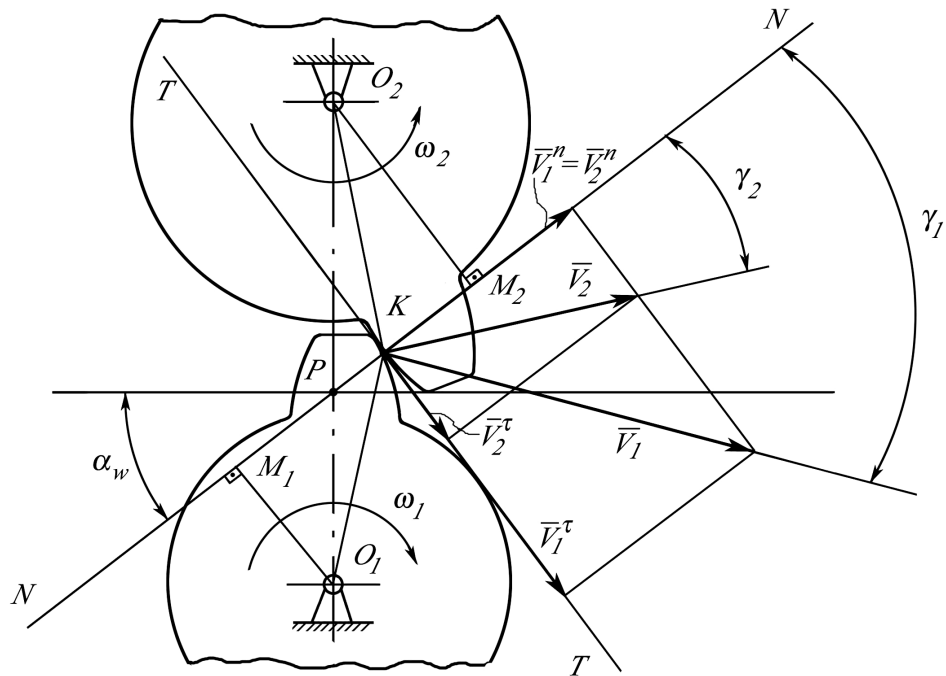


Рисунок 6.9 Зацепление зубчатых колес

В точке контакта K профили имеют общую нормаль NN и общую касательную TT . Разложим векторы скоростей v_1 и v_2 на составляющие по нормали и по касательной, соответственно обозначив их v_1^n , v_2^n и v_1^τ , v_2^τ . Естественное условие непрерывности контакта профилей может быть выражено равенством

$$v_1^n = v_2^n \quad (6.1)$$

так как в противном случае зубья внедрялись бы друг в друга или расходились бы.

При этом, во всех случаях кроме одного, когда точка касания находится на линии O_1O_2 , выполняется неравенство

$$v_1^\tau \neq v_2^\tau \quad (6.2)$$

что свидетельствует об относительном скольжении профилей.

Обозначив углы между векторами скоростей v_1 и v_2 и нормалью NN соответственно через γ_1 и γ_2 получим

$$\begin{aligned} v_1^n &= v_1 \cos \gamma_1 = \omega_1 \cdot O_1K \cdot \cos \gamma_1 \\ v_2^n &= v_2 \cos \gamma_2 = \omega_2 \cdot O_2K \cdot \cos \gamma_2 \end{aligned} \quad (6.3)$$

где ω_1 и ω_2 - угловые скорости вращения звеньев.

Опустим из центров вращения O_1 и O_2 , перпендикуляры на нормаль NN .

Рассмотрим получившиеся треугольники O_1M_1K и O_2M_2K . У них

$$\angle KO_1M_1 = \gamma_1 \text{ и } O_1M_1 = O_1K \cdot \cos \gamma_1,$$

$$\angle KO_2M_2 = \gamma_2 \text{ и } O_2M_2 = O_2K \cdot \cos \gamma_2.$$

Подставив эти значения в выражение (6.3) и учитывая (6.1), получим

$$\omega_1 / \omega_2 = O_2M_2 / O_1M_1 \quad (6.4)$$

где $i_{12} = \omega_1 / \omega_2$ - **передаточное отношение**, принятое в качестве основного кинематического параметра передаточного механизма.

Обозначим P точку пересечения общей нормали NN с линией центров O_1O_2 . Эта точка является мгновенным центром относительного вращения звеньев и получила название **полюса зацепления**.

Из подобия треугольников O_1M_1P и O_2M_2P следует

$$O_2M_2 / O_1M_1 = O_2P / O_1P \quad (6.5)$$

Таким образом, учитывая (1.4) и (1.5), можно записать

$$i_{12} = \pm \omega_1 / \omega_2 = \pm O_2P / O_1P \quad (6.6)$$

где знак "+" принимается для внутреннего зацепления, не меняющего направления вращения, и знак "-" для внешнего зацепления, изменяющего направление вращения.

Выражение (6.6) является математической трактовкой основной теоремы зацепления (теоремы Виллиса), которая формулируется:

для сохранения непрерывного контакта профилей зацепления необходимо, чтобы общая нормаль к профилям, проведенная через точку их касания, делила межцентровое расстояние на части, обратно пропорциональные угловым скоростям.

Из основной теоремы зацепления формулируются два основных следствия.

Если $i_{12} = \text{const}$, то полюс зацепления P не должен менять своего положения на линии центров O_1O_2 . Центроидами (геометрическое место мгновенных центров скоростей звеньев в их относительном движении) относительного движения звеньев в этом случае являются окружности радиусов $r_{w1} = O_1P$ и $r_{w2} = O_2P$, называемые **начальными окружностями**.

Если $i_{12} \neq \text{const}$, соотношение между величинами отрезков O_1P и O_2P , а следовательно, и положение полюса P определяется заданной функцией

$$i_{12} = f(\varphi_1),$$

где φ_1 - угол поворота ведущего звена. Центроиды в этом случае представляют собой кривые, отличные от окружностей.

Угол между общей к профилям зубьев нормалью и прямой, перпендикулярной линии центров в полюсе зацепления, называется **углом зацепления** α_{tw} .

В полюсе зацепления P скольжение сопряженных профилей отсутствует. По мере удаления точки K контакта зубьев по линии зацепления от полюса скорость v_{CK} скольжения возрастает:

$$v_{CK} = KP(\omega_1 \pm \omega_2) \quad (6.7)$$

Установлено, что отношение скорости скольжения к линейной скорости точки рассматриваемого звена в направлении скольжения (v_{CK}/v_1 или v_{CK}/v_2) характеризует износ этого звена в данной точке. Для неподвижного ролика (рис.6.10, а) $v_{CK}/v_2 \rightarrow \infty$ и, соответственно, износ его несоизмеримо больше износа подвижного ролика. Отношение v_{CK}/v_1 или v_{CK}/v_2 называется **коэффициентом удельного скольжения**. Его обозначают ν с соответствующими индексами (1- для 1 колеса, 2- для второго колеса).

Учитывая, что скорость скольжения определяется как разность скоростей соприкасаемых точек,

$$\nu_1 = (v_1 - v_2) / v_1 \quad \nu_2 = (v_2 - v_1) / v_2$$

или

$$\nu_1 = (ds_1 - ds_2) / ds_1$$

$$\nu_2 = (ds_2 - ds_1) / ds_2 \quad (6.8)$$

где ds_1 и ds_2 — элементарные участки пути точки соответственно контакта по профилям первого и второго зубьев при повороте колес на углы $d\varphi_1$ и $d\varphi_2$, связанные передаточным отношением $l_{12} = d\varphi_1/d\varphi_2$.

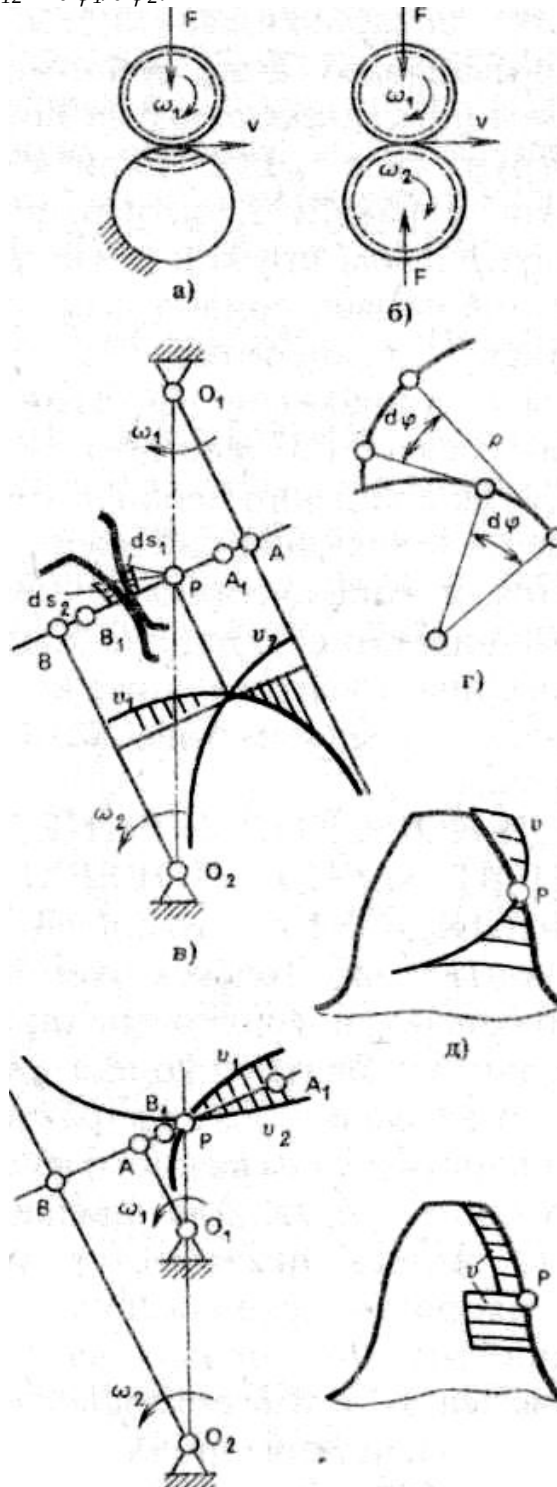


Рисунок 6.10

С учетом свойств эвольвенты (рис.6.10, з) можно записать $ds = \rho \cdot d\varphi$, где ρ - радиус кривизны эвольвенты.

С учетом этого выражения примут вид:

$$\nu_1 = 1 - (\rho_2 d\varphi_2 / \rho_1 d\varphi_1)$$

$$\nu_2 = 1 - (\rho_1 d\varphi_1 / \rho_2 d\varphi_2)$$

(6.9)

Графики коэффициентов удельных скольжений ν_1 и ν_2 , построенные по данным зависимостям, представлены на линии зацепления на рис.6.10, в. При перемещении точки контакта от точки А до точки В ν_1 изменяется от $-\infty$ до 1, а ν_2 - от 1 до $-\infty$.

В реальной передаче, поскольку точка контакта перемещается в пределах активной части линии зацепления A_1B_1 , коэффициенты удельных скольжений имеют конечные значения.

Графики ν можно представить на профиле зуба (рис.6.10, δ). Значение ν у ножки зуба больше, чем у вершины. Этим объясняется большая интенсивность износа поверхности у ножки зуба.

Путем выбора параметров передачи можно уменьшить, увеличить, переместить активную часть линии зацепления, а также изменить величины коэффициентов удельных скольжений — сделать, например, их одинаковыми у ножек зубьев обоих взаимодействующих колес.

С учетом того, что зуб колеса участвует в зацеплении меньшее число раз, чем зуб шестерни, целесообразно сопоставлять величины ν_1 и ν_2 / i_{12} . Это имеет особое значение при больших передаточных отношениях.

Для внутреннего зацепления графики коэффициентов удельных скольжений даны на рис.6.10, ϵ .

Удельные скольжения для циклоидального зацепления представлены на профиле зуба на рис.6.10, κ .

Учитывая, что износ контактируемых поверхностей является функцией скорости скольжения, при конструировании передачи необходимо выбрать такое расположение сопряженных профилей относительно центроид, чтобы скорость скольжения находилась в допустимых пределах.

Наиболее распространенными профилями являются профили, расположенные по обе стороны от центроиды, т.е. имеющие головку и ножку зуба.

В настоящее время используется ряд зубчатых передач, отвечающих требованиям основной теоремы зубчатого зацепления. К ним относятся эвольвентные, циклоидальные, часовые, цевочные, зацепление Новикова.

Вопросы для самоконтроля

1. В чём сущность основной теоремы зубчатого зацепления '?
2. Что такое полюс зацепления ?
3. Какой угол называется углом зацепления ?
4. Какая окружность называется начальной окружностью ?
5. Что является центроидами относительного движения колес при постоянном передаточном отношении ?
6. Происходит ли проскальзывание сопряженных профилей зубьев: в полюсе зацепления, в точках контакта, не совпадающих с полюсом.
7. От чего зависит скорость относительного скольжения сопряженных профилей?
8. На какой параметр работоспособности передачи влияет величина скорости скольжения ?
9. Какие форды профиля зубьев отвечают основной теореме зубчатого зацепления?

6.3. Основные параметры зубчатого зацепления

Рассмотрение ограничим зубчатыми передачами с круглыми колесами.

Расстояние между одноименными точками профилей соседних зубьев, измеренное по дуге окружности с центром на оси вращения колеса, называется **окружным шагом**.

На рис.6.11 показаны сечения зубьев колеса осевой 2, торцовой 1 плоскостями. Да-на также одна из соосных цилиндрических поверхностей, например делительная поверхность 3. Различают шаг окружной p_t , осевой p_x , нормальный p_n . В зависимости от вида поверхности 3 каждый из перечисленных шагов может быть делительным, начальным и т.п. Центральный угол, соответствующий дуге p_t , называют угловым шагом τ , $\tau = 2\pi/z$, где z — число зубьев.

Очевидно, что окружной шаг меняется с диаметром окружности, на которой его измеряют.

Если число зубьев колеса z , радиус начальной окружности r_w , шаг зубьев по начальной окружности p_t , то длина окружности: $2\pi r_w = z p_t$.

Для двух находящихся в зацеплении колес должно выполняться

$$p_t = 2\pi r_{w1}/z_1 = 2\pi r_{w2}/z_2 \quad (6.10)$$

Следовательно, основной кинематический параметр - **передаточное отношение** зубчатой передачи может быть определено:

$$i_{12} = r_{w2}/r_{w1} = z_2/z_1 \quad (6.11)$$

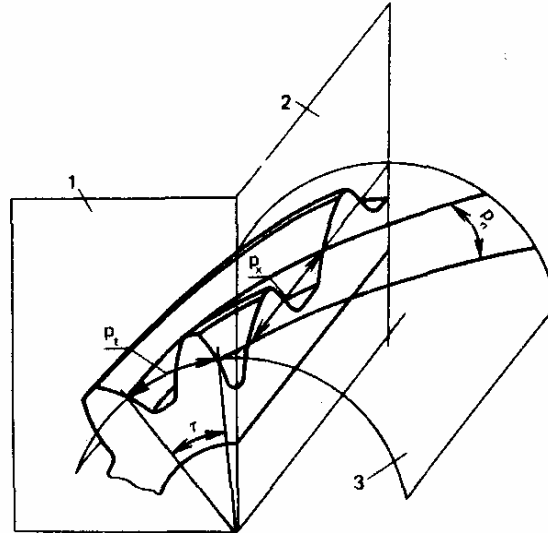


Рисунок 6.11 Сечения зубьев колеса осевой 2 и торцевой 1 плоскостями

Для одной пары зубчатых колес предусматривается понятие **передаточное число** зубчатой передачи

$$u = z_2/z_1$$

где z_2 - число зубьев зубчатого колеса; z_1 - число зубьев шестерни. Под шестерней понимается зубчатое колесо с меньшим числом зубьев, а при равенстве чисел зубьев - ведущее колесо. При ведущей шестерне

$$u = |i_{12}|.$$

Одноступенчатые передачи обычно применяются при передаточных отношениях $i \leq 12$ - в приборах, $i \leq 6$ - в машинах. Передаточное отношение передачи (рис. 6.12, а)

$$i_{12} = -\omega_2/\omega_1 = -z_2/z_1$$

Многоступенчатые передачи применяют в тех случаях, когда требуется осуществить большие передаточные отношения. Для трехступенчатой передачи (рис. 6.12, б)

$$i_{16} = (-1)^k \frac{\omega_6}{\omega_1} = (-1)^3 \cdot i_{12} \cdot i_{34} \cdot i_{56} = -\frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_4}{z_3} \cdot \frac{z_6}{z_5}$$

где $k = 3$ - число пар внешнего зацепления.

В рядовой передаче (рис. 6.12, в) с последовательным соединением колес числа зубьев промежуточных колес не влияют на передаточное отношение механизма:

$$i_{14} = (-1)^k \frac{\omega_4}{\omega_1} = (-1)^3 \cdot i_{12} \cdot i_{23} \cdot i_{34} = -\frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_2} \cdot \frac{z_4}{z_3} = -\frac{z_4}{z_1}$$

Такие колеса называются **паразитными**. Они применяются для получения требуемого направления вращения или для передачи движения между далеко отстоящими валами.

Учитывая, что $2\pi r_w = z p_t$, получим $d_w = z p_t/\pi$. Из (6.10) видно, что для двух сопряженных колес отношение p_t/π будет постоянным. Отношение $p_t/\pi = m$ [мм], называется **модулем зацепления**. Значения модуля, как основного параметра зубчатого зацепления стандартизованы (СТ СЭВ 310-76). Стандартным значение модуля будет только для од-

ной окружности, называемой делительной. Делительная окружность делит зуб на головку и ножку.

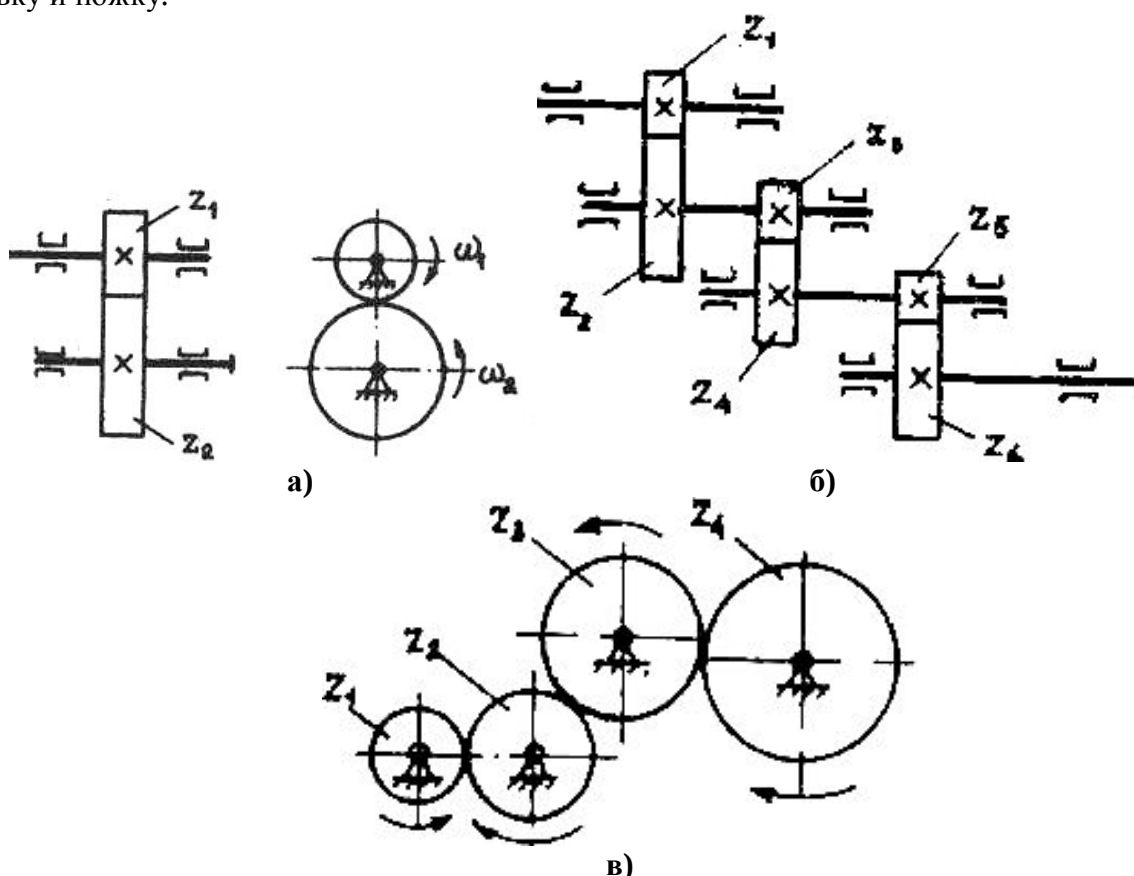


Рисунок 6.12 Одноступенчатая передача (а), трехступенчатая передача (б), рядовая передача (в)

Делительная окружность - это базовая окружность для определения размеров зубьев. Она является характеристикой одного зубчатого колеса, диаметр этой окружности имеет постоянную величину. Начальные окружности дают характеристику зацепления двух зубчатых колес, диаметры этих колес зависят от межосевого расстояния. Для зубчатых колес без смещения (**нулевое** колесо) делительная и начальная окружности совпадают.

Для нулевых колес $d_w = d$.

Внешняя окружность зубчатого колеса, очерчивающая вершины зубьев, называется окружностью **вершин** (диаметр окружности вершин d_a) (рис. 6.13).

Окружность, ограничивающая основание впадин, называется окружностью **впадин** (диаметр окружности впадин d_f).

Элемент зуба, расположенный с внешней стороны делительной окружности для внешнего зацепления (с внутренней стороны делительной окружности для внутреннего зацепления), называется **головкой** зуба (высота головки зуба h_a), а с внутренней стороны этой окружности для внешнего зацепления (с наружной стороны делительной окружности - для внутреннего зацепления) - **ножкой** зуба (высота ножки зуба h_f).

Выбранный модуль зацепления является основным параметром для определения размеров зубчатого зацепления.

Высота головки зуба

$$h_a = h_a^* \cdot m \quad (6.11)$$

где h_a^* - коэффициент высоты головки зуба:

$h_a^* = 1$ - для нормального зуба;

$h_a^* = 0,8$ - для укороченного зуба.

8. Какая величина называется модулем зацепления?
9. Могут ли два колеса, находящиеся в зацеплении иметь разный модуль?
10. Какая окружность называется окружностью вершин?
11. Какая окружность называется окружностью впадин?
12. Чему равна высота головки зуба?
13. Чему равна высота ножки зуба?
14. Каково соотношение между высотой головки и ножки зуба?
15. Как рассчитать диаметр окружности вершин?
16. Как рассчитать диаметр окружности впадин?

6.4. Эвольвентное зубчатое зацепление

В эвольвентном зацеплении боковая поверхность зуба описывается эвольвентой.

Эвольвента (латинское *evolvens* - разvertyающий) — кривая, геометрическим местом центров кривизны которой является другая кривая, называемая эволютой. Касательные к эволюте являются нормальными к эвольвенте (на рис.6.14, а $A_1O \perp A_1K_1$, $A_1K_1 \perp TT$). Длина дуги K_0A_1 (рис.6.14, а) равна отрезку нормали K_1A_1 . Эвольвента может быть построена обкатыванием по эволюте без скольжения прямой, касательной к эволюте. Отрезок прямой ρ равен радиусу кривизны эвольвенты. Точка K_1 описывает эвольвенту. Если взять точку, расположенную вне этой прямой, но жестко связанную с ней, то эта точка опишет удлиненную эвольвенту (рис.6.14, б) или укороченную эвольвенту (рис.6.14, в).

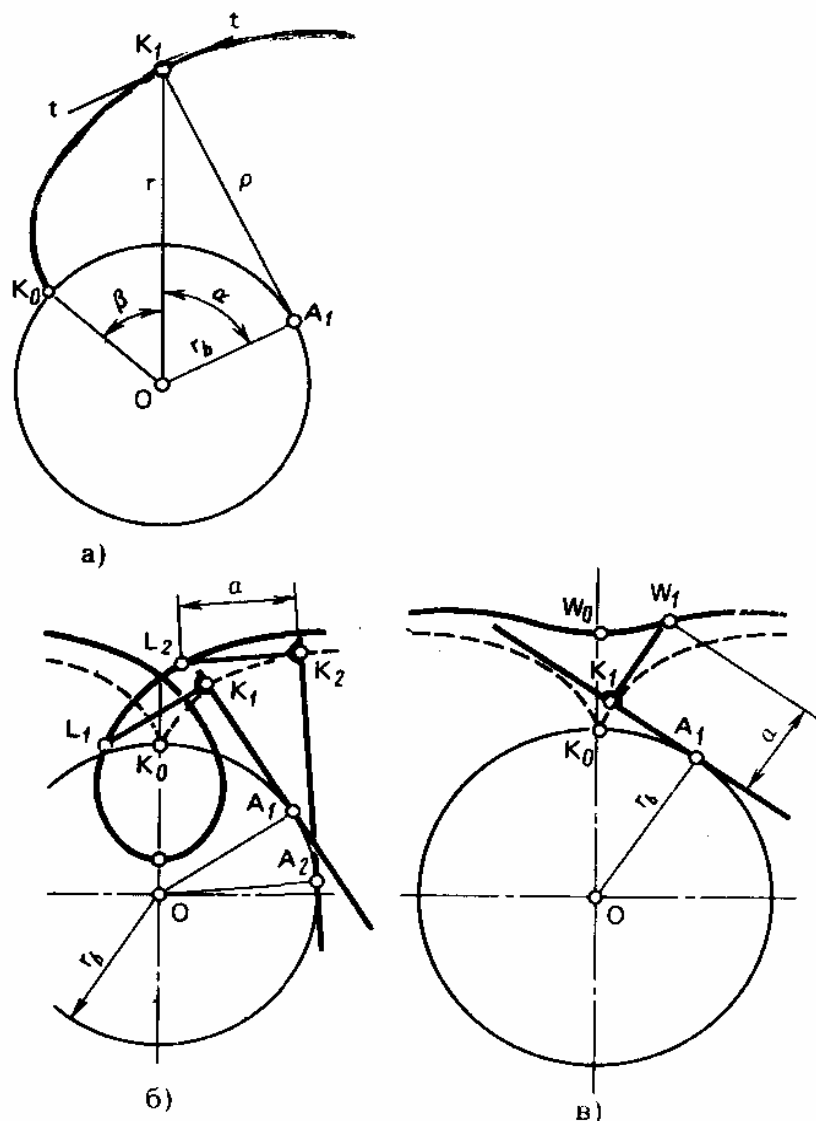


Рисунок 6.14 Эвольвентное зубчатое зацепление

На рис.6.14, б с прямой A_1K_1 жестко связана прямая L_1K_1 . Второе положение этой прямой обозначено L_2K_2 . Точка L_2 расположена на расстоянии a от прямой A_2K_2 . Точка L_1 описывает удлинненную эвольвенту при обкатывании прямой по эволюте.

На рис.6.14, в точке W_1 жестко связана с прямой A_1K_1 и расположена на расстоянии a от нее, причем при перекатывании прямой A_1K_1 по эволюте точка W_1 описывает укороченную эвольвенту, которая всегда находится вне эволюты.

Эвольвенту используют, в частности, в качестве контура зубьев в зубчатых передачах.

При этом эволютой для круглых колес является окружность радиусом r_b , и эвольвенту называют эвольвентой окружности.

В соответствии с определением и свойствами эвольвенты ее можно представить в аналитическом виде.

Точка K_1 на эвольвенте окружности (рис.6.14, а) характеризуется параметрами: радиусом $r = OK_1$ и углом β .

Уравнения эвольвенты представляют в виде зависимостей этих параметров от радиуса r и угла α .

Из свойства эвольвенты следует

$$K_1A_1 = K_0\ddot{A}_1, \text{ где } K_1A_1 = r_b \operatorname{tg} \alpha, \quad K_0\ddot{A}_1 = r_b(\alpha + \beta)$$

и в соответствии с этим

$$r_b \operatorname{tg} \alpha = r_b(\alpha + \beta)$$

Следовательно,

$$\beta = \operatorname{tg} \alpha - \alpha,$$

а из треугольника K_1A_1O $r = r_b / \cos \alpha$.

Величину $\operatorname{tg} \alpha - \alpha$, называют эвольвентным углом профиля зуба и обозначают $\operatorname{inv} \alpha$ (инвалюта α). С учетом этого уравнения эвольвенты имеют вид:

$$\beta = \operatorname{inv} \alpha,$$

$$r = r_b / \cos \alpha.$$

Окружность радиуса r_b называют **основной** окружностью.

Так как нормаль к эвольвенте всегда касается основной окружности, то общая нормаль NN к сопряженным профилям касается обеих основных окружностей в т. A и B (рис.6.15).

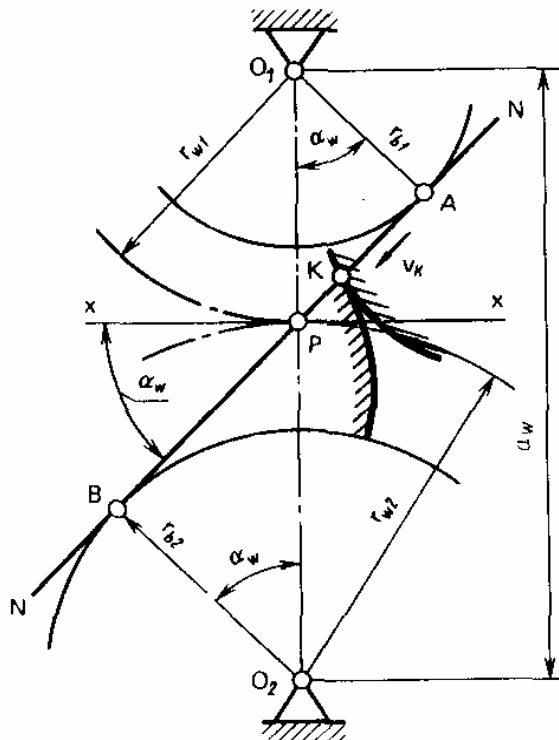


Рисунок 6.15 Общая нормаль NN к сопряженным профилям в зубчатом зацеплении

Эта же нормаль в соответствии с основной теоремой зацепления проходит через полюс P . Очевидно, что эта нормаль при вращении круглых колес сохраняет неизменным свое положение. При ведущем колесе с центром O_1 и вращении его по часовой стрелке точка контакта K перемещается в направлении v_k по линии AB , которая представляет собой линию зацепления. Таким образом, в эвольвентном зацеплении имеет место прямая линия зацепления.

Угол между линией зацепления и перпендикуляром xx к линии центров O_1O_2 называется **углом зацепления** и обозначается α_w . Он равен углам AO_1P и BO_2P . Угол зацепления равен углу давления в полюсе зацепления и характеризует направление силы, действующей со стороны одного колеса на другое.

Начальные и основные радиусы связаны зависимостями:

$$r_{w1} = r_{b1} / \cos \alpha_w; \quad r_{w2} = r_{b2} / \cos \alpha_w.$$

Поэтому для внешнего эвольвентного зацепления

$$a_w = \frac{r_{b1} + r_{b2}}{\cos \alpha_w}, \text{ а } i_{12} = -\frac{r_{w2}}{r_{w1}} = -\frac{r_{b2}}{r_{b1}}.$$

означает, что передаточное отношение однозначно определяется отношением основных радиусов. В связи с этим, если, например, при неизменных r_{b1} и r_{b2} изменить межосевое расстояние a_w , то изменятся радиусы r_{w1} и r_{w2} и угол α_w , а i_{12} останется тем же. Это свойство эвольвентного зацепления свидетельствует о том, что при погрешностях расположения осей с сохранением их параллельности передаточное отношение остается постоянным.

Графическое построение эвольвентного зацепления производится следующим образом (рис.6.16). Пусть O_1O_2 - линия центров. Проводим начальные окружности. Через точку их касания проводим линию зацепления под углом $\alpha_w = 20^\circ$ к общей касательной в полюсе зацепления.

Из O_1 и O_2 опускаем перпендикуляры на линию зацепления - это есть радиусы основных окружностей

$$r_{b1} = r_{w1} \cos \alpha_w; \quad r_{b2} = r_{w2} \cos \alpha_w.$$

Расстояние PK делим на равные части, откладывая отрезки и за т. K . Соединяем полученные точки с центром O_2 . В точках пересечения прямых $K_1O_2, \dots, K_nO_2$, с основной окружностью проводим касательные. Расстояние от полюса зацепления до соответствующего радиуса по линии зацепления откладываем по касательной, перпендикулярной этому радиусу. Точки соединяем плавной кривой. Профиль проводится между окружностями выступов и впадин.

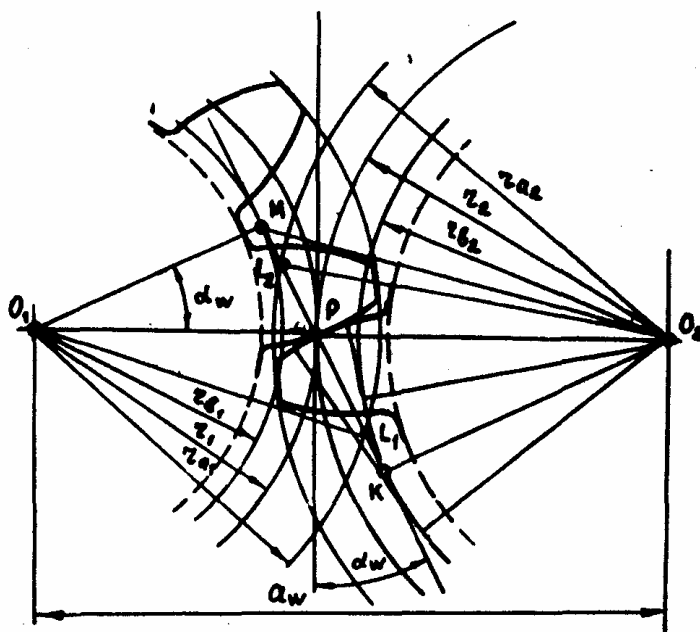


Рисунок 6.16 Графическое построение эвольвентного зацепления

Вторая сторона профиля строится симметрично, откладывая по начальной окружности $s = 1,57m$.

Точки a и b (рис.6.17) пересечения окружностей вершин зубьев с линией зацепления AB определяют активную линию зацепления, т.е. ту часть линии зацепления, по которой при выбранных размерах зубьев перемещается точка контакта профилей зубьев.

Активный участок профиля зуба колеса 1 (отмечен двойной линией со штриховкой) располагается от вершины зуба до точки пересечения профиля с окружностью, проведенной из центра O_1 через точку a .

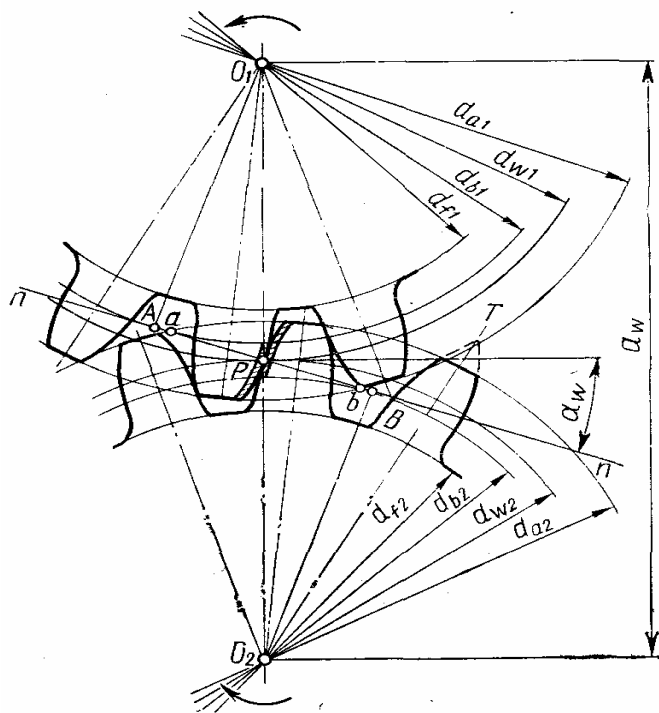


Рисунок 6.17

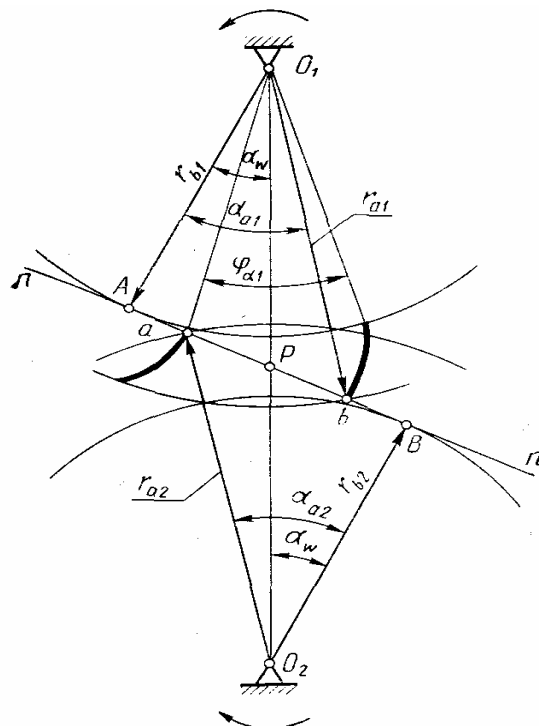


Рисунок 6.18

Соответственно для колеса 2 надо провести окружность из центра O_2 через точку b . Переходные (нерабочие) участки профиля скругляются у окружности впадин радиусом $\approx 0,4m$, причем, если радиус основной окружности больше радиуса окружности впадин на величину, превышающую $0,4m$, то дополнительно вводится участок, очерченный по радиусу к центру колеса. Переходные участки можно очерчивать и по другим кривым при соблюдении обязательного условия, что они не будут участвовать в зацеплении. Обычно эти кривые получаются при обработке профиля зуба как траектории точек инструмента в движении его относительно заготовки.

Проверка дополнительных условий при синтезе эвольвентного зацепления.

Из многих возможных дополнительных условий синтеза (ограничений), которые можно проверить по картине зацепления, рассмотрим три условия: отсутствие заострения зубьев, отсутствие интерференции зубьев и обеспечение непрерывности взаимодействия зубьев.

Заострение зуба получается, если точка T (см. рис.6.17) пересечения двух симметричных профилей располагается вблизи окружности вершин зубьев, и толщина зуба по этой окружности получается менее некоторой величины, например $(0,1—0,15)m$. Для устранения заострения зуба можно уменьшить радиус окружности вершин или изменить коэффициенты смещения.

Интерференцией (наложением) зубьев называется явление, состоящее в том, что при рассмотрении теоретической картины зацепления часть пространства оказывается одновременно занятой двумя зубьями разных колес. Для внешнего эвольвентного зацепления условие отсутствия интерференции состоит в том, что взаимодействие зубьев должно происходить только на участке AB , где обеспечивается касание зубьев.

Условие непрерывности взаимодействия зубьев состоит в том, что вторая пара

взаимодействующих зубьев должна войти в зацепление прежде, чем выйдет из зацепления первая пара. Если вращение колеса 1 (рис.6.18) происходит против хода часовой стрелки, то зуб входит в зацепление, когда его профиль пересекает линию зацепления в точке a и выходит из зацепления в точке b . Угол поворота зубчатого колеса от входа зуба в зацепление до выхода его из зацепления называется углом перекрытия колеса φ_α . Отношение угла перекрытия колеса к его угловому шагу называется **коэффициентом перекрытия**. Для колеса 1

$$\varepsilon_\alpha = \varphi_{\alpha 1} / \tau_1. \quad (6.18)$$

Для непрерывности зацепления необходимо, чтобы угол перекрытия был больше углового шага, т.е. $\varepsilon_\alpha > 1$.

По свойству образования эвольвенты дуга, которую проходит начальная точка эвольвенты от входа зуба в зацепление до выхода его из зацепления, равна длине активной линии зацепления ab . Следовательно, угол перекрытия для колеса 1 $\varphi_{\alpha 1} = ab/r_{b1}$.

Подставляя значение угла перекрытия и углового шага в (6.18) получаем

$$\varepsilon_\alpha = \frac{(ab)z_1}{r_{b1}2\pi} \text{ или } \varepsilon_\alpha = \frac{(ab)}{P_b}; \quad (6.19)$$

где $p_b = \pi m \cos \alpha_w$ — шаг зубьев по основной окружности.

Формулу (6.19) можно получить также, если взять отношение угла перекрытия $\varphi_{\alpha 2}$ для колеса 2 к его угловому шагу τ_2 .

Отрезок ab может быть вычислен из условия

$$ab = Ab - AP + Ba - BP.$$

Подставляя значения указанных отрезков из треугольников O_1Ab , O_1AP , O_2Ba и O_2BP , получаем

$$ab = r_{b1}(tg \alpha_{a1} - tg \alpha_w) + r_{b2}(tg \alpha_{a2} - tg \alpha_w),$$

где α_{a1} и α_{a2} — углы профиля зуба у вершин, определяемые из соотношений:

$$\cos \alpha_{a1} = r_{b1}/r_{a1}; \quad \cos \alpha_{a2} = r_{b2}/r_{a2}.$$

Отсюда коэффициент перекрытия

$$\varepsilon_\alpha = \frac{tg \alpha_{a1} - tg \alpha_w}{\tau_1} + \frac{tg \alpha_{a2} - tg \alpha_w}{\tau_2}. \quad (6.20)$$

или

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{p_t \cos \alpha_w} [\sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} + \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} - a_w \sin \alpha_w].$$

Чем выше коэффициент перекрытия, тем лучше работает передача (меньше шум, вибрации). Увеличение коэффициента перекрытия может быть достигнуто применением косозубых колес (рис.6.20). В этом случае

$$\varepsilon_\gamma = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta \quad (6.21)$$

где ε_β - коэффициент осевого перекрытия.

Коэффициент осевого перекрытия — отношение угла осевого перекрытия φ_β (угла поворота зубчатого колеса косозубой цилиндрической передачи, при котором общая точка контакта зубьев перемещается по линии зуба этого колеса от одного из торцов, ограничивающих рабочую ширину венца, до другого) к его угловому шагу τ :

$$\varepsilon_\beta = \frac{\varphi_\beta}{\tau}, \text{ где } \varphi_\beta = \frac{\tilde{MN}}{r}, \text{ а } \tilde{MN} = b_w tg \beta. \quad (6.22)$$

Чем больше угол наклона линии зуба β , тем можно получить большую величину ε_β при той же рабочей ширине венца.

Увеличение ε_β позволяет повысить несущую способность, плавность работы передачи, уменьшить шум, но приводит к возрастанию скорости скольжения контактных точек вдоль линии зуба и осевой составляющей силы в зацеплении.

Наименьшее число зубьев. При проектировании зубчатых передач часто сталкиваются с проблемой габаритов передачи. Как было показано выше, размеры передачи зависят от ее модуля и числа зубьев колес. Величина модуля определяется из условий проч-

ности передачи. Беспредельное уменьшение габарита за счёт уменьшения числа зубьев невозможно, т.к. при некотором числе зубьев наступают нарушения нормальной работы передачи.

Наименьшее число зубьев, обеспечивающее нормальную работу передачи, определяется из условия предотвращения заклинивания или подрезания ножки зуба шестерни головкой зуба колеса.

Эти явления могут происходить в тех случаях, когда длина активной части линии зацепления больше расстояния между точками касания основных окружностей с линией зацепления (предельные точки).

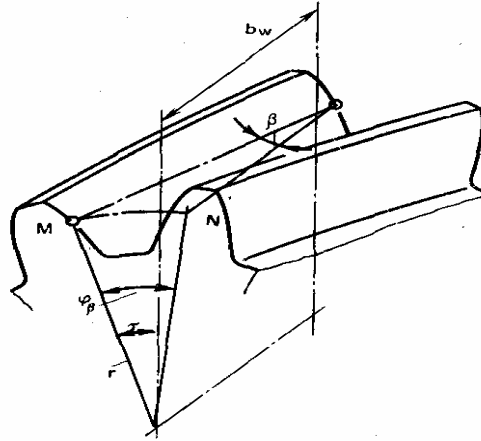


Рисунок 6.20 Косозубая зубчатая передача

Если такая картина наблюдается при нарезании зубьев, то происходит подрезание ножки зуба, т.е. зуб ослабляется в опасном сечении, что может привести к выходу зацепления из строя.

Если увеличенная длина активной части линии зацепления наблюдается в работающей передаче, то происходит заклинивание, в результате чего - повышенный износ и разрушение зуба.

Установим условие отсутствия подрезания.

Рассмотрим $\triangle O_1MO_2$ (рис. 6.16). Условие отсутствия подрезания

$$O_2M \geq r_{a2}$$

Из $\triangle O_1MO_2$ имеем

$$r_{a2}^2 = a_w^2 + r_1^2 - 2a_w \cdot r_b \cdot \cos \alpha_w \quad (6.23)$$

Так как

$$r_{a2} = \frac{mz_2}{2}; \quad a_w = \frac{m(z_1 + z_2)}{2}; \quad r_b = \frac{mz_2}{2} \cos^2 \alpha_w.$$

то, подставив полученные выражения в (6.23), получим

$$(r_2 + 2)^2 = (r_1 + r_2)^2 + r_1^2 \cos^2 \alpha_w - 2(r_1 + r_2)r_1 \cos^2 \alpha_w \quad (6.24)$$

Так как $z_2 = i_{12} \cdot z_1$, то

$$\frac{z_1^2 \cdot \sin^2 \alpha_w - 4}{4 \cdot z_1 - 2 \cdot z_1^2 \cdot \sin^2 \alpha_w} \geq i_{12} \quad (6.25)$$

Подставляя в (6.25) различные значения α_w и i_{12} получают $z_{1\min}$, при котором еще нет подрезания зубьев.

i_{12}	z_{1min}	
	$\alpha_w = 20^\circ$	$\alpha_w = 15^\circ$
1	12	21
2	15	25
3	15	27
4	16	27
5...6	16	28
7...12	17	29
13...	17	30

Обычно для нормального зубчатого зацепления с углом $\alpha_w=20^\circ$ принимают $z_{1min}=17$.

Устранение подрезания при $z < 17$ обеспечивается за счёт корректирования (исправления) зубчатого зацепления.

Угловая коррекция. Как видно из формулы (6.25) угол зацепления оказывает существенное влияние на условия подрезания.

При нарезании зубчатого колеса методом копирования для корректирования нужно иметь специальный инструмент с повышенным углом зацепления. При использовании метода обкатки нарезание корректировочного колеса производится нормальным инструментом.

Недостаток метода: уменьшается коэффициент перекрытия.

Применение укороченного зуба. При этом окружность головок выступов не должна заходить за предельную точку линии зацепления

$$h' < h'_{\text{норм}} = m$$

$$h < h_{\text{норм}} = 2,25m$$

Обычно применяют колеса с $h=2m$; $h=1,9m$; $h=1,8m$; $h=1,75m$.

Недостаток - нестандартный инструмент, уменьшение ε_α .

Высотная коррекция. При этом методе высота зуба сохраняется, но перераспределяется соотношение между высотой головки и ножки зуба у колеса и у шестерни.

Это возможно только при $i_{12} \gg 1$.

Угловая и высотная коррекция путем смещения нормального инструмента.

Такая коррекция производится нормальным инструментом при нарезании зубчатого колеса методом обкатки. Определим требуемую величину смещения инструмента, обеспечивающую нарезание зуба без подрезания (абсолютное смещение).

$$X = fm \cdot \left(1 - \frac{z}{z_0} \right) \quad (6.26)$$

где $H = f \cdot m$ - расстояние от средней линии инструмента (модульной рейки) до точки, которой осуществляется подрезание. Следовательно

$$X = f \cdot m - \frac{m \cdot z}{2} \cdot \sin^2 \alpha_0 \quad (6.27)$$

При $x = 0$

$$z_0 = \frac{2f}{\sin \alpha_0}; \text{ если } \alpha_0 = 20^\circ \text{ и } f = 1, \text{ то } z_0 = 17$$

$$X = fm \cdot \left(1 - \frac{z}{z_0} \right)$$

Тогда

Коэффициент смещения:

$$x = 1 - \frac{z}{z_0}$$

$$X = x \cdot m \quad (6.28)$$

Если $X > 0$, то смещение положительное и колеса обозначаются K^+ . Особенность такого зацепления - повышенный угол зацепления и увеличенное межцентровое расстояние.

Иногда коррекцию зубчатых колес производят при $z_{\min} > 17$ для того, чтобы вписаться в заданное межосевое расстояние. При этом применяется коррекция методом смещения нормального инструмента.

При использовании указанного метода, диаметр делительной окружности остается неизменным, а диаметр начальной окружности увеличивается (при положительном) или уменьшается (при отрицательном) на 2 величины абсолютного смещения инструмента.

Коррекция может производиться так же для выравнивания коэффициентов удельного скольжения. В этом случае коэффициенты смещения инструмента выбираются по справочным таблицам.

Вопросы для самоконтроля

1. Какая кривая называется эвольвентной ?
2. Задайтесь модулем m и числами зубьев z_1 и z_2 пары зубчатых колес и постройте графически картину зацепления.
3. Что такое коэффициент перекрытия ? Каково его минимальное значение, необходимое для нормальной работы передачи ?
4. Чем определяется наименьшее число зубьев, обеспечивающее нормальную работу передачи ?
5. Как устранить подрезание ножки зуба при $z < 17$?
6. Как изменится межосевое расстояние зубчатой передачи, если оба колеса имеют положительную коррекцию ?

6.5. Зубчатые зацепления не эвольвентного профиля

Циклоидальное зацепление — зубчатое зацепление, в котором сопряженные профили зубьев выполнены по циклоидальным кривым. Профили зубьев образуются путем перекатывания производящих окружностей Π_1 и Π_2 по начальным окружностям 1 и 2 (рис.6.21). Точка P , принадлежащая окружности Π_1 , очерчивает головку зуба по эпициклоиде $\mathcal{E}_u$ (Π_1 катится по окружности 1), а точка P , взятая на окружности Π_2 , очерчивает ножку зуба по гипоциклоиде Γ_u (Π_2 также катится по окружности 1). Аналогично строится профиль зуба второго колеса. Профили взаимно огибаемые.

Циклоидальное зацепление характеризуется более высокими по сравнению с эвольвентным зацеплением нагрузочной способностью и износостойкостью зубьев. Это объясняется, в частности, соотношением кривизны зубьев и малыми удельными скольжениями. Однако циклоидальное зацепление чувствительно к изменению межосевого расстояния (погрешностям изготовления, деформациям валов) и сложно в изготовлении. По этим причинам в настоящее время оно применяется редко.

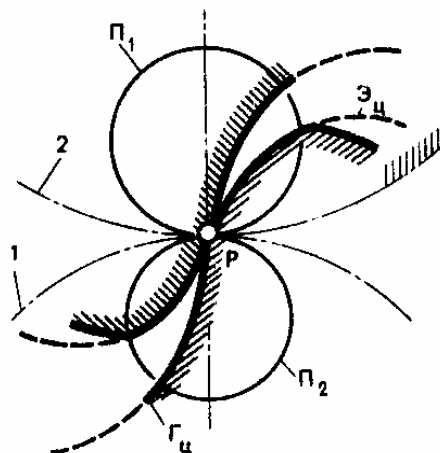


Рисунок 6.21 Циклоидальное зубчатое зацепление

Часовое зацепление - приближенное циклоидальное зацепление, в котором циклоидальные кривые заменены дугами окружности ρ_1 , ρ_2 и отрезками прямых (рис.6.22).

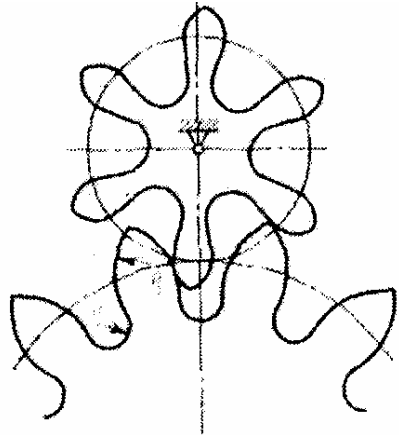


Рисунок 6.22 Часовое зубчатое зацепление

Основное достоинство часового зацепления — малые углы давления и, следовательно, требуются незначительные силы для проворота зубчатых колес в маломощных ускоряющих механизмах.

Цевочное зацепление - зубчатое зацепление посредством цилиндрических круговых элементов — цевок и зубьев с сопряженным профилем. На рис.6.23 показаны разновидности циклоидальных профилей, используемые в цевочных передачах.

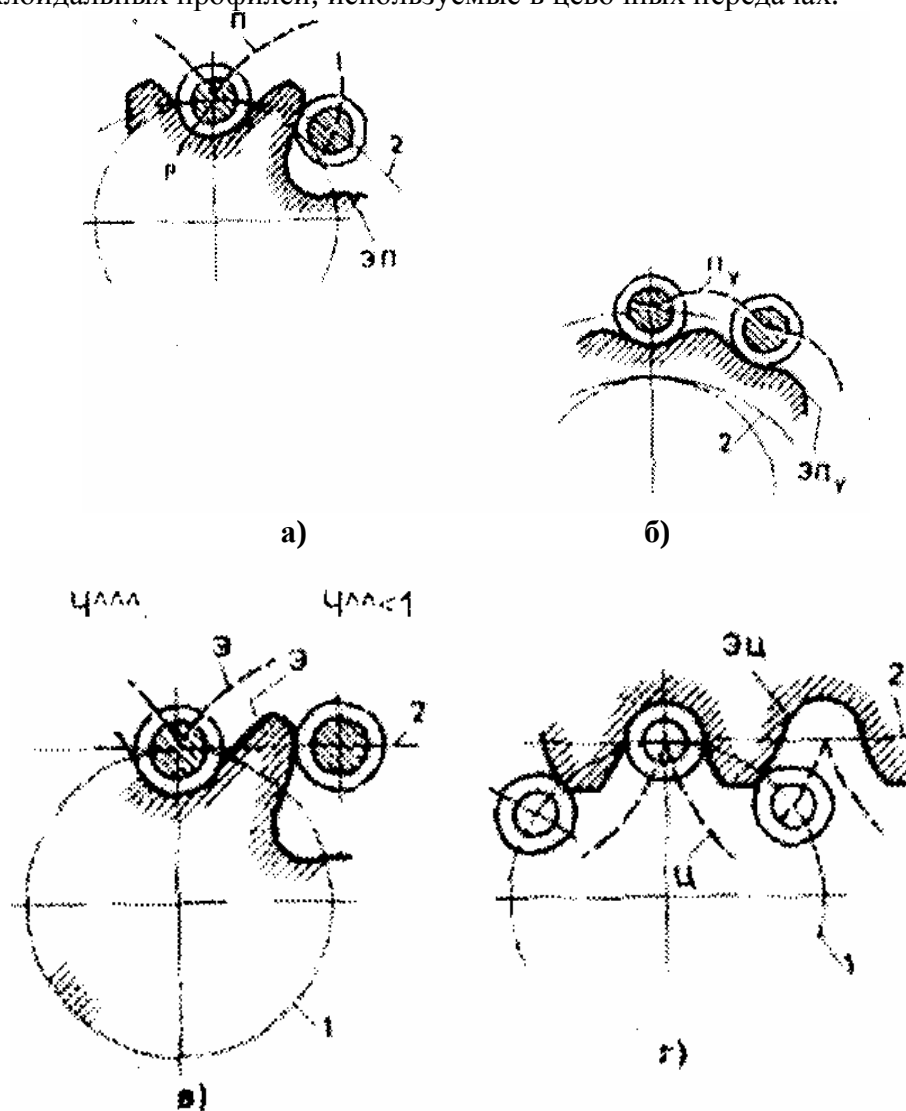


Рисунок 6.23 Цевочное зубчатое зацепление

На сх. *a* колесо 2 имеет круговой профиль зубьев-цевок. При обкатывании его по колесу 1 получается траектория т. *P* — перициклоида *Π*, а профиль зуба колеса 1 очерчивается по эквидистанте *ЭΠ* к перициклоиде *Π*. Внешнее и внутреннее зацепления таких колес применялись сравнительно широко. В настоящее время они еще встречаются в механизмах вращения кранов и других устройствах.

Разновидность цевочного зацепления колес, в которой профили располагаются за пределом окружностей 1 и 2, используют для размещения в колесах подшипников и других элементов передачи. Такое зацепление называется внецентроидным (сх. *б*). При перекатывании колеса 2 по колесу 1 получается траектория центров цевок — перициклоида укороченная *Π_у*, а профиль зуба колеса 1 очерчивается по эквидистанте к этой траектории *ЭΠ_у*. Это зацепление применяется в передачах с малой разницей чисел зубьев. Оно характеризуется большими углами давления, но позволяет передавать нагрузку при большом числе контактирующих пар зубьев. Точность изготовления передач, очень высокая. Цевочное зацепление рейки с колесом используется для преобразования вращательного движения в поступательное. Профиль зубьев представляет собой эвольвенту *Э* (сх. *в*).

Известны также зацепления рейки или большого колеса с малым цевочным колесом. Для получения постоянного передаточного отношения профиль зуба должен соответствовать эквидистанте к циклоиде *ЭЦ* (сх. *г*). Такой вид цевочного зацепления практически не применяют.

Передача Новикова — косозубая цилиндрическая передача с линейным или близким к линейному контактом, у зубчатых колес которой выпуклые поверхности начальных головок зубьев взаимодействуют с вогнутыми поверхностями начальных ножек зубьев, и коэффициентом торцового перекрытия, равным или близким к нулю.

Приближающийся к линейному контакт обеспечивается несколько меньшей кривизной профиля вогнутой поверхности зуба в сравнении с кривизной выпуклой поверхности профиля сопряженного с ним зуба. Плавность работы достигается за счет осевого перекрытия, коэффициент которого выбирают большим единицы. Различают передачу Новикова с одной (рис.6.24, *a*) и двумя (рис.6.24, *б*) линиями зацепления.

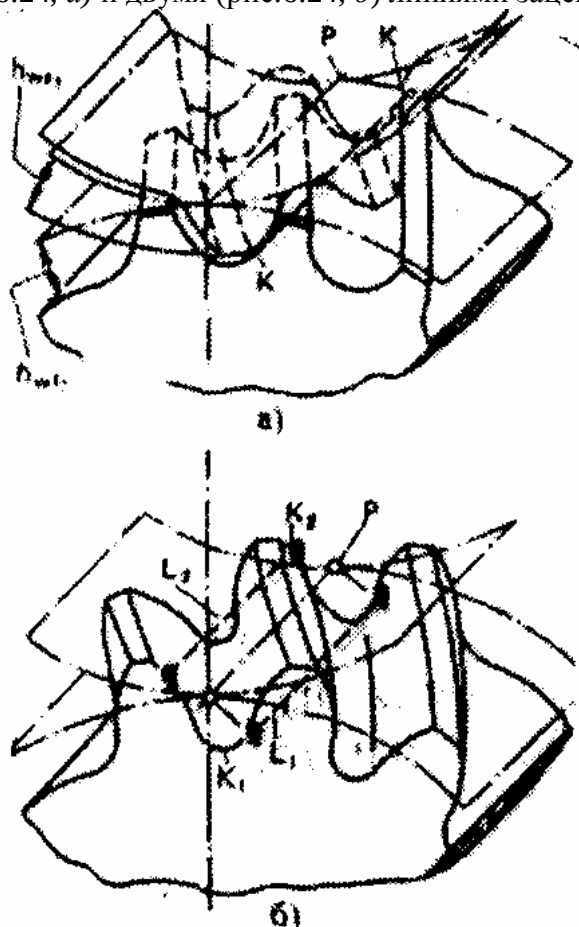


Рисунок 6.24 Передачи Новикова с одной (*a*) и двумя (*б*) линиями зацепления

На сх. *а* обозначения: K - контактная линия, перемещаемая поступательно в процессе работы передачи (K перемещается по траектории параллельно полюсной линии P — линии контакта начальных цилиндров (обозначены штрихпунктирными линиями)); $h_{w\alpha 1}$ и $h_{w\beta 2}$ - соответственно высота начальной головки зуба шестерни и высота начальной ножки зуба колеса.

На сх. *б* обозначения: P — полюсная линия; K_1 и K_2 — контактные точки соответственно на ножке и головке зуба; L_1 и L_2 — линии зацепления — траектории соответственно контактных точек K_1 и K_2 . Контактные точки на одной линии зацепления перемещаются одна за другой с интервалом, обозначаемым q_{21} . Интервал между двумя контактными точками на разных линиях зацепления q_{22} - наименьшее расстояние между двумя торцовыми сечениями сопряженных зубчатых колес, проведенными через контактные точки одноименных поверхностей двух соседних зубьев зубчатого колеса. Применяют передачу Новикова с двумя линиями зацепления. Они имеют зубья с выпуклыми поверхностями начальных головок и вогнутыми поверхностями начальных ножек. Зубья шестерни и колеса можно нарезать одним инструментом в отличие от передачи Новикова с одной линией зацепления.

Передачи Новикова характеризуются более высокой несущей способностью по сравнению с эвольвентными цилиндрическими передачами вследствие большого приведенного радиуса кривизны контактирующих зубьев, имеют более высокий КПД благодаря перекачиванию зубьев без геометрического скольжения, но чувствительна к изменению межосевого расстояния.

Для передачи Новикова требуется высокая точность изготовления и высокая жесткость валов и опор.

6.6. Особенности геометрии косозубых и шевронных колес

Зубья косозубых и шевронных колес (рис.6.2, *б*, *в*) наклонены под углом к образующей делительного цилиндра. Направление наклона может быть правым (слева вверх направо) - обычно у шестерни, левым - обычно у колеса.

Косозубое эвольвентное колесо имеет в торцевом сечении эвольвентный профиль, однако параметры колеса в этом сечении зависят от угла наклона зуба β

$$m_t = \frac{m_n}{\cos \beta} \quad (6.29)$$

$$d_w = m_t \cdot z = \frac{m_n z}{\cos \beta} \quad (6.30)$$

$$p_t = \frac{p_n}{\cos \beta} \quad (6.31)$$

$$a_w = \frac{m_t(z_1 + z_2)}{2} = \frac{m_n(z_1 + z_2)}{2 \cos \beta} \quad (6.32)$$

$$c_t^* = c^* \cdot \cos \beta \quad (6.33)$$

$$h_{ta}^* = h_a^* \cdot \cos \beta \quad (6.34)$$

где индексом t обозначены все величины, относящиеся к торцевому сечению, а индексом n - величины, относящиеся к нормальному сечению.

Шевронное колесо представляет из себя сдвоенное косозубое колесо с противоположным направлением зубьев.

6.7. Пространственные зубчатые передачи

Зубчатые передачи, у которых геометрические оси колес пересекаются или перекрещиваются, представляют собой пространственные механизмы. К ним относятся конические и гиперboloидные передачи. Среди гиперboloидных передач наиболее распространены червячная, винтовая и гипоидная. Ограничимся рассмотрением конической и червячной передач.

Более подробно с пространственными зубчатыми передачами можно ознакомиться в учебниках [1 - 4].

Коническая зубчатая передача

В зависимости от угла между пересекающимися осями коническая зубчатая передача может быть ортогональной (межосевой угол 90°) и неортогональной (межосевой угол $\Sigma = 10^\circ \div 170^\circ$, но $\neq 90^\circ$). Учитывая, что в подвижном составе находят применение только ортогональные передачи, ограничимся рассмотрением этих передач.

Передаточное отношение передачи определяется отношением абсолютных величин угловых скоростей колес

$$i_{12} = \left| \frac{\omega_1}{\omega_2} \right| = \frac{\sin \delta_{w2}}{\sin \delta_{w1}} = \operatorname{ctg} \delta_{w1} \quad (6.35)$$

где δ_{w1} , $\sin \delta_{w2}$ - углы начальных конусов.

В ортогональной передаче

$$\delta_{w2} = 90^\circ - \delta_{w1} \quad (6.36)$$

Кратко рассмотрим особенности геометрии конических колес и связанные с ними преобразования расчётных формул.

Вместо начальных и делительных цилиндров (в плоском сечении окружностей) цилиндрических колес здесь вводятся понятия: начальный и делительный конусы, которые, как правило, совпадают.

По признаку изменения размеров сечения по длине зуба ГОСТ 19326-73 предусматривает 3 формы зубьев.

Мы рассмотрим только одну - основную для прямозубых и косозубых конических передач. Это форма I, при которой зубья нормально понижаются, вершина начального и внутреннего конусов совпадают. У этих колес обычно выбирают стандартные значения внешнего окружного модуля m_{te} и определяют размеры зуба на внешнем торце, на котором удобно производить измерения.

Рассмотрим формулы для расчёта основных геометрических размеров конических зубчатых колес с прямыми зубьями (рис.6.25).

Внешнее конусное расстояние

$$R_e = \frac{0,5 \cdot m_{te} \cdot z_1}{\sin \delta_1} \quad (6.37)$$

$$\text{Диаметр внешней делительной окружности } d_{e1} = m_{te} \cdot z_1 ; d_{e2} = m_{te} \cdot z_2 \quad (6.38)$$

$$\text{Ширина венца } b \leq 0,3 \cdot R_e \quad (6.39)$$

$$\text{Среднее конусное расстояние } R_m = R_e - 0,5 \cdot b \quad (6.40)$$

$$\text{Наибольшая высота зубьев (у торца) } h_e = m_{te} \cdot (1 + 1,2) = 2,2 m_{te} \quad (6.41)$$

Окружная толщина зуба по внешней делительной окружности

Угол делительного конуса

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \frac{z_1}{z_2} ; \delta_2 = 90^\circ - \delta_1 \quad (6.43)$$

Нормальный модуль в середине ширины венца

$$m_{nm} = m_{te} \cdot \left(1 - 0,5 \frac{b}{R_e} \right) \quad (6.44)$$

$$S_e = m_{te} \cdot (0,5\pi + \operatorname{tg} \alpha_n) \quad (6.42)$$

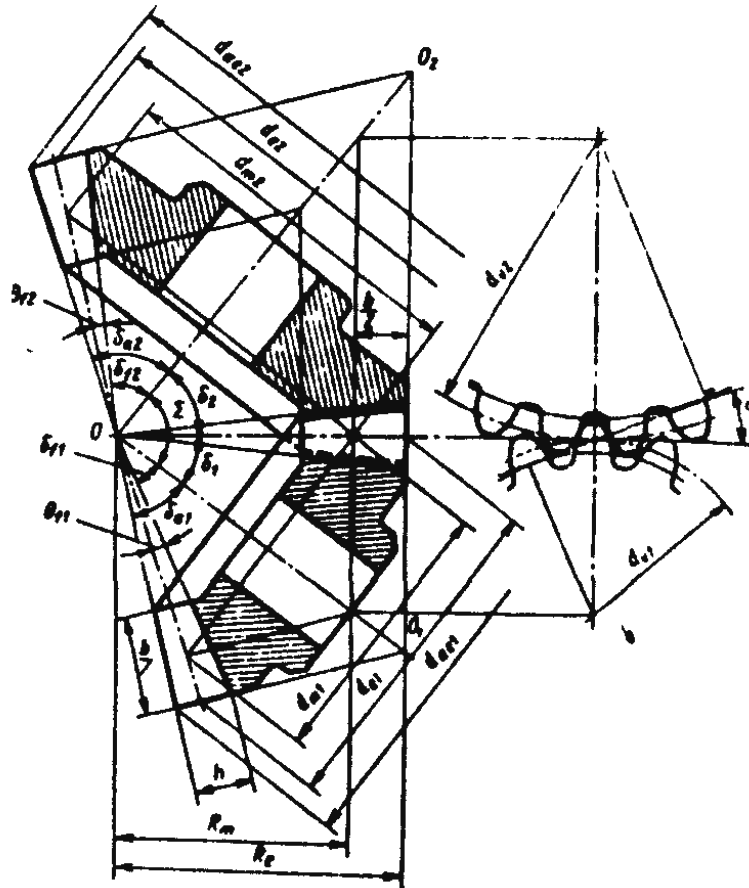


Рисунок 6.25 Основные геометрические размеры конических зубчатых колес с прямыми зубьями

Используя метод дополнительных конусов, конические колеса заменяют эквивалентными цилиндрическими, диаметр начальной окружности и модуль которых равны диаметру начальной окружности и модулю в среднем сечении зуба конических колес, а профиль зубьев соответствует профилю эквивалентных колес.

Эквивалентная цилиндрическая передача - эвольвентная цилиндрическая зубчатая передача, размеры и форма зубьев зубчатых колес которой в главном сечении практически идентичны размерам и форме зубьев колес конической зубчатой передачи в сечении их начальными дополнительными конусами.

На рис 6.26 обозначены: 1 и 2 — зубчатые колеса конической передачи, 4 и 3 — соответственно их дополнительные конусы в заданном сечении, r_{wvt1} и r_{wvt2} — начальные радиусы соответственно эквивалентных шестерни и колеса, которые равны длинам образующих начальных дополнительных конусов шестерни и колеса конической зубчатой передачи, соответствующих заданному начальному конусному расстоянию.

Диаметры эквивалентных колес:

$$d_{v1} = d_{e1} \cdot \left(1 - 0,5 \frac{b}{R_e} \right) \cdot \frac{1}{\cos \delta_1} \quad (6.45)$$

$$d_{v2} = d_{e2} \cdot \left(1 - 0,5 \frac{b}{R_e} \right) \cdot \frac{1}{\cos \delta_2} \quad (6.46)$$

Эквивалентное число зубьев прямозубых колес:

$$z_{v1} = \frac{z_1}{\cos \delta_1} ; z_{v2} = \frac{z_2}{\cos \delta_2} \quad (6.47)$$

Биеквивалентное число зубьев косозубых колес:

$$Z_{vn1} = \frac{Z_1}{\cos \delta_1 \cos^3 \beta_m}; \quad Z_{vn2} = \frac{Z_2}{\cos \delta_2 \cos^3 \beta_m}. \quad (6.48)$$

$$\text{Эквивалентное передаточное отношение: } U_v = dv_2/dv_1 = U_2 \quad (6.49)$$

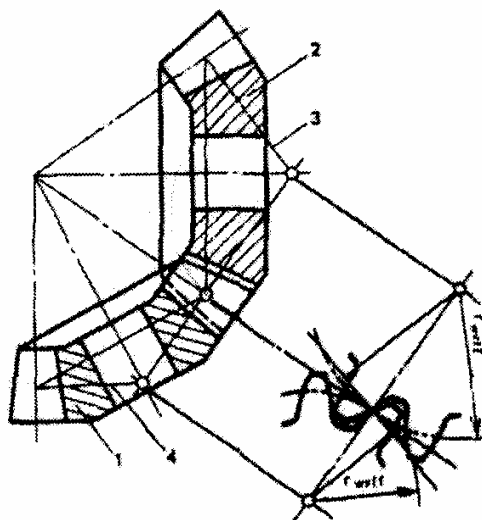


Рисунок 6.26 Эквивалентная цилиндрическая передача

Червячная передача

Червячная передача (рис.6.27) состоит из червяка 1, представляющего собой винт с трапециидальной или близкой к ней по форме резьбой, и червячного колеса 2, т.е. зубчатого колеса с зубьями особой формы, получаемой в результате взаимного огибания с витками червяка.

Вращение винта с крупным шагом винтовых линий зрительно напоминает извивающихся червей, что по-видимому, и определило названия "червяк" и "червячная передача". Предполагается, что червячную передачу изобрел Архимед.

К достоинствам червячных передач относятся:

- возможность получения большого редукторного отношения ($i = 8 \div 80$ и в отдельных случаях до $i = 1000$);
- плавность и бесшумность работы;
- возможность получения самотормозящих передач.

Недостатками применения червячных передач являются:

- необходимость применения дорогостоящих антифрикционных материалов;
- во многих случаях низкий КПД.

Передаточное отношение червячной передачи, учитывая, что за один оборот червяка колесо поворачивается на число зубьев, равное числу заходов (витков) червяка, определяется

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1} \quad (6.50)$$

где z_1 , z_2 - число заходов червяка и число зубьев колеса;

n_1 и n_2 - частоты вращения червяка и колеса, об/мин.

Рассмотрим основные геометрические параметры наиболее распространенных червячных передач с цилиндрическими червяками.

Геометрические расчёты червячных передач аналогичны расчётам зубчатых передач. Ограничимся рассмотрением зацепления без смещения червяка (рис.6.27).

Диаметр делительного цилиндра червяка

$$d_1 = m \cdot q \quad (6.51)$$

где m - модуль,

q - коэффициент диаметра червяка (q в сочетании с m выбирается по ГОСТ 2144-76).

Диаметр начального цилиндра червяка для случая без смещения червяка (т.е. $X = 0$)

$$d_{w1} = d_1$$

Число заходов червяка z_1 выбирается в зависимости от передаточного отношения и устанавливается равным 1, 2 и 4.

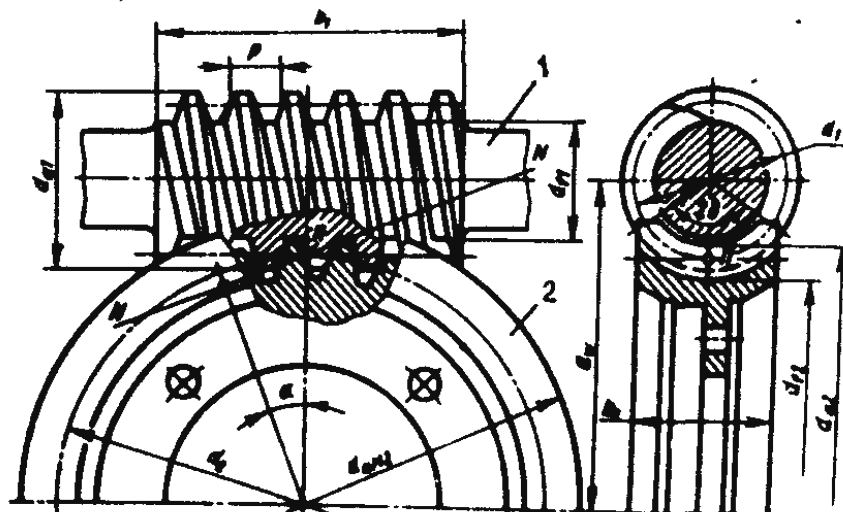


Рисунок 6.27 Червячная передача

Угол подъема линии витка червяка на делительном цилиндре γ

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{p \cdot z_1}{\pi d_1} = \frac{m \cdot z_1}{d_1} = \frac{z_1}{q} \quad (6.52)$$

где $p_{z1} = p \cdot z_1$ - ход витка червяка;
 p – шаг.

Диаметр цилиндра вершин червяка

$$d_{a1} = d_1 + 2h_{a1} = m \cdot (q + 2) \quad (6.53)$$

и цилиндра впадин червяка

$$d_{f1} = d_1 - 2h_{f1} = m \cdot (q - 2,4) \quad (6.54)$$

Длина нарезной части червяка

$$b_1 \geq (c_1 + c_2 \cdot z_2) \cdot m \quad (6.55)$$

где при $z_1 = 1$ или $z_1 = 2$ $C_1 = 11$, $C_2 = 0,06$;
при $z_1 = 4$ $C_1 = 12,5$, $C_2 = 0,09$.

Минимальное число зубьев колес $z_{2\min} = 17 \dots 18$ во вспомогательных кинематических передачах и $z_{2\min} = 26 \dots 28$ в силовых передачах.

Диаметр делительной и совпадающей с ней начальной окружностей колеса

$$d_2 = d_{w2} = m \cdot z_2 \quad (6.56)$$

Диаметр окружностей вершин и впадин колеса в среднем сечении

$$d_{a2} = d_2 + 2h_{a1} = m \cdot (z_2 + 2) \quad (6.57)$$

$$d_{f2} = d_2 - 2h_{f1} = m \cdot (z_2 - 2,4) \quad (6.58)$$

Наибольший диаметр колеса

$$d_{aM2} \leq d_{a2} + \frac{6m}{z_1 + 2} \quad (6.59)$$

Ширина колеса по ГОСТ 19650-74

$$b_2 \leq 0,75 d_{a1} \quad \text{при } z_1 = 1 \quad \text{и } z_2 = 2;$$

$$b_2 \leq 0,67 d_{a1} \quad \text{при } z_1 = 4$$

Условный угол обхвата 2δ находится по точкам пересечения окружности диаметром $d_{a1} - 0,5m$ с торцевыми линиями червячного колес

$$\sin \delta = \frac{b_2}{d_{a1} - 0,5m} ; \quad (6.60)$$

Межосевое расстояние

$$a = a_w = \frac{d_{w1} + d_{w2}}{2} = \frac{m \cdot (q + z_2)}{2} , \quad (6.61)$$

где в общем случае межосевое расстояние обозначается a_w , для передач без смещения червяка - a .

Вопросы для самоконтроля

1. В чем принципиальное отличие между плоскими и пространственными зубчатыми передачами?
2. Какие передачи применяются в том случае, когда оси пересекаются?
3. В чем отличие ортогональной и неортогональной зубчатых передач?
4. Как определить передаточное отношение ортогональной конической зубчатой передачи?
5. В каком сечении определяются размеры зуба конического зубчатого колеса?
6. Можно ли рассчитать коническую зубчатую передачу как цилиндрическую?
7. Из каких деталей состоит червячная передача?
8. В чем достоинства и недостатки червячных передач?
9. Как определяются основные размеры червячной передачи?

6.8. Планетарные зубчатые передачи

6.8.1. Сложные зубчатые механизмы

Сложными зубчатыми механизмами называются механизмы с зубчатыми передачами с числом зубчатых колес больше двух. Это могут быть механизмы с оригинальными структурными схемами или механизмы, образованные последовательным и (или) параллельным соединением простейших типовых зубчатых механизмов.

Сложные зубчатые механизмы, в которых ось хотя бы одного колеса подвижна, называются **планетарными механизмами**. К типовым планетарным механизмам относятся:

- однорядный планетарный механизм;
- двухрядный планетарный механизм с одним внешним и одним внутренним зацеплением;
- двухрядный планетарный механизм с двумя внешними зацеплениями;
- двухрядный планетарный механизм с двумя внутренними зацеплениями.

Элементы планетарного механизма имеют специальные названия:

- зубчатое колесо с внешними зубьями, расположенное в центре механизма называется "**солнечным**";

- колесо с внутренними зубьями называют "**коронной**" или "**эпициклом**";

- колеса, оси которых подвижны, называют "**сателлитами**";

- подвижное звено, на котором установлены оси сателлитов, называют "**водителем**".

На схемах водило принято обозначать не цифрой, а латинской буквой h .

Солнечные и коронные колеса называют также **центральными** колесами.

Количество сателлитов не влияет на кинематику механизма и при подсчете степени подвижности следует учитывать только один сателлит. Так, степень подвижности механизма с тремя сателлитами, изображенного на схеме 1 (таблица 6.1)

$$W = 3(n - 1) - (2p_5 + 1p_4) = 3(4 - 1) - (2 \cdot 3 + 1 \cdot 2) = 9 - 8 = 1$$

где $n = 4$ - число всех звеньев (1, 2, h - подвижные и 3 - неподвижное),

$p_5 = 3$ - число одноподвижных кинематических пар (вращательные пары, образованные звеньями (3-1, 2- h , h -3),

$p_4 = 2$ - число двухподвижных кинематических пар (зацепления колес 1-2 и 2-3).

Достоинством планетарных передач являются малые габариты и вес из-за того, что поток мощности, подводимый к центральному колесу, распределяется по k сателлитам (k – количество сателлитов). Затем поток мощности собирается на выходном звене.

На одной планетарной передаче можно поставить до 24 сателлитов.

Однако, если число сателлитов не равно 3, то необходим специальный механизм, который бы выравнивал нагрузку между сателлитами. Этот механизм утяжеляет и удорожает конструкцию.

В таблице 6.1 приведены структурные схемы и диапазоны рекомендуемых передаточных отношений типовых планетарных механизмов.

6.8.2. Формула Виллиса

Формула Виллиса выводится на основании основной теоремы зубчатого зацепления и устанавливает соотношение между угловыми скоростями зубчатых колес в планетарном механизме. Рассмотрим простейший планетарный механизм с одним внешним зацеплением (см. рис.6.28). Число подвижностей в этом механизме равно

$$W^{nn} = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = 2$$

то есть для получения определенности движения звеньев механизма необходимо сообщить независимые движения двум его звеньям. Рассмотрим движение звеньев механизма относительно стойки и относительно водила.

Чтобы записать передаточное отношение планетарного механизма через число зубьев, применим метод обращения движения (как бы искусственно обратим планетарный механизм в механизм с неподвижной осью O_2). Для этого мысленно сообщим всем звеньям механизма, включая стойку, дополнительное движение с угловой скоростью - ω_H . Получим обращенный планетарный механизм с неподвижными осями зубчатых колес.

Таблица 6.1

Типовые планетарные механизмы		
№	Структурная схема механизма	Рекомендуемое $U_{ред}$
1.		$3 \dots 10$ $u_{1H}^{(3)} = 1 + \frac{z_3}{z_1}$
2.		$7 \dots 16$ $u_{1H}^{(4)} = 1 + \frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3}$
3.		$25 \dots 300$ $u_{1H}^{(4)} = 1 - \frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3}$

4.		$30...300$ $u_{1h}^{(4)} = 1 - \frac{Z_2 \cdot Z_4}{Z_1 \cdot Z_3}$
----	--	---

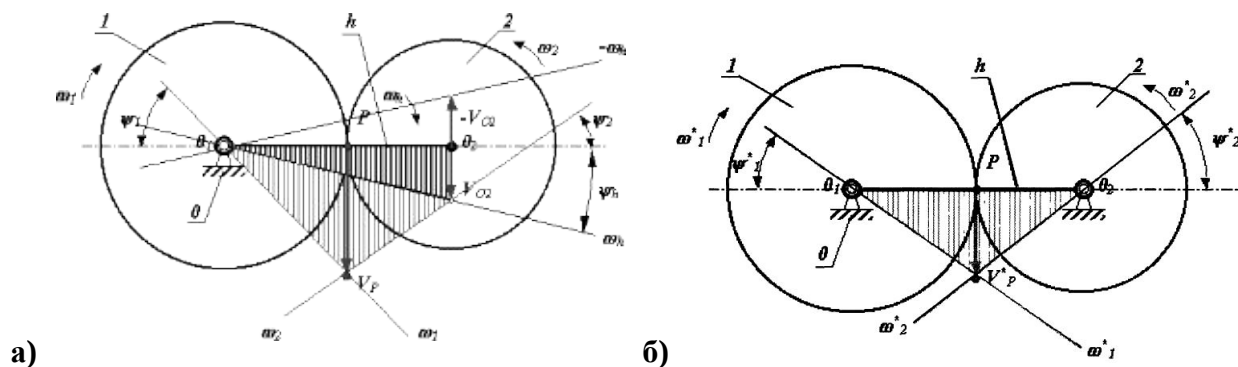


Рисунок 6.28 Движение звеньев механизма относительно стойки (а), движение звеньев механизма относительно води́ла (б)

В обращенном движении звенья этого механизма будут иметь следующие угловые скорости:

$$\begin{aligned}\omega_1^* &= \omega_1 - \omega_h \\ \omega_2^* &= \omega_2 + (-\omega_h) = \omega_2 - \omega_h \\ \omega_h^* &= \omega_h - \omega_h = 0\end{aligned}$$

В движении звеньев относительно води́ла угловые скорости звеньев равны угловым скоростям в движении относительно стойки минус угловая скорость води́ла.

Угловые скорости звеньев в каждом из рассматриваемых движений приведены в таблице 6.2.

Таблица 6.2

Движение механизма	Звено 1	Звено 2	Звено h	Звено 0
Относительно стойки	ω_1	ω_2	ω_h	$\omega_0 = 0$
Относительно води́ла	$\omega_1^* = \omega_1 - \omega_h$	$\omega_2^* = \omega_2 - \omega_h$	$\omega_h - \omega_h = 0$	$-\omega_h$

Если в движении относительно стойки ось зубчатого колеса 2 подвижна, то в движении относительно води́ла оси обоих зубчатых колес неподвижны. Поэтому к движению относительно води́ла можно применить основную теорему зацепления.

То есть можно записать выражение, которое называется формулой Виллиса для планетарных механизмов

$$u_{1-2}^{(H)} = \frac{\omega_1^*}{\omega_2^*} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_2 - \omega_H} \quad (6.62)$$

6.8.3. Определение передаточного отношения планетарных механизмов различных схем

Планетарный однорядный механизм (рис.6.29) (механизм Джеймса)

Графический способ определения передаточного отношения

$$u_{1-H}^{(3)} = \frac{\omega_1}{\omega_H}$$

Выберем на водиле H точку F которая расположена на том же расстоянии от оси O_2 , что и точка A .

Оси O_1 и O_2 расположены на одном уровне.

Для данной схемы входное звено – звено 1 (солнечное колесо), выходным является водило H .

Зададимся отрезком AA' , который изображает линейную скорость колеса 1 в точке A . Т.к. колесо 1 вращается вокруг O_1 , то закон распределения линейной скорости по первому звену изображается прямой линией O_1A' . Сателлит 2 в точке A имеет такую же линейную скорость, что и колесо 1. В точке C сателлит 2 имеет мгновенный центр скоростей (МЦС) в абсолютном движении, т.к. идет контакт с неподвижным колесом 3. Закон распределения линейной скорости по второму колесу изображается прямой линией CA' .

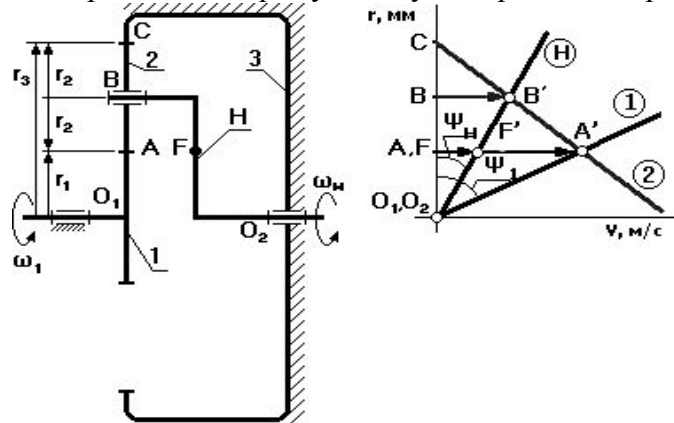


Рисунок 6.29 Планетарный однорядный механизм

В точке B сателлит имеет линейную скорость, которая изображается отрезком BB' , однако точка B является также и осью водила H , которое вращается вокруг O_2 . Следовательно, закон распределения линейной скорости по водилу изобразится прямой линией O_2B' . Для точки F водила линейная скорость изображается отрезком FF' .

От вертикали до линии распределения скоростей по водилу измеряем угол ψ_H , а от вертикали до линии распределения скоростей по колесу 1 измеряем угол ψ_1 . Т.к. углы ψ_1 и ψ_H отложены от вертикали в одном направлении, то это показывает, что входное звено 1 и выходное звено вращаются в одном направлении.

$$\omega_1 = \frac{V_A}{O_1A}; \quad \omega_2 = \frac{V_F}{O_2F}$$

$$u_{1-H}^{(3)} = \frac{V_A/O_1P}{V_F/O_2F} = \frac{AA'/O_1P}{FF'/O_2F} = \frac{\operatorname{tg} \psi_1}{\operatorname{tg} \psi_H} = \frac{AA'}{FF'} \quad (6.63)$$

Аналитический способ определения передаточного отношения.

Применим метод обращения движения, обратив планетарный механизм в непланетарный.

$$\omega_1^* = \omega_1 - \omega_H$$

$$\omega_3^* = \omega_3 + (-\omega_H) = -\omega_H$$

$$u_{1-3}^{(H)} = u_{1-2}^{(H)} \cdot u_{2-3}^{(H)} = \frac{\omega_1^*}{\omega_2^*} \cdot \frac{\omega_2^*}{\omega_3^*} = \frac{\omega_1^*}{\omega_3^*}$$

$$u_{1-3}^{(H)} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{-\omega_H} = 1 - \frac{\omega_1}{\omega_H} = 1 - u_{1-H}^{(3)}$$

$$u_{1-H}^{(3)} = 1 - u_{1-3}^{(H)}$$

$$u_{1-H}^{(3)} = 1 - \left[\left(-\frac{z_2}{z_1} \right) \cdot \left(\frac{z_3}{z_2} \right) \right] = 1 \oplus \frac{z_3}{z_1} \quad (6.64)$$

- плюсовой механизм, т.е. входное и выходное звенья вращаются в одну сторону.

Планетарный механизм со смешанным зацеплением (рис.6.30)

(с одним внешним и одним внутренним зацеплением).

Входное звено – первое звено;

Выходное звено – водило.

1 – солнечное колесо; 2,3 – блок сателлитов; 4 – коронная шестерня;

H – водило.

Графический способ определения передаточного отношения

В системе координат $r_i O V$ построим треугольники распределения линейных скоростей звеньев. Для этого из точки A с ординатой r_1 в выбранном произвольном масштабе $\mu_v [мс^{-1}/мм]$ отложим отрезок AA'.

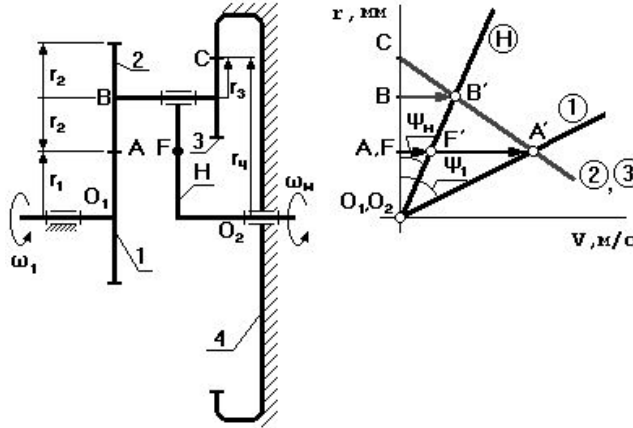


Рисунок 6.30 Планетарный механизм со смешанным зацеплением

Через конец этого отрезка и начало координат проведем прямую, которая определит распределение скоростей для точек звена 1, лежащих на оси r_1 . Эта прямая образует с осью r_1 угол ψ_1 . Так как в точке C скорости звеньев 2 и 3 равны между собой и равны нулю, то соединяя точку C прямой с точкой A', получим линию распределения скоростей для звена 2. Так как точка B принадлежит звеньям 2 и H, то ее скорость определяется по лучу CA' для радиуса равного $r_B = (r_1 + r_2)$, что в масштабе $\mu_v, [мс^{-1}/мм]$ соответствует отрезку BB'. Соединяя точку B с началом координат прямой, найдем линию распределения скоростей для водила. Эта линия образует с осью r_i угол ψ_H . Передаточное отношение планетарного механизма определенное по данным графическим построениям можно записать так

$$u_{1-H}^{(4)} = \frac{\omega_1}{\omega_H} = \frac{V_A}{O_1 A} \cdot \frac{O_2 F}{V_H} = \frac{AA'}{O_1 A} \cdot \frac{O_2 F}{FF'}$$

$$u_{1-H}^{(4)} = \frac{tg \psi_1}{tg \psi_H} = \frac{AA'}{FF'} \quad (6.64)$$

Аналитический способ определения передаточного отношения.

Обратим мысленно планетарный механизм в механизм с неподвижным водилом, для того чтобы использовать формулы для механизма с неподвижными осями зубчатых колес (применим метод обращения движения).

В обращенном движении каждое из звеньев будет иметь угловую скорость:

$$1 \text{ звено: } \omega_1^* = \omega_1 + (-\omega_H)$$

$$2 \text{ звено: } \omega_2^* = \omega_3^* = \omega_2 + (-\omega_H)$$

$$3 \text{ звено: } \omega_3^* = \omega_2^* = \omega_3 + (-\omega_H)$$

$$4 \text{ звено: } \omega_4^* = \omega_4 + (-\omega_H) = -\omega_H$$

$$\text{звено H: } \omega_H^* = \omega_H + (-\omega_H) = 0$$

Передаточное число в обращенном движении механизма будет

$$u_{1-4}^{(H)} = u_{1-2}^{(H)} \cdot u_{3-4}^{(H)} \quad (6.65)$$

$$u_{1-4}^{(H)} = \frac{\omega_1^*}{\omega_2^*} \cdot \frac{\omega_3^*}{\omega_4^*} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{-\omega_H} = 1 - \frac{\omega_1}{\omega_H} = 1 - u_{1-H}^{(4)} \quad (6.66)$$

Передаточное число планетарного механизма

$$u_{1-H}^{(4)} = 1 - u_{1-4}^{(H)} \quad (6.67)$$

Если (6.65) переписать через количество зубьев, то

$$u_{1-4}^{(H)} = \left(-\frac{z_2}{z_1} \right) \cdot \left(\frac{z_4}{z_3} \right) \quad (6.68)$$

Подставив (6.68) в (6.67), получим:

$$u_{1-4}^{(H)} = 1 \oplus \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_4}{z_3} - \text{плюсовой механизм} \quad (6.69)$$

Механизм с двумя внутренними зацеплениями (рис.6.31).

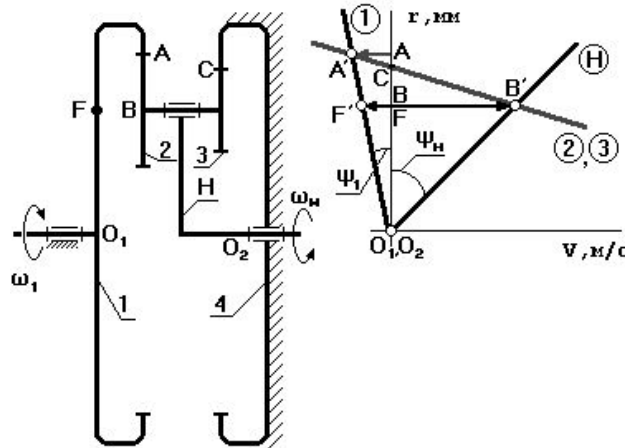


Рисунок 6.31 Механизм с двумя внутренними зацеплениями

Входное звено – первое колесо;

Выходное – водило.

Графический способ определения передаточного отношения

Выберем точку F на входном звене так, чтобы $O_1F = O_2B$.

Точка C для данной схемы может располагаться как выше, так и ниже точки A . В зависимости от положения точки C план скоростей будет разный.

ψ_1 и ψ_2 – направлены в разные стороны от вертикали. Следовательно, водило H и колесо 1 вращаются в противоположные стороны.

$$u_{1-H}^{(4)} = \frac{\omega_1}{\omega_H} = \frac{V_F}{O_1F} \cdot \frac{O_2B}{V_B} = \frac{FF'}{O_1F} \cdot \frac{O_2B}{BB'} \quad (6.70)$$

$$u_{1-H}^{(4)} = \frac{tg \psi_1}{tg \psi_2} \quad (6.71)$$

Аналитический способ определения передаточного отношения.

Применим метод обращения движения.

$$u_{1-H}^{(4)} = 1 - u_{1-4}^{(H)} \quad (6.72)$$

Передаточное отношение через числа зубьев:

$$u_{1-4}^{(H)} = \left(\frac{z_2}{z_1} \right) \cdot \left(\frac{z_4}{z_3} \right) \quad (6.73)$$

$$u_{1h}^{(4)} = 1 - \frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3} - \text{минусовой механизм, т.е. входное и выходное звенья вращаются в}$$

противоположные стороны.

Планетарный механизм с двумя внешними зацеплениями (рис.6.32). (Механизм Давида)

Применяется в приборных устройствах, так как $u_{H-1}^{(4)}$ до 10 000.

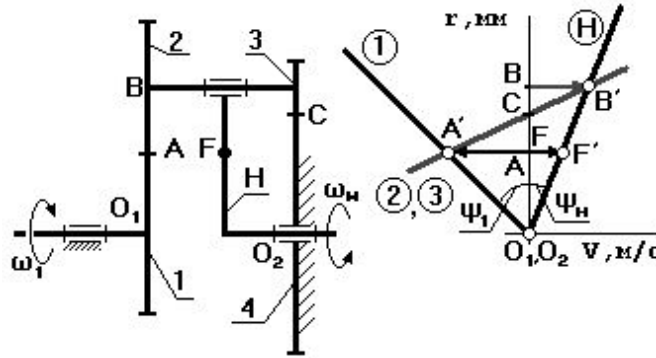


Рисунок 6.32 Планетарный механизм с двумя внешними зацеплениями

Графический способ определения передаточного отношения.

Выберем на водиле H точку F так, чтобы $O_2F = O_1A$ (валы O_1 и O_2 соосны). Точка C может быть выше или ниже точки A .

FF' – произвольный отрезок (линейная скорость точки F).

Для колес 2 и 3 точка C – мгновенный центр скоростей (МЦС).

$$u_{1-4}^{(H)} = \left(-\frac{z_2}{z_1} \right) \cdot \left(-\frac{z_4}{z_3} \right) \quad (6.74)$$

$$u_{H-1}^{(4)} = \frac{\operatorname{tg} \psi_H}{\operatorname{tg} \psi_1} = \frac{BB'}{FF'} \quad (6.75)$$

Аналитический способ определения передаточного отношения.

$$u_{1-H}^{(4)} = 1 - u_{1-4}^{(H)} \quad (6.76)$$

$$u_{1-4}^{(H)} = \left(-\frac{z_2}{z_1} \right) \cdot \left(-\frac{z_4}{z_3} \right) \quad (6.77)$$

$$u_{1-4}^{(H)} = 1 - \frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3} \text{ - минусовой механизм.}$$

6.8.4. Синтез (проектирование) планетарных механизмов

Под синтезом в этом курсе будем понимать подбор (определение) чисел зубьев планетарных механизмов при условии, что зубчатые колеса нулевые, а радиальный габарит механизма минимальный.

Расчет на прочность не проводим, но он обязательно должен быть проведен при проектировании.

При проектировании конструктор обязан выполнить ряд условий:

1. Отклонение от заданного передаточного отношения не должно превышать 10%.
2. Обеспечить отсутствие подреза у нулевых зубчатых колес:
у колес с внешними зубьями $z_i \geq 18$;
у колес с внутренними зубьями $z \geq 85$.
3. Обеспечить отсутствие заклинивания в зацеплении сателлит – коронная шестерня. Заклинивания нет, если $z_{кш} - z_{сат} \geq 8$
4. Обеспечить выполнение условия **соосности** входного и выходного звеньев.
5. Необходимо обеспечить выполнение условия **соседства** (окружности вершин соседних сателлитов не должны касаться друг друга).
6. Обеспечить выполнение условия **сборки**.

Проектирование однорядного планетарного механизма (рис. 6.29)

Определить: z_1, z_2, z_3 при минимальном радиальном габарите, если дано: $u_{1-H}^{(3)} = 6$;
 $m = 1$ мм; $k = 3$ – количество сателлитов; колеса – нулевые.

В соответствии с (6.64)

$$u_{1-H}^{(3)} = 1 + \frac{z_3}{z_1}; \quad \frac{z_3}{z_1} = u_{1-H}^{(3)} - 1 = 6 - 1 = 5$$

Зададимся числом зубьев z_1 так, чтобы выполнялось условие отсутствие подреза у зубчатых колес, тогда $z_1 = 18$, $z_3 = 5 \cdot 18 = 90 \geq 85$.

Условие **соосности** записывается в виде $O_1B = O_2B$:

$$r_1 + r_2 = r_3 - r_2 \quad (6.78)$$

$$\frac{mz_1}{2} + \frac{mz_2}{2} = \frac{mz_3}{2} - \frac{mz_2}{2}$$

$$z_1 + z_2 = z_3 - z_2$$

$$z_2 = \frac{z_3 - z_1}{2} = \frac{90 - 18}{2} = 36$$

Выполнение условия **соседства** означает, что окружности вершин соседних сателлитов не касаются друг друга (рис.6.33)

$$B_I B_{II} > 2 r_{a2} \quad (6.79)$$

Рассмотрим треугольник $O_1 B_I q$: $B_I B_{II} = 2 B_I q$

$$\frac{B_I q}{O_1 B_I} = \sin \frac{180^\circ}{k}$$

$$B_I q = O_1 B_I \sin \frac{180^\circ}{k}$$

$$O_1 B_I = r_1 + r_2 = \frac{m}{2} (z_1 + z_2)$$

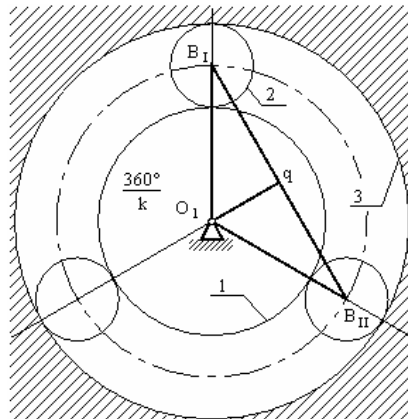


Рисунок 6.33 Условие соседства для планетарного механизма

$$2 B_I q = B_I B_{II} = m(z_1 + z_2) \quad (6.80)$$

$$r_{a2} = r_2 + xm + h_a^* \cdot m - \Delta ym$$

Т.к. колеса нулевые, то $xm = 0$ и $\Delta ym = 0$

$$r_{a2} = r_2 + h_a^* \cdot m$$

$$r_{a2} = m \cdot \frac{z_2 + 2h_a^{(*)}}{2}$$

$$2r_{a2} = m(z_2 + 2h_a^*) \quad (6.81)$$

Подставим (6.80), (6.81) в (6.79)

$$\sin \frac{180^\circ}{k} > \frac{z_2 + 2h_2^*}{z_1 + z_2} \quad (6.82)$$

Уравнение **соседства** справедливо для всех схем, только для схем рис.6.30, 6.31 и 6.32 в знаменателе стоит правая или левая часть условия соосности, а в числителе вместо z_2 ставят число зубьев наибольшего из сателлитов.

Рассмотрим условие **сборки**:

Будем считать, что каждый последующий блок сателлитов устанавливается в позиции B_I .

Чтобы освободить место, нужно повернуть водило на угол $(360^\circ/k)$.

При установке 1-го сателлита зубья центральных колес ориентированы относительно оси симметрии.

Если на дуге AB (рис.6.34) укладывается целое число шагов, то при повороте водила на угол $(360^\circ/k)$ зубья центральных колес будут ориентированы относительно оси симметрии точно так же, как и при установке первого сателлита.

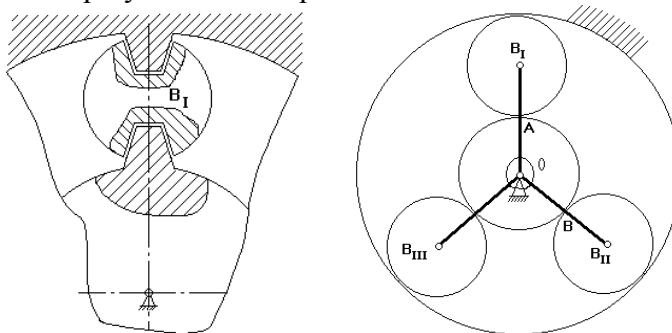


Рисунок 6.34

Если на указанной дуге не укладывается целое число шагов, то при повороте водила на угол $(360^\circ/k)$ зуб 1-го колеса не встанет на то же место и тогда, чтобы установить следующий сателлит, нужно от позиции B_{II} сделать p дополнительных оборотов водила, чтобы за счет выборки углового шага правильно ориентировать зубья центральных колес.

Уравнение **сборки** имеет вид:

$$\frac{z_1 u_{1-H}^{(3)}}{k} = 1 + k p = \gamma$$

$$r_1 = \frac{m z_1}{2} = \frac{1 \cdot 18}{2} = 9 \text{ мм}$$

$$r_2 = \frac{m z_2}{2} = \frac{1 \cdot 36}{2} = 18 \text{ мм}$$

$$r_3 = \frac{m z_3}{2} = \frac{1 \cdot 90}{2} = 45 \text{ мм.}$$

По полученным данным строится схема механизма в масштабе и проверяется выполнение передаточного отношения.

Проектирование планетарного механизма со смешанным зацеплением.

Дано: $u_{1-H}^{(4)} = 21$ $m = 1 \text{ мм}$ (рис.6.35)

Определить: z_1, z_2, z_3, z_4 при условии $k = 3$, и минимальных радиальных габаритах, колеса – нулевые.

Исходная формула:

$$u_{1-H}^{(4)} = 1 - \frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3}$$

$$u_{1-4}^{(H)} = 1 + \frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3} = u_{1-H}^{(4)} - 1 = 21 - 1 = 20$$

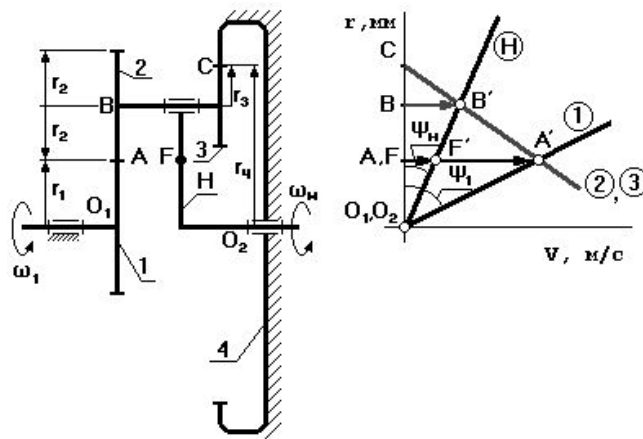


Рисунок 6.35 Планетарный механизм со смешанным зацеплением

Представим число (20/1) в виде произведений сомножителей:

$$\frac{C_2 \cdot C_4}{C_1 \cdot C_3} = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 1} = \frac{2 \cdot 10}{1 \cdot 1} = \frac{1 \cdot 20}{1 \cdot 1},$$

где $C_1 \sim z_1$; $C_2 \sim z_2$; $C_3 \sim z_3$; $C_4 \sim z_4$

при этом C_1, C_2, C_3, C_4 – взаимно простые числа, то есть не имеют общих делителей.

Указываются все возможные разложения

$C_1 = 4$; $C_2 = 1$; $C_3 = 1$; $C_4 = 5$.

Запишем условие соосности данного редуктора $O_1B = O_2B$:

$$r_1 + r_2 = r_4 - r_3$$

$$m(z_1 + z_2) = m(z_4 - z_3)$$

$$z_1 \left(1 + \frac{z_2}{z_1} \right) = z_4 \left(1 - \frac{z_3}{z_4} \right)$$

$$z_1 \left(1 + \frac{C_2}{C_1} \right) = z_4 \left(1 - \frac{C_3}{C_4} \right)$$

В результате преобразований

$$z_1 = C_1 (C_4 - C_3) q$$

$$z_4 = C_4 (C_1 + C_2) q$$

где q – коэффициент пропорциональности – любое число, но такое, чтобы z_1 было целым.

$$z_2 \left(1 + \frac{z_1}{z_2} \right) = z_3 \left(\frac{z_4}{z_3} - 1 \right)$$

тогда

$$z_2 = C_2 (C_4 - C_3) q$$

$$z_3 = C_3 (C_1 + C_2) q$$

q назначается так, чтобы не было подреза ножки зуба, например $q = 5$

$$z_1 = 1 (5 - 1)q = 4q \quad z_1 = 20$$

$$z_2 = 4 (5 - 1)q = 16q \quad z_2 = 80$$

$$z_3 = 1 (1 + 4)q = 5q \quad z_3 = 25$$

$$z_4 = 5 (1 + 4)q = 25q \quad z_4 = 125$$

Проверяем выполнение условия соседства:

$$\sin \frac{180^\circ}{k} > \frac{z_2 + 2h_2^*}{z_1 + z_2}$$

$$\sin 60^\circ > \frac{80 + 2 \cdot 1}{20 + 80} = 0,82$$

$0,87 > 0,82$ - условие соседства выполняется.

Проверяем выполнение условия сборки:

$$\frac{z_1 u_{1-H}^{(3)}}{k} = 1 + kp = \gamma \quad (6.83a)$$

$$20 \cdot 21(1+3p) / 3 = 140 \text{ при } p = 0$$

Для передач со сдвоенными сателлитами формула (6.83a) не является общей.

Общей формулой является:

$$\frac{z_1 \cdot z_3 \cdot u_{1-H}^{(4)}}{k \cdot \text{НОД}(z_2, z_3)} = \gamma \quad (6.83б)$$

где γ - целое число,

НОД – наибольший общий делитель z_2 и z_3

$$\frac{20 \cdot 25 \cdot 21}{3 \cdot 5_{(20 \ 25)}} = 700$$

- условие сборки выполняется

Если хотя бы одно из условий не выполняется, то необходимо рассмотреть следующий вариант разложения на простые множители.

Если, перебрав все возможные варианты разложения, не удалось подобрать числа зубьев, то допускается изменить заданное передаточное отношение в пределах 10%.

Для других схем числа зубьев подбираются по формулам, представленным в таблице:

Таблица 6.3

Двухрядный механизм со смешанным зацеплением	Двухрядный механизм с двумя внешними зацеплениями	Двухрядный механизм с двумя внутренними зацеплениями
$z_1 = C_1 q(C_4 - C_3)$	$z_1 = C_1 q(C_4 + C_3)$	$z_1 = C_1 q(C_4 - C_3)$
$z_2 = C_2 q(C_4 - C_3)$	$z_2 = C_2 q(C_4 + C_3)$	$z_2 = C_2 q(C_4 - C_3)$
$z_3 = C_3 q(C_1 + C_2)$	$z_3 = C_3 q(C_1 + C_2)$	$z_3 = C_3 q(C_1 - C_2)$
$z_4 = C_4 q(C_1 + C_2)$	$z_4 = C_4 q(C_1 + C_2)$	$z_4 = C_4 q(C_1 - C_2)$

Планетарные механизмы с двумя степенями подвижности (дифференциалы)

Внесем изменение в схему планетарного механизма (схема 1 таблица 6.1) - сделаем колесо 3 подвижным, соединив его вращательной парой со стойкой. Полученный механизм имеет степень подвижности $W = 2$.

$$W = 3(n - 1) - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 2$$

Это означает, что на выходе имеются два независимых движения (звено H и звено 3), либо из двух независимых движений получают одно определенное движение.

На практике в качестве механизмов с двумя подвижностями наиболее часто применяются планетарные зубчатые механизмы или как их еще называют планетарные дифференциалы. Это название справедливо для механизмов, в которых входной энергетический поток разделяется на два выходных потока. Если входные энергетические потоки суммируются на выходе в один выходной поток, то такие механизмы следует называть суммирующими или интегральными.

Все рассмотренные типовые схемы механизмов можно выполнить с двумя подвижностями. Рассмотрим в качестве примера двухрядный механизм с одним внешним и одним внутренним зацеплением (рис. 6.36).

По формуле Виллиса отношение угловых скоростей звеньев для внешнего зацепления колес z_2 и z_1

$$\frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_2 - \omega_H} = - \frac{z_2}{z_1}$$

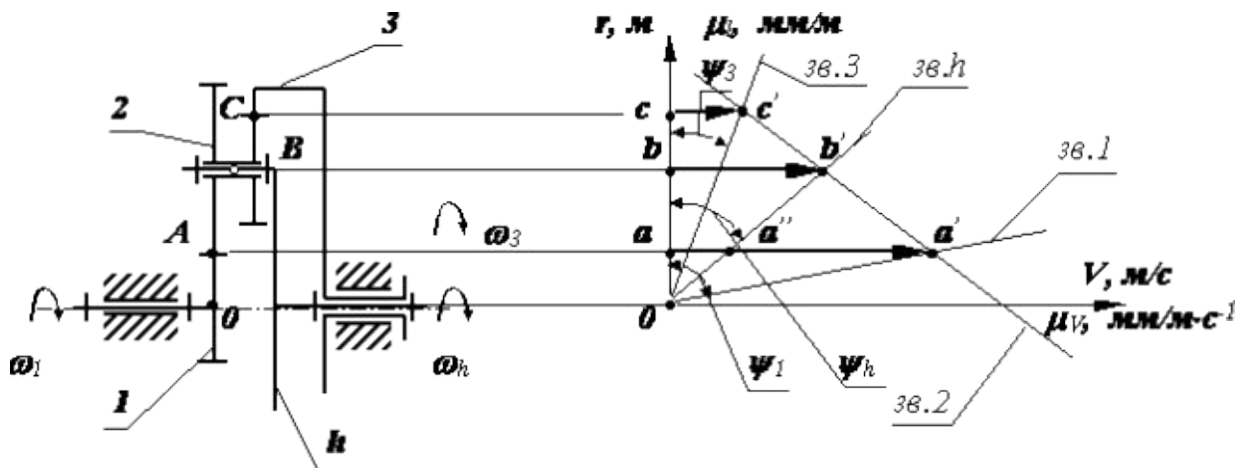


Рисунок 6.36 Двухрядный механизм с одним внешним и одним внутренним зацеплением

для внутреннего зацепления колес z_4 и z_3

$$\frac{\omega_2 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = \frac{z_4}{z_3}$$

Перемножим, правые и левые части этих уравнений, и получим соотношение между угловыми скоростями механизма с двумя подвижностями

$$\frac{(\omega_1 - \omega_H) \cdot (\omega_2 - \omega_H)}{(\omega_2 - \omega_H) \cdot (\omega_3 - \omega_H)} = -\frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3}$$

$$\frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = -\frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3} = u_{1-3}^{(H)}$$

$$u_{13}^{(h)} \cdot \omega_3 - u_{13}^{(h)} \cdot \omega_h = \omega_1 - \omega_h$$

$$\omega_1 - (1 + u_{13}^{(h)}) \cdot \omega_h - u_{13}^{(h)} \cdot \omega_3 = 0$$

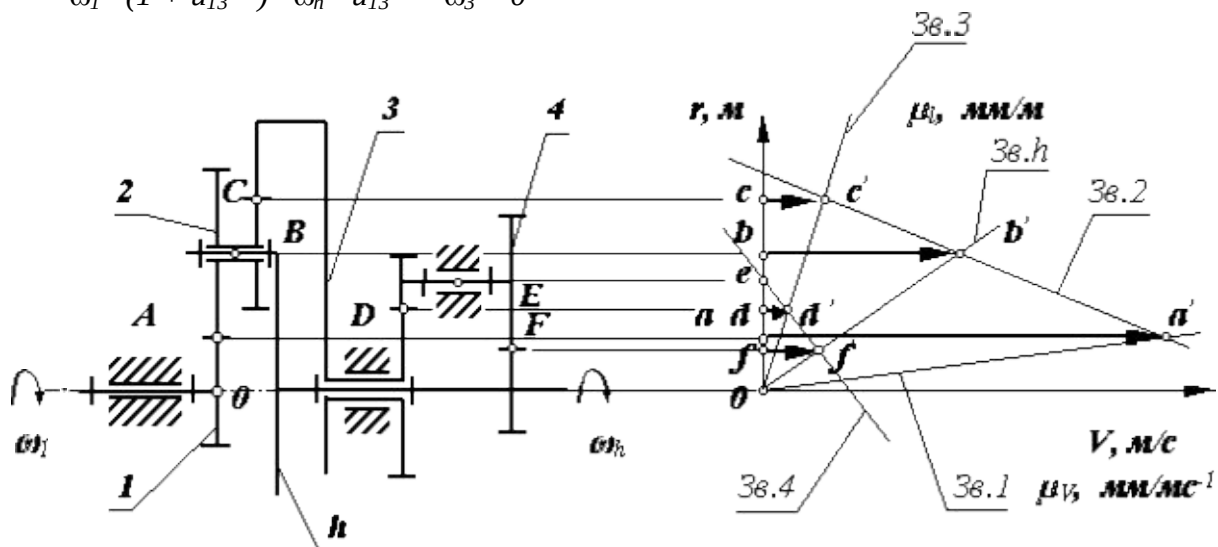


Рисунок 6.37 Замкнутый дифференциал

Чтобы из механизма с двумя подвижностями получить одноподвижный механизм необходимо либо остановить одно из подвижных звеньев, либо связать между собой функционально (например, простой зубчатой передачей) два подвижных звена. Механизмы, образованные по второму способу, называются замкнутыми дифференциалами. Схема такого механизма приведена на рис.6.37.

Вопросы для самоконтроля

1. Какой механизм называется планетарным?
2. Какие механизмы относятся к типовым планетарным механизмам?

3. Какое колесо планетарного механизма называется «солнечным»?
4. Какое колесо планетарного механизма называется «короной»?
5. Какие колеса планетарного механизма называются «сателлитами»?
6. Какое звено планетарного механизма называется «водило»?
7. Чему равна степень подвижности планетарного механизма, в котором наряду с подвижными колесами есть колесо, жестко закрепленное со стойкой?
8. Чему равна степень подвижности планетарного механизма, у которого все колеса подвижны?
9. В чем заключается условие соосности планетарных механизмов?
10. В чем состоит условие сборки планетарного механизма?
11. В чем суть условия соседства при синтезе планетарных механизмов?

ТЕМА 7. КУЛАЧКОВЫЕ МЕХАНИЗМЫ

7.1. Общая характеристика кулачковых механизмов

В самых различных машинах и приборах для придания исполнительным звеньям движений по строго заданному закону применяются кулачковые механизмы (например, механизм газораспределения в двигателе внутреннего сгорания, механизм подачи инструмента копировального металлообрабатывающего станка и так далее.). Широкое применение кулачковых механизмов обеспечено их относительной простотой, надежностью и компактностью.

Обычно кулачковый механизм состоит из двух подвижных и одного неподвижного (стойка) звеньев. Подвижные звенья образуют со стойкой низшие кинематические пары, а между собой высшую кинематическую пару.

Входное звено - **кулачок** имеет элементом высшей кинематической пары поверхность переменной кривизны, которая и определяет закон движения выходного звена.

Выходное звено кулачкового механизма, совершающее поступательное движение называется **толкателем**, а совершающее качательное движение - **коромыслом**.

На рис.7.1 показаны схемы различных возможных вариантов применяемых кулачковых механизмов.

В зависимости от функционального назначения и особенностей конструкции кулачковые механизмы могут быть **плоские** с поступательным или вращательным (дисковые) движением кулачка и **пространственные** (с цилиндрическим, коническим, гиперболоидным и коноидным кулачком).

Непрерывный контакт элементов высшей кинематической пары может обеспечиваться геометрическим замыканием (за счет пазов, охватывающих ролик) или силовым замыканием (за счет сил упругости пружин, давления рабочей жидкости, газа и так далее.).

В контакте рабочих поверхностей подвижных звеньев кулачкового механизма развиваются большие контактные напряжения и силы трения.

Для уменьшения сил трения и изнашивания поверхностей концевая часть выходного звена снабжается роликом или тарелкой (с плоской, цилиндрической или сферической контактной поверхностью).

В транспортных машинах наибольшее применение находят плоские кулачковые механизмы с дисковыми кулачками. В таких механизмах кулачок совершает вращательное движение, а размеры и кривизна его профиля определяют закон движения толкателя или коромысла.

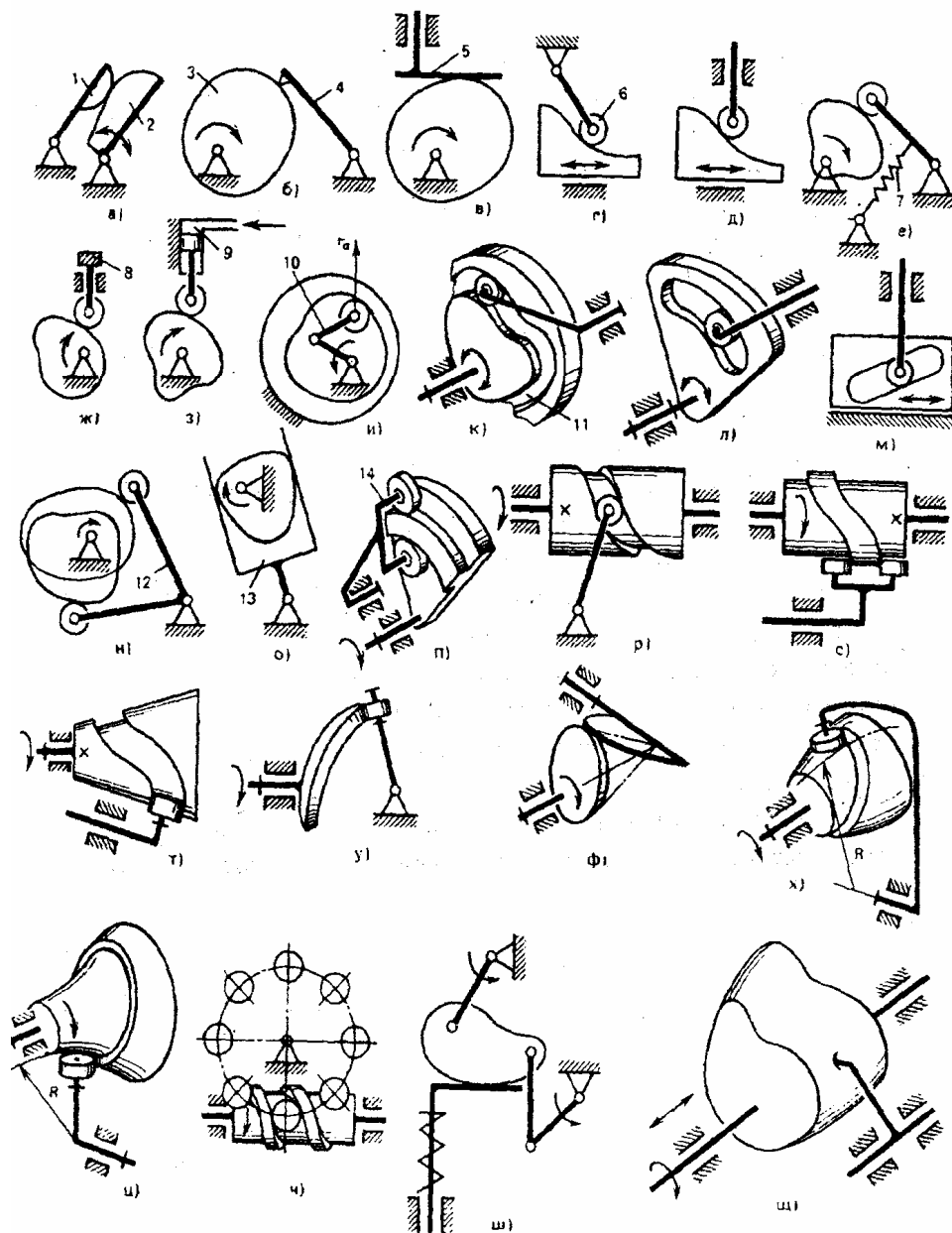


Рисунок 7.1 Схемы различных вариантов применяемых кулачковых механизмов

Вопросы для самоконтроля

1. Какой механизм называется кулачковым?
2. Для чего предназначен кулачковый механизм?
3. Как называется выходное звено кулачкового механизма, совершающее возвратно-поступательное движение?
4. Как называется выходное звено кулачкового механизма, совершающее возвратно-вращательное движение?
5. Какие кинематические пары образуют звенья кулачкового механизма?
6. Чем обеспечивается непрерывный контакт звеньев кулачкового механизма?
7. Приведите примеры использования кулачковых механизмов в транспортных машинах.

7.2. Основные геометрические и кинематические параметры механизмов с плоскими дисковыми кулачками

За цикл работы механизма входное звено (дисковый кулачок) совершает полный оборот, то есть, угол поворота φ кулачка равен 2π . Соответственно, выходное звено - толкатель (рис.7.2, а, б), совершая возвратно-поступательное движение и пройдя путь

$2S_{max}$, возвращается в свое исходное положение, а выходное звено **коромысло** (рис. 7.2, в) возвращается в свое первоначальное положение, совершив возвратно-вращательное движение вокруг оси вращения на угол, равный $2\beta_{max}$. Расстояние S_{max} , которое толкатель проходит из одного крайнего положения в другое, называется **ходом** толкателя, а угол β_{max} называется **углом размаха** коромысла.

Весь период движения толкателя (или коромысла) включает в себя четыре фазы:

- удаление из крайнего ближнего по отношению к центру кулачка положения в крайнее дальнее положение (**фаза удаления**);
- стояние в крайнем дальнем положении (**фаза верхнего выстоя**);
- возвращение из крайнего дальнего положения в крайнее ближнее положение (**фаза приближения**);
- стояние в крайнем ближнем положении (**фаза нижнего выстоя**).

Углы поворота φ кулачка и промежутки времени t , соответствующие этим фазам, имеют следующие обозначения и названия:

- Φ_1 и t_1 - угол и время удаления;
- Φ_2 и t_2 - угол и время верхнего выстоя;
- Φ_3 и t_3 - угол и время приближения;
- Φ_4 и t_4 - угол и время нижнего выстоя.

Очевидно, что

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 = 2\pi;$$

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = T,$$

где T - время одного оборота кулачка.

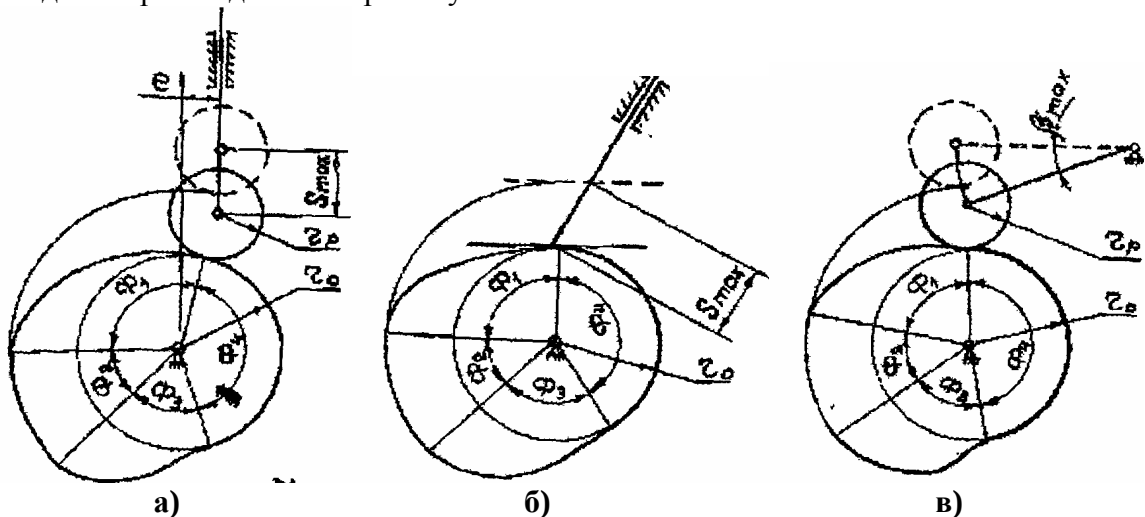


Рисунок 7.2 Цикл работы механизма с плоским дисковым кулачком

Фазе верхнего выстоя Φ_2 и фазе нижнего выстоя Φ_4 соответствуют участки профиля кулачка, представляющие собой окружности с центрами, совпадающими с центром вращения кулачка и радиусами соответственно r_{max} и r_{min} , где r_{max} - максимальное расстояние, а r_{min} - минимальное расстояние от точек профиля кулачка до его центра вращения. Окружность радиуса $r_0 = r_{min}$, центр которой совпадает с центром вращения кулачка, называется **основной окружностью** кулачка, а соответствующий ей цилиндр — **основной шайбой** кулачка.

Фазе удаления Φ_1 и фазе приближения Φ_3 соответствуют участки профиля кулачка, представляющие кривые переменной кривизны. Закон движения выходного звена (толкателя или коромысла) в указанных фазах определяется угловой скоростью кулачка и кривизной профиля, соответствующей этим фазам.

При кинематическом и динамическом анализе механизма удобно представить закон движения толкателя в виде кинематических диаграмм функций перемещения $S(t)$ по времени или $S(\varphi)$ по углу поворота кулачка, а так же скорости $S'(t)$ и ускорения $S''(t)$ или их аналогов $S'(\varphi)$ и $S''(\varphi)$.

Вопросы для самоконтроля

1. Назовите основные кинематические параметры движения звеньев кулачкового механизма.
2. Назовите фазы движения выходного звена кулачкового механизма.
3. Что называется основной окружностью кулачка?
4. Какие участки профиля кулачка соответствуют фазам верхнего и нижнего выстоя?
5. Какие участки профиля кулачка соответствуют фазам удаления и приближения?
6. Чем определяется закон движения выходного звена в фазах удаления и приближения?

7.3. Задачи и критерии синтеза кулачковых механизмов

Основная задача синтеза кулачковых механизмов состоит в определении формы профиля кулачка и его размеров, обеспечивающих при заданных (или выбранных) законах движения кулачка и ведомого звена необходимые геометрические, кинематические и силовые параметры механизма, которые, в свою очередь, задаются технологическими и силовыми условиями его работы (фазовые углы $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$, ход $S_{\max}$ или угол размаха $\beta_{\max}$ ведомого звена; угол давления ν и другие). К конструкции кулачкового механизма предъявляются так же требования компактности, плавности и бесшумности работы, максимального КПД, прочности и высокой износостойкости элементов кинематических пар.

Кинематические и силовые условия взаимодействия подвижных звеньев кулачкового механизма, а так же его КПД в значительной мере могут характеризоваться углами давления и передачи.

Углом давления ν называют острый угол между направлением вектора скорости точки касания выходного звена с кулачком и вектором силы давления кулачка на выходное звено (общей нормалью к профилям этих звеньев в указанной точке) (рис.7.3).

Углом передачи называют угол $\gamma = 90^\circ - \nu$, образуемый направлением вектором скорости точки выходного звена, соприкасающейся с кулачком, и общей касательной $t-t$ к профилям этих звеньев в указанной точке.

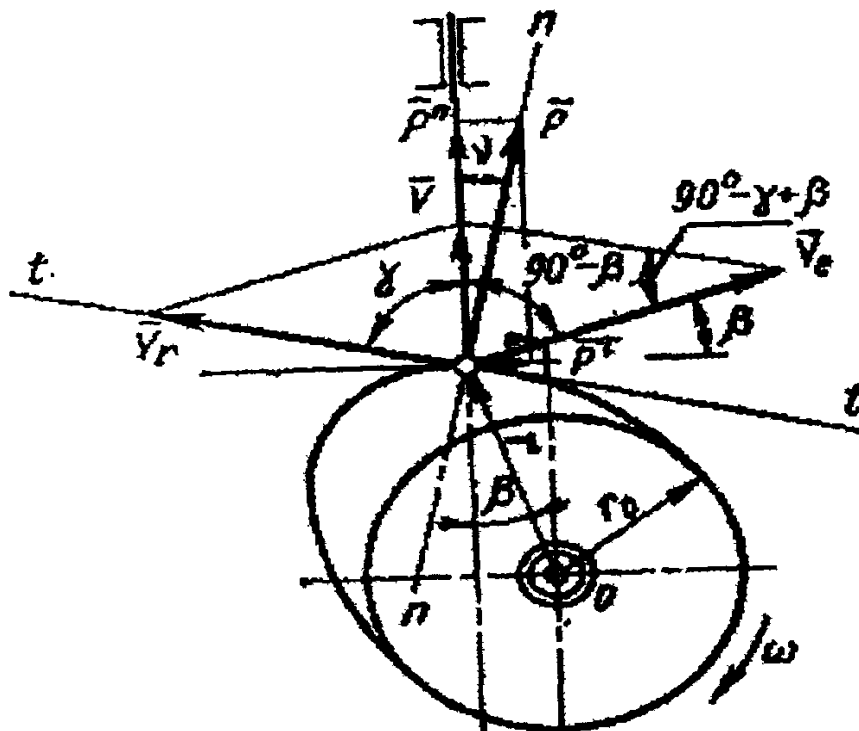


Рисунок 7.3 Силы, действующие на кулачковый механизм

Из приведенного на рис. 7.3 параллелограмма скоростей получим:

$$\frac{V}{\sin(90^\circ - \gamma + \beta)} = \frac{V_r}{\sin(90^\circ - \beta)} = \frac{V_e}{\sin(\gamma)} \quad (7.1)$$

где V , V_r , V_e - векторы скоростей точки касания толкателя с кулачками в абсолютном, относительном и переносном движении;

β - угол между вертикалью и радиус-вектором $\bar{r}$ указанной точки (угол обусловлен наличием эксцентриситета e).

Обозначая через ω угловую скорость кулачка, получим:

$$V_e = \omega r \quad (7.2)$$

$$V = \omega \cdot r \cdot \frac{\cos(\gamma - \beta)}{\sin(\gamma)} = \omega \cdot r \cdot \frac{\cos(\nu + \beta)}{\sin(\nu)} \quad (7.3)$$

$$V_r = \omega \cdot r \cdot \frac{\cos(\beta)}{\sin(\gamma)} = \omega \cdot r \cdot \frac{\cos(\beta)}{\sin(\nu)} \quad (7.4)$$

Из формулы (7.3) видно, что увеличение угла γ передачи (уменьшение угла ν давления) с точки зрения кинематики невыгодно, так как можно получить слишком малые скорости движения толкателя, несмотря на большие угловые скорости кулачка. В то же время, как следует из формулы (7.4), увеличение угла γ (уменьшение угла ν) ведет к уменьшению относительной скорости, что в некоторых конструкциях механизмов может иметь существенное положительное значение.

На рис.7.3 сила $\bar{P}$ - сила давления кулачка на толкатель, ее составляющие $\bar{P}^n$ направлена вдоль, а сила $\bar{P}^r$ - перпендикулярно оси толкателя.

Сила $P^n = P \cdot \cos(\nu)$ действует по направлению движения толкателя, а сила $P^r = P \cdot \sin(\nu)$ изгибает толкатель и прижимает его к направляющим, увеличивая силу трения.

Следовательно, уменьшение величины угла ν давления (увеличение угла γ передачи) благоприятно сказывается на силовом взаимодействии подвижных звеньев. В этом случае уменьшается изгибающее толкатель усилие и силы трения в направляющих толкателя.

Таким образом, определение оптимальных значений углов ν и γ с учетом противоречивых требований по выполнению кинематических и силовых условий взаимодействия подвижных звеньев представляет собой достаточно сложную задачу. На основании теоретических и экспериментальных исследований рекомендуется принимать для кулачковых механизмов с толкателем $\nu < 30^\circ$ или $\gamma > 60^\circ$, для коромысловых кулачковых механизмов $\nu < 45^\circ$ или $\gamma > 45^\circ$.

Выбор закона движения выходного звена определяется требованиями плавности и бесшумности работы кулачкового механизма. На рис.7.4 показаны три закона движения толкателя в виде зависимостей $S = S(t)$, $V = V(t)$ и $a = a(t)$ для фазы удаления. Граничные условия заданы: в начале фазы удаления $t = 0$ и $S = 0$, в конце фазы $t = t_1$, $S = S_{\max}$. Простейшим законом движения является **закон постоянства скорости** (кривая 1), при котором максимальная скорость толкателя $V_{\max}$ имеет наименьшее значение.

Но в начале и конце фазы движения происходят **жесткие удары**, то есть, скорости толкателя должны получать мгновенные изменения ($a \rightarrow \infty$).

Жестких ударов можно избежать, используя **закон постоянного ускорения** (кривая 2), при котором толкатель сначала движется равноускоренно, а потом равнозамедленно.

Однако, при переходе от равноускоренного к равнозамедленному движению мгновенно изменяется направление ускорения, а значит, и силы инерции, что называют **мягким ударом**. Избежать мгновенного изменения ускорения удастся применяя закон **синусоидального ускорения** (кривая 3), а также других.

При синтезе кулачкового механизма закон движения выходного звена обычно задают законом изменения ускорения $a = a(t)$, по которому интегрированием определяют закон изменения скорости $V = V(t)$, а затем вторичным интегрированием - закон перемещения $S = S(t)$.

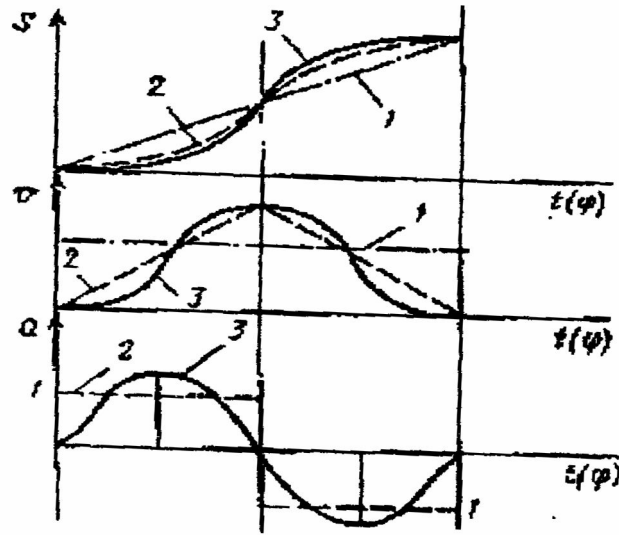


Рисунок 7.4 Три закона движения толкателя в виде зависимостей $S = S(t)$, $V = V(t)$ и $a = a(t)$ для фазы удаления

Компактность кулачкового механизма зависит от величины радиуса окружности основной шайбы. Рассмотрим методику расчета радиуса основной окружности кулачка на примере дезаксиального кулачкового механизма с толкателем. На рис 7.5, а показана схема механизма, на которой построен параллелограмм скоростей (план скоростей).

Дополнительно через точку A проведены нормаль nn и касательная tt , а так же горизонтальная и вертикальная линии. Через точку O проведена линия mm , параллельная нормали nn и на пересечении ее с горизонталью получена точка M .

$\Delta OAM \sim \Delta Aa_1a_2$, а $\angle AMO = \gamma$.

Так как

$$\frac{AM}{OA} = \frac{V_{A2}}{V_{A1}}, \quad \text{то}$$

$$AM = OA \cdot \frac{V_{A2}}{V_{A1}} = OA \cdot \frac{V_{A2}}{OA\omega_1} = \frac{V_{A2}}{\omega_1} = \frac{dS_2}{d\varphi_1}$$

$$BM = AM - AB = \frac{V_{A2}}{\omega_1} - e = \frac{dS_2}{d\varphi_1} - e,$$

$$OB = S_0 + S$$

$$\operatorname{tg}(\gamma) = \frac{OB}{MB} = \frac{S_0 + S}{\frac{V_{A2}}{\omega_1} - e} = \frac{S_0 + S}{\frac{dS_2}{d\varphi_1} - e} \quad (7.5)$$

Формула (7.5) показывает, что угол передачи γ зависит от габаритов кулачка. При уменьшении радиуса r_0 основной шайбы кулачка уменьшается и расстояние S_0 , а следовательно и угол передачи γ .

Для нормальной работы механизма должно соблюдаться условие

$$\operatorname{tg}(\gamma) \geq \operatorname{tg}(\gamma_{\min})$$

т.е.

$$S_0 + S \geq \left[\frac{V_{A2}}{\omega_1} - e \right] \cdot \operatorname{tg}(\gamma_{\min})$$

или

$$S_0 \geq \left[\frac{V_{A2}}{\omega_1} - e \right] \cdot \operatorname{tg}(\gamma_{\min}) - S = \left[\frac{dS_2}{d\varphi_1} - e \right] \cdot \operatorname{tg}(\gamma_{\min}) - S = S(\varphi) \quad (7.6)$$

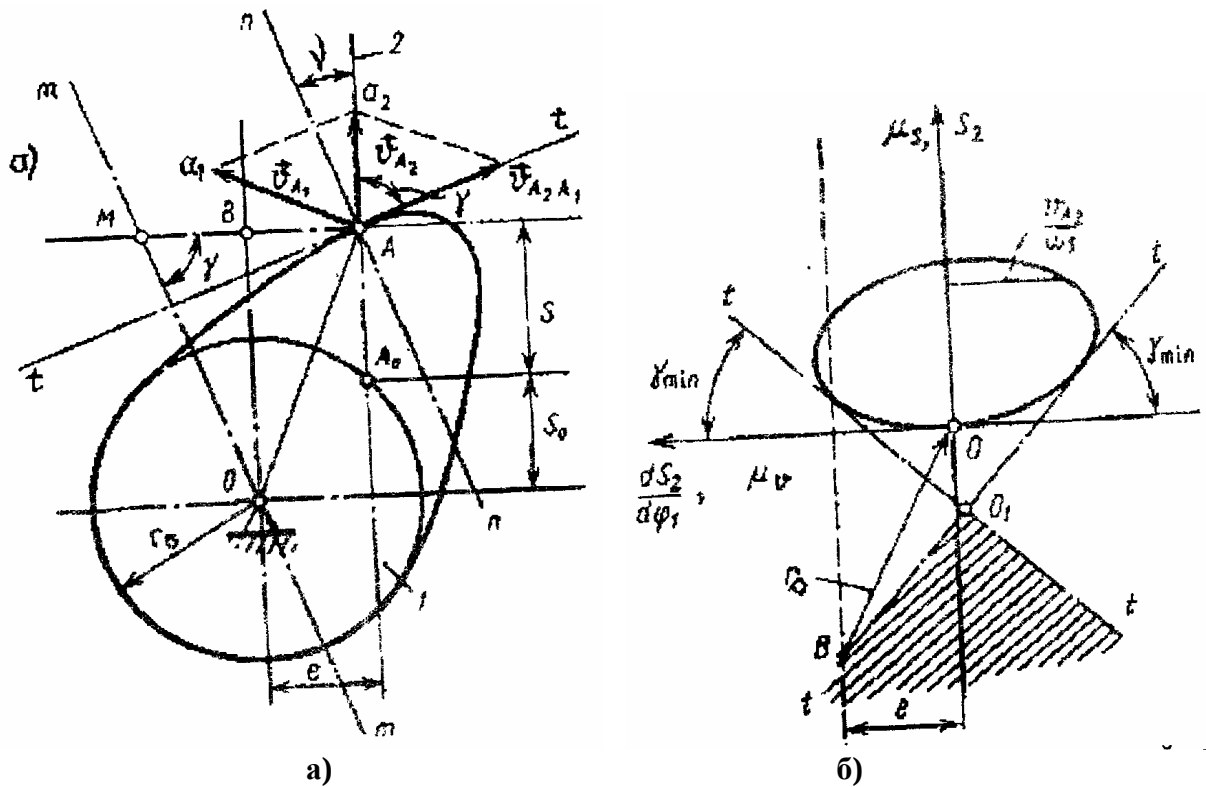


Рисунок 7.5 Параллелограмм скоростей (а) и график $S_2 = f\left(\frac{dS_2}{d\varphi_1}\right)$ (б)

Условие (7.6) должно выполняться для любого значения φ . Из рис.7.5, а следует

$$r_{0min} = \sqrt{S_{0min}^2 + e^2} \quad (7.7)$$

Графоаналитический метод определения r_{0min} состоит в построении графика

$$S_2 = f\left(\frac{dS_2}{d\varphi_1}\right) \quad (\text{рис.7.5, б})$$

К построенному графику проводятся предельные касательные tt под углом γ_{min} , к оси $\frac{dS_2}{d\varphi_1}$.

Эти касательные продолжают до их взаимного пересечения. Заштрихованная область, определяемая пересечением предельных касательных, является областью центров вращения кулачков.

При заданном эксцентриситете e радиус $r_{0min} = BO$.

Вопросы для самоконтроля

1. Назовите основную задачу синтеза кулачкового механизма.
2. Что называется углом давления?
3. Что называется углом передачи?
4. Как влияет изменение угла давления на скорость движения выходного звена?
5. Как влияет изменение угла давления на силовое взаимодействие звеньев кулачкового механизма?
6. Каковы максимально допустимые значения углов давления?
7. Чем характеризуется движение выходного звена при различных законах его движения?
8. В чем состоит графоаналитический метод определения минимального радиуса кулачка?

7.4. Графический метод проектирования кулачкового механизма с дисковым кулачком

Графический метод проектирования кулачкового механизма позволяет наглядно представить последовательность динамического синтеза кулачкового механизма и включает следующие стадии:

- построение диаграмм аналога ускорения $\frac{d^2S}{d\varphi^2}(\varphi)$ толкателя по заданному закону;

- построение диаграмм аналогов скорости $\frac{dS}{d\varphi}(\varphi)$ и перемещения $S(\varphi)$ толкателя путем графического интегрирования;

- определение минимального радиуса r_{0min} кулачка;

- построение теоретического и практического профилей кулачка;

- определение углов давления ν и построение диаграмм $\nu(\varphi)$;

Рассмотрим три примера динамического синтеза кулачкового механизма.

7.4.1. Синтез кулачкового механизма с роликовым толкателем

Исходные данные:

- ход толкателя $S = 40 \text{ мм} = 0,04 \text{ м}$;

- наибольший допускаемый угол давления $\nu_{max} = 20^\circ$;

- закон изменения ускорений толкателя - синусоидальный;

- величина эксцентриситета $e = 0,02 \text{ м}$;

- фаза удаления толкателя $\Phi_1 = 120^\circ$;

- фаза верхнего выстоя $\Phi_2 = 20^\circ$;

- фаза приближения толкателя $\Phi_3 = 80^\circ$;

- фаза нижнего выстоя $\Phi_4 = 140^\circ$;

- угловая скорость кулачка $\omega = 10 \text{ с}^{-1}$.

Строим диаграммы аналога ускорения, аналога скорости и перемещения толкателя (рис.7.6).

Определяем минимальный радиус кулачка так, чтобы угол давления не превышал своего максимального допустимого значения ν_{max} .

Совместно, в одном масштабе, построим диаграмму $S(\varphi)$ и $\frac{dS}{d\varphi}$, исключив параметр φ , (рис.7.7) для этого:

- по оси S откладываем перемещения y_i с диаграммы $S(\varphi)$;

- по оси $\frac{dS}{d\varphi}$ откладываем отрезок z_i

$$z_i = (Y'_i \cdot K_{ds/d\varphi}) / K_s$$

где Y'_i - ордината i -й точки на диаграмме $\frac{dS}{d\varphi}$, (направление оси слева - направо соответствует вращению кулачка по часовой стрелке);

- соединяя последовательно полученные точки, получаем диаграмму $S \rightarrow \frac{dS}{d\varphi}$ в виде замкнутой кривой;

- под углом $\nu_{max} = 20^\circ$ к оси S проводим две касательные линии к построенной кривой;

- пересекаясь, эти две линии ограничивают область (заштрихована), где может располагаться центр вращения кулачка и при этом будет выполняться условие $\nu < \nu_{max}$;

- в рассматриваемом примере задана величина эксцентриситета $e = 0,01\text{м}$, поэтому проводим линию параллельную оси S , отстоящую от нее на величину $e/K_S = 0,01/0,74 \cdot 10^{-3} = 14\text{ мм}$, на этой линии в заштрихованной области должен располагаться центр вращения кулачка;

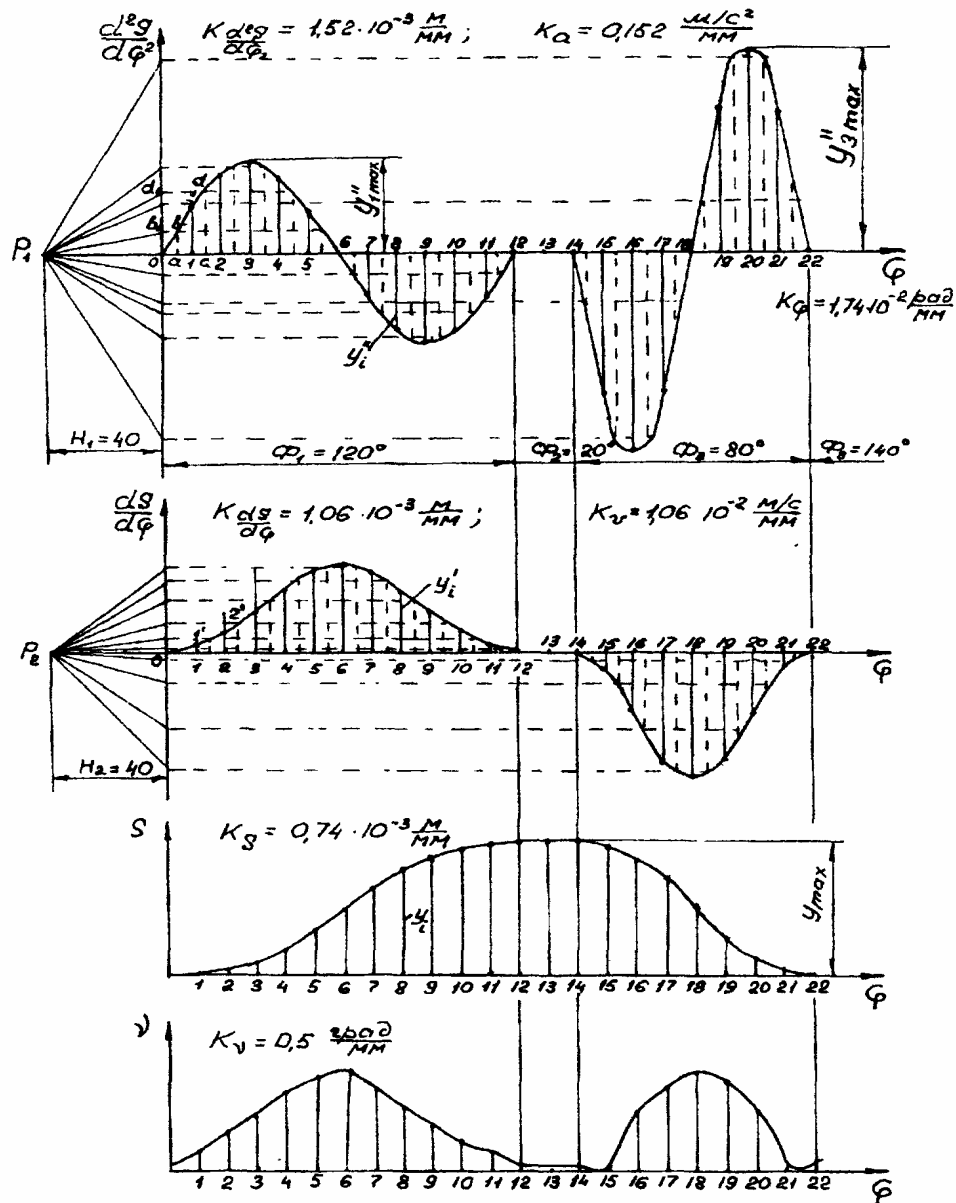


Рисунок 7.6 Диаграммы движения толкателя

- минимальный радиус кулачка, таким образом, будет равен величине O_1C_0 с учетом масштаба

$$r_{0\min} = O_1C_0K_S$$

Строим профиль кулачка (рис.7.7):

-определяем масштаб построения профиля кулачка

$$K_l = \frac{r_{0\min}}{l_{\min}} \quad \text{м/мм,}$$

где $r_{0\min}$ - минимальный радиус кулачка,

$l_{\min}$ -длина отрезка, изображающего его на чертеже;

-из произвольно выбранной на чертеже точки O проводим окружность радиусом

$$l_{\min} = 115\text{мм;}$$

- на расстоянии $le = e/K_1$ [мм] проводим линию перемещения толкателя, ее пересечение с окружностью определяет положение центра C_0 ролика толкателя в положении, соответствующем фазе нижнего выстоя, а радиус-вектор O_1C_0 совпадает с началом фазы Φ_1

- с учетом масштаба K_1 определяем длины отрезков, изображающих соответствующие перемещения S толкателя

$$S_i = \frac{K_S \cdot Y_i}{K_1}$$

- для построения профиля кулачка используем метод обращения движения: перемещаем толкатель в сторону противоположную направлению вращения кулачка с учетом его перемещения S_i вдоль направляющей и угла поворота φ_i вокруг центра вращения кулачка. Для этого откладываем отрезок $C_0C_i = S_i$ и переносим его радиусом OC_i до пересечения с линией направления перемещения толкателя в i -м положении;

- соединяя полученные точки $C_1 - C_{22}$ получим теоретический профиль кулачка;

- определяется величина радиуса r_p ролика толкателя из известного условия $r_p < \rho_{min}$, где ρ_{min} - минимальный радиус кривизны профиля кулачка.

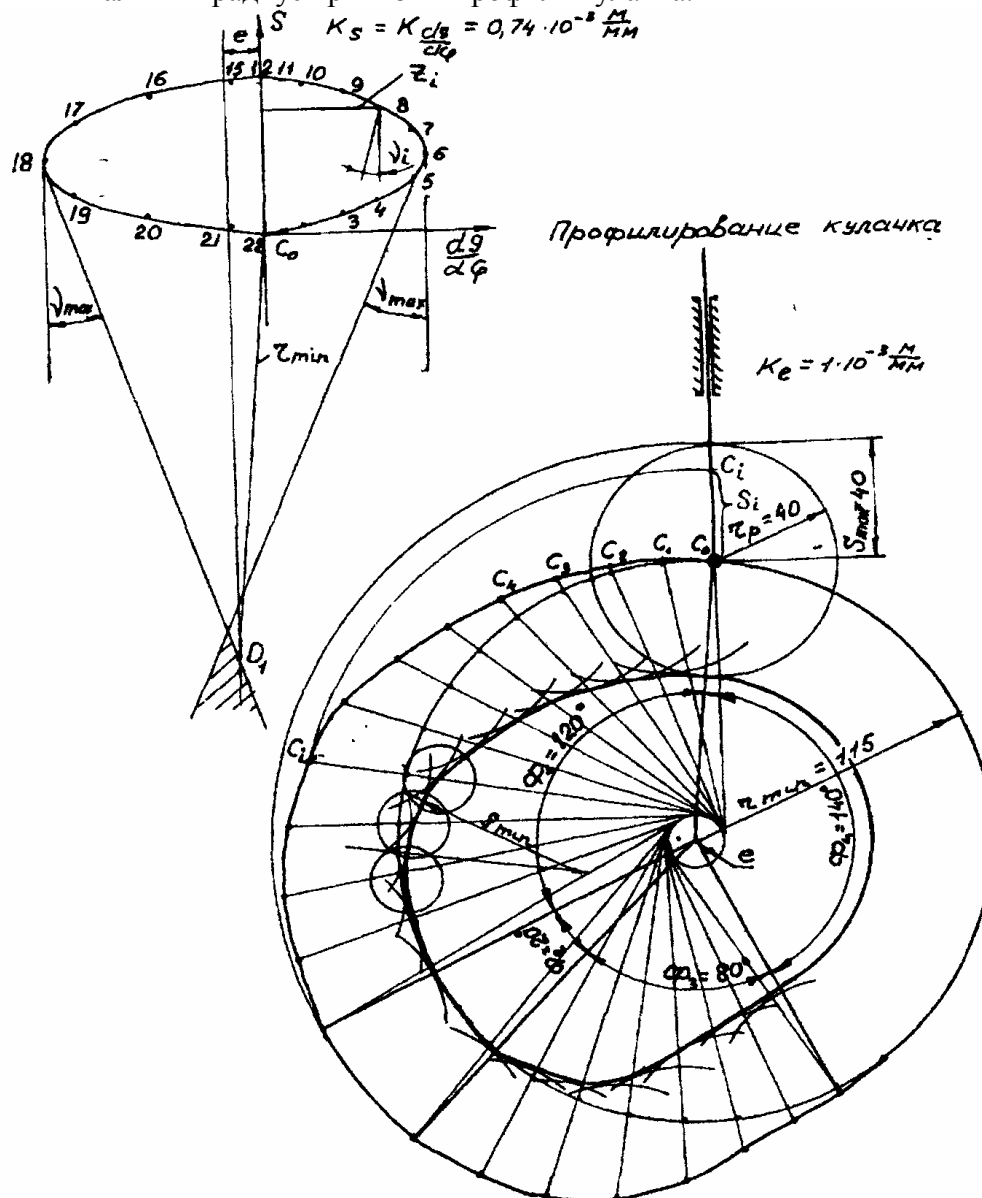


Рисунок 7.7 Профиль кулачка

Для графического определения ρ_{min} на участке кривой профиля наименьшего радиуса кривизны проводим три взаимно пересекающиеся окружности с центрами на кривой теоретического профиля, а через их общие точки проводим две линии, которые пересекаются в точке, соответствующей центру кривизны данного участка.

-из соответствующих точек теоретического профиля проводим окружности радиусом r_p ;

-проведя огибающую кривую, получаем практический профиль кулачка.

7.4.2. Синтез кулачкового механизма с роликовым коромыслом

Исходные данные:

- размах коромысла $\beta_{max} = 30^\circ$;
- наибольший допустимый угол давления $\nu_{max} = 20^\circ$
- длина коромысла $l = 0,1\text{м}$;
- закон изменения ускорения - косинусоидальный;
- фаза удаления коромысла $\Phi_1 = 100^\circ$;
- фаза верхнего выстоя $\Phi_2 = 30^\circ$;
- фаза приближения коромысла $\Phi_3 = 120^\circ$;
- фаза нижнего выстоя $\Phi_4 = 110^\circ$;
- угловая скорость кулачка $\omega = 20 \text{ с}^{-1}$.

Строим диаграммы (рис.7.8) аналога углового ускорения, аналога угловой скорости и угла поворота коромысла.

Определяем минимальный радиус кулачка, исходя из условия $\nu < \nu_{max}$

Строим совместно диаграмму $\beta \rightarrow (d\beta/d\varphi)$, исключив параметр φ (рис. 7.9).

Построение диаграммы:

- принимаем масштаб построения $K_l = l_{O_2C} / O_2C$,

где l_{O_2C} - длина коромысла, O_2C - длина соответствующего отрезка на чертеже:

$$K_l = 0,100\text{м}/100\text{мм} = 0,001\text{м}/\text{мм};$$

- от радиуса-вектора O_2C_0 откладываем на чертеже сектор соответственно $\beta_{max}^0 = 30^\circ$;

- $\cup C_0B$ представляет собой траекторию движения оси вращения ролика коромысла;

- определяем масштаб $K_\beta = \beta_{max}^0 / Y_{max} = 30^\circ/64 = 0,47$ (град/мм) ;

- определяем 1-е положение оси вращения ролика по углу $\beta_i = K_\beta/Y_i$

где Y_i - ордината диаграммы $\beta(\varphi)$, соответствующая i -й точке,

β_i - угол от радиуса-вектора O_2C_0 ;

- через i -тое положение оси вращения ролика проводим радиальную прямую и откладываем отрезок z_i (положительное значение Y_i отсчитывается в направлении O_2 при вращении кулачка по часовой стрелке):

$$z_i = (Y_i' \cdot K_{d\beta/d\varphi}) / K_l$$

где Y_i' - ордината i -й точки диаграммы $(d\beta/d\varphi) \rightarrow \varphi$;

- соединяя последовательно полученные точки получаем диаграмму $\beta \rightarrow (d\beta/d\varphi)$ в виде замкнутой кривой;

- используя то, что угол передачи $\gamma_{min} = 90^\circ - \nu_{max}$, в нашем примере $\gamma_{min} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, проводим семейство линий под углом $\gamma_{min} = 60^\circ$ для крайних точек 4,5,6,18,19 и 20, которые образуют область (заштрихована) возможного расположения центра вращения кулачка при выполнении условия $\nu < \nu_{max}$.

- выбираем точку O_1 , тогда минимальный радиус определится:

$$r_{min} = O_1C_0K_l = 80 \cdot 0,001 = 0,08 \text{ м};$$

Строим профиль кулачка:

- определяем масштаб построения профиля кулачка

$$K_l = l_{кор} / O_2C_0 = 0,1/100 \text{ мм} = 0,001 \text{ м}/\text{мм},$$

где $l_{кор}$ - длина коромысла,

O_2C_0 - длина отрезка, изображающего его на чертеже;

- определяем длину отрезка O_1C_0

$$O_1C_0 = r_{min} / K_l = 0,08/0,001 = 80 \text{ мм};$$

- определяем длину отрезка O_1O_2 ,

$$O_1O_2 = l_{O_1O_2} / K_l = 0,145 / 0,001 = 145 \text{ мм};$$

- строим треугольник $\Delta O_1 O_2 C_0$, через точку C_0 проводим $\cup C_0 C B$ соответственно максимальному углу размаха коромысла $\beta_{\max} = 30^\circ$;
- проводим окружность радиусом $O_1 O_2$ с центром в точке O_1 , на которой отметим положения центра вращения коромысла во всех точках при обратном движении;

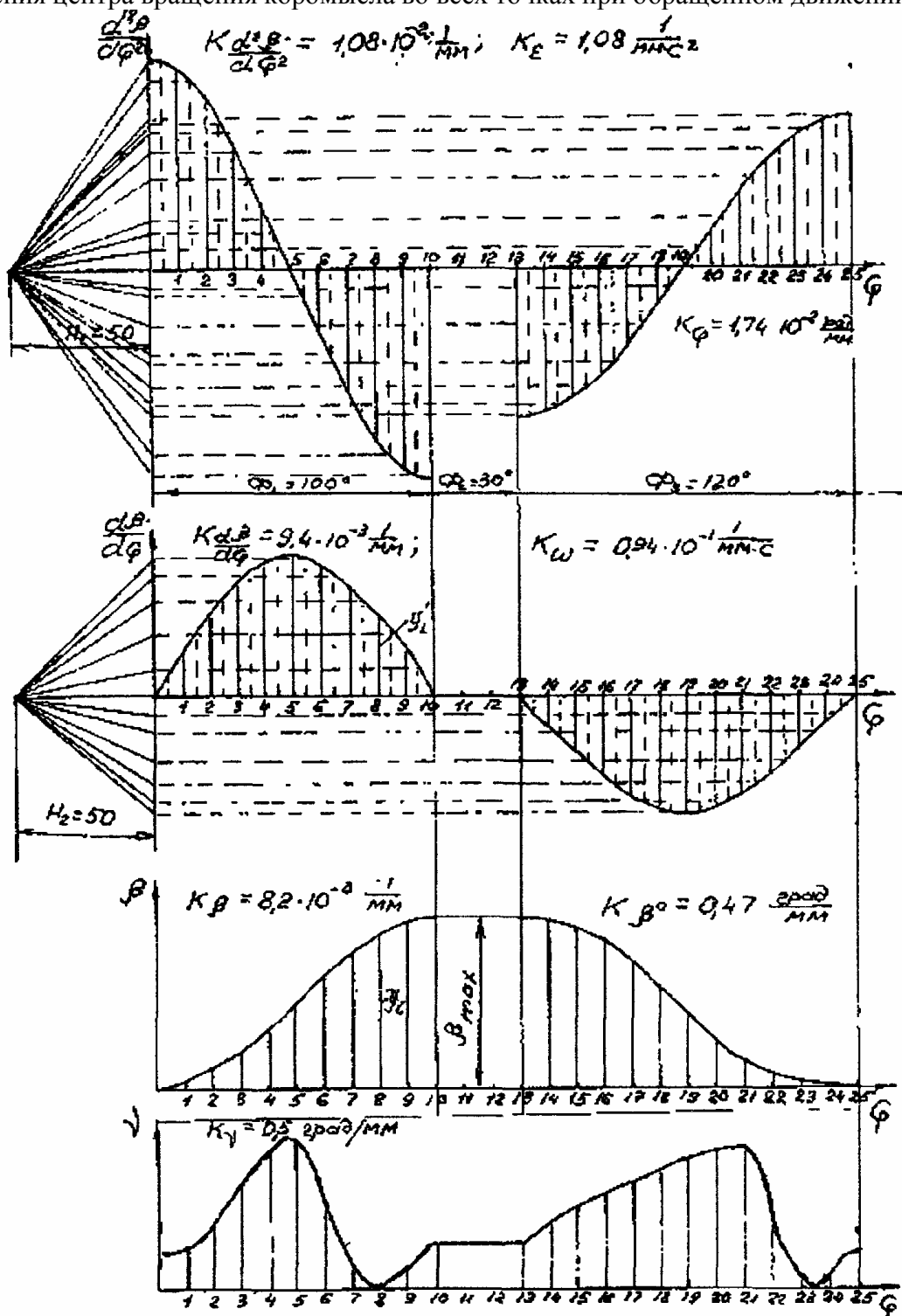


Рисунок 7.8 Диаграммы движения коромысла

- для определения положения центра вращения ролика коромысла в i -том положении из центра вращения коромысла O_2 проводим дугу радиусом $O_2 C_0$, на которую переносим точку радиусом $O_1 i$ до пересечения с дугой, это и будет положение центра ролика C_i коромысла в i -м положении.

Проведем аналогичные построения во всех положениях и, соединяя полученные точки, строим теоретический профиль кулачка;

Определяем радиус ролика

$$\rho_{\min} = 57 \text{ мм}; \quad r_p < 0,7\rho_{\min}, \quad r_p \leq 0,7 \cdot 57 = 40 \text{ мм}.$$

Методика определения минимального радиуса кривизны профиля кулачка и построения практического профиля кулачка аналогична изложенной в предыдущем примере.

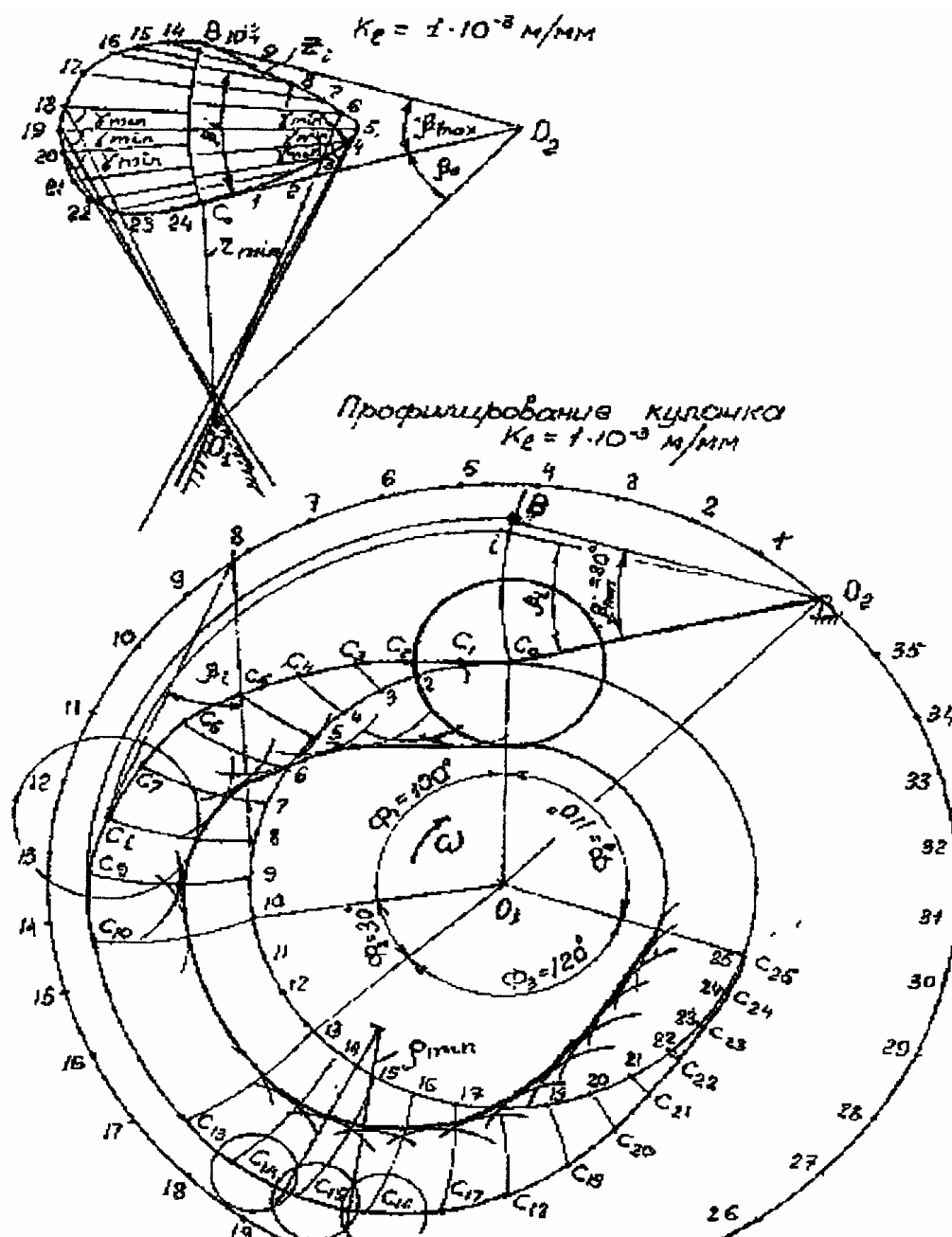


Рисунок 7.9 Профиль кулачка

7.4.3. Синтез кулачкового механизма с плоским толкателем

Исходные данные:

- ход толкателя $S = 25 \text{ мм}$;
- наибольший допустимый угол давления $\nu_{\max} = 20^\circ$;
- величина эксцентриситета $e = 13 \text{ мм}$;
- фаза удаления коромысла $\Phi_1 = 100^\circ$;
- фаза верхнего выстоя $\Phi_2 = 10^\circ$;
- фаза приближения коромысла $\Phi_3 = 80^\circ$;
- фаза нижнего выстоя $\Phi_4 = 170^\circ$;
- закон изменения ускорения - линейный.

Строим диаграммы аналога ускорения, аналога скорости и перемещения толкателя (рис.7.10).

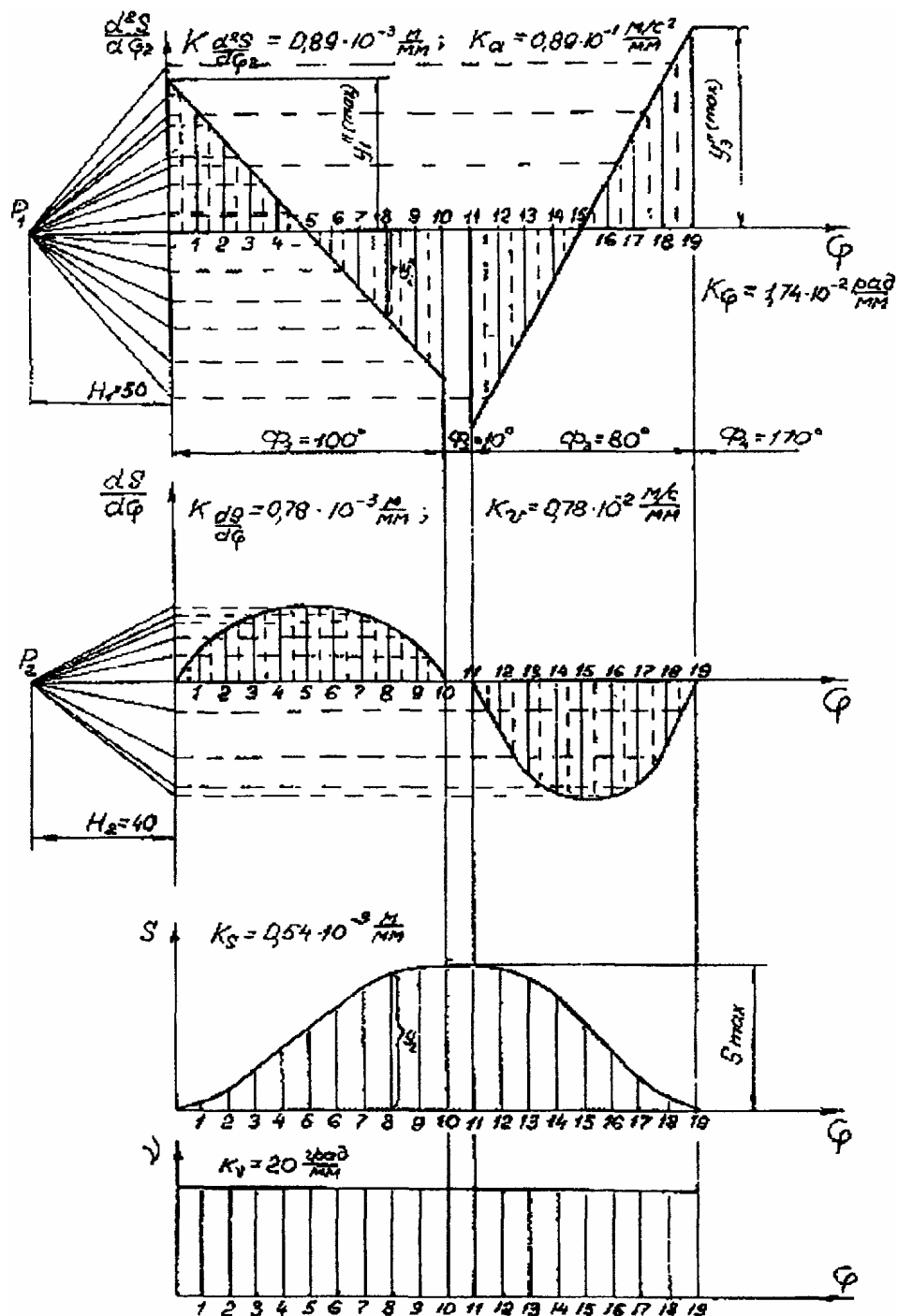


Рисунок 7.10 Диаграммы движения толкателя

Определяем минимальный радиус кулачка.

Строим диаграмму $S(d^2S/d\phi^2)$, исключив параметр ϕ (рис.7.11).

Для определения положения i -й точки на диаграмме:

- по оси S откладываем отрезок, равный Y_i , который соответствует ординате i -й точки графика $S(\phi)$;
- по оси $d^2S/d\phi^2$ откладываем отрезок z_i

$$z_i = Y_i'' \cdot K_{\frac{d^2S}{d\phi^2}} \cdot \frac{1}{K_S}$$

где Y_i'' - ордината i -й точки графика $d^2S/d\phi^2$ (определена при построении диаграммы как S''_{1i} и S''_{3i});

- соединяя последовательно полученные точки, строим диаграмму

$$S \rightarrow \frac{d^2 S}{d\varphi^2}$$

- под углом 45° к оси S проводим линию таким образом, чтобы она касалась диаграммы;
- на пересечении прямой с осью S получим точку K ;
- увеличивая C_0K на некоторую величину (10-12мм), получим точку O_1 , соответствующую центру вращения кулачка;
- величина C_0O_1 равна минимальному радиусу кулачка
 $r_{0\min} = K_S C_0O_1 = 0,54 \cdot 10^{-3} \text{ м/мм} \cdot 100 \text{ мм} = 0,054 \text{ м}.$

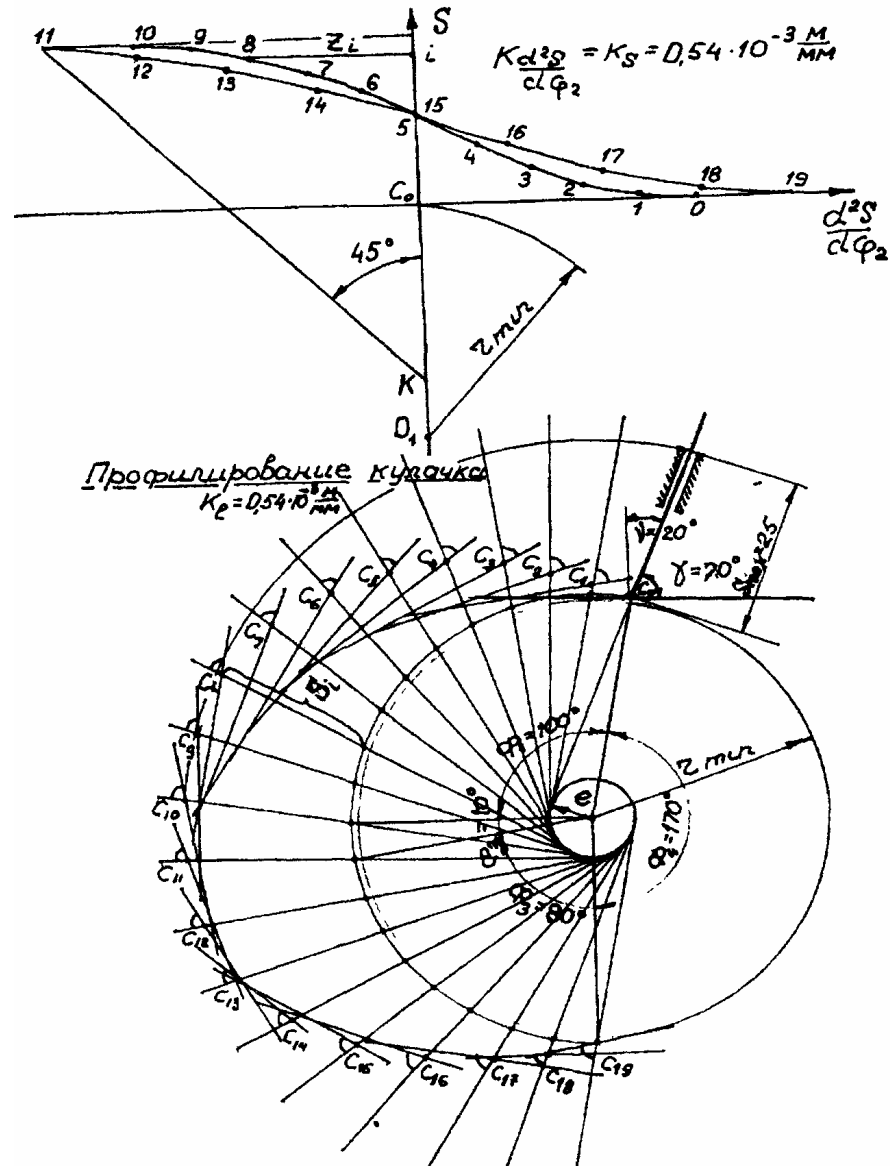


Рисунок 7.11 Профиль кулачка

Строим профиль кулачка.

- определяем масштаб построения

$$K_1 = r_{0\min} / l_{\min} = 0,054 \text{ м} / 80 \text{ мм} = 0,68 \cdot 10^{-3} \text{ м/мм},$$

где $r_{0\min}$ - действительная величина минимального радиуса кулачка,

$l_{\min}$ - величина отрезка, его изображающего;

- проводим окружность радиусом $l_{\min} = 80 \text{ мм}$ с центром в точке O_1 ;

- через центр O_1 проводим окружность, равную величине эксцентриситета в масштабе K_1

$$le = e / K_1 = 0,013 \text{ м} / 0,68 \cdot 10^{-3} = 20 \text{ мм}.$$

- проводим касательную к окружности радиусом le , которая совпадает с направлением движения толкателя;

- под углом $\gamma = 90^\circ - \nu = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$ проводим касательную к окружности минимального радиуса, которая и определяет положение тарелки толкателя в положении нижнего выстоя;

- полученная от пересечения этих линий точка C_0 и будет определять положение, а радиус-вектор C_0O_1 есть начало фазы Φ_1 ;

- проводим окружность радиусом C_0O_1 и делим ее на 36 частей, начиная от точки C_0 в сторону, противоположную направлению вращению кулачка;

- через полученные точки проводим касательные к окружности радиуса e , которые совпадают с осью толкателя в соответствующих положениях;

для определения положения точки C в i -м положении необходимо определить перемещение толкателя $S_i = \frac{Y_i \cdot K_S}{K_I}$,

где Y_i - ордината соответствующей точки графика $S(\varphi)$;

- откладываем от точки C_0 в соответствующем положении величину S_i и через полученную точку C_i проводим под углом $\gamma = 70^\circ$ линию, определяющую положение плоскости тарелки в i -м положении;

- проведя построения для всех положений толкателя в обращенном движении, получим семейство прямых линий;

- замкнутая кривая, касательная к этим прямым, является профилем кулачка с плоским толкателем.

Вопросы для самоконтроля

1. Как находится минимальный радиус кулачка механизма с роликовым толкателем?

2. Как находится минимальный радиус кулачка механизма с плоским толкателем?

3. Как находится минимальный радиус кулачка механизма с коромыслом?

4. Как учитывается эксцентриситет при определении минимального радиуса кулачка?

5. Какой метод используется при графическом определении формы профиля и размеров кулачка?

6. Какое движение совершает толкатель в обращенном механизме?

7. Изменяется ли угол давления при работе кулачкового механизма с плоским толкателем?

8. Как определить минимальный радиус кривизны кулачка?

9. Чем отличаются теоретический и практический профили кулачка?

10. Что является условием выпуклости профиля кулачка?

ТЕМА 8. ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ МАШИННОГО АГРЕГАТА С ЖЕСТКИМИ ЗВАНЬЯМИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЗАДАННЫХ СИЛ

8.1. Постановка задачи

При определении закона движения машины по заданным силам целесообразно рассматривать машины-двигатели и исполнительные машины не разобщенно, а в совокупности, представляющей **машинный агрегат**.

На агрегат действуют:

1. Движущие силы, определяемые рабочим процессом двигателя;

2. Силы полезных сопротивлений, определяемые рабочим процессом исполнительной машины;

3. Силы вредных сопротивлений, обусловленные трением в кинематических парах всего агрегата;

4. Силы тяжести всех подвижных звеньев агрегата.

Т.к. большинство механизмов, лежащих в основе агрегата, представляют систему с одной степенью свободы, то можно следить за движением агрегата по движению одного звена, называемого **главным** (лучше, когда это общее звено двигателя и исполнительной машины) или **звеном приведения**.

Координаты, определяющие положение главного звена (угловые и линейные) назовем **обобщенными координатами** в уравнении движения агрегата.

8.2. Уравнение движения механизма (машины) в форме уравнения кинетической энергии

Рассматривая движение машины как движение одного звена (звена приведения), можно воспользоваться законами движения системы материальных точек.

Одним из таких законов является закон изменения кинетической энергии:

$$T_2 - T_1 = \sum A = \sum A_{\text{акт}} + \sum A_{\text{реакт}} \quad (8.1)$$

где

$T_2 - T_1$ - разность кинетических энергий материальной системы в каких-либо двух ее последовательных положениях,

$\sum A_{\text{акт}}$ - суммарная работа активных сил;

$\sum A_{\text{реакт}}$ - суммарная работа сил реакций связей.

$$\sum A_{\text{акт}} = \sum A_{\text{дв}} - \sum A_{\text{ПС}} \pm \sum A_{\text{тяж}} \quad (8.2)$$

$$\sum A_{\text{реакт}} = - \sum A_{\text{тр}}$$

Следовательно:

$$T_2 - T_1 = \sum A_{\text{дв}} - \sum A_{\text{ПС}} \pm \sum A_{\text{тяж}} - \sum A_{\text{тр}} \quad (8.3)$$

Сюда не должна включаться работа сил инерции, т.к. в уравнении инерция масс уже учтена самим изменением кинематической энергии.

8.2.1. Характерные периоды движения машины

Из предыдущего уравнения можно в движении машины выделить три характерных периода.

1. $\sum A > 0$ т.е. $T_2 - T_1 > 0$ или $T_2 > T_1$ за любой промежуток времени.

Такое движение характеризуется непрерывным возрастанием кинетической энергии, а следовательно скорости и ускорения, что в свою очередь ведет к возрастанию сил инерции и может вызвать поломку. Такое движение обычно кратковременно и носит название **разбега** (рис.8.1).

2. $\sum A < 0$ т.е. $T_2 - T_1 < 0$ или $T_2 < T_1$ за любой промежуток времени.

Такое движение приводит к остановке ($T = 0$). Данный режим реализуется в машине в период, предшествующий остановке - **период выбега** (рис.8.2).

Оба эти режима кратковременны, носят название **неустановившегося движения**, а также **неравновесного** движения, поскольку совершается под действием неуравновешенной системы сил.

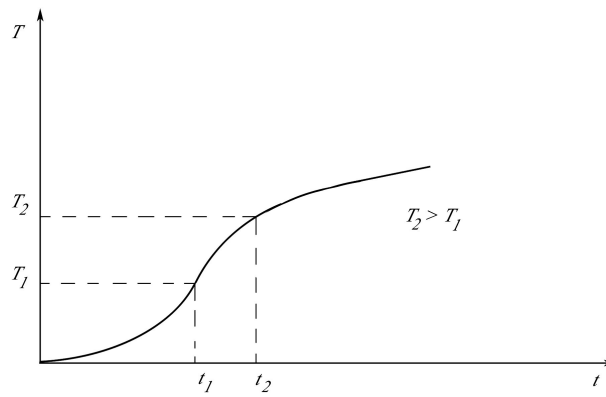


Рисунок 8.1 Период разбега машины

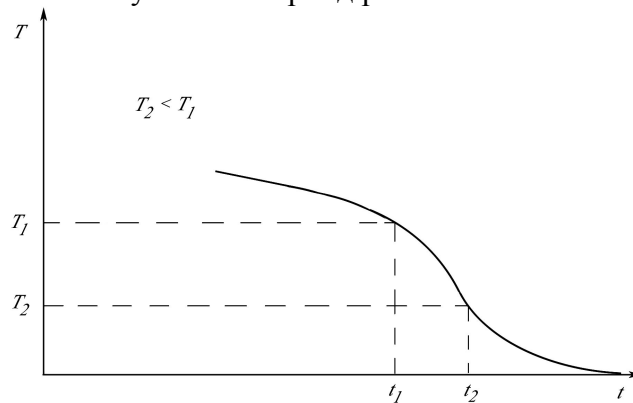


Рисунок 8.2 Период выбега машины

3а. $\Sigma A = 0$ т.е. $T_2 = T_1$ за любой промежуток времени или $T = \text{const}$.

Такое движение называется установившимся равновесным движением (рис.8.3). Оно осуществляется в механизмах с постоянным передаточным отношением.

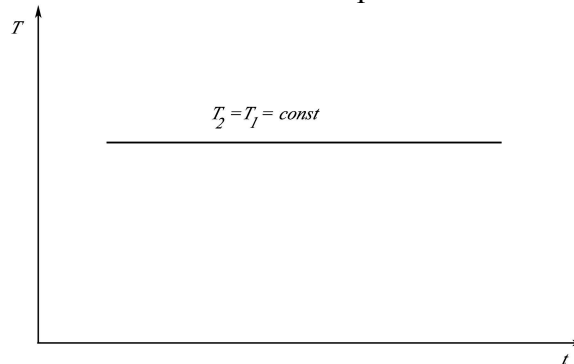


Рисунок 8.3 Установившееся равновесное движение машины

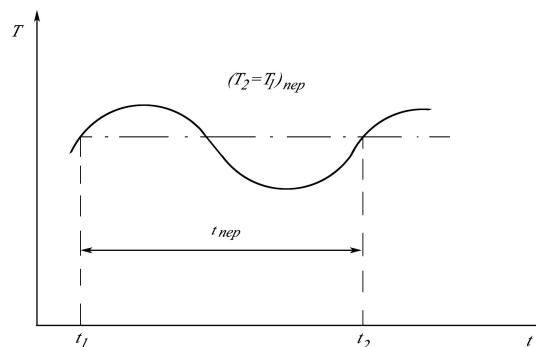


Рисунок 8.4 Установившееся неравновесное движение машины

3б. $(\Sigma A)_{неп} = 0$ тогда $(T_2 - T_1)_{неп} = 0$; $(T_2 = T_1)_{неп}$.

т.е. получаем движение с периодически изменяющейся кинетической энергией, но одинаковой кинетической энергией в начале и в конце периода (рис.8.4). Такое движение называется **неравновесным установившимся**.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте формулировку закона изменения кинетической энергии.
2. Какие силы относятся к активным силам?
3. Какие силы относятся к реактивным силам?
4. Какой режим движения называется разбегом?
5. Как изменяется при разбеге кинетическая энергия и скорость движения звена приведения?
6. Какой режим движения называется выбегом?
7. Как изменяется при выбеге кинетическая энергия и скорость движения звена приведения?
8. Изменяется ли кинетическая энергия и скорость движения звена приведения при установившемся равновесном движении?
9. Какой режим движения получил название установившегося неравновесного движения?

8.2.2. Закон передачи работы в машине

Мы установили, что характеристикой неравновесного установившегося движения является

$$(\Sigma A)_{пер} = 0 \quad \text{или} \quad (T_2 - T_1)_{пер} = 0$$

$$(\Sigma A_{ов})_{пер} - (\Sigma A_{ПС})_{пер} \pm (\Sigma A_{тяж})_{пер} - (\Sigma A_{тр})_{пер} = 0. \quad (8.4)$$

т.к.

$$(\Sigma A_{тяж})_{пер} \equiv 0.$$

то

$$(\Sigma A_{ов})_{пер} = (\Sigma A_{ПС})_{пер} + (\Sigma A_{тр})_{пер}. \quad (8.5)$$

Выражение (8.5) представляет аналитическую запись закона передачи работ в машине.

8.2.3. Механический коэффициент полезного действия машинного агрегата

Из курса физики известно, что коэффициент полезного действия (КПД) равен отношению полезной и затраченной работы:

$$\eta = \frac{\Sigma A_{ПС}}{\Sigma A_{ов}} \quad (8.6)$$

КПД машинного агрегата равен отношению работы сил полезного сопротивления к работе движущих сил за цикл установившегося режима.

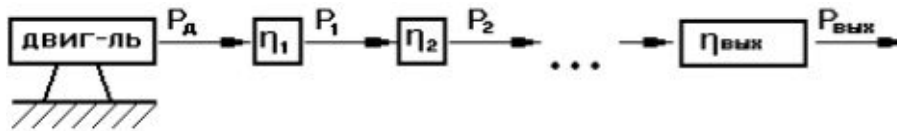
$$\eta = \frac{A_{н.с. \text{ цикл уст. реж.}}}{A_{дв.сил \text{ цикл уст. реж.}}} \quad (8.7)$$

Разделив в (8.7) числитель и знаменатель на продолжительность установившегося движения t и принимая мощность (P) как произведение крутящего момента (M) на угловую скорость (ω), получим:

$$\eta = \frac{A_{н.с.}/t}{A_{дв.с.}/t} = \frac{P_{н.с.}}{P_{дв.с.}} = \frac{M_c \cdot \omega_{вых.зв}}{M_{дв.с.} \cdot \omega_{вх.зв}} = \frac{M_c}{M_{дв.с.} \cdot u_{вх.-вых.}} \quad (8.8)$$

$$u_{вх.-вых} = \frac{\omega_{вх.зв}}{\omega_{вых.зв}}, \quad \eta < 1$$

а) определение КПД машинного агрегата при последовательном соединении механизмов.



$$P_{\text{вход}} = P_{\text{д}}$$

$$P_1 = P_{\text{д}} \cdot \eta_1$$

$$P_2 = P_1 \cdot \eta_2 = P_{\text{д}} \cdot \eta_1 \cdot \eta_2$$

...

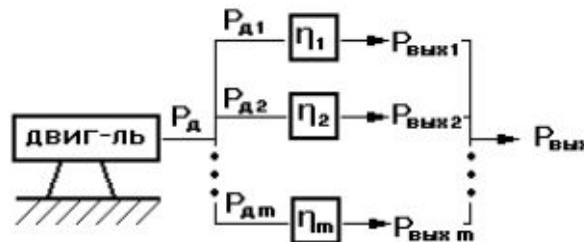
$$P_{\text{вых}} = P_{m-1} \cdot \eta_m = P_{\text{д}} \cdot \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \dots \cdot \eta_m$$

$$\eta = \frac{P_{\text{вых}}}{P_{\text{вх}}} = \frac{P_{\text{д}} \cdot \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \dots \cdot \eta_m}{P_{\text{д}}} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \dots \cdot \eta_m$$

$$\eta = \prod_{i=1}^m \eta_i \quad (8.9)$$

Т.е. коэффициент полезного действия машины при последовательном соединении механизмов равен произведению их коэффициентов полезного действия.

б) определение КПД машинного агрегата при параллельном соединении механизмов.



$$P_{\text{д}1} = \beta_1 \cdot P_{\text{д}}$$

$$P_{\text{д}2} = \beta_2 \cdot P_{\text{д}}$$

$$P_{\text{д}m} = \beta_m \cdot P_{\text{д}}$$

где β_i – коэффициенты распределения мощности.

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots + \beta_m = 1$$

Каждый β назначается при проектировании механизма.

$$P_{\text{вых}} = P_{\text{вых}1} + P_{\text{вых}2} + \dots + P_{\text{вых}m}$$

$$\eta = \frac{P_{\text{вых}}}{P_{\text{вх}}} = \frac{P_{\text{д}1} \cdot \eta_1 + P_{\text{д}2} \cdot \eta_2 + \dots + P_{\text{д}m} \cdot \eta_m}{P_{\text{д}}}$$

$$= \frac{P_{\text{д}} \cdot \beta_1 \cdot \eta_1 + P_{\text{д}} \cdot \beta_2 \cdot \eta_2 + \dots + P_{\text{д}} \cdot \beta_m \cdot \eta_m}{P_{\text{д}}} = \beta_1 \cdot \eta_1 + \beta_2 \cdot \eta_2 + \dots + \beta_m \cdot \eta_m$$

$$\eta = \sum_{i=1}^m \beta_i \cdot \eta_i$$

В частном случае, если $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \dots = \beta_m$, и $\eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_m$ то

$$\eta = \eta_m / m,$$

где m – число параллельно соединенных механизмов.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется механическим коэффициентом полезного действия машинного агрегата?

2. Как определяется к.п.д. машинного агрегата при последовательном соединении механизмов?

3. Как определяется к.п.д. машинного агрегата при параллельном соединении механизмов?

8.3. Приведенные сила, масса и момент инерции

Нами записано уравнение движения машины в виде разности кинетических энергий. Но всегда удобнее иметь уравнение движения, в которое бы входили силы. Рассмотрим несколько случаев.

1. Равновесное движение, т.е. $T_2 - T_1 = 0$, $T_2 = T_1 = \text{const}$.

Для такого движения уравнение работ будет иметь место не только для конечного, но и для бесконечно малого промежутка времени

$$dA_{\text{ов}} = dA_{\text{ПС}} \pm dA_{\text{тяжс}} + dA_{\text{тр}} \quad (8.11)$$

Разделим правую и левую части (8.11) на dt

$$\frac{dA_{\text{ов}}}{dt} = \frac{dA_{\text{ПС}}}{dt} \pm \frac{dA_{\text{тяжс}}}{dt} + \frac{dA_{\text{тр}}}{dt} \quad (8.12)$$

Каждое слагаемое в (8.12) представляет собой мгновенную мощность, следовательно

$$N_{\text{ов}} = N_{\text{ПС}} \pm N_{\text{тяжс}} + N_{\text{тр}} \quad (8.13)$$

Мы получили закон передачи мгновенной мощности в машине. Смысл понятия "мгновенная мощность" раскрывается следующим образом:

Элементарная работа

$$dA = P \cdot dS \cdot \cos(\vec{P} \wedge d\vec{S}) \quad (8.14)$$

Мгновенная мощность

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{P \cdot dS}{dt} \cdot \cos\left(\vec{P} \wedge \frac{d\vec{S}}{dt}\right) = P \cdot v \cdot \cos(\vec{P} \wedge \vec{v}) \quad (8.15)$$

В виду достаточной общности соотношений между силами, дальнейшие рассуждения проведем для условной схемы.

Пусть машинный агрегат состоит из n звеньев (рис.8.5).

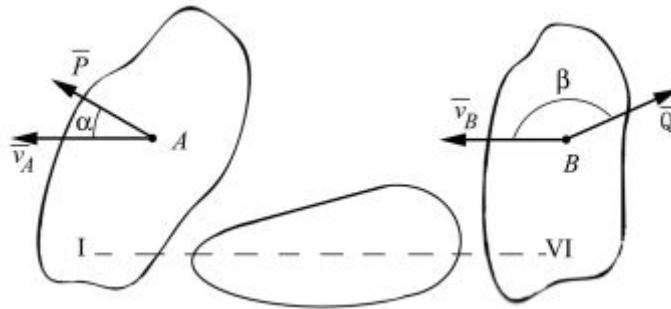


Рисунок 8.5 Условная схема машинного агрегата из n звеньев

К входному звену 1 в т.А приложена движущая сила P . Точка A движется со скоростью v_A . Угол между векторами силы и скорости α . В точке B n -го звена приложена сила полезного сопротивления Q . Точка B движется со скоростью v_B , вектор которой направлен под углом β к вектору силы.

Пренебрегая силами тяжести и учитывая трение через общий КПД, получим:

$$N_{(P)} = \frac{N_{(Q)}}{\eta_{AB}} \quad (8.16)$$

$$P \cdot v_A \cdot \cos \alpha = \frac{Q \cdot v_B \cdot \cos \beta}{\eta_{AB}} \quad (8.17)$$

$$(P \cdot \cos \alpha) \cdot v_A = \frac{(Q \cdot \cos \beta) \cdot v_B}{\eta_{AB}}$$

$P \cos \alpha = P_t$ - касательная движущая сила

$Q \cos \beta = Q_t$ - касательная сила полезного сопротивления.

$$\text{Тогда } P_t \cdot v_A = \frac{Q_t \cdot v_B}{\eta_{AB}} \quad (8.18)$$

Разделим обе части (8.18) на v_A и обозначим $\frac{v_A}{v_B} = u_{AB}$ - передаточное отношение между точками A и B .

$$\text{Тогда } P_t = \frac{Q_t}{u_{AB} \cdot \eta_{AB}} \text{ - простейший вид закона передачи сил в машине.}$$

Последнее выражение позволяет записать формулу для определения величины приведенной силы:

$$P_n = \sum \frac{P_i \cdot \cos \alpha_i}{u_{Ai} \cdot \eta_{Ai} \cdot \cos \alpha} \quad (8.19)$$

где u_{Ai} - передаточное отношение от т. A к i -ой точке.

η_{Ai} - к.п.д. передачи от т. A к i -ой точке.

α - угол между векторами приведенной силы и скорости точки ее приложения,

α_i - угол между векторами P_i силы и скорости точки ее приложения.

Поскольку мы условились о движении механизма судить по движению звена приведения, то необходимо определить его массу, эквивалентную массе звеньев механизма.

Условием эквивалентности масс является равенство кинетических энергий приведенной и приводимых масс.

Следовательно, **приведенной массой** называется **условная масса, сосредоточенная в точке приведения и обладающая кинетической энергией всего механизма.**

Кинетическая энергия механизма

$$T = \frac{1}{2} \sum (m_i \cdot v_i^2 + J_{Ci} \cdot \omega_i^2) = \frac{m_n \cdot v_n^2}{2} \quad (8.20)$$

Отсюда:

$$m_n = \sum \left[m_i \cdot \left(\frac{v_i}{v_n} \right)^2 + J_{Ci} \cdot \left(\frac{\omega_i}{v_n} \right)^2 \right] \quad (8.21)$$

Необходимо также знать момент инерции звена приведения.

Под **приведенным моментом инерции J_n** понимают **условный момент инерции звена приведения, которое обладает кинетической энергией, равной кинетической энергии всего механизма.**

$$T = \frac{1}{2} \sum (m_i \cdot v_i^2 + J_{Ci} \cdot \omega_i^2) = \frac{J_n \cdot \omega_n^2}{2}$$

Откуда

$$J_n = \sum \left[m_i \cdot \left(\frac{v_i}{\omega_n} \right)^2 + J_{Ci} \cdot \left(\frac{\omega_i}{\omega_n} \right)^2 \right] \quad (8.22)$$

Вопросы для самоконтроля

1. В чем заключается закон передачи мгновенной мощности в машине?
2. Дайте определение понятию «мгновенная мощность».
3. От чего зависит величина силы, приведенной к звену приведения?
4. Что такое приведенная масса?
5. Что такое приведенный момент инерции?

8.4. Определение приведенной силы методом профессора Жуковского Н.Е.

Метод основан на принципе Д'Аламбера-Лагранжа: *"Если к действующим на точках материальной системы активным силам присоединить силы инерции, то при движении механической системы с идеальными связями сумма элементарных работ активных сил и сил инерции на любом возможном перемещении равна нулю"*.

Работа приведенной силы

$$A_{np} = P_{np} \cdot \delta S \cos \alpha_{np} \quad (8.23)$$

где δS_{np} - перемещение под действием P_{np} .

α_{np} - угол между вектором силы и вектором перемещения.

Работа сил, приложенных к звеньям:

$$A_p = \sum P_i \cdot \delta S_i \cos \alpha_i \quad (8.25)$$

Подставляя (8.23) и (8.24) в (8.25), получим

$$P_{np} \cdot \delta S_{np} \cos \alpha_{np} = \sum P_i \cdot \delta S_i \cos \alpha_i \quad (8.26)$$

Для механизма с одной степенью свободы $\delta S_i = dS_i$; $dS_i = v_i \cdot t$

Отсюда

$$P_{np} = \sum P_i \cdot \frac{v_i \cdot \cos \alpha_i}{v_{np} \cdot \cos \alpha_{np}} \quad (8.27)$$

Согласно (8.27) рассматривается равновесие моментов всех сил относительно полюса плана скоростей.

Для нахождения $P_y = P_{np}$ необходимо

- построить повернутый план скоростей механизма;
- найти на этом плане по правилу подобия точки приложения заданных внешних сил;
- в одноименные точки плана перенести параллельно самим себе силы с механизма, включая и уравнивающую силу;
- принять повернутый план скоростей за рычаг с точкой опоры в полюсе p , написать уравнение равновесия этого рычага и из него найти величину уравнивающей силы P_y .

Необходимо указать, что если к звеньям механизма приложен внешний момент, то его следует представить в виде пары сил, которые и надо переносить в соответствующие точки повернутого плана скоростей. Рычагом Жуковского непосредственно находится уравнивающая сила. Уравнивающий момент можно найти умножением уравнивающей силы на ее плечо относительно оси звена, к которому она приложена.

Вышесказанное рассмотрим на примере кривошипно-ползунного механизма.

Для кривошипно-ползунного механизма (рис.8.6, а) найти величину уравнивающей силы P_y , приложенной к оси шарнира B перпендикулярно к направлению AB , а также уравнивающий момент M_y , приложенный к звену 1. Рассмотрим случай, когда угол $\varphi_1 = 45^\circ$.

Нагрузка звеньев: к звену 3 приложена приведенная сила P_3 ; к звену 2 приложены приведенная сила P_2 , направленная под углом $\alpha_2 = 60^\circ$ к линии BC , и момент M_2 .

Размеры звеньев: l_{AB} , l_{BC} , l_{BS2} .

- Строим схему механизма (рис.8.6, а) в масштабе μ_l , м/мм.
- Строим повернутый план скоростей (рис. 8.6, б) по уравнению

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{CB}$$

По правилу подобия находим на плане точку s_2 приложения силы P_2 .

- Со схемы механизма переносим на план скоростей параллельно самим себе силы в одноименные точки плана.

Предварительно момент M_2 представляем в виде пары сил P''_M и P'_M , приложенных в точках B и C , с плечом пары, равным l_{BC} ; модуль этих сил будет равен

$$P_M = \frac{M_2}{l_{BC}}$$

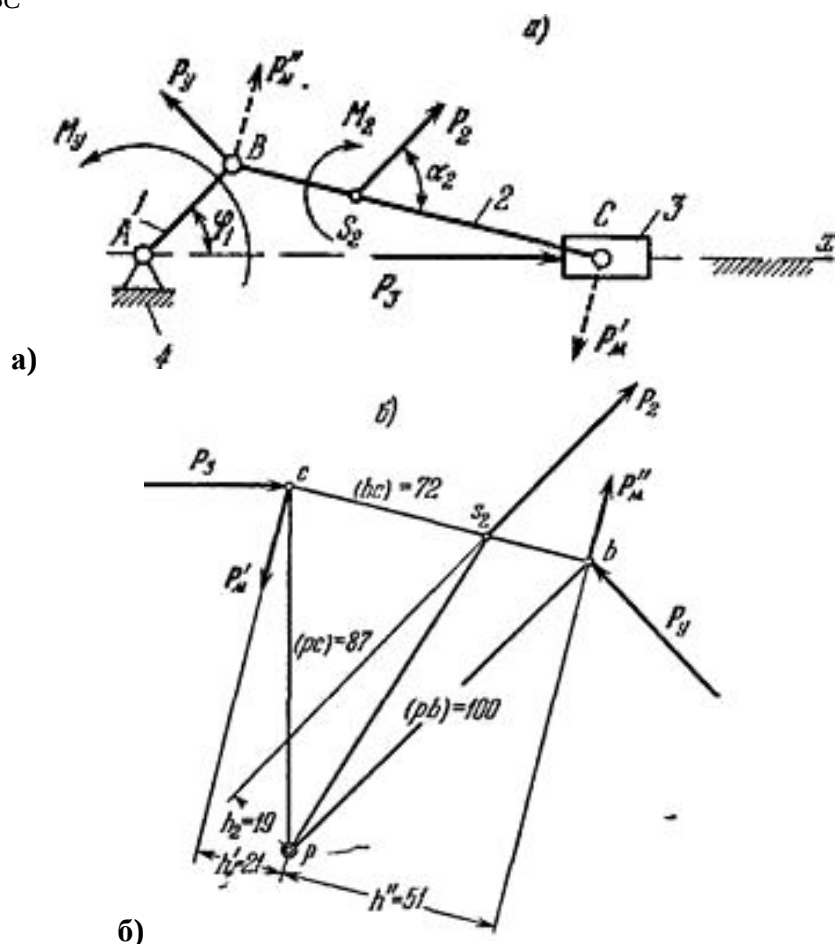


Рисунок 8.6 Схема механизма (а) и план скоростей (б)

- На плане скоростей (рис.8.6, б) находим плечи h_2 , h' , h'' сил, перенесенных на него, относительно полюса p .

- Составляем уравнение моментов сил, перенесенных на план скоростей, относительно его полюса p :

$$\sum M_p(P_i) = 0$$

$$P_y(pb) + P_M h' + P_M'' h'' - P_2 h_2 - P_3(pc) = 0$$

отсюда находим величину уравновешивающей силы:

$$P_y = \frac{P_2 h_2 + P_3(pc) - P_M(bc)}{(pb)}$$

так как согласно рис. 8.6, б $h' + h'' = bc$.

- Необходимый уравновешивающий момент будет равен

$$M_y = P_y \cdot l_{AB}$$

Этот способ удобен для определения уравновешивающей силы, т.к. достаточно иметь только план скоростей и одно уравнение. Расхождение при определении P_y из условий равновесия и методом рычага Жуковского не должно превышать 3÷5 %. Однако этот метод не позволяет определить реакции в кинематических парах.

Вопросы для самоконтроля

1. На каком принципе теоретической механики основан метод профессора Жуковского Н.Е.?

2. В чем суть метода проф. Жуковского Н.Е.?

3. Что определяется методом профессора Жуковского Н.Е.?

8.5. Общее уравнение движения

Для более общего описания движения механизма могут быть применены дифференциальные уравнения движения Лагранжа второго ряда в обобщенных координатах. В общем случае число уравнений Лагранжа равно числу степеней подвижности механизма. Т.к. нами рассматриваются механизмы с числом степеней подвижности $W = 1$, то будем иметь одно уравнение:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = Q_i \quad (8.30)$$

где T - кинетическая энергия механизма;

q_i - обобщенная координата;

$\dot{q}_i$ - обобщенная скорость;

Π - потенциальная энергия системы (при наличии сил, имеющих потенциал - силы тяжести, упругости и т.п.);

Q_i - обобщенная сила, соответствующая координате q_i .

Изменение потенциальной энергии $\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$ следует учитывать для приборов с пружинами (например, регуляторы).

Если в качестве звена приведения принять ползун, то уравнение (8.30) примет вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{S}} \right) - \frac{\partial T}{\partial S} = P_n \quad (8.31)$$

где P_n - приведенная сила;

$\dot{S}$ - скорость ползуна;

S - перемещение ползуна.

Если звено приведения совершает вращательное движение, то будем иметь

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = M_n \quad (8.32)$$

где M_n - приведенный момент сил;

$\dot{\varphi}$ - угловая скорость звена приведения;

φ - угол поворота звена приведения.

Преобразуем уравнение (8.32) с учетом того, что

$$T = \frac{J_n \cdot \dot{\varphi}^2}{2}$$

где J_n - приведенный момент инерции.

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= J_n \dot{\varphi}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = J_n \ddot{\varphi} + \frac{dJ_n}{d\varphi} \cdot \dot{\varphi}^2 \\ \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= \frac{1}{2} \frac{dJ_n}{d\varphi} \cdot \dot{\varphi}^2; \\ J_n \ddot{\varphi} + \frac{dJ_n}{d\varphi} \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} \frac{dJ_n}{d\varphi} \cdot \dot{\varphi}^2 &= M_n \end{aligned} \quad (8.33)$$

Приведя подобные члены и заменяя $\ddot{\varphi}$ на ε и $\dot{\varphi}$ на ω , получим

$$J_n \varepsilon + \frac{1}{2} \frac{dJ_n}{d\varphi} \omega^2 = M_n \quad (8.34)$$

Уравнение (8.34) называется **дифференциальным уравнением движения механизма в форме уравнения моментов.**

Аналогично может быть получено **дифференциальное уравнение движения в форме уравнения сил:**

$$m_n a + \frac{1}{2} \frac{dm_n}{dS} \cdot v^2 = P_n \quad (8.35)$$

где m_n – приведенная масса;
 a – ускорение центра масс;
 v – скорость ползуна.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие дифференциальные уравнения применяются для общего описания движения машинного агрегата?
2. Какое число уравнений движения должно быть записано, чтобы описать движение машинного агрегата?
3. В каких случаях в уравнении движения должно учитываться изменение потенциальной энергии?
4. Назовите звено приведения, движение которого описывается дифференциальным уравнением в форме уравнения моментов.
5. Назовите звено приведения, движение которого описывается дифференциальным уравнением в форме уравнения сил.

8.6. Регулирование движения машины

8.6.1. Условия работы машины

Наиболее типичными являются следующие условия работы машины:

1. Неопределенно долгое время работает при установившемся движении с постоянной нагрузкой (например, двигатель и генератор электрического тока). Здесь возможны два случая:

1.1. - установившееся равновесное движение - т.е. периодических колебаний нет.

1.2. - установившееся неравновесное движение - т.е. движение с периодическими колебаниями скорости. В этом случае задача регулирования сводится к удержанию скорости движения в допустимых пределах.

2. При перемене нагрузки машина должна автоматически восстановить для новой нагрузки режим установившегося движения. Задача состоит в автоматическом регулировании скорости.

3. Работает с частыми повторными пусками и остановками.

4. При непрерывном и длительном рабочем процессе двигателя рабочий процесс исполнительной машины протекает циклами.

Таким образом, наибольший интерес с точки зрения регулирования представляют задачи регулирования скорости при неравновесном установившемся движении и регулирование скорости машины при различных нагрузках.

8.6.2. Установившееся неравновесное движение машин и расчет маховиков

В качестве примера рассмотрим движение поршневого двигателя (например, горизонтальной паровой машины), когда он отдает свою работу через ременный привод при условии, что разность натяжения ветвей $Z_2 - Z_1 = \text{const}$ (рис.8.8).

На основании анализа цикла работы паровой машины и влияния инерционных сил получен график изменения силы $P_{\text{дин}}$ (рис.8.9).

Теперь необходимо выяснить в какой мере $P_{\text{дин}}$ будет передаваться на палец кривошипа A . Разложим $P_{\text{дин}}$ на силу S по направлению шатуна и силу N , направленную $\perp$ к направляющим.

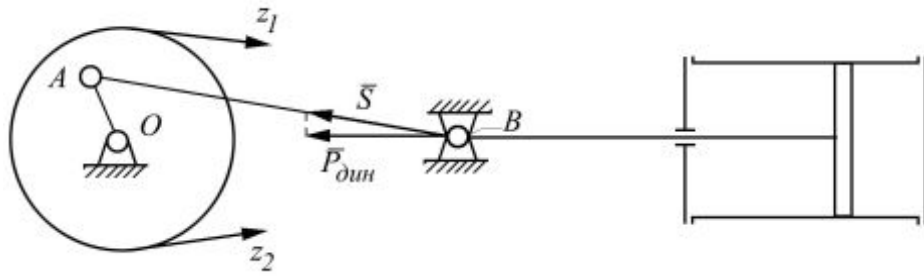


Рисунок 8.8 Движение поршневого двигателя

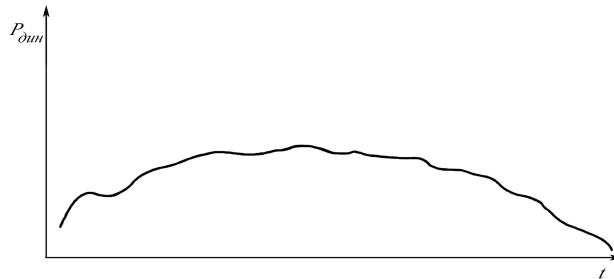


Рисунок 8.9 График изменения силы $P_{дин}$

Сила S передается на кривошип A . Перенесем ее в т. A и разложим по направлению $\perp$ кривошипу и по кривошипу (рис.8.10).

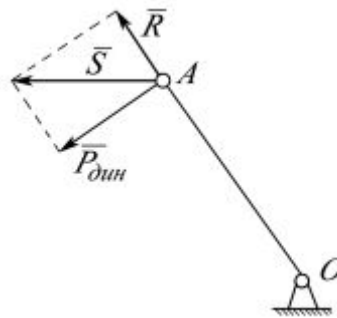


Рисунок 8.10 Разложение силы S в кривошипе

В соответствии с законом передачи сил касательная движущая сила

$$T_{дин} = P_{дин} \cdot u_{BA} \cdot \eta_{BA} \quad (8.36)$$

т.к. $u_{BA} = 0$ в мертвых положениях, значит и $T_{дин} = 0$. Если вычислить значения $T_{дин}$ для всех положений кривошипа, то график будет выглядеть так (рис.8.11):

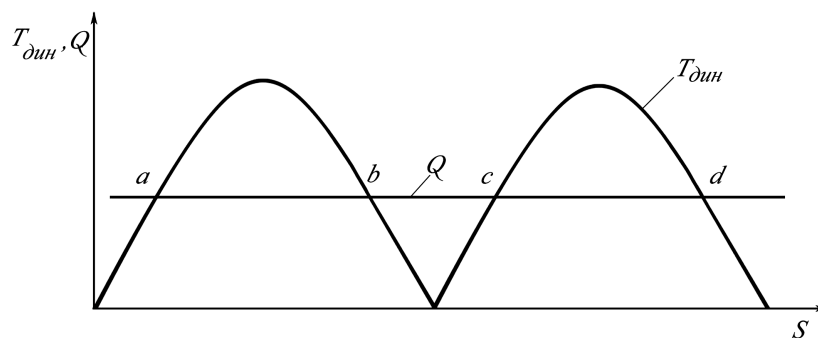


Рисунок 8.11 График зависимости касательной движущей силы $T_{дин}$ от S

Теперь главный вал машины можно считать находящимся под воздействием касательной силы $T_{дин}$, приложенной в A , и сил натяжения ремней z_1 и z_2 , приложенных к ободу маховика (рис.8.12).

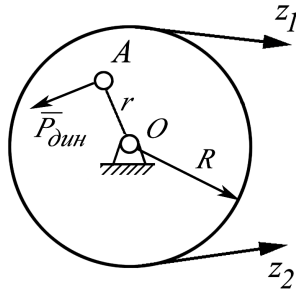


Рисунок 8.12 Распределение сил на главный вал машины

Запишем дифференциальное уравнение вращения маховика, рассматривая его как твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси O (второе слагаемое равно нулю, т.к. $J_n = \text{const}$)

$$J_n \varepsilon_n = \Sigma M \quad (8.37)$$

где J_n - приведенный момент инерции твердого тела (маховика, кривошипа, вала и массы m_{2a} от шатуна),

ε_n - угловое ускорение звена привода,

ΣM - сумма моментов внешних сил относительно оси вращения.

$$\Sigma M = T_{\text{дин}} \cdot r - (Z_1 - Z_2) \cdot R = T_{\text{дин}} \cdot r - M_{\text{ПС}} = r \cdot \left(T_{\text{дин}} - \frac{M_{\text{ПС}}}{r} \right) \quad (8.38)$$

Отношение $M_{\text{ПС}}/r$ обозначим Q - силой полезного сопротивления, приведенной к пальцу кривошипа.

$$\text{Тогда } \Sigma M = r \cdot (T_{\text{дин}} - Q). \quad (8.39)$$

Теперь можно рассматривать маховик под действием двух сил $T_{\text{дин}}$ и Q (рис.8.13).

Дифференциальное уравнение вращения маховика

$$J_1 \varepsilon_1 = r(T_{\text{дин}} - Q) \quad (8.40)$$

или

$$\varepsilon_1 = \frac{r \cdot (T_{\text{дин}} - Q)}{J_1} \quad (8.41)$$

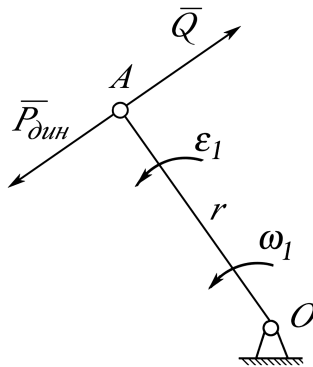


Рисунок 8.13 Маховик под действием двух сил $T_{\text{дин}}$ и Q

Т.к. мы условились, что $z_1 = z_2 = \text{const}$, то $M_{\text{ПС}} = \text{const}$, следовательно $Q = \text{const}$.

Анализ графика $T_{\text{дин}} - Q$ (функция Sa) показывает, что $T_{\text{дин}} = Q$ только в четырех точках за оборот. Значит в этих точках $\varepsilon_n = 0$ и $\omega_n = \text{const}$.

В остальных случаях угловая скорость либо **возрастает** (когда $(T_{\text{дин}} - Q) > 0$, $\varepsilon > 0$) или **убывает** ($(T_{\text{дин}} - Q) < 0$, $\varepsilon < 0$). Волны угловой скорости будут тем меньше, чем меньше ε_n , а следовательно тем большим должен быть J_n - момент инерции 1-го звена.

Выведем условие необходимое для того, чтобы, несмотря на неизбежное колебание угловой скорости в период оборота, угловая скорость после оборота возвращалась к своему первоначальному значению, т.е.

$$\omega_0 = \omega_{2\pi} = \omega_{4\pi} = \dots$$

Тогда будем иметь установившееся периодически неравновесное движение.

Умножим обе части дифференциального уравнения (8.40) вращения маховика на элемент пути т.А $dS_a = r \cdot d\varphi_n$

$$\frac{J_n \cdot \varepsilon_n \cdot r \cdot d\varphi_n}{r} = (T_{дин} - Q) \cdot dS_a \quad (8.42)$$

принимая во внимание, что $\varepsilon_n = \frac{d\omega_n}{dt}$ и $\omega_n = \frac{d\varphi_n}{dt}$, получим

$$J_n \cdot \omega_n \cdot d\omega_n = T_{дин} \cdot dS_a - Q \cdot dS_a \quad (8.43)$$

Интегрируя (8.43) в пределах оборота, получим

$$J_n \cdot \frac{\omega_{2\pi}^2}{2} - J_n \cdot \frac{\omega_0^2}{2} = \int_0^{2\pi} T_{дин} S_a - \int_0^{2\pi} Q dS_a \quad (8.44)$$

т.к. $\omega_0 = \omega_{2\pi}$, то условием установившегося движения будет:

$$\int_0^{2\pi} T_{дин} dS_a = \int_0^{2\pi} Q dS_a \quad (8.45)$$

Т.к. $Q = \text{const}$, то

$$\int_0^{2\pi} T_{дин} dS_a = Q \cdot 2\pi r \quad (8.46)$$

$$Q = \frac{\int_0^{2\pi} T_{дин} dS_a}{2\pi r} \quad (8.47)$$

Выражение (8.47) устанавливает зависимость между движущей силой и силой полезного сопротивления, обеспечивающую режим установившегося неравновесного движения.

Подбор величины Q по величине движущей силы или регулирование движущей силы в соответствии с Q производится регулятором.

Однако мы не устранили колебания угловой скорости внутри оборота.

Определим среднюю угловую скорость звена приведения

$$\omega_{cp} = \frac{2\pi}{T_{об}}$$

где $T_{об}$ – время одного оборота звена приведения.

За меру неравномерности вращения примем отношение

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{cp}}, \quad (8.48)$$

которое называют **коэффициентом неравномерности вращения** главного вала машины.

Определение $T_{об}$ сложно, поэтому принимают

$$\omega_{cp} = \frac{\omega_{min} + \omega_{max}}{2} \quad (8.49)$$

Используя выражения (8.48) и (8.49), получим:

$$\omega_{max} = \omega_{cp} \cdot \left(1 + \frac{\delta}{2}\right) \quad \omega_{min} = \omega_{cp} \cdot \left(1 - \frac{\delta}{2}\right) \quad (8.50)$$

Установим связь между моментом инерции маховика J_n и коэффициентом неравномерности вращения δ . Для этого проинтегрируем дифференциальное уравнение движения на участках между точками a и b графика $T_{дин}$ (рис.8.11).Получим

$$T_b - T_a = A_{(a-b)} T_{дин} - A_{(a-b)} Q = A_{изб. max} \quad (8.51)$$

или

$$\frac{J_{II}\omega_{\max}^2 - J_{II}\omega_{\min}^2}{2} = A_{изб.\max} \quad (8.52)$$

$$\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2 = (\omega_{\max} - \omega_{\min})(\omega_{\max} + \omega_{\min}) = \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2} \cdot \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{cp}} \cdot 2\omega_{cp}^2 \delta \quad (8.53)$$

Преобразуем (8.51) с учетом (8.52) и (8.53):

$$J_n \omega_{cp}^2 \delta = A_{изб.\max} \quad (8.54)$$

Отсюда

$$\delta = \frac{A_{изб.\max}}{J_n \omega_{cp}^2} \quad (8.55)$$

Обычно при проектировании машины задаются приемлемым коэффициентом δ и решают уравнение относительно J_n :

$$J_n = \frac{A_{изб.\max}}{\omega_{cp}^2 \delta} \quad (8.56)$$

(Для поршневых двигателей $\delta = 1/40 \div 1/100$; для электрогенераторов и двигателей $\delta = 1/300$).

Найдя J_n , рассчитывают вес обода маховика.

$$J_n = J_{махов} + J_{кр} + J_{эл.в.} + m_{2a}r^2 \quad (8.57)$$

Первое слагаемое несоизмеримо больше последующих, поэтому условно можно принять

$$J_n = J_{махов}$$

Используя формулу момента инерции для тонкого кольца, получим

$$J_{махов} = \frac{1,1R^2 G_{об}}{g} \quad G_{об} = \frac{0,9gJ_{махов}}{R^2}$$

(обычно принимают $R = 5r$; $A_{изб.\max} = 0,2 A_{эф.}$; $A_{эф.} = N_{эф.} T_{об}$).

Вопросы для самоконтроля

1. Назовите наиболее типичные условия работы машины.
2. При каких условиях (режимах) работы машины необходимо регулирование скорости движения?
3. Почему при крайних (мертвых) положениях ползуна $T_{дин}=0$?
4. Запишите дифференциальное уравнение вращения маховика.
5. Приведите зависимость между движущей силой и силой полезного сопротивления, обеспечивающую режим установившегося неравновесного движения.
6. Что называется коэффициентом неравномерности вращения?
7. Как связаны приведенный момент инерции звена приведения и коэффициент неравномерности вращения?
8. Как определить вес обода маховика?

8.6.3. Регулирование скорости машин при различных нагрузках

Задача регулирования состоит в поддержании скорости движения при различных нагрузках на достаточно постоянном уровне. Это обеспечивается за счет регулирования движущей силы (движущего момента) с помощью различных регуляторов.

Регуляторами называются механизмы или приборы, предназначенные для автоматического поддержания непериодических колебаний угловой скорости вращения ведущих звеньев машин в заданных пределах. Непериодические колебания скорости возникают вследствие случайного изменения движущих сил или сил сопротивлений, действующих на звенья машин. Так, например, внезапное увеличение подачи энергии к двигателю вызывает повышение частоты вращения его вала, а увеличение сопротивления на

ведомом валу машины влечет за собой снижение этой частоты. Регулирование средней скорости вращения вала машины осуществляется путем воздействия на приток энергии к двигателю или путем изменения сопротивления на ведомом валу машины. В настоящее время широкое распространение получили центробежные, тормозные и электрические регуляторы.

Центробежные регуляторы. Принцип действия центробежных регуляторов основан на использовании силы инерции вращающихся грузов для регулирования притока топлива (или электрической энергии) к двигателю. Схема центробежного регулятора показана на рис.8.14, а. К валу регулятора 1, получающему вращение от двигателя, с помощью подвижных звеньев и муфты 2 подвешены грузы 3. Возникающие при вращении регулятора центробежные силы инерции грузов P_u посредством рычагов 4 и тяг 5 воздействуют на муфту 2, которая может скользить вдоль вала вверх и вниз. Муфта регулятора с помощью рычага 6 соединена с рабочим органом (заслонкой) 7, регулирующим питание двигателя топливом (или турбины — паром).

При нарушении равенства работ движущих сил и сил сопротивления, например, когда $A_d > A_c$ угловая скорость вала двигателя станет возрастать. В этом случае увеличится величина сил инерции P_u , благодаря чему шары начнут расходиться и муфта переместится вверх. При этом заслонка 7 опустится и уменьшится количество топлива, подаваемого в двигатель. В результате вновь восстановится равенство $A_d = A_c$ и угловая скорость двигателя стабилизируется.

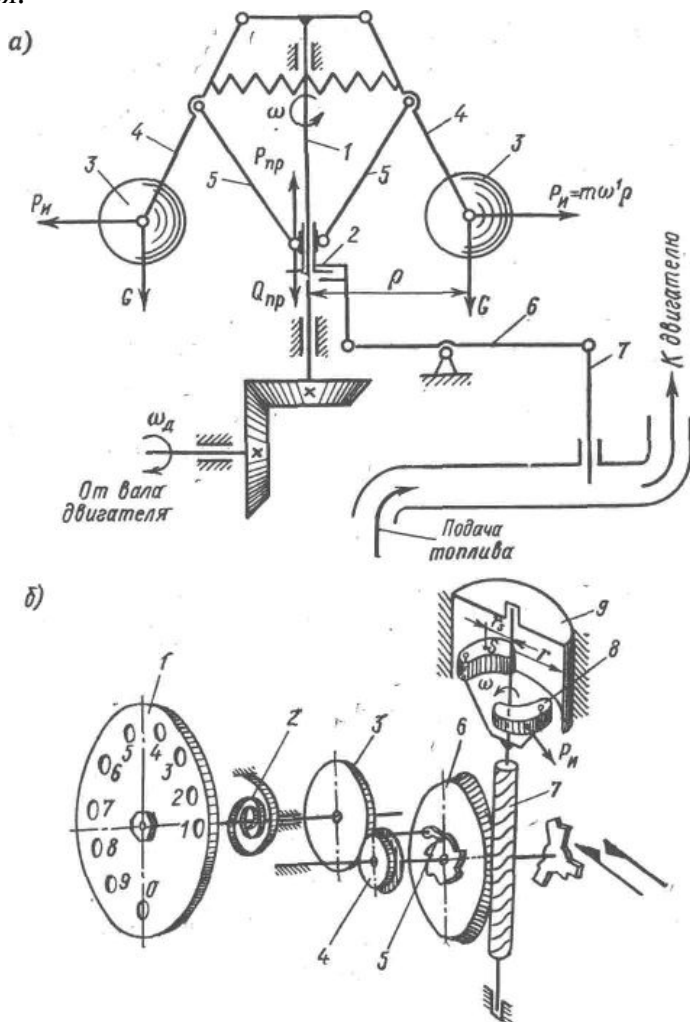


Рисунок 8.14 Схема центробежного регулятора (а) и тормозного регулятора (б)

Таким образом, перемещение муфты регулятора под воздействием сил инерции грузов дает возможность автоматически поддерживать равновесную угловую скорость вращения вала двигателя.

Установившееся движение машины ($A_d = A_c$) может проходить при различных угловых скоростях ведущего звена.

Наибольшая скорость ω_{max} , допустимая по условиям безопасности, соответствует «холостому» ходу машины.

Холостым называется такое движение машины, при котором энергия движущих сил затрачивается только на преодоление сил вредных сопротивлений.

Наименьшая угловая скорость ω_{min} наблюдается при наибольшей нагрузке машины, когда $A\delta = A_{c\ max}$; дальнейшее увеличение сил полезных сопротивлений вызовет нарушение этого равенства работ, которое регулятор не может восстановить, поэтому угловая скорость уменьшится и машина остановится.

Таким образом, регулятор должен обеспечивать поддержание установившегося движения машины при любом изменении скорости вращения вала в пределах от ω_{min} до ω_{max} . Это достигается подбором соответствующих значений параметров регулятора (массы и размеров звеньев, деформации пружины).

Чувствительность регулятора к колебаниям угловой скорости зависит от величины сил трения между звеньями регулятора. Чем меньше приведенная к муфте регулятора сила трения, тем меньшее понадобится изменение угловой скорости вала регулятора, при котором муфта придет в движение.

Тормозные регуляторы. При регулировании скорости движения с помощью тормозных регуляторов избыточная энергия двигателя затрачивается на преодоление механического, жидкостного или воздушного трения в регуляторе. Тормозные регуляторы применяются в приборах и аппаратах, потребляющих небольшую мощность, например в телеграфных аппаратах, патефонах и других приборах точной механики.

При регулировании посредством тормозных регуляторов уравнение движения машины или прибора для установившегося периода в форме моментов имеет следующий вид:

$$M_\delta = M_c + M_{рег}, \quad (8.58)$$

где M_δ , M_c и $M_{рег}$ — приведенные к ведущему звену моменты движущих сил, сил сопротивлений и сил трения регулятора.

На рис. 8.14, б приведена схема тормозного регулятора телефонного номеронабирателя. На его валу помещены тормозные колодки 8, которые под действием центробежной силы инерции P_u могут прижиматься к тормозному цилиндру 9. Для определения момента сил трения $M_{рег}$ регулятора введем следующие обозначения:

m — масса колодки;

Q — сила упругости пружины;

r — радиус тормозного цилиндра;

f — коэффициент трения скольжения;

ω — угловая скорость вращения вала;

r_s — расстояние от оси вращения вала до центра тяжести колодки.

Центробежная сила инерции колодки $P_u = m r_s \omega^2$. Момент сил трения регулятора

$$M_{рег} = (P_u - Q)fr = fmr r_s \omega^2 - fQr \quad (8.59)$$

или

$$M_{рег} = \kappa_1 \omega^2 - \kappa_2 Q, \quad (8.60)$$

где $\kappa_1 = fmr r_s$; $\kappa_2 = fr$.

Величина угловой скорости ω_0 вала регулятора, при которой тормозная колодка станет касаться тормозного цилиндра, определится из условия

$$M_{рег} = \kappa_1 \omega^2 - \kappa_2 Q = 0 \quad (8.61)$$

Подставив значения κ_1 и κ_2 , получим $\omega_0 = \sqrt{Q / mr}$

Пользуясь уравнением (8.59), нетрудно построить график изменения момента сил трения регулятора в зависимости от угловой скорости ω .

Регуляторы воздушного трения (ветрянки), электрические и др., широко применяемые в приборостроении, рассматриваются в специальной литературе.

Вопросы для самоконтроля

1. Какое устройство называется регулятором?

2. Назовите виды наиболее распространенных регуляторов.

3. Каков принцип действия центробежных регуляторов?
4. В каких пределах центробежный регулятор обеспечивает режим установившегося движения?
5. Каков принцип действия тормозного регулятора?

ТЕМА 9. ИСТОЧНИКИ КОЛЕБАНИЙ И ВИБРАЦИЙ В МАШИНАХ

При работе механизмов и машин под действием внешних сил могут возникать механические колебания или вибрации. Термин вибрация происходит от латинского слова *vibratio* – колебания, и в современном толковании понимается как механические колебания, создаваемые или испытываемые каким-либо телом или механизмом. Механическими колебаниями называется движение механической системы, при котором хотя бы одна из ее обобщенных координат или их производных поочередно возрастает или убывает во времени [8].

В линейных колебательных системах известны два вида колебаний: **собственные** и **вынужденные**.

Собственные колебания происходят в изолированных колебательных системах вследствие какого-либо начального возмущения. При этом никакие дополнительные внешние возмущения на систему не действуют. Обычно собственные колебания из-за наличия сопротивления среды с течением времени затухают.

Вынужденные колебания в механических системах возникают при действии возмущающих сил.

Источниками возникновения вынужденных колебаний могут служить периодические изменения действующих сил, а также перемещений и инерционных характеристик тел механической системы [1]. Силовое возмущение является наиболее распространенным источником вибраций. Простым примером такого типа вибраций могут служить колебания двигателя (турбины, генераторы и т.п.) при вращении неуравновешенного ротора. Источником колебаний является ротор. Силовые воздействия представляют собой динамические нагрузки, действующие на опоры ротора.

В соответствии с ГОСТ 19534-74 **ротор** – это тело, которое при вращении удерживается своими несущими поверхностями в опорах. К ним относятся, например, маховики, шкивы, зубчатые и червячные колеса на гладких валах, колесные пары подвижного состава, якоря тяговых электродвигателей и т.д.).

9.1. Уравновешивание вращающихся звеньев

9.1.1. Виды неуравновешенности ротора

Ротор вследствие погрешностей изготовления, а также в силу неоднородности материала обнаруживает при вращении некоторую неуравновешенность возникающих сил инерции.

Неуравновешенность ротора — состояние ротора, характеризующееся таким распределением масс, которое во время вращения вызывает переменные нагрузки на опорах ротора и его изгиб.

Характер неуравновешенности характеризует относительное расположение оси вращения ротора xx и главной центральной оси инерции $x_1 x_1$. Если эти оси параллельны, то имеет место **статическая неуравновешенность** (рис.9.1, а). Центр масс ротора O при этом смещен по отношению к оси вращения на величину эксцентриситета массы e . Если упомянутые оси пересекаются в центре масс O (рис.9.1, б), то имеет место **моментная неуравновешенность**.

При пересечении осей вне центра масс (рис.9.1, в) или при перекрещивании осей имеет место **динамическая неуравновешенность**. В частном случае динамическую неуравновешенность при пересечении осей называют квазистатической неуравновешенно-

стью. При рассмотрении неуравновешенности задают условную точечную массу с заданным эксцентриситетом. Такую неуравновешенность называют точечной неуравновешенностью.

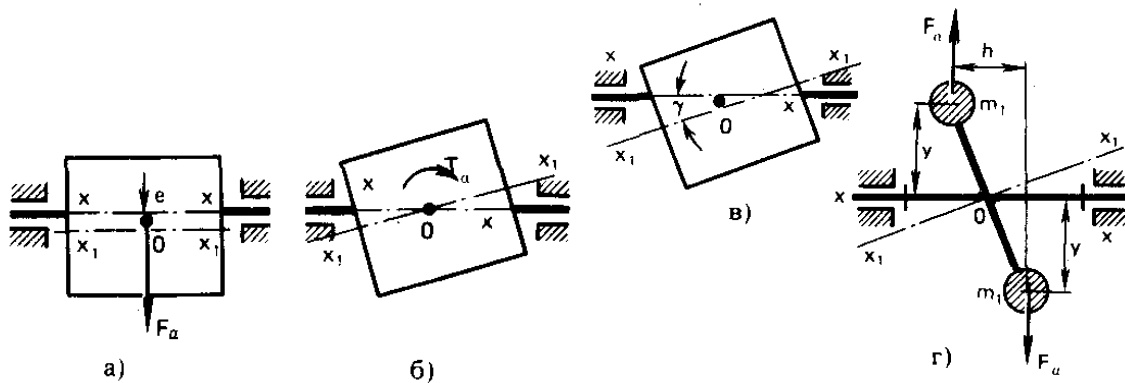


Рисунок 9.1 Статическая неуравновешенность (а), моментная неуравновешенность (б), динамическая неуравновешенность (в) ротора

Статическая неуравновешенность при вращении ротора приводит к возникновению радиальной силы инерции

$$F_a = m e \omega^2, \quad (9.1)$$

где m - масса;

ω - угловая скорость.

Моментная неуравновешенность вызывает момент сил: например, для случая сосредоточенных масс (рис.9.1, в)

$$T_a = F_a \cdot h = m_1 y h \omega^2. \quad (9.2)$$

В общем случае

$$T_a = J_{xy} \omega^2, \quad (9.3)$$

где J_{xy} - центробежный момент инерции массы тела относительно центра масс O .

Динамическая неуравновешенность характеризуется также наличием статической неуравновешенности, т.е. приводит к возникновению $\bar{F}_a$ и $\bar{T}_a$.

Для оценки неуравновешенности используют понятие **дисбаланса**.

ДИСБАЛАНС (от лат. Dis - нарушение, утрата и франц. balance — буквально — весы) - векторная величина, равная произведению неуравновешенной массы m на ее эксцентриситет относительно оси ротора.

Дисбаланс характеризуется его значением $D_{CT} = m e$ и углом дисбаланса φ , определяющим положение вектора дисбаланса в системе координат, связанной с осью ротора.

Дисбаланс измеряют и задают в плоскости, перпендикулярной оси ротора.

Неуравновешенность ротора в целом характеризуют главный вектор дисбалансов ротора $\bar{D}_{CT}$ и главный момент дисбалансов ротора $\bar{M}_D$. Главный вектор $\bar{D}_{CT}$ перпендикулярен оси ротора xx_1 , проходит через центр его масс O и равен произведению массы ротора на ее эксцентриситет e_{CT} . Главный вектор равен сумме дисбалансов, расположенных в различных плоскостях, перпендикулярных оси ротора.

Главный момент $\bar{M}_D$ равен геометрической сумме моментов всех дисбалансов ротора относительно его центра масс. Главный момент перпендикулярен главной центральной оси инерции x_1x_1 и вращается вместе с ротором. Произведения $D_{CT} \cdot \omega^2$ и $\bar{M}_D \cdot \omega^2$ равны главному вектору и главному моменту сил инерции, обусловленных неуравновешенностью ротора.

На рис.9.2, а два дисбаланса $\bar{D}_1$ и $\bar{D}_2$. Сумма проекций $\bar{D}_{CT1}$ и $\bar{D}_{CT2}$ равна главному вектору $\bar{D}_{CT}$. Сумма моментов проекций $\bar{D}_{M1}$ и $\bar{D}_{M2}$ равна главному моменту $\bar{M}_D$, в частном случае

$$\bar{M}_D = \bar{D}_{M1} \cdot l$$

где $\bar{D}_{M1}$ и $\bar{D}_{M2}$ - равные по величине и противоположно направленные проекции соответственно векторов $\bar{D}_1$ и $\bar{D}_2$.

φ - угол между векторами $\bar{D}_{СТ}$ и $\bar{M}_D$.

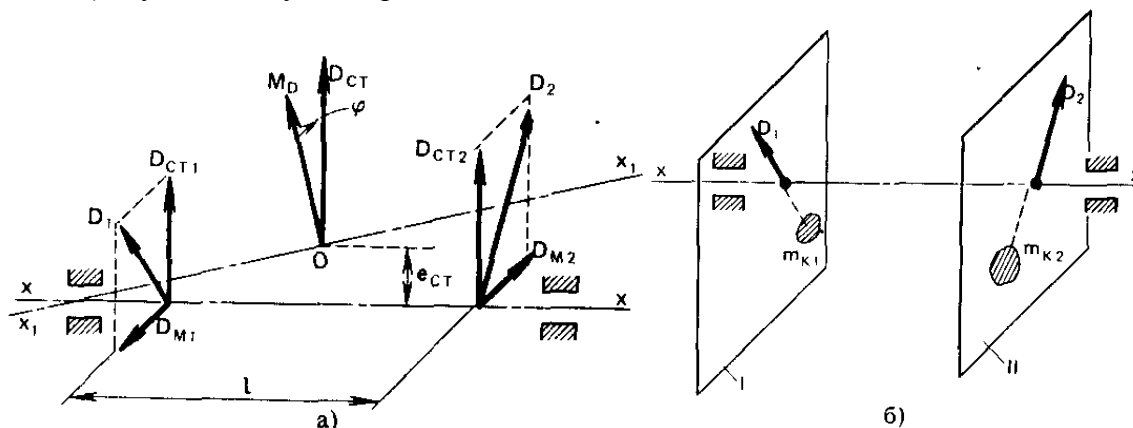


Рисунок 9.2 Дисбаланс ротора (а) и балансировка ротора (б)

Величины $\bar{D}_{СТ}$ и $\bar{M}_D$ характеризуют неуравновешенность ротора. Дисбаланс уменьшают добавлением или удалением из тела ротора массы, называемой корректирующей массой.

Операция определения значений и углов дисбалансов ротора и их уменьшение корректировкой масс называется **балансировкой** ротора.

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое «неуравновешенность ротора»? Из-за чего она может возникнуть?
2. Что называется статической неуравновешенностью?
3. В каком случае неуравновешенность называется моментной?
4. Какая неуравновешенность называется динамической?
5. Что такое дисбаланс и чем он характеризуется?
6. Чему равен главный вектор дисбалансов ротора?
7. Чему равен главный момент дисбалансов ротора?
8. Какая операция называется балансировкой ротора?

9.1.2. Балансировка роторов

Чтобы уменьшить или исключить главный вектор $\bar{D}_{СТ}$, достаточно одной корректирующей массы с центром, расположенным на линии вектора. Для уменьшения и исключения главного момента необходимы две корректирующие массы с центрами, располагаемыми в плоскостях коррекции I и II, перпендикулярных оси ротора (рис.9.2, б). Положения I и II выбирают произвольно. В рассматриваемом примере плоскости коррекций проходят через $\bar{D}_1$ и $\bar{D}_2$, а центры корректирующих масс m_{k1} и m_{k2} расположены соответственно на линиях векторов $\bar{D}_1$ и $\bar{D}_2$. В этом случае могут быть сведены к нулю величины $\bar{D}_{СТ}$ и $\bar{M}_D$. Поскольку на практике не удастся свести дисбаланс к нулю, то имеют место понятия достижимого дисбаланса - минимального возможного дисбаланса, достигаемого тщательной индивидуальной балансировкой ротора, и допустимого дисбаланса - наибольшего остаточного дисбаланса, который считается приемлемым. Степень неуравновешенности оценивается по удельному дисбалансу - отношению модуля главного вектора к массе ротора, т.е. по эксцентриситету массы ротора.

В зависимости от характера уменьшаемой неуравновешенности различают **статическую, моментную и динамическую** балансировку.

Статическая балансировка

Задачей статической балансировки является приведение центра тяжести на ось вращения, т.е. обращение оси вращения в центральную ось инерции, т.е.

$$\sum m_i \bar{\omega}^2 r_i = 0 \quad (9.4)$$

В этом случае при вращении детали не будет возникать суммарной центробежной силы, но может остаться пара сил инерции, зависящая от величины центробежных моментов инерции.

Если деталь имеет небольшие размеры по длине, то величины пар сил инерции не велики, и поэтому ими можно пренебречь и ограничиться только статической балансировкой. Устройство, определяющие только главный вектор дисбалансов, называют станками для статической балансировки. В таких станках используют, в частности, силу тяжести ротора.

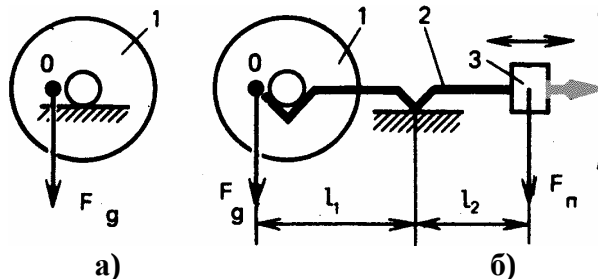


Рисунок 9.3 Статическая балансировка ротора

Ротор 1 (рис.9.3, а) в опорах с малым моментом сил трения устанавливают произвольно. Под действием силы тяжести P_0 он поворачивается так, что центр масс располагается на вертикальной линии, проходящей через ось вращения. Корректирующую массу добавляют (вверху) или удаляют (внизу) на этой линии.

На рис.9.3, б неуравновешенный ротор 1 последовательно поворачивают на рычаге 2 и, перемещая груз 3, обладающий весом F_n , определяют плечо центра масс ротора O : $l_1 = F_n l_2 / F_g$. Экстремальные значения l_1 соответствуют расположению O на горизонтальной линии, проходящей через ось ротора.

Вопросы для самоконтроля

1. Что является задачей статической балансировки?
2. Как проверить нуждается ли ротор в статической балансировке?
3. Как осуществляется статическая балансировка?
4. Какое минимальное количество плоскостей исправления необходимо для выполнения статической балансировки?
5. Для каких деталей можно ограничиться статической балансировкой?
6. Какие Вы знаете виды балансировки?

Динамическая балансировка

Для барабанов, длинных деталей, если они имеют высокое число оборотов, необходима **динамическая** балансировка, при которой определяются и уменьшаются дисбалансы, характеризующие динамическую неуравновешенность ротора.

Задачей динамической балансировки является обращение оси вращения в **главную центральную ось инерции** т.е. такую, при вращении около которой в детали не возникает не только центробежной силы, но и пары сил инерции, зависящей от центробежных моментов инерции ее масс, т.е.

$$\sum m_i \bar{\omega}^2 r_i l_i = 0 \quad (9.5)$$

где l_i - расстояние от i плоскости до плоскости приведения.

Динамическую балансировку производят на ходу, приводя вал в достаточно быстрое вращение, чтобы неуравновешенные центробежные силы и пары сил проявили себя в достаточной степени.

Устройство, определяющие дисбалансы на вращающемся роторе, называют станками для динамической балансировки. Принцип действия таких станков заключается в измерении (и, возможно, компенсации) либо опорных реакций вращающегося ротора, либо амплитуды и направлений колебаний его оси. Для этой цели ротор устанавливают на подвижную часть станка. Подвижная часть станка, характеризующаяся так называемой па-

разитной массой, устанавливается на опорах, обеспечивающих определенное число степеней свободы для оси ротора.

Принцип действия таких станков различен. Рассмотрим, для примера, одну схему.

Этот станок работает по принципу использования следующего представления о неуравновешенности: неуравновешенность вращающейся детали - совокупность некоторой силы и пары сил, получающихся в результате приведения всех центробежных сил к некоторой точке O на оси детали.

Силы инерции вращающейся детали при равномерном ее вращении, приведенные к точке O на оси вращения (рис.9.4), дают главный вектор этих сил $\vec{C}$, равный центробежной силе всей детали

$$\vec{C} = m\vec{e}\omega^2$$

и главный момент $\vec{M}_{ин}$, проекции которого на оси x и y соответственно равны

$$M_{инx} = -J_{xy}\omega^2; \quad M_{инy} = -J_{yz}\omega^2$$

где J_{zy}, J_{xz} - центробежные моменты инерции вращающейся детали относительно осей x и y

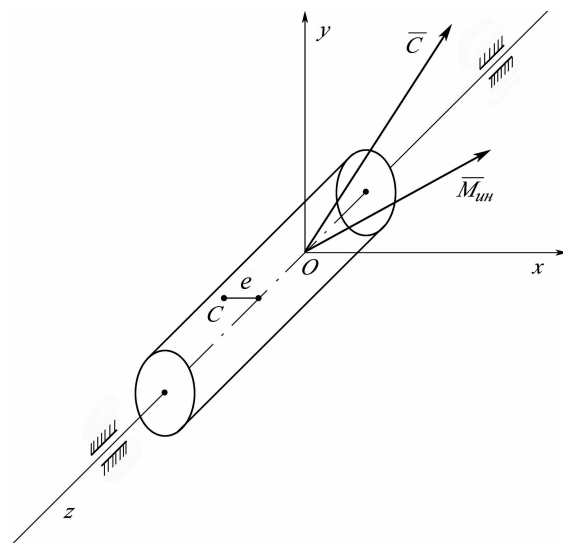


Рисунок 9.4 Неуравновешенность вращающейся детали

Схема станка: Балансируемая деталь устанавливается в подшипниках на стойках рамы Π (рис.9.5).

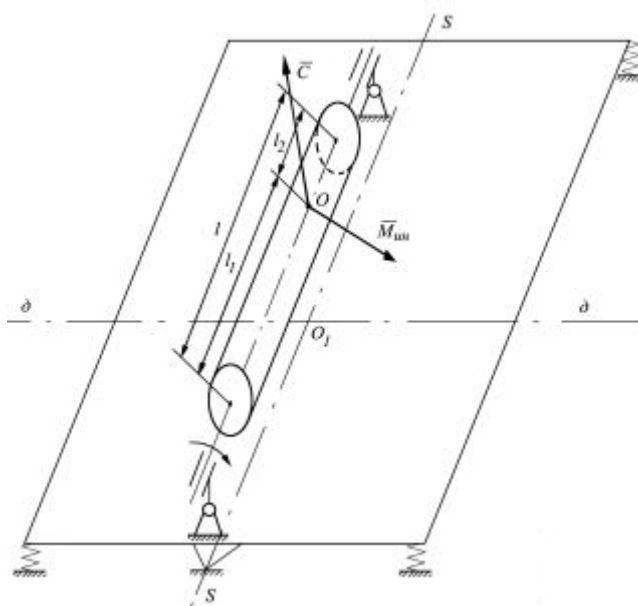


Рисунок 9.5 Схема станка для динамической балансировки роторов

Рама может колебаться поочередно относительно двух осей: SS - продольной (статической) и dd - поперечной (динамической). Пружины служат для предотвращения опрокидывания всей системы и поддержания колебаний в процессе балансировки.

Вначале включается ось dd и остается в качестве опорной ось SS . Балансируемая деталь приводится во вращение.

В результате действия центробежных сил вал вместе со стойками и рамой приходит в колебательное движение вокруг оси SS .

Эти колебания компенсируются установкой временных противовесов G_1 и G_2 в торцовых плоскостях, поэтому их центробежные силы будут удовлетворять условию

$$C = C_1 + C_2$$

Однако, для того, чтобы эти противовесы не увеличивали момента первоначальной неуравновешенности $M_{ин}$, выбор их следует подчинить дополнительному условию:

$$C_1 \cdot l_1 = C_2 \cdot l_2$$

При выполнении этих условий центробежные силы противовесов будут эквивалентны (статически) главному вектору $\vec{C}$ сил инерции, приведенных к т.О, лежащей непосредственно над динамической осью dd колебаний рамы станка.

После постановки противовесов G_1 и G_2 остается неуравновешенной пара сил инерции $M_{ин}$.

Затем выключается ось SS т.е. вал получает возможность под влиянием пары $M_{ин}$ колебаться вокруг динамической оси dd .

Эти колебания компенсируют при помощи двух новых временных противовесов G'_1 и G'_2 , установленных в тех же плоскостях, равных по величине и расположенных диаметрально противоположно относительно оси вращения детали.

Центробежные силы этих противовесов для отсутствия колебаний вокруг оси dd должны удовлетворять условиям:

$$G_1 \cdot l = G_2 \cdot l = M_{ин}$$

Затем временные противовесы G'_1 и G_1 объединяют в один противовес G_1 с центробежной силой C_1 и статическим моментом, равным геометрической сумме статических моментов составляющих противовесов, для чего

$$\vec{S}_{G1} = \vec{S}_{G1} + \vec{S}_{G1}'$$

Аналогично поступают и с противовесами G'_2 и G_2 в плоскости II

$$\vec{S}_{G2} = \vec{S}_{G2} + \vec{S}_{G2}'$$

В зависимости от соотношения масс и жесткостей системы станок может быть дорезонансным, резонансным и зарезонансным. В первом - частота вращения ротора при балансировке ниже наименьшей собственной частоты колебаний системы, состоящей из ротора и паразитной массы, во втором — частота вращения ротора при балансировке равна собственной частоте колебаний системы, в третьем — частота вращения ротора при балансировке выше наибольшей собственной частоты системы.

Дисбаланс измеряют с помощью специальных приборов, принцип действия которых основан, например, на электромагнитной, механической или иной другой компенсации колебаний. В частности, колебания рамы 4 (рис.9.6) устраняют, перемещая диск с грузом 16 с помощью винтовой пары 17.

Грузы 15 и 16 приводятся во вращение от двигателя 8 через червяк 11 и червячное колесо 14. Передаточное отношение этой пары равно единице. От двигателя 8 через вал 12 приводится во вращение также ротор 1. Поскольку грузы находятся в противофазе и вращаются с частотой вращения такой же, как у ротора 1, то они создают компенсирующий момент, фиксируемый по шкале 18. Фаза момента регулируется перемещением червяка 11 с помощью винтовой пары 10.

По шкалам 18 и 9 определяют величину корректирующей массы и ее положение. О колебаниях рамы судят с помощью прибора 13. Такое устройство используют в резонансных станках.

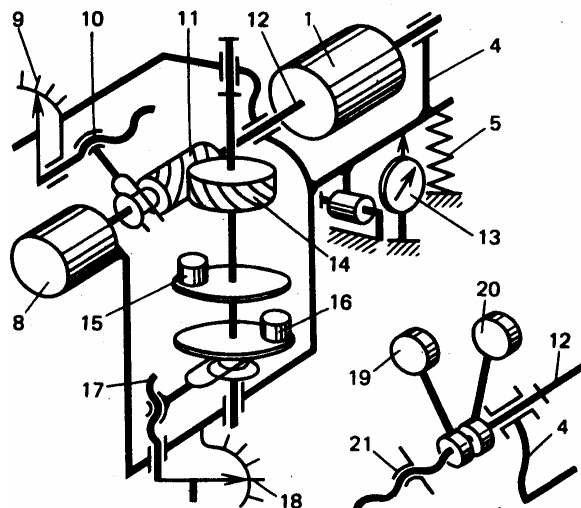


Рисунок 9.6 Виды устройств для измерения и устранения дисбаланса механизмов

Более простое устройство — балансировочная головка (рис.9.6) с самоустанавливающимися грузами 19 и 20. Грузы свободно установлены на валу ротора. При разгоне они зафиксированы гайкой 21. В зарезонансном режиме гайку отворачивают. Так как векторы силы и перемещения находятся в противофазе, то происходит уравнивание с помощью грузов 19 и 20. Затем грузы снова фиксируют гайкой, останавливают станок и по их положению судят о величине и расположении корректирующей массы.

Высокую точность балансировки можно обеспечить, используя лазерные устройства. Рассмотрим схему и принцип действия одного из таких устройств.

Неуравновешенный ротор 3 (рис.9.7), установленный в подвесе 2, разгоняют до частоты балансировки.

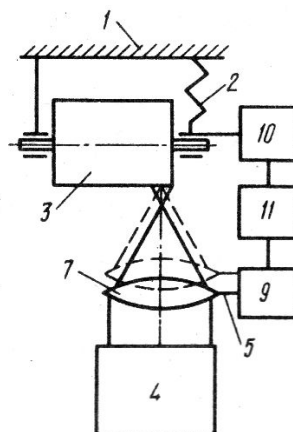


Рисунок 9.7 Схема лазерного устройства для балансировки роторов

Вращаясь, он вызывает переменные нагрузки в подвесе 2, воспринимаемые измерителем 10 дисбаланса, преобразующим их в электрический сигнал, пропорциональный величине и углу дисбаланса, который усиливается усилителем 11 и передается на вибровозбудитель 9. Последний соединен с объективом 7 оптической системы 5, вызывая его колебания с частотой вращения ротора 3. Вибровозбудитель 9 подбирают из условия обеспечения смещения ΔF объектива от расфокусированного положения до сфокусированного подбором длины или жесткости пружины 8.

На рис.9.8 объектив 7 оптической системы 5 показан в исходном (среднем) положении, когда луч лазера 4 не сфокусирован на поверхности ротора 3. При наличии дисбаланса вибровозбудитель 9 осуществляет перемещение объектива 7 оптической системы 5, а следовательно и его фокуса 14, перпендикулярно поверхности ротора 3 так, что его фокус 14 в верхнем крайнем положении совмещается с поверхностью балансируемого ротора 3. Так как фокус 14 объектива 7 оптической системы 5 колеблется синфазно с вращением ротора 3, то в момент этого совмещения ротор 3 повернут к фокусу 14 "тяжелым"

местом. Лазер включается в режиме непрерывной генерации импульсов, однако дисбаланс корректируется только при совмещенном положении.

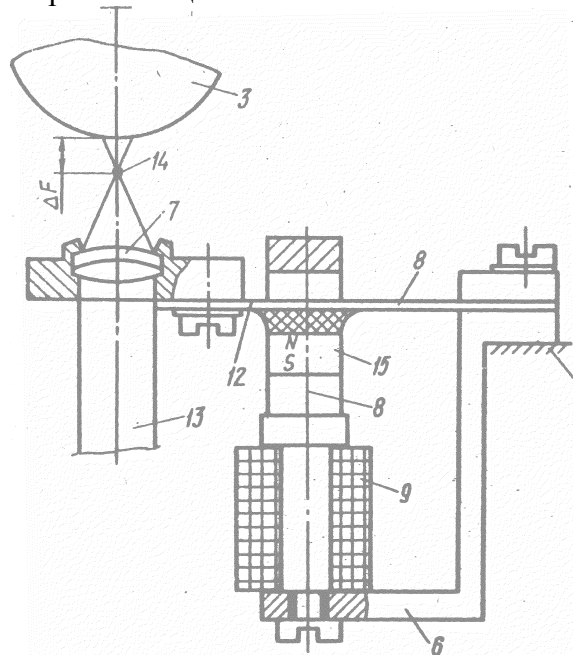


Рисунок 9.8 Принцип действия лазерного устройства для балансировки роторов

При уменьшении дисбаланса до минимального значения исчезают переменные нагрузки в подвесе 2, прекращаются колебания объектива 7, луч лазера 4 оказывается расфокусированным, и процесс балансировки прекращается.

Вопросы для самоконтроля

1. Что является задачей динамической балансировки?
2. Как проверить нуждается ли ротор в динамической балансировке?
3. Как осуществляется динамическая балансировка?
4. Какое минимальное количество плоскостей исправления необходимо для выполнения динамической балансировки?
5. Для каких деталей необходима динамическая балансировка?

9.2. Колебания, вызванные периодически изменяющимися силами

Рассмотрим механизм произвольного класса и порядка с несимметричными звеньями, у которого входное звено OA_1 вращается с некоторой номинальной скоростью ω_1 и находится под действием движущего момента $M_{дв}$ (рис.9.9). К выходному звену $A_{n-1}A_n$ механизма приложена сила $\bar{P}_{сп}$ полезного сопротивления

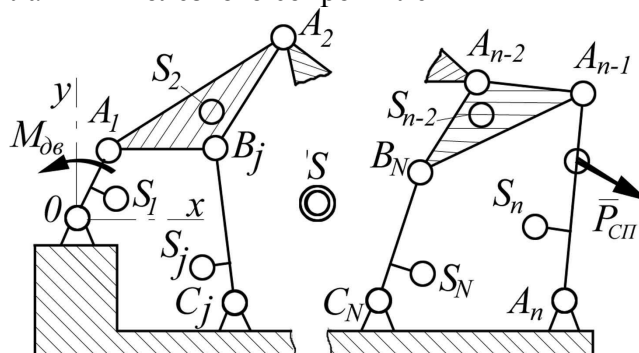


Рисунок 9.9 Механизм произвольного класса и порядка с несимметричными звеньями, у которого входное звено OA_1 вращается с некоторой номинальной скоростью ω_1 и находится под действием движущего момента $M_{дв}$

Пусть k звеньев механизма образуют кинематические пары со стойкой. Заменим действие стойки на k звеньев механизма силами реакций $\bar{R}_j$ ($j = 1, 2, \dots, k$).

Полученную систему подвижных звеньев механизма будем рассматривать как свободную, находящуюся под действием движущего момента $M_{дв}$ и сил $\bar{P}_{СП}$, $\bar{R}_j$ ($j = 1, 2, \dots, k$) и $\bar{G}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), где $\bar{G}_i$ – сила тяжести i -го звена, а n – число подвижных звеньев механизма (рис.9.10).

Центр S массы этой системы будет двигаться под действием сил $\bar{P}_{СП}$, $\bar{R}_j$ ($j = 1, 2, \dots, k$) и $\bar{G}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) как материальная точка, масса которой равна массе подвижных звеньев механизма:

$$m_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n m_i, \quad (9.6)$$

где m_i – масса i -го звена.

По второму закону Ньютона

$$m_{\Sigma} \bar{a}_S = \bar{P}_{СП} + \sum_{j=1}^k \bar{R}_j + \sum_{i=1}^n \bar{G}_i \quad (9.7)$$

Но по закону равенства действия и противодействия сила, приложенная к станине механизма, равна:

$$\bar{Q} = -\sum_{j=1}^k \bar{R}_j \quad (9.8)$$

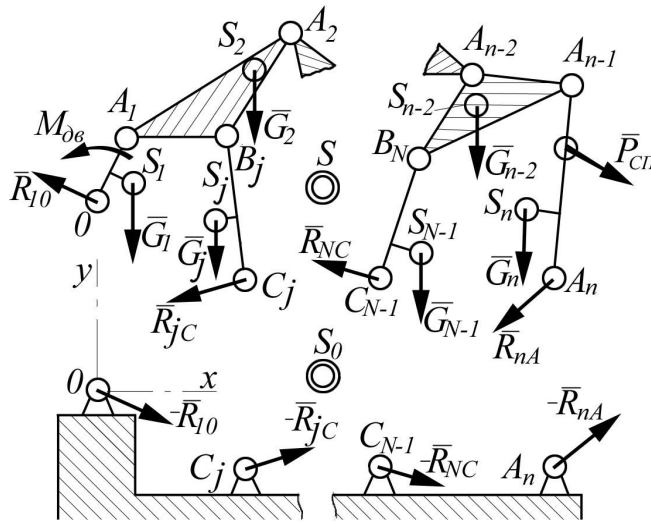


Рисунок 9.10 Свободная система подвижных звеньев механизма

Из выражений (9.7) и (9.8) получим

$$\bar{Q} = \bar{P}_{СП} + \sum_{i=1}^n \bar{G}_i - m_{\Sigma} \bar{a}_S \quad (9.9)$$

Таким образом, в общем случае неуравновешенная сила, действующая на станину механизма произвольного класса и порядка, равна геометрической сумме внешних сил, приложенных к звеньям механизма, и произведения со знаком минус массы m_{Σ} всех подвижных звеньев механизма на ускорение $\bar{a}_S$ центра масс всей системы.

Так как весь механизм состоит из n подвижных звеньев, то

$$m_{\Sigma} \bar{a}_S = \sum_{i=1}^n m_i \bar{a}_{Si}$$

где $\bar{a}_{Si}$ – вектор ускорения центра i -го звена;

m_i – масса i -го звена.

Формула (9.9) принимает вид:

$$\bar{Q} = \bar{P}_{СП} + \sum_{i=1}^n \bar{G}_i - \sum_{i=1}^n m_i \bar{a}_{Si} \quad (9.10)$$

Определим момент сил, действующих на станину механизма, используя теорему об изменении кинетического момента механической системы:

$$J_S \varepsilon = M_{ДВ} + M_S(\bar{P}_{СП}) + \sum_{i=1}^n M_S(\bar{G}_i) + \sum_{j=1}^k M_S(\bar{R}_j) \quad (9.11)$$

где J_S и ε – момент инерции и угловое ускорение подвижных звеньев кинематической цепи механизма относительно оси, проходящей через центр масс S , перпендикулярно к плоскости xOy ;

$M_S(\bar{P}_{СП})$, $M_S(\bar{G}_i)$, и $M_S(\bar{R}_j)$ – моменты сил $\bar{P}_{СП}$, $\bar{G}_i$, $\bar{R}_j$, относительно оси, проходящей через центр масс S системы.

По закону равенства действия и противодействия на станину механизма будет действовать момент опорных реакций относительно оси S :

$$M_{Q_S} = - \sum_{j=1}^k M_S(\bar{R}_j) \quad (9.12)$$

Из выражений (9.11) и (9.12) получим:

$$M_{Q_S} = M_{ДВ} + M_S(\bar{P}_{СП}) + \sum_{i=1}^n M_S(\bar{G}_i) - J_S \varepsilon \quad (9.13)$$

Последнее слагаемое выражения (9.13) можно представить в виде алгебраической суммы

$$J_S \varepsilon = \sum_{i=1}^n J_{Si} \varepsilon_i + \sum_{i=1}^n m_i a_{Si} q_{Si,S},$$

где J_{Si} и ε_i – момент инерции и угловое ускорение i -го подвижного звена механизма относительно оси, проходящей через его центр масс S_i , перпендикулярно к плоскости xOy ;

n – число подвижных звеньев механизма;

m_i и a_{Si} – масса i -го звена и ускорение его центра масс S_i ;

$q_{Si,S}$ – плечо вектора $m_i \bar{a}_{Si}$ относительно центра S массы m_S , принятого за центр приведения сил.

Формула (9.13) примет вид:

$$M_{Q_S} = M_{ДВ} + M_S(\bar{P}_{СП}) + \sum_{i=1}^n M_S(\bar{G}_i) - \sum_{i=1}^n J_{Si} \varepsilon_i - \sum_{i=1}^n m_i \bar{a}_{Si} q_{Si,S} \quad (9.14)$$

Таким образом, приходим к заключению: систему сил $\bar{R}_j$ ($j=1,2,...,k$), действующих в кинематических парах на станину механизма произвольного класса и порядка (рис.9.10), можно заменить главным вектором (9.10) и главным моментом (9.14) этих сил так, как показано на рис.9.11. При этом точка приведения S_0 принадлежит станине и совпадает в данный момент с центром S масс механической системы.

Сила Q и момент M_Q являются в общем случае переменными по величине и направлению. Поэтому они вызывают вынужденные колебания станины.

Вопросы для самоконтроля

1. Как определить в общем случае неуравновешенную силу, действующую на станину механизма?
2. Как определить неуравновешенный момент сил, действующий на станину механизма?
3. Что вызывают силы, возникающие при соударении колеса подвижного состава с

9.3. Колебания, вызванные периодическими изменениями перемещений тел механической системы

Изменения перемещений тел механической системы или линейные перегрузки относятся к кинематическим воздействиям, возникающим при ускоренном (замедленном) движении источника колебаний [10]. Особенно значительные линейные перегрузки возникают на транспортных машинах при увеличении скорости движения, торможении, а также при движении в кривых участках пути.

Влияние линейных перегрузок на колебания тел механической системы схематически рассмотрим на примере прямолинейного поступательного ускоренного движения вагона. Вдоль продольной оси вагона выполнен цилиндрический канал, внутри которого имеется закрепленный на пружине шарик массой $m = 0,08$ кг (рис.9.11). Длина недеформированной пружины $l_0 = 0,2$ м, жесткость пружины $c = 40$ Н/м. Коэффициент трения скольжения шарика по стенке канала примем равным 0. В начальный момент времени координата шарика относительно оси x составляет $x_0 = 0,4$ м, скорость шарика равна 0. Уравнение движения вагона $y_1 = 8t - t^3$. Выведем уравнение относительного движения шарика M .

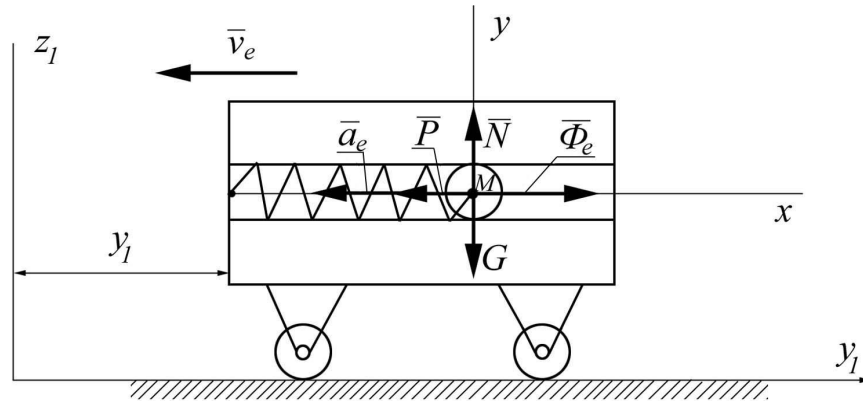


Рисунок 9.11 Прямолинейное поступательное ускоренное движение вагона

Действующие на шарик силы: вес $\bar{G}$ шарика, реакция $\bar{N}$ стенки канала, реакция пружины $\bar{P}$. Присоединяем к ним переносную силу инерции $\bar{\Phi}_e$, направленную противоположно ускорению $\bar{a}_e$.

Модуль силы инерции

$$\Phi_e = |ma_e| = 6mt$$

где a_e – переносное ускорение шарика M ,

$$a_e = \ddot{y}_1 = -6t$$

Основное уравнение относительного движения шарика M :

$$ma_r = \bar{G} + \bar{N} + \bar{P} + \bar{\Phi}_e \quad (9.17)$$

Дифференциальное уравнение движения шарика M вдоль оси x

$$m\ddot{x} = \Phi_e - P$$

$$m\ddot{x} = 6mt - c(x - l_0)$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}x = 6t + \frac{cl_0}{m}$$

(9.18)

Общее решение уравнения (9.18) имеет вид:

$$X = X_1 + X_2,$$

где X_1 – общее решение соответствующего однородного уравнения;

X_2 – частное решение уравнения (9.18).

Характеристическое уравнение и его корни:

$$\lambda^2 + \frac{c}{m} = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{c}{m}} = \pm i \sqrt{\frac{40}{0,08}} = \pm 22,36 i,$$

тогда

$$X_1 = C_1 \cdot \cos 22,36t + C_2 \cdot \sin 22,36t.$$

Частное решение имеем в виде:

$$X_2 = At + B$$

Уточняем числовые значения отношений в уравнении (9.18):

$$\frac{cl_0}{m} = \frac{40 \cdot 0,2}{0,08} = 100 \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

$$\frac{c}{m} = \frac{40}{0,08} = 500 \text{с}^{-2}$$

Уравнение (9.18) имеет вид:

$$500(At + B) = Gt + 100,$$

откуда $A = 0,012 \text{ м/с}$, $B = 0,2 \text{ м}$.

Частное решение уравнения (9.18):

$$X_2 = 0,012t + 0,2$$

Общее решение уравнения (9.18) примет вид:

$$X = C_1 \cdot \cos 22,36t + C_2 \cdot \sin 22,36t + 0,012t + 0,2$$

$$\dot{X} = -22,36C_1 \cdot \sin 22,36t + C_2 \cdot \cos 22,36t + 0,012$$

Постоянные C_1 и C_2 определяем по начальным условиям.

При $t = 0$, $x_0 = 0,4 \text{ м}$, $\dot{x}_0 = 0$:

$$x_0 = C_1 + 0,2,$$

$$0,4 = C_1 + 0,2,$$

откуда

$$C_1 = 0,2;$$

$$\dot{x}_0 = 22,36C_2 + 0,012,$$

$$0 = 22,36C_2 + 0,012,$$

откуда

$$C_2 = -5,4 \cdot 10^{-4}.$$

Уравнение относительного движения шарика M имеет вид:

$$X = 0,2 \cdot \cos 22,36t - 5,4 \cdot 10^{-4} \cdot \sin 22,36t + 0,012t + 0,2 \quad (9.19)$$

Таким образом, при ускоренном движении вагона шарик M непрерывно будет совершать гармонические колебания вдоль канала. Так как элементы конструкции рамы и кузова реального подвижного состава не являются абсолютно жесткими, то рассмотренный пример наглядно иллюстрирует колебательные процессы, происходящие при ускоренном движении транспортных средств.

Вопросы для самоконтроля

1. К какому виду воздействий на механическую систему относятся линейные перегрузки?

2. Почему при ускоренном движении вагона элементы конструкции кузова и рамы совершают гармонические колебания?

9.4. Колебания, вызванные периодическими изменениями инерционных характеристик механической системы

Периодические изменения сил, действующих на механическую систему, а также перемещений тел механической системы могут стать причиной изменения моментов инерции тел, образующих механическую систему. Изменение моментов инерции тел вызовут дополнительные вынужденные колебания механической системы. Математическое описание происходящих при этом процессов подробно рассмотрено в специальных курсах [10].

Для упрощенного понимания данного вопроса в начале рассмотрим собственные колебания кузова железнодорожного вагона относительно оси, перпендикулярной его боковой поверхности и проходящей через центр масс кузова. Такие колебания на транспорте называют галопированием [9].

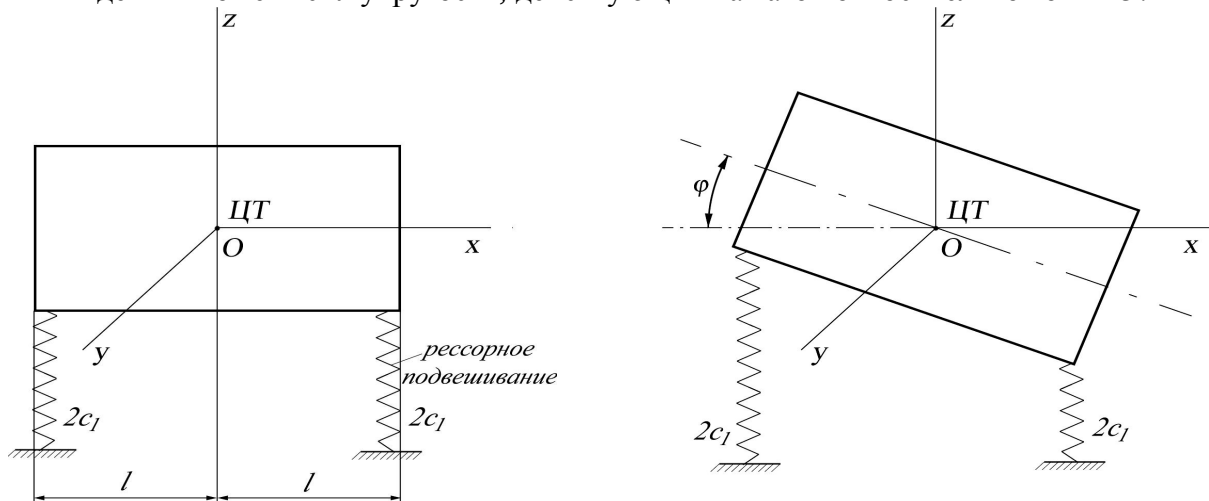
На рис.9.12, а изображена расчетная схема вагона в состоянии покоя. На рис. 9.12, б – в момент отклонения вагона на некоторый угол φ из положения равновесия.

Как известно из теоретической механики, момент сил инерции тела, вращающегося относительно оси y , равен $M_{iy} = -I_y \ddot{\varphi}$, где I_y – момент инерции тела (в данном случае кузова вагона) относительно оси y , а $\ddot{\varphi}$ – угловое ускорение вращения кузова вокруг этой же оси.

Используя принцип Даламбера, рассмотрим вагон в состоянии мгновенного равновесия:

$$I_y \ddot{\varphi} + M = 0, \quad (9.20)$$

где M – момент сил упругости, действующих на вагон относительно точки O .



а)

б)

Рисунок 9.12 Расчетная схема вагона в состоянии покоя (а) и в момент отклонения вагона на некоторый угол φ из положения равновесия (б)

Момент M образуется силами, возникающими в рессорном подвешивании.

Очевидно, что $M = 2c_1 z_1 l + 2c_1 z_2 l = 4c_1 l^2 \varphi$

Тогда $I_y \ddot{\varphi} + 4c_1 l^2 \varphi = 0$

$$\text{Обозначив } g_{\text{гал}}^2 = \frac{4c_1 l^2}{I_y} \quad (9.21)$$

получим дифференциальное уравнение собственных колебаний механической системы с одной степенью свободы:

$$\ddot{\varphi} + g_{\text{гал}}^2 \cdot \varphi = 0 \quad (9.22)$$

где $\vartheta_{гал}$ – угловая частота собственных колебаний галопирования кузова вагона

$$\vartheta_{гал} = \frac{2c_1^2 l}{I_1^2} \quad (9.23)$$

Из этой формулы следует, что чем меньше жесткость рессорного подвешивания c_1 , чем больше момент инерции кузова I_y , тем меньше частота собственных колебаний галопирования $\vartheta_{гал}$.

При перевозке сыпучих и особенно жидких грузов момент инерции кузова вагона I_y не является величиной постоянной, а представляет собой функцию угла поворота φ . Перепады величины I_y вызовут дополнительные колебания вагона относительно оси y .

Исследуем влияние момента инерции кузова на характер его вынужденных колебаний. Для этого рассмотрим движение двухосного вагона по абсолютно жесткому рельсовому пути, имеющему волнообразные неровности (рис. 9.13). Будем считать, что неровности пути по обоим рельсам одинаковые.

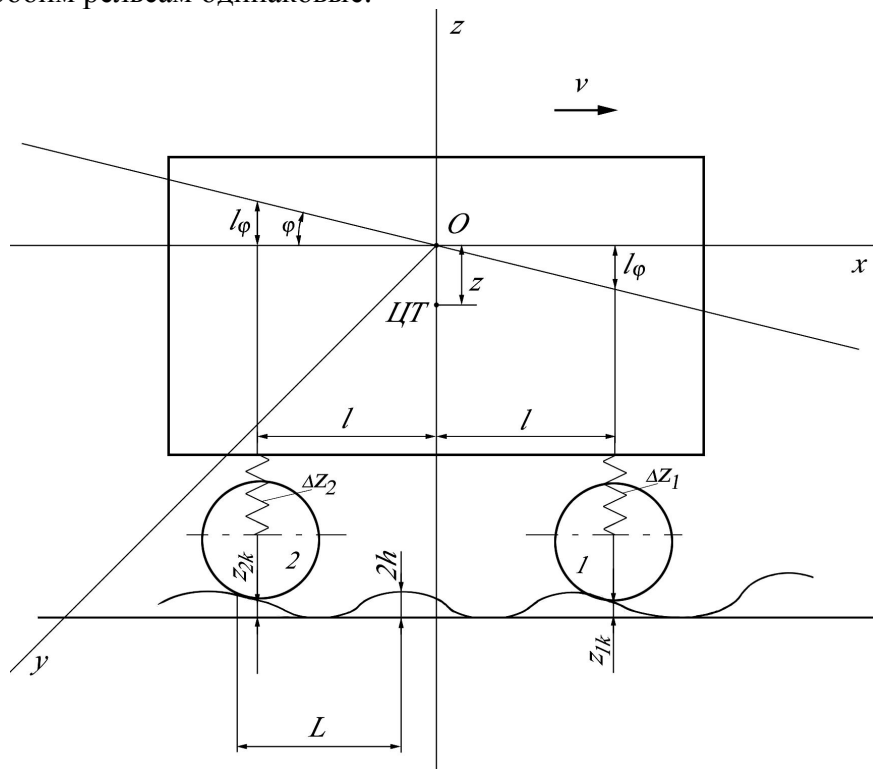


Рисунок 9.13 Движение двухосного вагона по абсолютно жесткому рельсовому пути, имеющему волнообразные неровности

Обозначим текущую ординату неровностей под первым колесом z_{1k} , а под вторым z_{2k} . Очевидно, что второе колесо проходит те же неровности, что и первое, но с опозданием, равным времени, пока вагон пройдет путь, соответствующий расстоянию между осями колесных пар $2l$, т.е.

$$z_{2k}(t) = z_{1k}\left(t - \frac{2l}{v}\right), \quad (9.24)$$

где v – скорость движения вагона.

Имеем систему с двумя степенями свободы. В каждый момент времени положение кузова вагона характеризуется двумя независимыми параметрами: линейной координатой z и углом поворота φ .

Деформации рессор у первого и второго колеса соответственно равны:

$$\left. \begin{aligned} \Delta z_1 &= z - l\varphi - z_{1k} \\ \Delta z_2 &= z + l\varphi - z_{2k} \end{aligned} \right\} \quad (9.25)$$

На основании принципа Даламбера, составим дифференциальное уравнение вынужденных колебаний кузова вагона вдоль оси z (колебания подпрыгивания):

$$m_1 \ddot{z} = 2c_1 (\Delta z_1 + \Delta z_2) = 0 \quad (9.26)$$

Подставляя сюда Δz_1 и Δz_2 из выражения (9.25), получим:

$$m_1 \ddot{z} = 2c_1 (\Delta z_1 + \Delta z_2) = 0 \quad (9.27)$$

Обозначим $\mathcal{G}_{подпр} = \frac{4c_1}{m_1}$, получим

$$\ddot{z} + \mathcal{G}_{подпр}^2 \cdot z = \frac{1}{2} \mathcal{G}_{подпр}^2 \left[z_{1k}(t) + z_{2k} \left(t - \frac{2l}{v} \right) \right], \quad (9.28)$$

где $\mathcal{G}_{подпр}$ – угловая частота собственных колебаний подпрыгивания.

Для получения дифференциального уравнения описывающего вынужденные колебания кузова вагона относительно оси y (галопирование), также воспользуемся принципом Даламбера:

$$I_y \ddot{\varphi} + \tilde{M} = 0, \quad (9.29)$$

где $\tilde{M}$ – момент сил упругости, приложенных к кузову вагона,

$$\tilde{M} = 2c_1 l \Delta z_1 - 2c_1 l \Delta z_2, \quad (9.30)$$

Учитывая выражения (9.25) и (9.30) получим

$$\tilde{M} = 4c_1 l^2 \varphi - 2c_1 l (z_{1k} - z_{2k}) \quad (9.31)$$

Подставляя значение в уравнение (9.29), получим

$$I_y \ddot{\varphi} + 4c_1 l^2 \varphi = 2c_1 l (z_{1k} - z_{2k}),$$

$$\text{или } \ddot{\varphi} + \mathcal{G}_{гал}^2 \cdot \varphi = \frac{1}{2} \mathcal{G}_{гал}^2 \left[z_{1k}(t) + z_{2k} \left(t - \frac{2l}{v} \right) \right], \quad (9.32)$$

Примем в качестве функции неровностей пути выражение вида

$$z_{1k} = h \cdot \cos \omega t, \quad (9.33)$$

где $2h$ – глубина неровности пути, измеренная между двумя горбами (рис.9.16)

ω – частота возмущающего фактора

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi \cdot v}{l_n}, \quad (9.34)$$

здесь l_n – расстояние между двумя соседними горбами неровностей,

T – время движения колес от одного горба неровностей до другого,

v – скорость движения вагона.

Подставляя выражение (9.33) в формулы (9.28) и (9.32) окончательно получим:

$$\ddot{z} + \mathcal{G}_{подпр}^2 \cdot z = \frac{1}{2} \mathcal{G}_{подпр}^2 \left[h \cos \omega t + h \cos \left[\omega \left(t - \frac{2l}{v} \right) \right] \right], \quad (9.35)$$

$$\ddot{\varphi} + \mathcal{G}_{гал}^2 \cdot \varphi = \frac{1}{2} \mathcal{G}_{гал}^2 \left[h \cos \omega t - h \cos \left[\omega \left(t - \frac{2l}{v} \right) \right] \right], \quad (9.36)$$

Выражения (9.35) и (9.36) представляют собой дифференциальные уравнения, из которых при заданных параметрах и заданных начальных условиях могут быть определены колебания подпрыгивания z и галопирования φ .

Анализ выражений (9.35), (9.36) показывает, что характер вынужденных колебаний кузова зависит от частот его собственных колебаний $\vartheta_{подпр}$, $\vartheta_{гал}$. Поскольку в выражение (9.36) входит величина $\vartheta_{гал}$, следовательно, изменение значений момента инерции I_y , при перевозке сыпучих и жидких грузов, будет оказывать существенное влияние на вынужденные колебания кузова вагона.

Вопросы для самоконтроля

1. Назовите колебания кузова вагона, возникающие при его движении по рельсовому пути, имеющему волнообразные неровности. В чем причина этих колебаний?
2. Почему при изучении вынужденных колебаний механической системы предварительно рассматривают ее собственные колебания?
3. Какие дополнительные колебания возникают при перевозке сыпучих и жидких грузов? Назовите причину этих колебаний.
4. Как влияет жесткость рессорного подвешивания на частоту собственных колебаний кузова вагона?
5. Как влияет положение центра тяжести вагона на частоту колебаний?
6. Влияет ли величина момента инерции вагона на частоту колебаний?

9.5. Анализ действия вибраций и основные виды виброзащиты

Колебания в машинах могут быть полезными, когда само действие машины основано на эффекте колебаний (вибрационные транспортеры, сита, виброударные машины для забивки свай и т.д.), но чаще они являются нежелательными, так как снижают надежность машин, вызывают шум и оказывают вредное влияние на организм человека.

Действие вибраций на механическую систему рассмотрим на модели, изображающей движение массы m , упруго подвешенной на колесе, которое катится по жесткому пути, имеющему неровности косинусоидальной формы (рис.9.14) [9]. Очевидно, что система будет совершать вынужденные колебания [10].

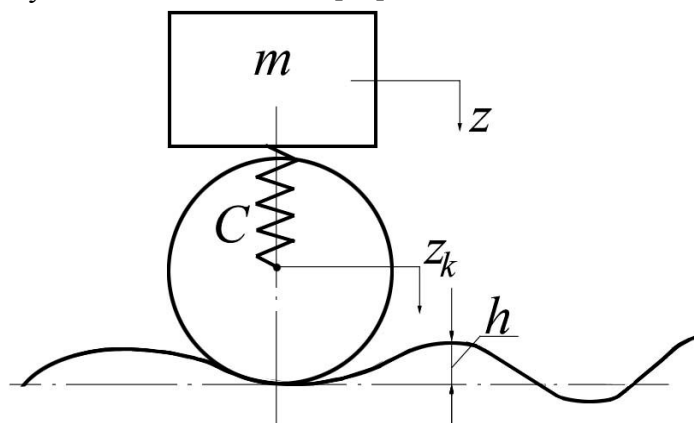


Рисунок 9.14 Движение массы m на колесе по жесткому пути, имеющему неровности косинусоидальной формы

В этой системе силы инерции массы m , т.е. $m\ddot{z}$, уравниваются силами, возникающими при деформации рессоры $(z - z_k)$, т.е. силой $c(z - z_k)$.

Следовательно, $m\ddot{z} + c(z - z_k) = 0$.

Если $z_k = h \cos \omega t$, то

$$m\ddot{z} + cz = ch \cos \omega t. \quad (9.37)$$

Поделив все члены этого уравнения на m , получим

$$\ddot{z} + \nu^2 z = \nu^2 h \cos \omega t \quad (9.38)$$

где $\nu^2 = \frac{c}{m}$ – круговая частота свободных колебаний системы.

Общее решение этого уравнения с правой частью (неоднородного) можно представить как сумму решения однородного уравнения z_1 и частного решения неоднородного уравнения z_2 , т.е. $z = z_1 + z_2$.

Найдем вначале частное решение уравнения. Представим, что

$$z_2 = A_2 \cos \omega t \quad (9.39)$$

и подставим его в уравнение (9.38). В результате получим

$$-A_2 \omega^2 \cos \omega t + \nu^2 A_2 \cos \omega t = \nu^2 h \cos \omega t.$$

Откуда

$$A_2 = \frac{\nu^2 h}{\nu^2 - \omega^2}, \quad \text{т.е.} \quad z_2 = \frac{\nu^2 h}{\nu^2 - \omega^2} \cos \omega t.$$

Решение однородного уравнения можно, как известно, представить в виде:

$$z_1 = A_1 \cos \nu t$$

Тогда общее решение уравнения (9.38) представляется как

$$z = \frac{\nu^2 h}{\nu^2 - \omega^2} \cos \omega t + A_1 \cos \nu t. \quad (9.40)$$

Начало отсчета времени ($t = 0$) в этой системе можно принять для такого момента, когда $z=0$. В таком случае, подставляя в (9.40) $t=0$ и $z=0$, получим

$$\frac{\nu^2 h}{\nu^2 - \omega^2} \cos \omega t + A_1 = 0.$$

Следовательно,

$$A_1 = -\frac{\nu^2 h}{\nu^2 - \omega^2}.$$

Подставляя A_1 в (9.40), получим

$$z = \frac{\nu^2 h}{\nu^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \nu t). \quad (9.41)$$

Величину $\frac{1}{\nu^2 - \omega^2} = x$ называют **коэффициентом нарастания колебаний**. Приняв

это обозначение, уравнение (9.41) запишется

$$z = x h \nu^2 (\cos \omega t - \cos \nu t). \quad (9.42)$$

Это и будет общим решением нашего уравнения при принятых выше начальных условиях.

Исследуем поведение колебательной системы в том случае, когда частота возмущений ω приближается к частоте собственных колебаний ν .

Для удобства дальнейшего анализа формулу (9.41) представим в следующем виде:

$$z = \frac{\nu^2 h}{(\nu - \omega)(\nu + \omega)} (\cos \omega t - \cos \nu t) = \frac{2\nu^2 h}{(\nu - \omega)(\nu + \omega)} \sin \frac{\nu + \omega}{2} t \sin \frac{\nu - \omega}{2} t.$$

Обозначая $\nu - \omega = 2\varepsilon$, подставим это выражение в предыдущую формулу и, полагая, что $\nu \rightarrow \omega$, получим

$$z = \frac{h\nu^2}{\varepsilon(\nu + \omega)} \sin \frac{\omega + \nu}{2} t \sin \varepsilon t = \frac{h\omega^2}{2\varepsilon\omega} \sin \omega t \sin \varepsilon t$$

или $z = \frac{h\omega}{2\varepsilon} \sin \omega t \cdot \sin \varepsilon t \quad (9.43)$

Поскольку ε малая величина, то ее период T_1 весьма велик и значительно больше периода T_2 , определяемого частотой возмущений за счет неровностей ω .

Это позволяет рассматривать такие колебания (при близких ω и ν), как колебания с

частотой ω и с переменной амплитудой, равной $\frac{h\omega}{2\varepsilon} \sin \varepsilon t$. Такие колебания называют **биением** (рис.9.15) с периодом $T_1 = \frac{2\pi}{\varepsilon}$. С приближением ω к ν период T_1 увеличивается. При точном совпадении величин ν и ω наступает явление **резонанса**.

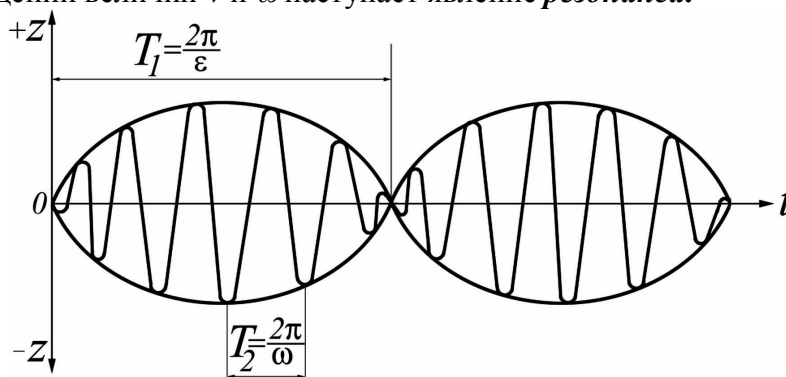


Рисунок 9.15 Биения

Когда ν станет равным ω , можно принять $\sin \varepsilon t = \varepsilon t$. В таком случае

$$z = \frac{h\omega}{2} t \cdot \sin \varepsilon t \quad (9.44)$$

График таких колебаний представлен на рис.9.16. Он показывает, как развиваются колебания при резонансе. Совершенно очевидно, что при резонансе амплитуда колебаний возрастает прямо пропорционально времени t .

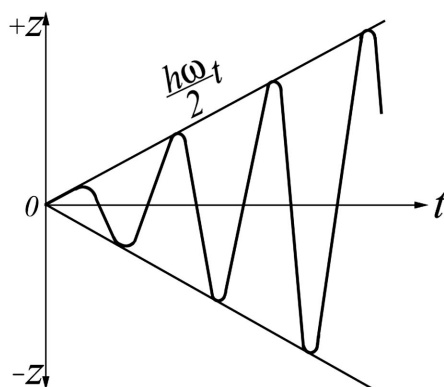


Рисунок 9.16 Колебания при резонансе

За каждый период $T = \frac{2\pi}{\omega}$ колебаний амплитуда возрастает на величину

$$\Delta z = \frac{h\omega}{2} T = \frac{h\omega}{2} \frac{2\pi}{\omega} = \pi h \quad (9.45)$$

Рассмотренный пример наглядно иллюстрирует колебательные процессы, возникающие при движении транспортных средств по периодическим неровностям пути. В ряде случаев колебания бывают такими, что езда становится некомфортальной или не обеспечивается сохранность перевозимых грузов.

Уменьшение интенсивности колебаний объекта виброзащиты может быть достигнуто следующими способами [3].

1. Уменьшение виброактивности источника колебаний с помощью статического или динамического уравнивания механизмов, а также уравнивания роторов.

2. Изменение конструкции объекта: установка гасителей колебаний (демпферов) и виброизоляторов. Этот способ виброзащиты имеет достаточно широкое распространение в современных машинах. Подробнее об этом способе изложено в следующем подразделе.

Теоретические вопросы, связанные с балансировкой роторов, нами были рассмотрены ранее. Условием уравнивания механизма является постоянство главного век-

тора F и главного момента M сил давления стойки на фундамент при заданном движении входных звеньев. Исключить полностью неуравновешенные силы конструктивно бывает довольно сложно или вообще неосуществимо. Поэтому обычно ограничиваются равенством нулю лишь главного вектора сил инерции масс механизма. Такое уравнивание называется *статическим*.

Статическое уравнивание означает такое распределение масс звеньев, при котором центр масс механизма переходит в точку, неподвижную относительно стойки. Достигается это методом заменяющих масс. Суть этого метода заключается в том, что масса каждого звена условно разносится по двум точкам, а затем выполняется подбор необходимых противовесов [1, 3, 5, 8]. Для шарнирного четырехзвенника (рис.9.17) массу звена 2 заменяем массами $m_{B_2} = \frac{m_2 l_{CS_2}}{l_{BC}}$, $m_{C_2} = m_2 - m_{B_2}$, приложенными в центрах

шарниров B и C . Уравновесить силы инерции звеньев 1 и 3 можно, установив противовесы m_E и m_K . Массы противовесов найдем из условий:

$$m_E \cdot l_{AE} = m_1 \cdot l_{AS_1} + m_{B_2} \cdot l_{AB} \cdot \quad (9.46)$$

$$m_K \cdot l_{DK} = m_3 \cdot l_{DS_3} + m_{C_2} \cdot l_{DC} \cdot \quad (9.47)$$

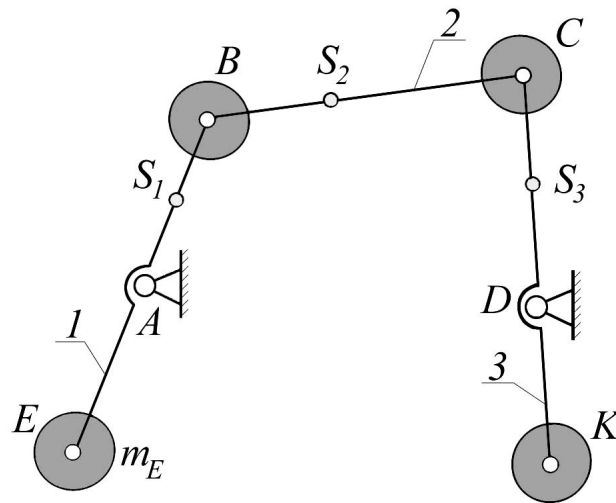


Рисунок 9.17 Статическое уравнивание шарнирного четырехзвенника

Для статического уравнивания кривошипно-ползунного механизма необходимо его центр масс совместить с точкой A – центром вращения кривошипа (рис.9.18). Это достигается с помощью двух противовесов, один из которых устанавливается на продолжении шатуна, а другой на продолжении кривошипа.

Массу первого звена разносят по точкам A и B :

$$m_1 = m_{A1} + m_{B1} \cdot \quad (9.48)$$

Массу второго звена разносят по точкам B и C :

$$m_2 = m_{B2} + m_{C2} \cdot \quad (9.49)$$

Массу третьего звена сосредоточим в точке C .

Тогда в центрах шарниров A , B , C будут сосредоточены массы:

$$m_A = m_{A1}; \quad (9.50)$$

$$m_B = m_{B1} + m_{B2}; \quad (9.51)$$

$$m_C = m_3 + m_{C2} \cdot \quad (9.52)$$

Если на продолжении звена 2 поставить противовес массой m_{K2} на расстоянии l_{K2} от точки B , то центр масс звеньев 2 и 3 переместится в точку B , при этом

$$m_{K2} \cdot l_{K2} = m_C \cdot l_{BC} \cdot \quad (9.53)$$

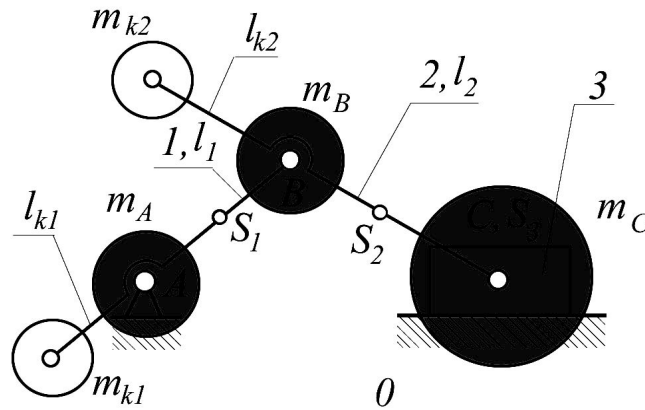


Рисунок 9.18 Статическое уравнивание кривошипно-ползунного механизма

Задаемся величиной l_{K2} и получим корректирующую массу

$$m_{K2} = \frac{m_C \cdot l_{BC}}{l_{K2}} = \frac{(m_{C2} + m_3) \cdot l_{BC}}{l_{K2}}. \quad (9.40)$$

Уравниваем сосредоточенные массы, приложенные к звеньям 2 и 3. В точку B, центр масс группы 2-3, прикладываем условную массу:

$$m_B = m_2 + m_{K2} + m_3 + m_{B1}. \quad (9.54)$$

Составляем уравнение статических моментов относительно точки A:

$$m_{K1} \cdot l_{K1} = m_B \cdot l_{AB}. \quad (9.55)$$

Задаемся величиной l_{K1} и получаем корректирующую массу:

$$m_{K1} = \frac{m_B \cdot l_{AB}}{l_{K1}} = \frac{(m_2 + m_{K2} + m_3 + m_{B1}) \cdot l_{AB}}{l_{K1}}. \quad (9.56)$$

Вопросы для самоконтроля

1. Раскройте полезные и вредные свойства вибраций.
2. В чем состоит явление резонанса и его опасность для механизмов и машин?
3. Какими способами достигается уменьшение интенсивности колебаний объекта виброзащиты?
4. Какой механизм называется уравновешенным? Цель уравнивания механизмов?

9.6. Демпфирование колебаний. Способы гашения колебаний

Термин **демпфирование** происходит от немецкого слова Dämpfer – глушитель и в современном понимании означает принудительное гашение колебаний либо уменьшение их амплитуды до допустимых пределов. Принудительное гашение колебаний (демпфирование) входит в комплекс действий, направленных на уменьшение интенсивности колебательного процесса объекта виброзащиты. Демпфирование, обычно применяется в тех случаях, когда уравнивание механизмов и роторов не приносит желаемых результатов или когда колебания возникают вследствие других причин. Для принудительного гашения колебаний в современных машинах используются следующие технические средства: гасители колебаний (демпферы) и виброизоляторы. Остановимся на каждом из них в отдельности.

Демпфер (гаситель колебаний) – устройство для успокоения или предотвращения вредных механических колебаний звеньев машин и механизмов путем поглощения энергии.

Демпфер, обеспечивающий затухание колебаний, которые возникают при переходе

подвижной части механизма из одного положения в другое, называется **успокоителем**.

В качестве средств поглощения энергии колебаний используют удары тел (рис.9.19, *а, б*), сухое трение (рис.9.19, *в*), трение жидкости или газа при истечении их через специальные каналы (рис.9.19, *г, д*), электромагнитную индукцию (рис.9.19, *е*).

В представленных схемах механическая энергия в основном преобразуется в тепловую.

На рис.9.19, *а* шарик 1 помещен в закрытом гнезде звена 2. При колебаниях звена 2 шарик ударяется о стенки гнезда.

На рис.9.19, *б* кольцо 1 установлено с зазором на звене 2. При колебаниях звена 2 кольцо 1 ударяется по поверхности звена 2.

На рис.9.19, *в* звено 2 в виде вала имеет диск 4, прижимаемый к неподвижному звену. При вращательных (крутильных) колебаниях звена 2 диск 4 трется по поверхности неподвижного звена.

На рис.9.19, *г* при колебаниях штока 2 с поршнем, помещенным в неподвижный цилиндр 6, жидкость перетекает через канал 5 поочередно из одной полости в другую.

На рис.9.19, *д* при колебаниях массы 2, установленной на упругом сильфоне 9, воздух перетекает из внутреннего пространства сильфона в свободное пространство и наоборот. Сечение канала 8 для перетекания воздуха может регулироваться с помощью винта 7.

На рис.9.19, *е* диск 11 при вращательных колебаниях вала 2 пересекает магнитные силовые линии поля, созданного магнитом 10. При этом образуются вихревые токи, поглощающие энергию колебаний.

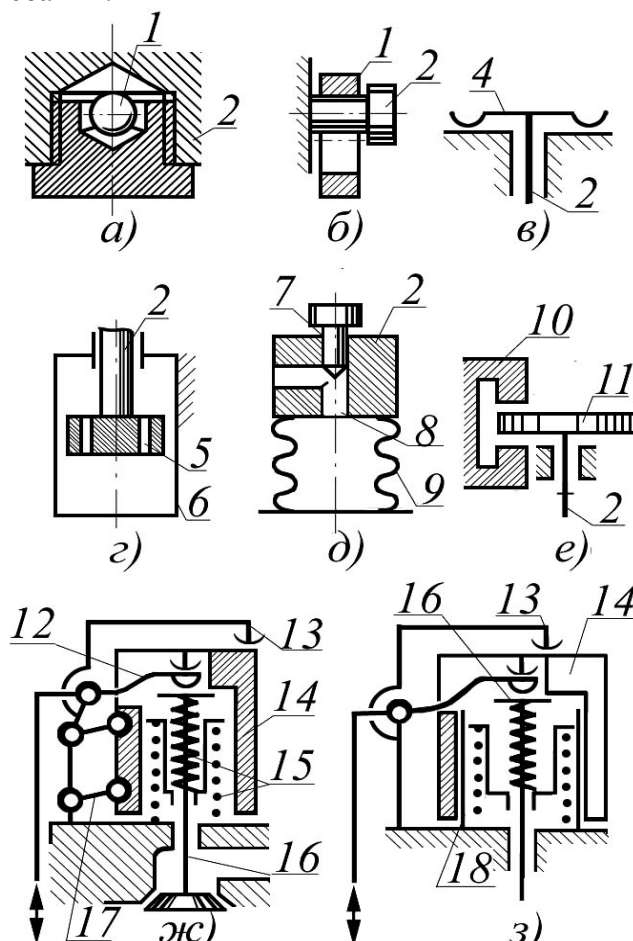


Рисунок 9.19 Виды демпферов

На рис.9.19, *ж, з* представлены исполнения инерционно-ударного демпферов в клапанном механизме двигателя внутреннего сгорания. Движение клапану 16 передается от распределительного механизма посредством коромысла 12. При движении клапана 16 вниз сжимаются пружины 15, а звено 14 опускается вниз. При движении коромысла, ос-

вобождающем пружины, клапан с ускорением движется вверх. Масса звена 14 вследствие инерции приводит к более медленному нарастанию ускорения и смягчению удара клапана по поверхности седла. Энергия, переданная звену 14, обуславливает его дальнейшее движение (после закрытия клапана) и удар о корпус 13. Звено 14 на рис.9.19, *ж* подвешено к корпусу 13 посредством параллелограмма 17, на рис.9.19, *з* звено 14 установлено так, что может поступательно перемещаться на втулке 18.

Гасители колебаний применяются в случаях, когда необходимо быстро уменьшить амплитуду колебаний в механической системе.

Выбор типа гасителя определяется характеристиками колебательной системы и ее конструкцией. Наибольшее смягчение ударов и гашение колебаний обеспечивают гидравлические и фрикционные гасители колебаний. Этим объясняется их широкое применение в автомобильном транспорте.

Рассмотрим принцип образования сил сопротивления во фрикционных и гидравлических гасителях колебаний.

Во фрикционных гасителях колебаний сила сопротивления создается за счет трения каких-либо элементов гасителя. Такого типа гасители могут создавать или постоянную, или переменную величину сил трения, зависящую от величины и направления перемещения. У фрикционных гасителей сила трения всегда направлена в сторону, обратную скорости перемещения. Таким образом, если сила трения равна F_{mp} , то сопротивление гасителя $F_{zac} = -F_{mp} \operatorname{sign} \dot{z}$, где $\dot{z}$ – величина скорости перемещения, а sign – обозначение знака $\dot{z}$. Если скорость $\dot{z}$ положительна, то $\operatorname{sign} \dot{z} = +1$, и наоборот, если скорость $\dot{z}$ отрицательна, то $\operatorname{sign} \dot{z} = -1$. Таким образом, при положительном направлении скорости перемещения $F_{zac} = -F_{mp}$, а при отрицательном $F_{zac} = +F_{mp}$.

Фрикционные гасители могут создавать силу сопротивления колебаниям постоянной величины вне зависимости от того, в каком направлении происходят перемещения (например, вверх или вниз).

В этом случае, как и было написано выше,

$$F_{zac} = -F_{mp} \operatorname{sign} \dot{z} . \quad (9.57)$$

Имеются гасители, которые создают некоторую постоянную величину сопротивления при движении в одном направлении F_B и также постоянную, но другую величину F_H при движении в другом направлении.

Наиболее распространены гасители с переменными силами сопротивления, у которых сила трения пропорциональна перемещениям, т.е.

$$F_{mp} = -k_1 z \operatorname{sign} \dot{z} , \quad (9.58)$$

где z – величина перемещения от положения равновесия колебательной системы;

k_1 – коэффициент пропорциональности, зависящий от конструкции гасителя.

Обычно:

$$k_1 = k \varphi c , \quad (9.59)$$

где φ – коэффициент относительного трения фрикционных гасителей колебания;

c – жесткость упругого элемента, параллельно которому присоединен гаситель;

k – коэффициент пропорциональности, показывающий, какую долю усилия при сжатии рессоры на единицу перемещения гаситель преобразует в нормальные давления между трущимися элементами.

Особую группу конструкций гасителей составляют *гидравлические* гасители. У них сопротивление пропорционально скорости перемещения элементов гасителя, т.е.

$$F_{zac} = -\beta \cdot \dot{z} , \quad (9.60)$$

где β – коэффициент сопротивления вязкого трения гидравлических гасителей.

Могут быть гидравлические гасители, у которых сопротивление пропорционально квадрату скорости перемещения, т.е.

$$F_{zac} = -\beta(\dot{z})^2 \operatorname{sign} \dot{z} . \quad (9.61)$$

Виброизоляция основана на разделении исходной системы на две части и в соединении этих частей посредством виброизоляторов. Одна из частей является *защищаемым объектом*, а другая – *источником возбуждения*. Во многих случаях масса одной части существенно превышает массу другой части. Тогда движение тела «большой» массы может считаться независимым от движения тела «малой» массы. Тело «большой» массы называют *основанием* независимо от того, является ли оно защищаемым объектом или источником возбуждения.

В простейшем случае источник возбуждения и защищаемый объект считаются твердыми телами, движущимися вдоль одной и той же оси. На рис.9.20, *а* показана динамическая модель машины, установленной на фундаменте. Машина с общей массой m является источником возбуждения, а фундамент – защищаемым объектом. Масса фундамента существенно больше массы машины, и потому он считается основанием. Виброизолятор, помещенный между машиной и фундаментом (основанием), имеет приведенный коэффициент жесткости c и приведенный коэффициент сопротивления b .

Приведенный коэффициент жесткости c определяется из условия равенства потенциальной энергии виброизолятора и эквивалентной пружины и, в общем случае, может быть нелинейной функцией перемещения y , отсчитываемого от положения равновесия, определяемого постоянной составляющей внешней силы $F(t)$. Приведенный коэффициент сопротивления b определяется из условия равенства работ, затрачиваемых на трение в виброisolаторе и в эквивалентном демпфере, и в общем случае также может быть нелинейной функцией перемещения y и скорости $\dot{y}$.

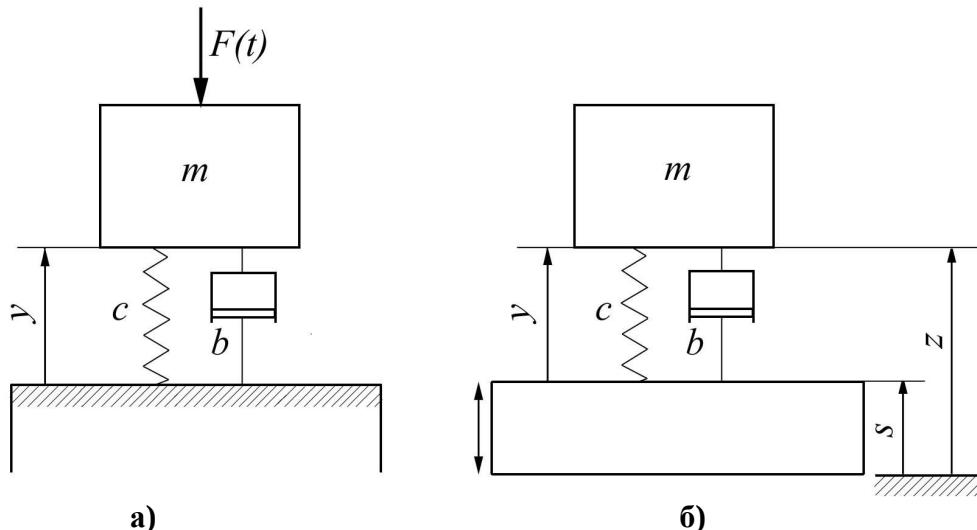


Рисунок 9.20 Разные случаи виброизоляции машин на фундаменте

Обобщенная (приведенная) реакция виброизолятора Q и внешняя сила $F(t)$ направлена вдоль одной и той же оси, совпадающей с направлением перемещения y , и потому виброизолятор называется *одноосным*.

Уравнение движения источника возбуждения, рассматриваемого как твердое тело, при указанных предположениях имеет вид:

$$m\ddot{y} = F(t) + Q(y, \dot{y}). \quad (9.62)$$

Назначение виброизолятора в этом случае состоит в уменьшении динамической (переменной) составляющей реакции Q , передаваемой на основание (фундамент) при заданном воздействии переменной силы $F(t)$.

На рис.9.20, *б* показан другой случай, при котором защищаемый объект представлен как твердое тело с массой m , а источником возбуждения является основание, совершающее колебания по закону $s(t)$. Задача виброизоляции здесь состоит в уменьшении динамической составляющей Q , передаваемой на защищаемый объект.

Уравнение движения защищаемого объекта (механизма или машины) как твердого тела при колебаниях основания имеет вид:

$$m[\ddot{y} + s(t)] = Q(y, \dot{y}), \text{ или } m\ddot{y} = -m\ddot{s}(t) + Q(y, \dot{y}). \quad (9.63)$$

Виброзащитные системы, показанные на рис.9.20, различают по виду возбуждения колебаний. В первом случае (рис.9.20, а) колебания вызываются переменной силой $F(t)$, и возбуждение колебаний называется *силовым*. Во втором случае (рис.9.20, б) колебания вызываются перемещением основания по заданному закону движения, и возбуждение колебаний называется *кинематическим*. Уравнение движения (9.63) при кинематическом возбуждении совпадает с уравнением (9.62) при силовом возбуждении, если принять $F(t) = m\ddot{s}$.

Вопросы для самоконтроля

1. Что означает термин «демпфирование»?
2. Какие технические средства используются для принудительного гашения колебаний?
3. Каково назначение и принцип работы основных типов гасителей колебаний?
4. Что такое виброизоляция? Основные задачи виброизоляции?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теория механизмов и машин как дисциплина, формирующая теоретические основы конструирования и эксплуатации механических устройств, начиная с 60-х и до 90-х годов в учебных планах подготовки инженеров по механическим, электротехническим и другим специальностям была представлена достаточно большими объемами учебных часов.

Это было следствием продвижения теории механизмов и машин как науки и прежде всего нашими известными российскими и советскими учеными. Подтверждение этому – ряд фундаментальных учебников [1,2,3,4,5], выпущенных для студентов университетов и институтов, которые переиздаются и в настоящее время.

Однако в 90-х годах число учебных часов, отводимых на изучение этой важной дисциплины, резко упало даже на механических специальностях практически в 2, а то и в 3 раза. Это поставило перед преподавателями вузов серьезные проблемы полноценной подготовки студентов в условиях сокращения объема курсов и учитывая относительную сложность предмета изучения.

В настоящих условиях в ряде вузов, ведущих подготовку инженеров, отдельные разделы теории механизмов и машин включаются в другие дисциплины, например, в основы конструирования и детали машин, триботехнику и т.д., а также в дисциплины по специализации, что в некоторой степени позволяет компенсировать недостаточность краткого общего курса дисциплины. Второй путь, используемый для повышения уровня подготовки – это изучение основ теории механизмов и машин со значительным уклоном на специализацию инженерной подготовки. Отсюда появление книг и учебных пособий, которые ориентируются на учебные программы конкретных специальностей, возможности материально – технической базы лабораторий и уровень подготовки студентов.

В конспект лекций включены как основные теоретические разделы в классическом виде, так и разделы в форме, предполагающей дополнительную помощь студенту по выполнению расчетно – графических и курсовых работ.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Базовый учебник

1. Теория механизмов и машин: Учебник для втузов Фролов К.В., Попов С.А., Мусатов А.К. и др./под редакцией Фролова К.В. – М.: МГТУ им. Баумана, 2002. – 496с.

Использованная и рекомендуемая литература

2. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин.- М.: Наука, 1988. – 638с.
3. Левитский Н.И. Теории механизмов и машин: Учебное пособие для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 592с.
4. Теория механизмов и машин. Учебное пособие для вузов./ Белоконев И.М., Балан С.А., Белоконев К.И.. – М.: Дрофа, 2004. – 172с.
5. Безвесельный Е.С. Вопросы и задачи по теории механизмов и машин. – Киев: Вища школа, 1977. – 400с.
6. Артоболевский И.И., Эдельштейн Б.В. Сборник задач по теории механизмов и машин. – М: Наука, 1973. – 256с.
7. Щепетильников В.А. Уравновешивание механизмов. – М.: Машиностроение, 1982. – 256с.
8. Крайнев А.Ф. Словарь – справочник по механизмам. – М.: Машиностроение, 1981. – 438с.
9. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. Учебник для втузов. – СПб.: «Лань», 2001.- 762с.
10. Яблонский А.А., Норейка С.С. Курс теории колебаний. Учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1966. – 255с.